

138 道 同构 练习题

1. 已知函数 $f(x) = ae^x \ln x (a \neq 0)$, 若 $\forall x \in (0, 1)$, $f(x) < x^2 + x \ln a$, 求 a 的取值范围.

解析: 由 $x^2 + x \ln a > ae^x \ln x \Rightarrow \frac{x + \ln a}{ae^x} > \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln(ae^x)}{ae^x}$ 对 $\forall x \in (0, 1)$ 恒成立.

构造 $h(x) = \frac{\ln x}{x}, x \in (0, 1)$, $h(x)$ 单增,

所以: $x < ae^x \Rightarrow a > \frac{x}{e^x} \Rightarrow a > \left[\frac{x}{e^x}\right]_{\max}$, 因为 $x \in (0, 1) \therefore a \geq \frac{1}{e}$

2. 已知 $f(x) = e^x - a \ln x$, 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) > a \ln a$ 恒成立, 求正实数 a 的取值范围.

解析: $e^x - a \ln x > a \ln a \Rightarrow e^{x - \ln a} - \ln x > \ln a$

$\Rightarrow e^{x - \ln a} + x - \ln x > x + \ln x = e^{\ln x} + \ln x$ 构造 $g(x) = e^x + x$, 单增,

所以: $x - \ln a > \ln x \Rightarrow \ln a < x - \ln x \Rightarrow \ln a < [x - \ln x]_{\min} = x - (x - 1) = 1$

3. 设实数 $\lambda > 0$, 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $e^{\lambda x} - \frac{\ln x}{\lambda} \geq 0$ 恒成立, 则 λ 的取值范围是 ().

解: $e^{\lambda x} - \frac{\ln x}{\lambda} \geq 0 \Rightarrow \lambda x e^{\lambda x} \geq x \ln x = \ln x e^{\ln x}$, 即 $\lambda x \geq \ln x$ 恒成立, $\lambda \geq \left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max} = \frac{1}{e}$,

4. 已知 $e^x - 1 \geq \frac{\ln x + a}{x}$ 恒成立, 则实数 a 的最大值为 ().

答案: 1

5. 设实数 $m > 0$, 若对任意的 $x \geq e$, 若不等式 $x^2 \ln x - m e^{\frac{m}{x}} \geq 0$ 恒成立, 则 m 的最大值为 ().

解: $x^2 \ln x - m e^{\frac{m}{x}} \geq 0 \Rightarrow x^2 \ln x \geq m e^{\frac{m}{x}} \Rightarrow x \ln x \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} \Rightarrow e^{\ln x} \ln x \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} \Rightarrow \frac{m}{x} \leq \ln x$,

得 $m \leq (x \ln x)_{\min} = e$ (注意定义域).

6. 对任意的 $x \in (1, +\infty)$, 不等式 $2x^3 \ln x - me^{\frac{m}{x}} \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的最大值 .

解: 由题意得 $2x^3 \ln x \geq me^{\frac{m}{x}} \Rightarrow x^2 \ln x^2 \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} \Rightarrow e^{\ln x^2} \ln x^2 \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}}$,

$$\text{即 } \ln x^2 \geq \frac{m}{x}, \Rightarrow m \leq (x \cdot \ln x^2)_{\min} = -\frac{2}{e}.$$

7. 已知函数 $f(x) = m \cdot \ln(x+1) - 3x - 3$, 若不等式 $f(x) > mx - 3e^x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ().

解: 由题意得: $m \ln(x+1) - 3x - 3 > mx - 3e^x \Rightarrow 3(e^x - x - 1) > mx - m \ln(x+1)$,

$$\text{右边凑 } 1, \text{ 得 } 3(e^x - x - 1) > m(x+1 - \ln(x+1) - 1) \Rightarrow 3(e^x - x - 1) > m(e^{\ln(x+1)} - \ln(x+1) - 1)$$

得 $m \leq 3$. (说明: 定义域大于零, 所以 $x > \ln(x+1)$, $m=3$ 成立).

8. 对 $\forall x > 0$, 不等式 $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 ____ .

解: 由题意得: $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0 \Rightarrow 2ae^{2x} \geq \ln x - \ln a = \ln \frac{x}{a}$

$$\Rightarrow 2xe^{2x} \geq \frac{x}{a} \ln \frac{x}{a} = \ln \frac{x}{a} e^{\ln \frac{x}{a}} \Rightarrow 2x \geq \ln \frac{x}{a} \Rightarrow a \geq \left(\frac{x}{e^{2x}}\right)_{\min} = \frac{1}{2e}$$

9. 若 $x \in (0, +\infty)$, $\frac{e^{x-1}}{x} \geq x - \ln x + a$ 恒成立, 则 a 的最大值 (C)

- A. 1 B. $\frac{1}{e}$ C. 0 D. $-e$

解析: $e^{x-\ln x-1} \geq x - \ln x + a \Rightarrow e^{x-\ln x-1} \geq x - \ln x - 1 + 1 + a \Rightarrow a \leq 0$

10. 已知关于 x 的不等式 $\frac{e^x}{x^3} - x - a \ln x \geq 1$ 对于任意的 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围 (B)

- A. $(-\infty, 1-e]$ B. $(-\infty, -3]$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, 2-e^2]$

解析: $\frac{e^x}{x^3} - x - a \ln x \geq 1 \Rightarrow e^{x+\ln x-3} \geq x + \ln x^{-3} + 1 = x - 3 \ln x + 1 \geq x + a \ln x + 1$.

$$\therefore -3 \ln x \geq a \ln x, \because x > 1 \therefore a \leq -3$$

11. 已知不等式 $x + a \ln x + \frac{1}{e^x} \geq x^a$, 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 ()

- A. $-\sqrt{e}$ B. $-\frac{e}{2}$ C. $-e$ D. $-2e$

解析: $x + \ln x + e^{-x} \geq x^\alpha \Rightarrow x + e^{-x} \geq -\ln x + x^\alpha = -\ln x^\alpha + e^{-(\ln x^\alpha)}$

$$\text{令 } g(x) = x + e^{-x} \Rightarrow g'(x) = 1 - e^{-x} \Rightarrow g(x) \geq g(-\ln x^\alpha)$$

$$\Rightarrow x \geq -\ln x^\alpha \Rightarrow \alpha \geq -\frac{x}{\ln x}, (x > 1) \Rightarrow \alpha \geq -e$$

12. 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 恒有 $a(e^{ax} + 1) \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln x$, 求实数 a 的最小值 .

解: 由题意得: $ax \cdot e^{ax} + ax \geq 2x^2 \ln x + 2 \ln x = x^2 \ln x^2 + \ln x^2$

$$\text{即 } ax \cdot e^{ax} + ax \geq \ln x^2 \cdot e^{\ln x^2} + \ln x^2,$$

$$\text{得 } ax \geq \ln x^2 \Rightarrow a \geq \left(\frac{2 \ln x}{x}\right)_{\max} = \frac{2}{e}.$$

13. 已知 x_0 是方程 $2x^2 e^{2x} + \ln x = 0$ 的实根, 则关于实数 x_0 的判断正确的是 () .

- A. $x_0 \geq \ln 2$ B. $x_0 < \frac{1}{e}$ C. $2x_0 + \ln x_0 = 0$ D. $2e^{x_0} + \ln x_0 = 0$

解析: $2x^2 e^{2x} + \ln x = 0 \Rightarrow 2xe^{2x} = -\frac{1}{x} \ln x = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} = \ln \frac{1}{x} e^{\ln \frac{1}{x}}$

$$\Rightarrow 2x = \ln \frac{1}{x} \Rightarrow 2x_0 + \ln x_0 = 0$$

14. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+1)$, $g(x) = e^x - x - 1$, 若 $g(x) \geq kf(x)$ 对 $\forall x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

解析: 由题意得: $e^x - x - 1 \geq k[x - \ln(x+1)]$

$$\text{右边式子凑 1 得 } e^x - x - 1 \geq k[x+1 - \ln(x+1) - 1]$$

$$\text{即 } e^x - x - 1 \geq k[e^{\ln(x+1)} - \ln(x+1) - 1], \text{ 因为 } x \geq \ln(x+1)$$

当且仅当 $x=0$ 等号成立, 所以满足 $k \leq 1$ 即可

当且仅当 $e^x - x - 1 = 1$, 即 $x=0$ 等号成立, 所以 $k \leq 1$.

15. 已知函数 $f(x) = x \cdot e^{x+1}$, $g(x) = k \cdot \ln x + k(x+1)$. 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 其中 $k > 0$, 若 $h(x) \geq 0$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

解析: 由题意得: $x \cdot e^{x+1} > k(\ln x + x + 1) \Rightarrow e^{\ln x + x + 1} > k(\ln x + x + 1)$

$$\text{因为 } e^{\ln x + x + 1} \geq k(\ln x + x + 1), \text{ 当且仅当 } x=1 \text{ 时等号成立}$$

$$\text{因为 } e^x \geq ex, \text{ 所以等价于证: } e(\ln x + x + 1) \geq k(\ln x + x + 1)$$

当且仅当 $x=1$ 时等号成立, 所以 $k \leq e$.

16. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数. 证明: $f(x) < 2e^{x-2}$

解析: 由题意得: $x \ln x < 2e^{x-2}$, 因为 $\ln x \leq \frac{x}{e}$ (当且仅当 $x=e$ 时等号成立)

$$\text{等价于证明 } x \cdot \frac{x}{e} \leq 2e^{x-2} \Rightarrow \frac{x^2}{e^x} \leq 2e^{-1}, \text{ 构造 } g(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}, \text{ 易知 } g(x)_{\max} = g(2) = 2e^{-1}$$

17. 若函数 $f(x) = x(e^{2x} - a) - \ln x - 1$ 无零点, 则整数 a 的最大值是 ()

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

解析: $f(x) = x(e^{2x} - a) - \ln x - 1 > 0$

$$\Rightarrow e^{2x+\ln x} - ax - \ln x - 1 \geq 2x + \ln x + 1 - ax - \ln x - 1 = (2-a)x > 0$$

$$\Rightarrow a < 2 \therefore a = 1$$

18. 已知 $f(x) = \ln x + ax - a$. 若 $g(x) = e^{x-1} - f(x)$ 的最小值为 M , 求证 $M \leq 1$.

解析: 构造 $f(x) = e^x - (x+1)$, 则 $f(x) > 0$

$$\text{则 } f(x-1) + f(\ln x) = e^{x-1} - x + x - \ln x - 1,$$

$$g(x) = e^{x-1} - \ln x - a(x+1) = f(x-1) + f(\ln x) - a(x-1) + 1$$

$$(f(x-1) + f(\ln x))_{\min} = 0, \quad g'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} - a$$

$g'(1) = -a$, 接下来分类讨论:

1. 当 $a = 0$, 则 $g(x)_{\min} = 1$, 成立;

2. 当 $a > 0$, 则 $g'(1) = -a < 0$, 得 $g(x)_{\min} \leq g(1) = 1$, 成立;

3. 当 $a < 0$, 则 $g'(1) = -a > 0$, 得 $g(x)_{\min} \leq g(1) = 1$;

19. 已知函数 $f(x) = a \ln x + be^{x-1} - (a+2)x + a$. (a, b 为常数) 若 $b = 2$, 若对任意的

$x \in [1, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

解析: 由题意得: $a \ln x + 2e^{x-1} - (a+2)x + a \geq 0 (x \geq 1)$

$$\text{即 } a \ln x - (a+2)x + a \geq -2e^{x-1} \Rightarrow a \ln x - ax - 2x + a \geq -2e^{x-1},$$

$$\Rightarrow a(\ln x - x + 1) \geq 2(-e^{x-1} + x)$$

$$\text{右边凑 1, 得 } a(\ln x - x + 1) \geq 2(x - 1 - e^{x-1} + 1) \Rightarrow$$

$$a(e^{\ln(\ln x)} - e^{\ln x} + 1) \geq 2(e^{\ln(x-1)} - e^{x-1} + 1),$$

构造 $g(x) = e^{\ln x} - e^x + 1$, 则 $g(x) < 0$, 即 $a \cdot g(\ln x) \geq 2 \cdot g(x-1)$

当且仅当 $x=1$ 时取等号, 所以只需满足 $a \leq 2$.

20. 若 $\frac{1+\ln x}{x} \leq a + e^{-ax}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【解析】 $\frac{1+\ln x}{x} \leq a + e^{-ax} \Leftrightarrow 1 + \ln x \leq ax + xe^{-ax} \Leftrightarrow xe^{-ax} \geq \ln x - ax + 1$

而 $xe^{-ax} = e^{(\ln x - ax)} \geq \ln x - ax + 1$, 故 $a \in \mathbf{R}$

21. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - ax, x \in (0, +\infty)$, 当 $x_2 > x_1$ 时, 不等式 $\frac{f(x_1)}{x_2} < \frac{f(x_2)}{x_1}$ 恒成立, 则实

数 a 的取值范围为 (D)

A. $(-\infty, e]$ B. $(-\infty, e)$ C. $(-\infty, \frac{e}{2})$ D. $(-\infty, \frac{e}{2}]$

22. 设函数 $f(x) = xe^x - a(x + \ln x)$, 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围 ()

A. $[0, e]$ B. $[0, 1]$ C. $(-\infty, e]$ D. $[e, +\infty)$

解析: 同构思想: $e^{x+\ln x} \geq a(x + \ln x) \because e^x \geq ex \therefore a \in [0, e]$

23. (2020 成都二诊) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = x \cdot e^{-x}$, 若存在 $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in \mathbf{R}$,

使得 $f(x_1) = g(x_2) = k (k < 0)$ 成立, 则 $(\frac{x_2}{x_1})^2 \cdot e^k$ 的最大值为 ()

A. e^2 B. e C. $\frac{4}{e^2}$ D. $\frac{1}{e^2}$

解析: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = x \cdot e^{-x} \Rightarrow \frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{x_2}{e^{x_2}} = k < 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln e^{x_2}}{e^{x_2}} = k < 0$

构造 $F(x) = \frac{\ln x}{x}$, 做出图像: 因为 $k < 0$ 容易知道: $0 < x_1 < 1, 0 < e^{x_2} < 1$

又因为 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增

所以: $x_1 = e^{x_2} \Rightarrow x_2 = \ln x_1 \Rightarrow (\frac{x_2}{x_1})^2 \cdot e^k = k^2 e^k \Rightarrow [k^2 e^k]_{\max} = \frac{4}{e^2}$

24. (重庆渝中区模拟) 若关于 x 的不等式 $x + a \ln x + \frac{1}{e^x} \geq x^a (a < 0)$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 恒

成立, 则实数 a 的最小值是 () .

解析 1: $x + e^{-x} \geq x^a - a \ln x = e^{(-\ln x^a)} - \ln x^a$, 令 $g(x) = x + e^{-x}$, 因为单增

$$\text{所以: } x \geq -\ln x^a \Rightarrow -a \leq \left[\frac{x}{\ln x}\right]_{\min} \Rightarrow a \geq -e. \text{ 答案: } -e$$

解析 2: $x + e^{-x} \geq x^a - a \ln x \Rightarrow -\ln e^{-x} + e^{-x} > x^a - \ln x^a$

构造 $g(x) = x - \ln x$, 因为单增。所以 $e^{-x} > x^a \Rightarrow a \geq -e$.

25. (名校联考) 已知对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $k(e^{kx} + 1) - (1 + \frac{1}{x}) \ln x > 0$, 则实数 k 的取值范围是_____.

解析: $k(e^{kx} + 1) - (1 + \frac{1}{x}) \ln x > 0 \Rightarrow ke^{kx} + k > (1 + \frac{1}{x}) \ln x$

$$\Rightarrow kxe^{kx} + kx > \ln xe^{\ln x} + \ln x$$

构造函数: $g(x) = xe^x + x$, 容易知道 $g(x)$ 单增

$$\therefore kx > \ln x \Rightarrow k > \left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max} = \frac{1}{e}$$

26. 对任意 $x > 0$, 不等式 $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 ()

解析: $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0 \Rightarrow 2xe^{2x} \geq \frac{x}{a} \ln \frac{x}{a} = \ln \frac{x}{a} e^{\ln \frac{x}{a}}$

令 $g(x) = xe^x$, 在 $x > 0$, 单增

所以: $2x \geq \ln \frac{x}{a}$, 即 $2x \geq \ln x - \ln a, \ln a \geq \ln x - 2x$

$$\therefore \ln a \geq [\ln x - 2x]_{\max} = \ln \frac{1}{2e} \therefore a \geq \frac{1}{2e}$$

27. 若函数 $f(x) = x(e^{2x} - a) - \ln x - 1$ 无零点, 则整数 a 的最大值是 ()

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

解析: $x(e^{2x} - a) - \ln x - 1 > 0 \Rightarrow e^{\ln x + 2x} - ax - \ln x - 1 > 0$

$$\therefore e^{\ln x + 2x} - \ln x - 2x - 1 + \ln x + 2x + 1 - ax - \ln x - 1 > 0$$

$$\Rightarrow e^{\ln x + 2x} - \ln x - 2x - 1 + (2 - a)x > 0$$

$$\therefore [e^{\ln x + 2x} - \ln x - 2x - 1]_{\geq 0} + (2 - a)x > 0$$

$$\therefore x > 0 \Rightarrow 2 - a > 0 \Rightarrow a < 2 \therefore a = 1$$

28. 若 $x > 0$ 时, 恒有 $x^2 e^{3x} - (k + 3)x - 2 \ln x - 1 \geq 0$ 成立, 则实数 k 的取值范围是_____.

解析: $x^2 e^{3x} - (k+3)x - 2\ln x - 1 \geq 0$

$$e^{2\ln x + 3x} - (2\ln x + 3x) - 1 + (2\ln x + 3x) + 1 - (k+3)x - 2\ln x - 1 \geq 0$$

$$\therefore e^{2\ln x + 3x} - (2\ln x + 3x) - 1 - kx \geq 0$$

$$\therefore [e^{2\ln x + 3x} - (2\ln x + 3x) - 1]_{\geq 0} - kx \geq 0, \therefore x > 0 \therefore k \leq 0$$

29. (2019•衡水金卷) 已知 $a < 0$, 不等式 $x^{a+1} \cdot e^x + a\ln x \geq 0$ 对任意的实数 $x > 1$ 恒成立, 则实数 a 的最小值是 ()

A. $-\frac{1}{2e}$ B. $-2e$ C. $-\frac{1}{e}$ D. $-e$

解析: $x^{a+1} \cdot e^x + a\ln x \geq 0 \Rightarrow xe^x \geq \frac{1}{x^a} \ln \frac{1}{x^a} = e^{\ln \frac{1}{x^a}} \ln \frac{1}{x^a}$

令 $g(x) = xe^x$ 单增函数, $x \geq -a\ln x \Rightarrow -a \leq \left[\frac{1}{\ln x}\right]_{\min} = e \Rightarrow a \geq -e$

30. (2019 武汉调研, 2020 安徽六安一中模考) 已知函数 $f(x) = e^x - a\ln(ax-a) + a (a > 0)$, 若关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(0, e]$ B. $(0, e^2)$ C. $[1, e^2]$ D. $(1, e^2)$

解法一: $f(x) = e^x - a\ln(ax-a) + a (a > 0)$

$$\therefore e^x > a\ln[a(x-1)] - a \Rightarrow e^{x-\ln a} > \ln a + \ln(x-1) - 1$$

$$\therefore e^{x-\ln a} + x - \ln a > \ln a + \ln(x-1) - 1 + x - \ln a$$

$$= \ln(x-1) - 1 + x = e^{\ln(x-1)} + \ln(x-1), \text{令 } g(x) = e^x + x, \text{单增}$$

$$\therefore x - \ln a > \ln(x-1) \Rightarrow \ln a < x - \ln(x-1)$$

$$\Rightarrow \ln a < [x - \ln(x-1)]_{\geq 2} \Rightarrow \ln a < 2 \Rightarrow a < e^2$$

解法二: $e^x - a\ln[a(x-1)] + a > 0, (x > 1)$

$$\Rightarrow (x-1)e^x > a(x-1)\ln[a(x-1)] - a(x-1)$$

$$\Rightarrow (x-1)e^x > (\ln[a(x-1)] - 1) \cdot a(x-1)$$

$$\Rightarrow (x-1)e^x > (\ln[a(x-1)] - 1) \cdot e^{\ln[a(x-1)]}$$

构造 $g(t) = (t-1)e^t \therefore g(x) > g(\ln[a(x-1)])$, 因为 $g(t)$ 单增,

$$\therefore x > \ln[a(x-1)] \Rightarrow \ln a < x - \ln(x-1), \text{所以 } a \leq e^2$$

$$\Rightarrow \ln a < [x - \ln(x-1)]_{\min} = 2$$

31. 已知 x_0 是函数 $f(x) = x^2 e^{x-2} + \ln x - 2$ 的零点, 则 $e^{2-x_0} + \ln x_0$ 为 ()

解析: $x^2 e^{x-2} + \ln x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 e^{x-2} = 2 - \ln x$

$$\Rightarrow x^2 e^x = e^2 \ln \frac{e^2}{x} \Rightarrow x e^x = \frac{e^2}{x} \ln \frac{e^2}{x} \Rightarrow x e^x = \ln \frac{e^2}{x} e^{\ln \frac{e^2}{x}}$$

令 $g(x) = x e^x$ 可知 $x > 0$, $g(x)$ 单增, 所以

$$x = \ln \frac{e^2}{x} = 2 - \ln x \therefore x_0 = 2 - \ln x_0 \Rightarrow e^{2-x_0} = x_0 \Rightarrow e^{2-x_0} + \ln x_0 = x_0 + \ln x_0 = 2$$

32. 对任意的实数 $x > 0$, 不等式 $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 ()

- A. $\frac{2}{\sqrt{e}}$ B. $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ C. $\frac{2}{e}$ D. $\frac{1}{2e}$

解析: $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0 \Rightarrow 2ae^{2x} \geq \ln \frac{x}{a}$

$$\therefore 2xe^{2x} \geq \ln \frac{x}{a} \cdot e^{\ln \frac{x}{a}} \Rightarrow 2x \geq \ln \frac{x}{a}$$

$$\text{因为 } \ln x \leq \frac{1}{e} x \therefore \ln \frac{x}{a} \leq \frac{1}{ae} x \therefore \frac{1}{ae} x \leq 2x \Rightarrow a \geq \frac{1}{2e};$$

33. 已知函数 $f(x) = \frac{ex^2}{1 + \ln x}$, 则不等式 $f(x) > e^x$ 得解集为 ()

- A. $(0,1)$ B. $(\frac{1}{e}, 1)$ C. $(1, e)$ D. $(1, +\infty)$

解析: $\frac{ex^2}{1 + \ln x} > e^x \Rightarrow \frac{ex}{1 + \ln x} > \frac{e^x}{x} \Rightarrow \frac{e^{1+\ln x}}{1 + \ln x} > \frac{e^x}{x}$

$$\text{构造 } g(x) = \frac{e^x}{x}, (x > \frac{1}{e})$$

$g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减, $(1, +\infty)$ 单调递增

① 当 $x \in (\frac{1}{e}, 1)$ 时, $1 + \ln x < 1$, $g(x)$ 递减

$$\therefore 1 + \ln x < x \Rightarrow x - 1 > \ln x \Rightarrow x > 0 \quad \text{所以取交集: } x \in (\frac{1}{e}, 1)$$

② 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 + \ln x > 1$, $g(x)$ 递增

$$\therefore 1 + \ln x > x \Rightarrow x - 1 < \ln x \Rightarrow x \in \emptyset \quad \text{所以取交集: } x \text{ 无解.}$$

34. 已知函数 $f(x) = x - \ln x$

① 求函数 $f(x)$ 的单调性

② 当 $x > \frac{1}{e}$, 证明: $\frac{e^x + \ln x + 1}{x} \geq e + 1$

③ 若不等式 $x + a \ln x + \frac{1}{e^x} \geq x^a$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的最小值

解析: ① $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单减, $(1, +\infty)$ 单增。

② 要证: $\frac{e^x + \ln x + 1}{x} \geq e + 1$

即证: $e^x + \ln ex \geq ex + x \Rightarrow e^x - x \geq ex - \ln ex \Rightarrow e^x - \ln e^x \geq ex - \ln ex$

又 $\because e^x \geq ex > 1$ 由 (1) 可得: $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单增, 故 $f(e^x) \geq f(ex)$

故原不等式成立。

③ $x + a \ln x + \frac{1}{e^x} \geq x^a \Rightarrow \frac{1}{e^x} + x \geq x^a - a \ln x \Rightarrow e^{-x} - \ln e^{-x} \geq x^a - a \ln x$

$\Rightarrow e^{-x} - \ln e^{-x} \geq x^a - \ln x^a \Rightarrow f(e^{-x}) \geq f(x^a)$

又因为 $0 < e^{-x} < 1$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单减

$\therefore e^{-x} \leq x^a \Rightarrow a \geq \left[-\frac{x}{\ln x} \right]_{\max} = -e$.

35. 不等式 $x^{-3}e^x - a \ln x \geq x + 1$ 对任意 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 (D)

A. $(-\infty, 1 - e]$ B. $(-\infty, 2 - e^2]$ C. $(-\infty, -2]$ D. $(-\infty, -3]$

解析: $e^{x-3 \ln x} - a \ln x \geq x + 1$

$\Rightarrow e^{x-3 \ln x} - (x - 3 \ln x) - 1 \geq a \ln x + 3 \ln x = (a + 3) \ln x$

$[e^{x-3 \ln x} - (x - 3 \ln x) - 1]_{\geq 0} \geq (a + 3)[\ln x]_{> 0} \Rightarrow a + 3 \leq 0 \Rightarrow a \leq -3$

36. 已知不等式 $e^x - x - 1 > m[x - \ln(x + 1)]$ 对一切正数 x 都成立, 则实数 m 的取值范围是 (C)

A. $(-\infty, \frac{e}{3}]$ B. $(-\infty, \frac{e}{2}]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, e]$

解析: 设 $h(x) = e^x - x - 1$, $h(x)$ 恒增, $h(x) > mh(\ln(x + 1))$

$\because x \geq \ln(x + 1)$ $x = 0$ 取等号, $\therefore m \leq 1$ 。

37. 若不等式 $mxe^{mx^2} \geq \ln x$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{1}{e^2}, +\infty)$ B. $[\frac{1}{2e}, +\infty)$ C. $[\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$

解析: ①. 当 $m \leq 0$, 显然不成立.

②. $m > 0$ 时, $mxe^{mx^2} \geq \ln x$.

(i) 当 $x \in (0, 1)$ 时, 显然成立

(ii) 当 $x \in (1, +\infty)$, $mxe^{mx^2} \geq \ln x$,

$$mxe^{mx^2} \geq \ln x \Rightarrow mx^2 e^{mx^2} \geq x \ln x = \ln x e^{\ln x}$$

构造函数 $h(x) = xe^x$, 在 $x \in (1, +\infty)$ $h(x)$ 单增

$$mx^2 \geq \ln x \Rightarrow m \geq \left[\frac{\ln x}{x^2} \right]_{\max} = \frac{1}{2e}$$

38. 设 $m > 0$, 若任给 $x > 0$ 都有 $e^{mx} \geq \frac{\ln x}{m}$ 成立, 则实数 m 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{e}$ B. $\frac{1}{2e}$ C. $\frac{2}{e}$ D. $\frac{e}{3}$

解析: 原不等式等价于 $me^{mx} \geq \ln x$, 两边乘以 x 得 $mxe^{mx} \geq x \ln x$

设 $f(x) = xe^x$, 上述不等式等价于 $f(mx) \geq f(\ln x)$ 由于 $f(x)$ 是增函数

所以转化为 $mx \geq \ln x$ 恒成立即: $m \geq \frac{\ln x}{x}$ 恒成立,

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 求导可知 $g(x)_{\max} = \frac{1}{e}$, 所以 $m \geq \frac{1}{e}$

39. 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $2e^{2x} - a \ln a - a \ln x \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的最大值为 ()

- A. $\sqrt{e}$ B. e C. $2e$ D. e^2

解析: 同构: $2xe^{2x} \geq ax \ln ax = \ln ax \cdot e^{\ln ax}$

又因为 xe^x 在 $(0, +\infty)$ 单增, $\therefore 2x \geq \ln ax \Rightarrow a \leq \left[\frac{e^{2x}}{x} \right]_{\min} = 2e$

40. 已知对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $k(e^{kx} + 1) - (1 + \frac{1}{x}) \ln x > 0$, 则实数 k 的取值范围为_____.

解析: 对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $k(e^{kx} + 1) - (1 + \frac{1}{x}) \ln x > 0$

可得 $kx(e^{kx} + 1) > (1+x) \ln x$, 即 $(1+e^{kx}) \ln e^{kx} > (1+x) \ln x$,

可设 $f(x) = (1+x) \ln x$, 可得上式即为 $f(e^{kx}) > f(x)$

由 $f'(x) = \ln x + \frac{1+x}{x}$, 令 $h(x) = f'(x)$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$,

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 则 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值

且为最小值 2, 则 $f'(x) > 0$ 恒成立, 可得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

则 $e^{kx} > x$ 恒成立, 即有 $k > \frac{\ln x}{x}$ 恒成立, 可设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减

当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

可得 $g(x)$ 在 $x=e$ 处取得极大值, 且为最大值 $\frac{1}{e}$, 则 $k > \frac{1}{e}$

即 k 的取值范围是 $(\frac{1}{e}, +\infty)$. 故答案为: $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

41 函数 $f(x) = \frac{ax}{e^{x-1}} + x - \ln(ax) - 2 (a > 0)$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内存在零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $(0, e]$ D. $[3, +\infty)$

解析: $f(x) = e^{\ln ax + 1 - x} + x - \ln ax - 2 = e^{\ln ax + 1 - x} - (\ln ax + 1 - x) - 1 \geq 0$

当 $\ln ax + 1 - x = 0 \Rightarrow \ln ax = x - 1 \leq ax - 1$, 即 $a \geq 1$

42. 已知函数 $f(x) = \ln x - e^x + (e^a - 1)x + a (a \in R)$, 若不等式 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 ()

解析: 不等式即: $xe^a + a + \ln x \leq e^x + x$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立,

等价于: $e^{a + \ln x} + a + \ln x \leq e^x + x$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立

构造函数: $\varphi(x) = e^x + x$, 知在 R 上单增, 所以

$\varphi(a + \ln x) \leq \varphi(x) \Rightarrow a + \ln x \leq x \Rightarrow a \leq x - \ln x$

$\Rightarrow a \leq [x - \ln x]_{\max} = 1 \Rightarrow a \leq 1$

43. 已知函数 $\frac{e^x}{x^a} - e + 1 \geq x - a \ln x$, $a \in R$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ()

解析: $\frac{e^x}{e^{\ln x^a}} + \ln x^a - x \geq e - 1$

$$e^{x - \ln x^a} - (x - \ln x^a) \geq e^1 - 1$$

$$g(x) = e^x - x$$

$$g'(x) = e^x - 1 > 0$$

所以, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减

$$\Rightarrow x - \ln x^a \geq 1$$

对 $\forall x > 0$ 恒成立

$$\text{即 } a \ln x \leq x - 1$$

$$\ln x \leq \frac{1}{a}(x - 1)$$

由切线放缩得: $a = 1$

44. (浙江新高考模拟卷——学军中学) 已知函数 $x^3 e^{2x} \geq (k+2)x + 3\ln x + 1$ 恒成立, 求 k 的取值范围 ()

解析: $x^3 e^{2x} = e^{3\ln x + 2x} \geq 3\ln x + 2x + 1$

要使, $x^3 e^{2x} \geq (k+2)x + 3\ln x + 1$

只需要: $3\ln x + 2x + 1 \geq (k+2)x + 3\ln x + 1$, 即: $k \leq 0$

45. (2020 年山东) $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$, 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围

() 解析: 方法一: 同构构造 $h(x) = xe^x$

$$ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1 \Rightarrow ae^{x-1} \geq \ln \frac{ex}{a} \Rightarrow xe^x \geq \frac{ex}{a} \ln \frac{ex}{a} = \ln \frac{ex}{a} e^{\frac{ex}{a}}$$

$$\therefore x \geq \ln \frac{ex}{a} = 1 + \ln x - \ln a \Rightarrow \ln a \geq 1 + \ln x - x \Rightarrow \ln a \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$$

方法二: 构造 $h(x) = x + e^x$.

$$\begin{aligned} \because ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1 &\Rightarrow ae^{x-1} + \ln a - 1 \geq \ln x \\ \Rightarrow e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 &\geq \ln x + x = \ln x + e^{\ln x} \end{aligned}$$

$$\ln a + x - 1 \geq \ln x \Rightarrow \ln a \geq \ln x - x + 1 \Rightarrow \ln a \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$$

46. 已知函数 $xe^x - x - \ln x \geq (b-2)x + 1$ 恒成立, 求 b 的取值范围 ()

解析: $\frac{e^{x+\ln x} - (x + \ln x) - 1}{x} \geq (b-2)x$

$$\therefore [e^{x+\ln x} - (x + \ln x) - 1] \geq 0 \Rightarrow b-2 \leq 0 \Rightarrow b \leq 2$$

47. 已知函数 $xe^x + ax \geq ax^a \ln x + a \ln x + (a-1)x, x \in (1, +\infty)$ 时恒成立, 则 a 的取值范围 ()

答案: $a \in (-\infty, e]$

提示: $xe^x + x \geq ax^a \ln x + a \ln x$,

48. 设函数 $f(x) = axe^x - ax - 1$ ($a \in R$). 若不等式 $f(x) \geq \ln x$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上恒成立,

求 a 的取值范围.

解析:

$$\begin{aligned} axe^x - ax - 1 \geq \ln x &\Rightarrow a(e^{x+\ln x} - x) - 1 \geq \ln x \\ &\Rightarrow a(e^{x+\ln x} - x - \ln x - 1) - 1 + a(\ln x + 1) \geq \ln x \\ a(e^{x+\ln x} - x - \ln x - 1) - 1 + a(\ln x + 1) &\geq \ln x \\ &\Rightarrow a(e^{x+\ln x} - x - \ln x - 1) + (a-1)(\ln x + 1) \geq 0 \\ a(e^{x+\ln x} - x - \ln x - 1)_{\geq 0} + (a-1)(\ln x + 1) &\geq 0 \\ &\Rightarrow a(e^{x+\ln x} - x - \ln x - 1)_{\geq 0} + (a-1)(\ln x + 1)_{\geq 0} \geq 0 \\ &\Rightarrow a - 1 \geq 0 \Rightarrow a \geq 1 \end{aligned}$$

49. 若函数 $f(x) = x + e^{x-b} - b(x + x^2 - x \ln x)$ 有零点, 则 b 的取值范围.

解析:

$$\begin{aligned} x + e^{x-b} &= b(x + x^2 - x \ln x) \Rightarrow 1 + e^{x-b-\ln x} = b(1 + x - \ln x) \\ \because e^x &\geq x + 1 \therefore b(1 + x - \ln x) \geq x - b - \ln x + 2 \\ &\Rightarrow b(2 + x - \ln x) \geq x - \ln x + 2 \because x - \ln x + 2 > 0 \Rightarrow b \geq 1 \end{aligned}$$

50. 已知函数 $f(x) = a \ln x + 2e^{x-1} - (a+2)x + a \geq 0$, 对任意 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围_____.

答案: $a \in (-\infty, 2]$

解析: $2e^{x-1} - (a+2)x + a \geq -a \ln x \Rightarrow 2e^{x-1} - ax - 2x + a \geq -a \ln x$

$$2e^{x-1} - 2x \geq -a \ln x + ax - a \Rightarrow 2e^{x-1} - 2(x-1) - 2 \geq a(-\ln x + x - 1)$$

$$\begin{aligned} 2e^{x-1} - 2(x-2[e^{x-1} - (x-1) - 1]) &\geq a[x-1-\ln x] \\ \Rightarrow 2[e^{x-1} - (x-1) - 1]_{\geq 0} &\geq a[x-1-\ln x]_{\geq 0} \Rightarrow a \leq 2 \end{aligned}$$

51. 若 $x > 0$ 证明: $(e^x - 1) \ln(x+1) > x^2$

解: 需证: $(e^x - 1) \ln(x+1) > x^2$

即证: $\frac{\ln(x+1)}{x} > \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\ln e^x}{e^x - 1} = \frac{\ln(e^x - 1 + 1)}{e^x - 1}$

$$\text{令 } h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}, (x > 0) \therefore h(x) > h(e^x - 1)$$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单减, 即证: $x < e^x - 1$

即证 $e^x - x - 1 > 0 (x > 0)$ 显然成立。

52. 已知函数 $f(x) = x^2 e^x - a(x + 2 \ln x)$ 有两个零点, 则 a 的取值范围 ()

解析: $f(x) = e^{2 \ln x + x} - a(x + 2 \ln x)$, 令 $t = x + 2 \ln x$

容易知 t 单增, $f(t) = e^t - at$, $f'(t) = e^t - a$

① $a \leq 0$, $f(t) \uparrow \therefore f(t)$ 至多有一个根, 不符合题意。

$$\text{② } a > 0, f(t) = e^t - at = 0 \Rightarrow e^t = at \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{t}{e^t} \therefore \frac{1}{a} \in (0, \frac{1}{e}) \Rightarrow a \in (e, +\infty)$$

符合题意

53. 若不等式 $x(e^x - 1) > \ln x - 1 + t$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围 ()

答案: $(-\infty, 2)$

54. 已知函数 $f(x) = x^2 e^x - a(x + 2 \ln x)$, 讨论 $f(x)$ 的零点的个数

解析: $x^2 e^x = a(x + 2 \ln x) \Rightarrow e^{x+2 \ln x} = a(x + 2 \ln x)$

$$\text{令 } t = x + 2 \ln x \Rightarrow e^t = at \Rightarrow a = \frac{e^t}{t}$$

$\therefore 0 \leq a < e$, $f(x)$ 无零点; $a < 0$ & $a = e$ $f(x)$ 只有一个零点

$a > e$ $f(x)$ 有两个零点

55. 已知函数 $f(x) = a \ln x + b e^{x-1} - (a+2)x + a$. (a, b 为常数) 若 $b = 2$, 若对任意的

$x \in [1, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

解析：由题意得： $a\ln x + 2e^{x-1} - (a+2)x + a \geq 0, (x \geq 1)$ ；

$$a(\ln x - x + 1) \geq 2(-e^{x-1} + x)$$

$$\Rightarrow a(\ln x - x + 1) \geq 2(x - 1 - e^{x-1} + 1) \quad \text{即：}$$

$$\Rightarrow 2(e^{x-1} - (x-1) - 1) \geq a(x - \ln x - 1)$$

$$2(e^{x-1} - (x-1) - 1) \geq a(e^{\ln x} - \ln x - 1), \text{ 因为 } x-1 \geq \ln x$$

当且仅当 $x=1$ 时等号成立，构造 $g(x) = e^x - x - 1$ 容易得：

$$g(x) \geq 0, \text{ 所以只需要满足 } a \leq 2。$$

56. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+1)$ ， $g(x) = e^x - x - 1$ 。若 $g(x) \geq kf(x)$ 对 $\forall x \in [0, +\infty)$ 恒成立，

求实数 k 的取值范围。

解析：由题意得： $e^x - x - 1 \geq k[x - \ln(x+1)] = k[x+1 - \ln(x+1) - 1]$

$$\text{即 } e^x - x - 1 \geq k[e^{\ln(x+1)} - \ln(x+1) - 1]$$

$$\text{又因为 } x \geq 0, \text{ 所以： } x \geq \ln(x+1) \geq 0$$

$$\text{又 } y = e^x - x - 1 \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 单增，且 } x=0, y=0$$

所以不等式恒成立满足 $k \leq 1$ 即可。

57. 已知函数 $f(x) = e^x + mx - 1$ ，其中 e 是自然对数的底数。若关于 x 的不等式

$f(x) + \ln(x+1) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围。

解析：由题意得：

$$e^x + mx - 1 + \ln(x+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow e^x - x - 1 - [x+1-1 - \ln(x+1)] + (m+2)x \geq 0$$

$$e^x - x - 1 - [e^{\ln(x+1)} - \ln(x+1) - 1] + (m+2)x \geq 0$$

$$\text{构造 } g(x) = e^x - x - 1, \quad x \geq \ln(x+1) \text{ 当且仅当 } x=0 \text{ 时等号成立}$$

$$\text{即 } (m+2)x \geq 0, \because x \in [0, +\infty), \text{ 即 } m \geq -2$$

58. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x (a \in R)$. 当 $a = 1$ 时, 不等式 $xe^x + 1 > f(x) + m$ 对于任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围_____.

解析: $xe^x + 1 > x + \ln x + m \Rightarrow e^{x+\ln x} - x - \ln x - 1 \geq m - 2$

当 $x + \ln x = 0$ 取等, 所以: $m < 2$.

59. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x}, (a \in R)$, $g(x) = e^{2x} - 2$. 若 $f(x) \leq g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上成立, 求 a 的取值范围_____.

解析: $\frac{\ln x + a}{x} \leq e^{2x} - 2 \Rightarrow \ln x + a \leq xe^{2x} - 2x \Rightarrow \ln x + a \leq e^{2x+\ln x} - 2x$

$\therefore a - 1 \leq e^{\ln x + 2x} - \ln x - 2x - 1$, 当 $\ln x + 2x = 0$ 取等, $a - 1 \leq 0 \Rightarrow a \leq 1$

60. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + a(\ln x - x)$. 当 $a > 0$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值_____.

解析: $f(x) = e^{x-\ln x} + a(x - \ln x)$, 令 $x - \ln x = t \geq 1$

$\therefore g(t) = e^t - at, (t \geq 1) \therefore g(t)_{\min} = g(\ln a) = a - \ln a$.

61. 设 $f(x) = xe^x - ax^2$, $g(x) = \ln x + x - x^2 + 1 - \frac{e}{a}$. 当 $a > 0$ 时, 设 $h(x) = f(x) - ag(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围_____.

解析: $xe^x - a(\ln x + x + 1) + e \geq 0 \Rightarrow e^{x+\ln x} - a(x + \ln x + 1) + e \geq 0$

令 $t = \ln x + x \therefore e^t - a(t + 1) + e \geq 0 \Rightarrow e^t + e \geq a(t + 1) \therefore e^t \geq et \therefore a \leq e$

62. 已知函数 $f(x) = xe^x - a(x + \ln x)$. 若 $f(x) > 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围_____.

解析: $xe^x - a(x + \ln x) > 0 \Rightarrow e^{x+\ln x} > a(x + \ln x) \therefore e^x \geq ex \therefore a < e$

63. 函数 $f(x) = (x + \frac{a}{x})\ln x, g(x) = me^{mx} + m$, 当 $a = 1$ 时, 不等式 $2f(x) - g(x) \leq 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围 ()

解析: $2(x + \frac{1}{x})\ln x \leq me^{mx} + m \Rightarrow e^{\ln x^2} \ln x^2 + \ln x^2 \leq mxe^{mx} + mx$

构造 $h(x) = xe^x + x$, 易知单增,

$$\therefore h(\ln x^2) \leq h(mx) \Rightarrow m \geq 2 \frac{\ln x}{x} \Rightarrow m \geq \left[2 \frac{\ln x}{x} \right]_{\max} = \frac{2}{e} \Rightarrow m \in \left[\frac{2}{e}, +\infty \right)$$

64. 已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = ax - \ln x$ ，若 $a > \frac{1}{e}$ ，证明 $f(x) > 1 - xe^{-ax}$

解析： $ax - \ln x > 1 - e^{\ln x} \cdot e^{-ax} \Rightarrow e^{\ln x - ax} > \ln x - ax + 1$

$$\therefore \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} < a \therefore \ln x < ax \therefore \ln x - ax < 0$$

由 $e^x \geq x + 1$ ，当且仅当 $x = 0$ 时取等，得 $e^{\ln x - ax} > \ln x - ax + 1$ ，证毕。

65. 若对任意的 $x > 0$ ，恒有 $a(e^{ax} + 1) \geq 2(x + \frac{1}{x})\ln x$ ，则实数 a 的最小值为 ()

解析：

$$\begin{aligned} a(e^{ax} + 1) &\geq 2(x + \frac{1}{x})\ln x \\ \Rightarrow ax(e^{ax} + 1) &\geq (x^2 + 1)\ln x^2 \\ \Rightarrow (e^{ax} + 1)Ine^{ax} &\geq (x^2 + 1)\ln x^2 \end{aligned}$$

构造 $f(x) = (x + 1)\ln x$ ，容易知单增

$$\therefore e^{ax} \geq x^2 \Rightarrow a \geq \frac{2\ln x}{x} \Rightarrow a \geq \left[\frac{2\ln x}{x} \right]_{\max} = \frac{2}{e} \Rightarrow a \geq \frac{2}{e}$$

66. 已知 x_0 是函数 $f(x) = x^2 e^{x-2} + \ln x - 2$ 的零点，则 $e^{2-x_0} + \ln x_0 = ()$

解析：

$$\begin{aligned} x^2 e^{x-2} + \ln x - 2 &= 0 \Rightarrow x^2 e^{x-2} = 2 - \ln x \\ \Rightarrow xe^x &= \frac{e^x}{x} \ln \frac{e^x}{x} \Rightarrow \ln x + x = \ln \left(\ln \frac{e^x}{x} \right) + \ln \frac{e^x}{x} \\ \therefore \ln \left(\frac{e^2}{x} \right) &= x \Rightarrow 2 - \ln x = x, \&e^{2-x} = x \Rightarrow e^{2-x_0} + \ln x_0 = x_0 + \ln x_0 = 2 \end{aligned}$$

67. 已知 x_0 是方程 $x^3 e^{x-4} + 2\ln x - 4 = 0$ 的一个根，则 $e^{\frac{4-x_0}{2}} + 2\ln x_0$ 的值是 ()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

解析: $x^3 e^{x-4} = 4 - 2\ln x = \ln \frac{e^4}{x^2} \Rightarrow x e^x = \frac{e^4}{x^2} \ln \frac{e^4}{x^2} \Rightarrow \ln x + x = \ln(\ln \frac{e^4}{x^2}) + \ln \frac{e^4}{x^2}$

$$\text{令 } x = \ln \frac{e^4}{x^2} \Rightarrow x = 4 - 2\ln x$$

$$\Rightarrow 4 - x = 2\ln x \therefore e^{\frac{4-x}{2}} = x \therefore e^{\frac{4-x_0}{2}} + 2\ln x_0 = x_0 + 2\ln x_0 = 4$$

68. 已知函数 $f(x) = e^{x+m} - x^3$, $g(x) = \ln(x+1) + 2$. 当 $m \geq 1$ 时, 证明: $f(x) > g(x) - x^3$.

解析: 先证明 $e^x \geq x+1$ ($x \in \mathbf{R}$), 且 $\ln(x+1) \leq x$ ($x > -1$)

$$\text{设 } F(x) = e^x - x - 1, \text{ 则 } F'(x) = e^x - 1$$

因为当 $x < 0$ 时, $F'(x) < 0$

当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

所以当 $x = 0$ 时, $F(x)$ 取得最小值 $F(0) = 0$

所以 $F(x) \geq F(0) = 0$, 即 $e^x \geq x+1$ ($x \in \mathbf{R}$)

所以 $\ln(x+1) \leq x$ (当且仅当 $x = 0$ 时取等号)

再证明 $e^{x+m} - \ln(x+1) - 2 > 0$. 由 $e^x \geq x+1$ ($x \in \mathbf{R}$)

得 $e^{x+1} \geq x+2$ (当且仅当 $x = -1$ 时取等号)

因为 $x > -1$, $m \geq 1$, 且 $e^{x+1} \geq x+2$ 与 $\ln(x+1) \leq x$ 不同时取等号

$$\text{所以 } e^{x+m} - \ln(x+1) - 2 = e^{m-1} \cdot e^{x+1} - \ln(x+1) - 2$$

$$> e^{m-1}(x+2) - x - 2 = (e^{m-1} - 1)(x+2) \geq 0. \text{ 综上得证。}$$

69. 已知函数 $f(x) = me^x - \ln x - 1$. 当 $m \geq 1$ 时, 证明: $f(x) > 1$.

解析: 设 $F(x) = e^x - x - 1$, 则 $F'(x) = e^x - 1$

$F(x)$ 取得最小值 $F(0) = 0$. 所以 $F(x) \geq F(0) = 0$

即 $e^x \geq x+1$ (当且仅当 $x = 0$ 时取等号) 由 $e^x \geq x+1$ ($x \in \mathbf{R}$)

得 $e^{x-1} \geq x$ (当且仅当 $x = 1$ 时取等号)

所以 $\ln x \leq x-1$ ($x > 0$) (当且仅当 $x=1$ 时取等号)

再证明 $me^x - \ln x - 2 > 0$

因为 $x > 0$, $m \geq 1$, 且 $e^x \geq x+1$ 与 $\ln x \leq x-1$ 不同时取等号

所以 $me^x - \ln x - 2 > m(x+1) - (x-1) - 2 = (m-1)(x+1) \geq 0$

综上可知, 当 $m \geq 1$ 时, $f(x) > 1$.

70. 若 $f(x) = xe^x + ax, a \in R, g(x) = ax^a \ln x + a \ln x + (a-1)x$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 若 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 则 a 的取值范围 ()

解析: $xe^x + ax \geq ax^a \ln x + a \ln x + ax - x \Rightarrow x + xe^x \geq \ln x^a e^{\ln x^a} + \ln x^a$

构造: $h(x) = x + xe^x$ 单增, $h(x) \geq h(\ln x^a)$

① $a \leq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ 恒成立

② $a > 0$ 时, $\ln x^a = a \ln x > 0$, $\therefore x \geq \ln x^a \Rightarrow \frac{x}{\ln x} \geq a \Rightarrow e \geq a$

71. 已知函数 $(e^{ax} - 1)\ln x = ax^2 - ax, (a > 0)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 有三个不同的解, 求 a 的范围?

解析: $(e^{ax} - 1)\ln x = ax^2 - ax$,

① 当 $x=1$ 时, 成立

② 当 $x \neq 1$ 时, $\frac{(e^{ax} - 1)}{ax} = \frac{x-1}{\ln x} = \frac{e^{\ln x} - 1}{\ln x}$

又因为 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 单增, $ax = \ln x \Rightarrow a = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow a \in (0, \frac{1}{e})$

72. 设实数 $\lambda > 0$, 若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $e^{\lambda x} - \frac{\ln x}{\lambda} \geq 0$ 恒成立, 则 λ 的取值范围?

解析: $e^{\lambda x} - \frac{\ln x}{\lambda} \geq 0 \Rightarrow \lambda x e^{\lambda x} \geq x \ln x \Rightarrow \lambda x e^{\lambda x} \geq x \ln x \Rightarrow e^{\lambda x} \ln e^{\lambda x} \geq x \ln x$

令 $f(x) = x \ln x \because x \in (0, \frac{1}{e}), f(x) \downarrow; x \in (\frac{1}{e}, +\infty), f(x) \uparrow;$

$\because e^{\lambda x} > 1$, 所以 $e^{\lambda x} > x \Rightarrow \lambda x > \ln x \Rightarrow \lambda > [\frac{\ln x}{x}]_{\max} = \frac{1}{e}$

73. 若不等式 $xe^x - \ln x - 1 \geq kx$ 对任意的 $x > 0$ 都成立, 则 k 的取值范围 ()

$$\text{解析: } k \leq \frac{xe^x - \ln x - 1}{x} = \frac{e^{x+\ln x} - (\ln x + 1)}{x} = \frac{e^{x+\ln x} - (\ln x + x) - 1 + x}{x} \geq 1$$

$$\therefore k \leq 1$$

74. 已知 $f(x) = \ln x + x - xe^{x+1}$, 求 $f(x)$ 最大值_____.

$$\text{解析: } f(x) = \ln x + x - e^{\ln x + x + 1} = \ln x + x + 1 - e^{\ln x + x + 1} - 1 \leq -2$$

当 $\ln x + x + 1 = 0$ 时 $f(x)$ 取最大值为 -2

75. 已知函数 $f(x) = xe^x - \ln x - x - 2$ 最小值为 a , $g(x) = \frac{e^{x-2}}{x} + \ln x - x$ 最小值为 b 则

()

A. $a = b$ B. $a > b$ C. $a < b$ D. 不确定

$$\text{解析: } f(x) = e^{x+\ln x} - (x + \ln x) - 1 - 1 \geq -1$$

$$g(x) = e^{x-2-\ln x} - (x - 2 - \ln x + 1) - 1 \geq -1,$$

当 $x + \ln x = 0; x - 2 - \ln x = 0$ 等号成立。

76. 已知不等式 $x + a\ln x + \frac{1}{e^x} \geq x^a$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围 ()

$$\text{解析: } x + a\ln x + \frac{1}{e^x} \geq x^a \Rightarrow x + e^{-x} \geq x^a - a\ln x \Rightarrow e^{-x} - \ln e^{-x} \geq x^a - \ln x^a$$

不妨令 $f(x) = x - \ln x, x \in (0, 1) \downarrow, (1, +\infty) \uparrow$

$$\text{所以当 } x > 1 \Rightarrow 0 < e^{-x} < \frac{1}{e} \therefore e^{-x} \in (0, 1)$$

当 $a > 0$ 时, x^a 与 e^{-x} 无法比较, 不满足恒成立。

$$\text{当 } a < 0 \Rightarrow x^a \in (0, 1) \therefore e^{-x} \leq x^a \Rightarrow -x \leq a\ln x \Rightarrow \frac{x}{\ln x} \geq -a \Rightarrow a \leq -e$$

77. 已知函数 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $g(x) = \ln x$, 当 $x > 0$ 时, $t[f^{2t}(x) + 1] \geq 2(x + \frac{1}{x})g(x)$ 恒成立, 则

实数 t 的范围 ()

解析:

$$\begin{aligned} t(e^{tx} + 1) &\geq 2(x + \frac{1}{x})\ln x \Rightarrow xt(e^{tx} + 1) \geq (x^2 + 1)\ln x^2 \\ &\Rightarrow (e^{tx} + 1)\ln e^{tx} \geq (x^2 + 1)\ln x^2 \end{aligned}$$

构造: $F(x) = (x+1)\ln x$

$$\text{知 } F(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \uparrow \therefore e^{tx} \geq x^2 \Rightarrow tx \geq 2\ln x \Rightarrow t \geq \frac{2\ln x}{x} \Rightarrow t \geq \frac{2}{e}$$

78. 不等式 $x(e^{2x} - 2a) \geq x + \ln x + 1$ 恒成立, 则 a 得取值范围为 ()

答案: $a \leq \frac{1}{2}$,

解析: $2a \leq \frac{xe^{2x} - x - \ln x - 1}{x} = h(x), \because xe^{2x} = e^{\ln x + 2x} \geq 2x + \ln x + 1$

$$\therefore xe^{2x} - x - \ln x - 1 \geq x \therefore \frac{xe^{2x} - x - \ln x - 1}{x} \geq 1, (\ln x + 2x = 0)$$

$$\text{取等。} \therefore h(x)_{\min} = 1 \therefore 2a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$$

79. 已知函数 $f(x) = a\ln x + \frac{e^x}{x} - ax + e^2$, 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求

实数 a 的取值范围 ()

解析: 要证: $e^{x-\ln x} - a(x - \ln x) + e^2 \geq 0$

$$\text{只需要证: } e^{x-\ln x-2} - \frac{a}{e^2}(x - \ln x) + 1 \geq 0$$

$$\because h(x) = e^x - x - 1 \geq 0, (x = 1)$$

同构:

$$\therefore h(x-2) = e^{x-2} - (x-2) - 1 = e^{x-2} - x + 1 \geq 0, (x = 2)$$

$$\therefore e^{x-\ln x-2} - \frac{a}{e^2}(x-\ln x)+1 = e^{x-\ln x-2} - (x-\ln x)+1 + (1-\frac{a}{e^2})(x-\ln x)$$

$$= h(x-\ln x-2) + (1-\frac{a}{e^2})(x-\ln x) \geq 0$$

$$\therefore h(x-\ln x-2) \geq 0, (x-\ln x=2) \text{ 取等}$$

$$\therefore x-\ln x \geq 1 \therefore 1-\frac{a}{e^2} \geq 0 \Rightarrow a \leq e^2$$

80. 已知 $f(x) = mx \ln x - 1, m \neq 0$, 若 $g(x) = x^2 - \frac{2}{e}x$ 且关于 x 的不等式 $f(x) \leq g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

解析: 由题目得: $x + \frac{1}{x} - m \ln x - \frac{2}{e} \geq 0$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } x \geq 1 \text{ 时, } e(\frac{1}{e}x - \ln x) + \frac{1}{e}(\ln x - 2 + \frac{e}{x}) + (e - \frac{1}{e} - m)\ln x \geq 0$$

$$\therefore e(\frac{1}{e}x - \ln x)_{\substack{\geq 0 \\ (x=e)}} + \frac{1}{e}(\ln x - 2 + \frac{e}{x})_{\substack{\geq 0 \\ (x=e)}} + \ln x(e - \frac{1}{e} - m)_{\substack{\geq 0 \\ \Rightarrow m \leq e - \frac{1}{e}}} \geq 0$$

$$\therefore m < e - \frac{1}{e}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } (x - \frac{1}{e}\ln x - \frac{2}{e}) + (e\ln x + \frac{1}{x}) + (\frac{1}{e} - e - m)\ln x \geq 0$$

$$\therefore (x - \frac{1}{e}\ln x - \frac{2}{e})_{\substack{\geq 0 \\ (x=\frac{1}{e})}} + (e\ln x + \frac{1}{x})_{\substack{\geq 0 \\ (x=\frac{1}{e})}} + \ln x(\frac{1}{e} - e - m)_{\substack{\geq 0 \\ \Rightarrow m \geq \frac{1}{e} - e}} \geq 0$$

$$\therefore m > \frac{1}{e} - e$$

$$\text{综合} \textcircled{1}\textcircled{2} \therefore m \neq 0 \therefore m \in [\frac{1}{e} - e, 0) \cup (0, e - \frac{1}{e}]$$

81. (焦作市 2021 届高三一模理 12) 已知对任意的 $a, b \in R$ 都有 $(b-a)e^{b-a} \geq be^{-b} - \lambda a$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围 ()

解析:

$$\begin{aligned} (b-a)e^{b-a} \geq be^{-b} - \lambda a &\Rightarrow (b-a)e^{b-a} - be^{-b} + \lambda a = 0 \\ &\Rightarrow (b-a)e^{b-a} - \lambda(b-a) + be^{-b} - \lambda(-b) \geq 0 \end{aligned}$$

构造 $f(x) = xe^x - \lambda x$, 即 $f(b-a) + f(-b) \geq 0$, 由于 a, b 为任意实数,

$$\therefore f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) = x(e^x - \lambda) \geq 0$$

① $x=0$, 满足题意

② $x<0, e^x - \lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \geq 1$ ③ $x>0, e^x - \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq 1$

综上所述: $\lambda=1$

82. (浙江省 2021 届高三百校 12 月联考) 已知 $a>1$, 若对任意的 $x \in [\frac{1}{3}, +\infty)$, 不等式

$$4x - \ln 3x \leq ae^x - \ln a$$

恒成立, 则 a 的最小值 ()

解析:

$$4x - \ln 3x \leq ae^x - \ln a \Rightarrow x + 3x - \ln 3x \leq e^{\ln a + x} - \ln a \Rightarrow e^{\ln 3x} - \ln 3x \leq e^{\ln a + x} - (\ln a + x)$$

$$\text{构造 } f(x) = e^x - x \Leftrightarrow f(\ln 3x) \leq f(\ln a + x)$$

$$\because f(x) \text{ 在 } x>0 \text{ 单增, } x \in [\frac{1}{3}, +\infty) \quad \therefore \ln 3x \geq 0, \ln a + x \geq (\frac{1}{3}, +\infty)$$

$$\text{所以: } \ln 3x \leq \ln a + x \Rightarrow \ln a \geq \ln 3x - x = \ln \frac{3x}{e^x} \Rightarrow a \geq 3 \cdot \frac{x}{e^x} \Rightarrow a \geq [3 \cdot \frac{x}{e^x}]_{\max} = \frac{3}{e}$$

83. 已知函数 $f(x) = e^{x-a} - x \ln x + x (a \in \mathbb{R})$ 有两个极值点, $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 设 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$, 证明 $a > 2$ 。(同类同构)

解析: 思路分析: $f'(x) = g(x) = e^{x-a} - \ln x$ 有两根

$$\text{即 } e^{x-a} - (x-a) - 1 + x - \ln x - 1 = a - 2$$

$$\text{令 } h(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow h(x) \geq 0, (x=0) \text{ 取等;}$$

$$h(x-a) = e^{x-a} - (x-a) - 1 \geq 0 (x=a) \text{ 取等;}$$

$$h(\ln x) = x - \ln x - 1 \geq 0 (x=1) \text{ 取等;}$$

$$\therefore a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (\text{不等同时取等, 另 } a=1 \text{ 不成立})$$

84. 已知函数 $f(x) = ae^{x+1}, g(x) = \ln \frac{x}{a} - 1$, 其中 $a > 0$, 若 $f(x) \geq g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 恒成立, 求 a 得最小值

$$\text{解析: } f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow ae^{x+1} \geq \ln \frac{x}{a} - 1 \Leftrightarrow xe^{x+1} \geq \frac{x}{a} (\ln \frac{x}{a} - 1) \Leftrightarrow xe^{x+1} \geq (\ln \frac{x}{a} - 1) e^{\ln \frac{x}{a}}$$

$$\text{构造: } h(x) = xe^{x+1} \Rightarrow h(x) \geq h(\ln \frac{x}{a} - 1), \because h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单增}$$

$$\text{则 } x \geq \ln \frac{x}{a} - 1 \Rightarrow \ln a \geq \ln x - x - 1 \Rightarrow \ln a \geq [\ln x - x - 1]_{\max} = -2 \Rightarrow a \geq \frac{1}{e^2}$$

84. 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln(x+1) + \ln a - 1$, 若函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点, 则 a 的取值范围 ()

解析: $f(x) = ae^x - \ln(x+1) + \ln a - 1 = 0$ 有两解, ($a > 0, x > -1$)

$$\text{指对分离: } ae^x = \ln(x+1) + 1 - \ln a \Leftrightarrow ae^x = \ln \frac{e(x+1)}{a}$$

$$\text{同乘 } e(x+1) \text{ 得: } (x+1)e^{x+1} = \frac{e(x+1)}{a} \ln \frac{e(x+1)}{a}$$

构造函数: $g(t) = te^t, (t > 0)$

$$\because g(t) \text{ 单增} \Leftrightarrow g(x+1) = g(\ln \frac{e(x+1)}{a}) \Leftrightarrow x+1 = \ln \frac{e(x+1)}{a} \text{ 图像有两个交点}$$

$$a = e \cdot \frac{x+1}{e^{x+1}} \leq e \left[\frac{x+1}{e^{x+1}} \right]_{\max} = e \cdot \frac{1}{e} = 1, \text{ 综上: } a \in (0, 1)$$

85. 已知函数 $f(x) = 1 + ae^x \ln x$, 若不等式 $f(x) \geq e^x(x^a - x)(a < 0)$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围

解析: $f(x) \geq e^x(x^a - x)(a < 0) \Leftrightarrow 1 + ae^x \ln x \geq e^x(x^a - x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} + a \ln x \geq x^a - x \Leftrightarrow e^{-x} + x \geq x^a - \ln x^a$$

$$\text{又 } x > 1, -x < -1, \text{ 又 } a < 0, x^a < 1, \ln x^a < 0$$

构造 $g(t) = e^t - t, (t < 0)$, $g(t)$ 单减

$$\Rightarrow g(-x) \geq g(\ln x^a) \Rightarrow -x \leq \ln x^a = a \ln x, (x > 1)$$

$$\Rightarrow a \geq -\frac{x}{\ln x} \Rightarrow a \geq \left[-\frac{x}{\ln x} \right]_{\max} = -e, \text{ 综上: } a \in [-e, +\infty)$$

86. 已知 $xe^x - ax - \ln x \geq 1$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ()

解析: $f(x) = xe^x - ax - \ln x - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) = e^{x+\ln x} - (x + \ln x) - 1 + (1-a)x \geq 0$

$$f(x) = [e^{x+\ln x} - (x + \ln x) - 1]_{\substack{\geq 0 \\ x+\ln x=0}} + (1-a)x \geq 0 \therefore 1-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

87. 若不等式 $ax(e^x - 1) \geq \ln x + 1$ 在区间 $[\frac{1}{e}, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围 ()

解析: $ax(e^x - 1) \geq \ln x + 1 \Rightarrow ae^{x+\ln x} - ax - a\ln x - a - \ln x - 1 + a\ln x + a \geq 0$

$$[ae^{x+\ln x} - ax - a\ln x - a]_{a(e^{x+\ln x} - x - \ln x - 1) \geq 0} + [-\ln x - 1 + a\ln x + a]_{(a-1)\ln x \geq 0} \geq 0$$

$$\therefore a - 1 \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$$

88. 已知函数 $f(x) = x - (a+1)\ln x, a \in R$, 当 $a = 2e$ 时, $xe^x + m + f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围?

解析: $e^{x+\ln x} - (2e+1)\ln x + x + m \geq 0$

$$\Rightarrow e[e^{x+\ln x-1} - (x + \ln x - 1) - 1] + (e+1)x - (e+1)\ln x - (e+1) + e + 1 + m \geq 0$$

$$e[e^{x+\ln x-1} - (x + \ln x - 1) - 1]_{\substack{\geq 0 \\ x=1}} + [(e+1)x - (e+1)\ln x - (e+1)]_{\substack{\geq 0 \\ x=1}} + e + 1 + m \geq 0$$

$$\therefore e + 1 + m \geq 0 \Rightarrow m \geq -1 - e$$

89. (2014 年全国 I 卷) 设函数 $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$, $a = 2, b = 1$, 证明: $f(x) > 1$

解析: $e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} - 1 > 0 \Rightarrow x \ln x + \frac{2}{e} - \frac{x}{e^x} > 0$

$$\Rightarrow e^{\ln x} \ln x + \frac{2}{e} - xe^{-x} > 0 \Rightarrow [e^{\ln x} \ln x]_{\substack{\geq -\frac{1}{e} \\ x=\frac{1}{e}}} + \frac{2}{e} + [-xe^{-x}]_{\substack{\geq -\frac{1}{e} \\ x=1}} > 0$$

所以得证

90. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$, 当 $m \leq 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$

解析: $e^x - \ln(x+m) = e^x - x - 1 + (x+m) - \ln(x+m) - 1 + 2 - m > 0$

$$\Rightarrow [e^x - x - 1]_{\substack{\geq 0 \\ x=0}} + [(x+m) - \ln(x+m) - 1]_{\substack{\geq 0 \\ x+m=1 \\ m=1}} + 2 - m > 0 \therefore 2 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 2$$

91. 已知 $a > 0$ 函数 $f(x) = e^{x-a} - \ln(x+a) - 1$, ($x > 0$) 的最小值为 0, 则实数 a 的取值范围 ()

解析： $e^{x-a} - (x-a) - 1 + (x+a) - \ln(x+a) - 1 + 1 - 2a \geq 0$

$$[e^{x-a} - (x-a) - 1]_{\substack{\geq 0 \\ x=a}} + [(x+a) - \ln(x+a) - 1]_{\substack{\geq 0 \\ x=1-a}} + 1 - 2a \geq 0$$

因为最小值为 0， $\therefore 1 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

92. 函数 $f(x) = e^{2x} - a \ln x$ ，证明：当 $a > 0$ 时， $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$

解析： $e^{2x} - a \ln x - 2a - a \ln \frac{2}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{e^{2x}}{a} - \ln x - 2 - \ln 2 + \ln a \geq 0$

$$\Rightarrow e^{2x - \ln a} - (2x - \ln a) - 1 + 2x - \ln 2x - 1 \geq 0$$

$$[e^{2x - \ln a} - (2x - \ln a) - 1]_{\substack{\geq 0 \\ 2x - \ln a = 0}} + [2x - \ln 2x - 1]_{\substack{\geq 0 \\ 2x = 1}} \geq 0 \therefore x = \frac{1}{2}, a = e.$$

93. 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$ 若 $f(x) \geq 1$ ，求 a 的取值范围（ ）

解析： $ae^{x-1} - \ln x + \ln a - 1 \geq 0$ ：

$$\Rightarrow a(e^{x-1} - x) + ax - \ln x + \ln a - 1 = a(e^{x-1} - x) + (x - \ln x - 1) + (a-1)x + \ln a \geq 0$$

$$\Rightarrow [a(e^{x-1} - x)]_{\substack{\geq 0 \\ x=1}} + [(x - \ln x - 1)]_{\substack{\geq 0 \\ x=1}} + (a-1)x + \ln a \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)x + \ln a \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$$

当 $a < 1$ 时， $(a-1) \cdot 1 + \ln a < 0$ 不一定满足 $f(x) \geq 1$ ，所以综上 $a \geq 1$

94. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+1) - a$ 的图像在 $x=0$ 处与 x 轴相切，若 $x > t \geq 0$ ，证明：

$$e^{x-t} + \ln(t+1) > \ln(x+1) + 1$$

解析： $e^{x-t} + \ln(t+1) > \ln(x+1) + 1 \Rightarrow e^{x-t} - (x-t) - 1 + x - \ln(x+1) - [t - \ln(t+1)] > 0$

$$\Rightarrow [e^{x-t} - (x-t) - 1]_{\substack{\geq 0 \\ x=t}} + \{x - \ln(x+1) - [t - \ln(t+1)]\}_{>0}$$

95. 已知 $f(x) = a \ln x - x + 1$, $g(x) = x - e^x$ ， a 为实数，设 $h(x) = f(x) + g(x)$ ，求所有的

实数值 a ，使得对任意的 $x > 0$ ，不等式 $h(x) \leq 1 - e$ 恒成立

解析: $e(e^{x-1} - x) + ex - a \ln x - e \geq 0 \Rightarrow e(e^{x-1} - x) + e(x - \ln x - 1) + (e - a) \ln x \geq 0$

$$\Rightarrow [e(e^{x-1} - x)]_{x=1}^{\geq 0} + [e(x - \ln x - 1)]_{x=1}^{\geq 0} + (e - a) \ln x \geq 0$$

当 $x > 1, \ln x > 0 \therefore e - a \geq 0 \Rightarrow a \leq e$

当 $x \in (0, 1), \ln x < 0 \therefore e - a \leq 0 \Rightarrow a \geq e$, 综上: $a = e$

96. 已知函数 $f(x) = e^x - (a+1) \ln x - 2$, 当 $a = e$ 时, 证明: $f(x) > 2e - (e+1) \ln(e+1)$

解析: $e^x - (a+1) \ln x - 2 > 2e - (e+1) \ln(e+1)$

$$\Rightarrow e^x - (e+1) \ln x - 2(e+1) + (e+1) \ln(e+1) > 0$$

$$\Rightarrow e^x - ex + (e+1) \left(\frac{ex}{e+1} - \ln \frac{ex}{e+1} - 1 \right) > 0$$

$$\Rightarrow [e^x - ex]_{x=1}^{\geq 0} + [(e+1) \left(\frac{ex}{e+1} - \ln \frac{ex}{e+1} - 1 \right)]_{\frac{ex}{e+1}=1 \Rightarrow x=1+\frac{1}{e}}^{\geq 0} > 0$$

97. 已知函数 $f(x) = e^x - (a+1) \ln x - 2$, 当 $a = 2$ 时, 证明: $f(x) > 4 - 3 \ln 3$

解析: $e^x - (a+1) \ln x - 2 > 4 - 3 \ln 3 \Rightarrow e^x - 3 \ln x - 6 + 3 \ln 3 > 0$

$$e^x - ex + 3 \left(\frac{ex}{3} - \ln \frac{ex}{3} - 1 \right) > 0 \Rightarrow [e^x - ex]_{x=1}^{\geq 0} + [3 \left(\frac{ex}{3} - \ln \frac{ex}{3} - 1 \right)]_{x=\frac{3}{e}}^{\geq 0} > 0$$

98. 已知函数 $f(x) = ae^x, g(x) = \ln(x-1) + 1$, 证明: 当 $a \geq \frac{1}{e^2}$ 时, $f(x) \geq g(x)$

解析: $f(x) - g(x) = \frac{1}{e^2} e^x - \ln(x-1) - 1 + (a - \frac{1}{e^2}) e^x$

$$= e^{x-2} - (x-2) - 1 + (x-1) - \ln(x-1) - 1 + (a - \frac{1}{e^2}) e^x$$

$$[e^{x-2} - (x-2) - 1]_{x=2}^{\geq 0} + [(x-1) - \ln(x-1) - 1]_{x=2}^{\geq 0} + (a - \frac{1}{e^2}) e^x$$

$\therefore a \geq \frac{1}{e^2}$ 所以: $f(x) - g(x) \geq 0$ 得证。

99. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + a, a \in R$, 若关于 x 的不等式 $f(x) + e^{x-1} \geq 1$ 在区间 $[1, +\infty)$

上恒成立, 求 a 的取值范围 ()

解析: $e^{x-1} + \ln x - a(x-1) - 1 \geq 0 \Rightarrow [e^{x-1} - (x-1) - 1] - [(x-1) - \ln x] + (2-a)(x-1) \geq 0$,
 $\Rightarrow \{[e^{x-1} - (x-1) - 1] - [(x-1) - \ln x]\}_{x=1}^{\geq 0} + (2-a)(x-1) \geq 0, \because x \geq 1 \therefore 2-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 2$

100. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2$, 若 $f(x) > ax^2 + 2ax - e^x + e - 2a$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围 ()

解析: $e^x + \ln x - 2a(x-1) - e > 0$

$$\Rightarrow e[e^{x-1} - (x-1) - 1] - [(x-1) - \ln x] + (e+1-2a)(x-1) > 0$$

$$e[e^{x-1} - (x-1) - 1]_{x=1}^{\geq 0} - [(x-1) - \ln x]_{x=1}^{\geq 0} + (e+1-2a)(x-1) > 0,$$

$$\because x > 1 \therefore e+1-2a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{e+1}{2}$$

101. 已知 $a > 1, \forall x \geq \frac{1}{3}$, 不等式 $4x - \ln(3x) \leq ae^x - \ln a$ 恒成立, 则 a 的最小值为 ()

解析: 同构变形: $3x - \ln 3x \leq ae^x - x - \ln a \Rightarrow 3x - \ln 3x \leq ae^x - \ln ae^x$

又因为 $3x \geq 1, a > 1$, 构造 $y = t - \ln t (t \geq 1)$ 单增

$$\text{所以 } ae^x \geq 3x \Rightarrow a \geq \frac{3x}{e^x} \Rightarrow a \geq \left[\frac{3x}{e^x}\right]_{\max} = \frac{3}{e}$$

102. 已知函数 $f(x) = e^{x-a} - x \ln x + x$ 有两个极值点点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 设 $f'(x)$ 的导函数为 $g(x)$, 证明: $a > 2$

解析: $g(x) = e^{x-a} - \ln x$ 有两根, 即: $e^{x-a} - (x-a) - 1 + x - \ln x - 1 = a - 2$

$$\therefore [e^{x-a} - (x-a) - 1]_{x=a}^{\geq 0} + [x - \ln x - 1]_{x=1}^{\geq 0} = a - 2 \therefore a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2.$$

注意: (不能同时取等, 另 $a = 1$ 不成立) (此题: 同类同构)

103. 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)$, $g(x) = e^x$, 设 $h(x) = f(x+1) + g(x)$, 当 $x \geq 0$,

$h(x) \geq 1$, 求实数 a 的取值范围 ()

解析: 当 $x \geq 0$, $h(x) \geq 1$

$$\text{即: } e^x + \ln(x+1) - ax - 1 = (e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1) + \ln(x+1) - x + \frac{1}{2}x^2 + (2-a)x \geq 0$$

$$\text{所以: } (e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1)_{\substack{\geq 0 \\ x=0}} + \ln(x+1) - x + \frac{1}{2}x^2_{\substack{\geq 0 \\ x=0}} + (2-a)[x]_{\geq 0} \geq 0,$$

所以: $2-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 2$ (此题: 同类异构)

104. 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (2a-1)e^x - x$, a 为常数, 若 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq (3a-1)\cos x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 ()

解析:

$$ae^{2x} + (2a-1)e^x - x \geq (3a-1)\cos x$$

$$a(e^{2x} - e^x - x) + (3a-1)(e^x - x - 1) + (3a-1)(1 - \cos x) + (4a-2)x \geq 0$$

所以:

$$a[(e^{2x} - e^x - x)_{\substack{\geq 0 \\ x=0}}] + (3a-1)[(e^x - x - 1)_{\substack{\geq 0 \\ x=0}}] + (3a-1)[(1 - \cos x)_{\substack{\geq 0 \\ x=0}}] + (4a-2)[x_{\geq 0}] \geq 0$$

$$\text{所以: } \begin{cases} a \geq 0 \\ 3a-1 \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{1}{3} \\ 4a-2 \geq 0 \end{cases}, \text{ (此题: 同类异构)}$$

105. 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{e^{x-1}} + x - \ln(ax) - 2, (a > 0)$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内存在零点, 则实数 a 的取值范围 (B)

A. $(0, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $(0, e]$ D. $[3, +\infty)$

解析: $\because \frac{ax}{e^{x-1}} = axe^{1-x} = e^{1-x+\ln ax}$ 所以:

$$f(x) = e^{1-x+\ln ax} - (1-x+\ln ax) - 1 \geq 0$$

$$\text{当且仅当: } 1-x+\ln ax = 0 \Rightarrow a = \frac{e^{x-1}}{x} \Rightarrow a \geq 1$$

106. 已知函数 $f(x) = xe^x - \ln x - x - 1$, 若对任意 $x \in (0, +\infty)$ 使得 $f(x) \geq a$, 则 a 的最大值为 ()

A. 0 B. $e-2$ C. 1 D. $e-1$

解析:

$$f(x) = xe^x - \ln x - x - 1 = e^{x+\ln x} - (x + \ln x) - 1 \geq a \Rightarrow [e^{x+\ln x} - (x + \ln x) - 1]_{\geq 0} \geq a \Rightarrow a \leq 0$$

107. 已知对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 都有 $k(e^{kx} + 1) - (1 + \frac{1}{x})\ln x > 0$, 则实数 k 的取值范围 ()

$$\text{解析: } k(e^{kx} + 1) - (1 + \frac{1}{x})\ln x > 0 \Rightarrow k(e^{kx} + 1) > (1 + \frac{1}{x})\ln x$$

$$\Rightarrow kxe^{kx} + kx > x\ln x + \ln x = e^{\ln x} \cdot \ln x + \ln x$$

$$g(x) = x + xe^x \text{ 单增, 所以: } kx > \ln x \Rightarrow k > \frac{\ln x}{x} \Rightarrow k > [\frac{\ln x}{x}]_{\max} = \frac{1}{e}$$

108. 若直线 $y = ax + b$ 与曲线 $y = \ln x + 1$ 相切, 则 ab 的最大值为 ()

$$\text{解析: } ax + b \geq \ln x + 1 \Rightarrow ax + b - 1 \geq \ln x, \because \ln ax \leq ax - 1 \therefore \ln x \leq ax - 1 - \ln a = ax + b - 1$$

$$\text{所以: } b = -\ln a \therefore ab = -a\ln a \leq \frac{1}{e}$$

109. 已知 m, n 为实数, $f(x) = e^x - mx + n - 1$ 若 $f(x) \geq 0$ 对 $x \in R$ 恒成立, 则 $\frac{n-m}{m}$ 的取值范围 ()

$$\text{解析: } e^x - mx + n - 1 \geq 0 \Rightarrow e^x - 1 \geq mx - n \Rightarrow [e^x - 1]_{\geq 0} \geq mx - n \therefore \frac{n}{m} \geq 0 \therefore \frac{n}{m} - 1 \geq -1$$

110. 已知函数 $f(x) = xe^{ax-1} - \ln x - ax, a \in (-\infty, -\frac{1}{e^2}]$, 则函数 $f(x)$ 的最小值为 ()

$$\text{解析: } f(x) = xe^{ax-1} - \ln x - ax = e^{ax+\ln x-1} - (ax + \ln x - 1) - 1 \geq 0$$

$$\text{当且仅当 } ax + \ln x - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 - \ln x}{x} \text{ 等号成立, 则 } a \geq -\frac{1}{e^2}$$

111. 已知函数 $f(x) = x + \ln(x-1), g(x) = x\ln x$, 若 $f(x_1) = 1 + 2\ln t, g(x_2) = t^2$, 则

$(x_1x_2 - x_2)\ln t$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{e^2}$

B. $\frac{2}{e}$

C. $-\frac{1}{2e}$

D. $-\frac{1}{e}$

$$\text{解析: } \begin{cases} x_1 + \ln(x_1 - 1) = 1 + 2\ln t \\ x_2 \ln x_2 = t^2 \end{cases} \Rightarrow x_1 - 1 + \ln(x_1 - 1) = \ln x_2 + \ln(\ln x_2)$$

$$\text{构造 } h(x) = x + \ln x, h(x) \text{ 单增, } \therefore x_1 - 1 = \ln x_2,$$

$$(x_1x_2 - x_2)Int = x_2(x_1 - 1)Int = x_2Inx_2 \frac{In(x_2Inx_2)}{2} = \frac{x_2Inx_2In(x_2Inx_2)}{2}$$

$$\text{构造 } m(x) = xInx, \text{ 则 } m(x)_{\min} = -\frac{1}{e}$$

$$\text{所以: } (x_1x_2 - x_2)Int \text{ 的最小值为 } -\frac{1}{2e}$$

112. 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x - \frac{a}{2}x^2 + ax$, $a \in R$, 若不等式

$$f(x) + (x+1)e^x + \frac{a}{2}x^2 - 2ax + a > 0 \text{ 恒成立, 求 } a \text{ 的取值范围。}$$

$$\text{解析 1: } (2x-1)e^x > ax - a, \because xe^x \geq 2ex - e \therefore (x - \frac{1}{2})e^{x-\frac{1}{2}} \geq 2e(x - \frac{1}{2}) - e$$

$$\Rightarrow (2x-1)e^x \geq 4e^{\frac{3}{2}}x - 4e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 1 < a < 4e^{\frac{3}{2}} \quad (\text{此法: 切线找点})$$

解析 2: 过 $(1,0)$ 点作 $y = (2x-1)e^x$ 的切线, 设切点 $(x_0, (2x_0-1)e^{x_0})$, 则

$$k = (2x_0+1)e^{x_0} = \frac{(2x_0+1)e^{x_0} - 0}{x_0 - 1} \Rightarrow x_0 = 0 \& x_0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{解之得: } k=1, k=4e^{\frac{3}{2}}, \text{ 所以 } 1 < a < 4e^{\frac{3}{2}}$$

113. 已知函数 $f(x) = Inx - ax + 1 \leq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围 ()

解析: 由 $f(x) = Inx - ax + 1 \leq 0$

$$\text{得: } Inx - ax + 1 \leq 0 \Rightarrow a \geq \frac{Inx+1}{x} = e \frac{Inex}{ex} = e \cdot \left[\frac{Inex}{ex} \right]_{\max} = 1$$

114. 已知函数 $f(x) = x + Inx, g(x) = xInx$, 若 $f(x_1) = x + Inx, g(x) = xInx$, 若

$$f(x_1) = Int, g(x_2) = t, \text{ 则 } x_1x_2Int \text{ 的最小值 ()}$$

$$\text{解析: } x_1 + Inx_1 = Int, x_2Inx_2 = t, e^{x_1+Inx_1} = x_2Inx_2 \Rightarrow x_1e^{x_1} = Inx_2e^{Inx_2}$$

$$\text{构造 } h(x) = xe^x$$

$$\text{单增, } \therefore x_1 = Inx_2 \therefore x_1x_2Int = x_2Inx_2Int = tInt \therefore x_1x_2Int = [tInt]_{\min} = -\frac{1}{e}$$

115. 已知函数 $f(x) = xe^x, g(x) = x\ln x$, 若 $f(x_1) = g(x_2) = t > 0$, 则 $\frac{Int}{x_1x_2}$ 的最大值 ()

解析: 由题意: $f(x_1) = x_1e^{x_1} = t > 0 \Rightarrow x_1 > 0; g(x_2) = x_2\ln x_2 = t > 0 \Rightarrow x_2 > 1$

$$\text{而: } g(x_2) = x_2\ln x_2 = \ln x_2 e^{\ln x_2} = f(\ln x_2) \therefore f(x_1) = f(\ln x_2)$$

构造 $h(x) = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 单增

$$\therefore x_1 = \ln x_2 \therefore x_1x_2 = x_2\ln x_2 = t \therefore \frac{Int}{x_1x_2} = \frac{Int}{t}, \therefore \left[\frac{Int}{t}\right]_{\max} = \frac{1}{e} \therefore \frac{Int}{x_1x_2} \leq \frac{1}{e}$$

116. 已知函数 $f(x) = x - \ln x$, 已知实数 $a > 0$, 若 $f(x) + ae^{2x} + \ln a \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围 ()

解析 1: 由题意知 $\ln x \leq ae^x + \ln a$;

$$\text{两边同时加上 } x, \text{ 得 } ae^x + x + \ln a \geq a + \ln x, \text{ 即 } ae^x + \ln(ae^x) \geq x + \ln x$$

$$\text{构造 } h(x) = x + \ln x, \text{ 因为单增, 即: } ae^x \geq x \Rightarrow a \geq \frac{x}{e^x} \Rightarrow a \geq \left[\frac{x}{e^x}\right]_{\max} = \frac{1}{e}$$

解析 2: 由题意知 $\ln x \leq ae^x + \ln a$; $\therefore \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a} \leq e^x \Rightarrow \frac{x}{a} \ln \frac{x}{a} \leq xe^x \Rightarrow e^{\frac{\ln x}{a}} \ln \frac{x}{a} \leq xe^x$

$$\text{构造 } h(x) = xe^x, \text{ 在 } x > 0 \text{ 单增, } \therefore h\left(\ln \frac{x}{a}\right) \leq h(x) \Rightarrow \ln \frac{x}{a} \leq x \Rightarrow a \geq \frac{1}{e}$$

117. 若 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, 关于 x 的不等式 $ax^3e^{ax} + 2\ln x \leq 0$ 恒成立, 则实数 a 的最大值 ()

$$\text{解析: } ax^3e^{ax} + 2\ln x \leq 0 \Rightarrow axe^{ax} + \frac{2\ln x}{x^2} \leq 0 \Rightarrow axe^{ax} \leq -\frac{2\ln x}{x^2} \Rightarrow axe^{ax} \leq \frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{x^2}$$

$$\text{构造 } f(x) = xe^x, f(ax) \leq f\left(\ln \frac{1}{x^2}\right), \therefore \ln \frac{1}{x^2} \in (2, +\infty) \text{ 且单增}$$

$$\text{所以: } ax \leq \ln \frac{1}{x^2} \Rightarrow a \leq \frac{-2\ln x}{x} \Rightarrow a \leq \left(\frac{-2\ln x}{x}\right)_{\min} = -2 \frac{-1}{\frac{1}{e}} = 2e$$

118. 已知函数 $f(x) = ae^x + 2x - 1$, 证明: 对任意的 $a \geq 1$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq (x + ae)x$

解析: $ae^x + 2x - 1 \geq (x + ae)x \Leftrightarrow (a-1)(e^x - ex) + e^x - ex - (x-1)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow (a-1)[(e^x - ex)]_{x=1}^{\geq 0} + [e^x - ex - (x-1)^2]_{x=1}^{\geq 0} \geq 0$$

即: $a \geq 1$, 得证 (同构异构)

119. 已知函数 $f(x) = x - \ln x, a > 0$ 若 $f(x) + ae^{2x} + \ln a \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围_____.

解析: $x - \ln x + ae^{2x} + \ln a \geq 0 \Rightarrow ae^{2x} + 2x + \ln a \geq x + \ln x \Rightarrow ae^{2x} + \ln a \cdot e^{2x} \geq x + \ln x$

$$\text{设 } h(x) = x + \ln x, \text{ 因为单增, } \therefore ae^{2x} \geq x \Rightarrow a \geq \frac{x}{e^{2x}} \Rightarrow a \geq [\frac{x}{e^{2x}}]_{\max} = \frac{1}{2e}$$

120. 已知函数 $f(x) = ae^x + \ln \frac{a}{x+2} - 2 (a > 0)$, 若 $f(x) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

【解】 $\because f(x) = ae^x + \ln \frac{a}{x+2} - 2 > 0$, 则 $e^{x+\ln a} + \ln a > \ln(x+2) + 2$,

两边加上 x 得到 $e^{x+\ln a} + x + \ln a > x + 2 + \ln(x+2) = e^{\ln(x+2)} + \ln(x+2)$,

$\because y = e^x + x$ 单调递增, $\therefore x + \ln a > \ln(x+2)$, 即 $\ln a > \ln(x+2) - x$, 令

$g(x) = \ln(x+2) - x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x+2} - 1 = \frac{-x-1}{x+1}$, 因为 $f(x)$ 的定义域为

$(-2, +\infty) \therefore x \in (-2, -1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $x \in (-1, +\infty)$, $g'(x) < 0$,

$g(x)$ 单调递减, $\therefore \ln a > g(x)_{\max} = g(-1) = 1$, $\therefore a > e$. 故答案为: $(e, +\infty)$

121. 已知函数 $f(x) = e^{2x+a} - \frac{1}{2} \ln x + \frac{a}{2}$ 在定义域内没有零点, 则实数 a 的取值范围为 ()

解析: $f(x) = e^{2x+a} - \frac{1}{2} \ln x + \frac{a}{2} > 0 \Rightarrow e^{2x+a} + \frac{a}{2} > \frac{1}{2} \ln x \Rightarrow e^{2x+a} + \frac{a}{2} + x > e^{\ln x} + \frac{1}{2} \ln x$

构造: $g(x) = e^{2x} + x \therefore x + \frac{a}{2} > \frac{1}{2} \ln x \Rightarrow \frac{a}{2} > \frac{1}{2} \ln x - x \Rightarrow a > -\ln 2 - 1$

122. 若 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, 关于 x 的不等式 $ax^3 e^{ax} + 2 \ln x \leq 0$, 则实数 a 的最大值为 ()

解析: $ax^3 e^{ax} + 2 \ln x \leq 0 \Rightarrow ax e^{ax} + 2 \ln x \leq \frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{x^2} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} \cdot \ln \frac{1}{x^2}$

因为 $x \in (0, \frac{1}{e}) \Rightarrow \ln \frac{1}{x^2} > 2$, $\therefore ax \leq \ln \frac{2}{x^2} \Rightarrow a \leq -\frac{2 \ln x}{x} \therefore a \leq 2e$

123. 函数 $f(x) = ae^x - x\ln x$ 若 $a \geq \frac{2}{e^2}$, 证明: $f(x) > 0$

解析: 即证: $a \geq \frac{2}{e^2}$, $f(x) = ae^x - x\ln x \geq \frac{2}{e^2}e^x$

124. 已知 x_0 是函数 $f(x) = x^2e^{x-2} + \ln x - 2$ 的零点, 则 $e^{2-x_0} + \ln x_0 = (\quad)$

解析:

$$f(x) = e^{x-2+2\ln x} + x - 2 + 2\ln x - \ln x - x \Rightarrow e^{x_0-2+2\ln x_0} + x_0 - 2 + 2\ln x_0 - \ln x_0 - x_0 = 0$$

$$e^{x_0-2+2\ln x_0} + x_0 - 2 + 2\ln x_0 = \ln x_0 + x_0 = e^{\ln x_0} + \ln x_0$$

$$\text{得: } 2\ln x_0 + x_0 - 2 = \ln x_0 \Rightarrow e^{2-x_0} + \ln x_0 = 2$$

125. 已知关于 x 得方程 $2^{x^2+1} - 2^{ax} = -x^2 + ax - 1$, 当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$ 时有两个不相等的实数根,

则 a 的取值范围 ()

解析: $2^{x^2+1} + x^2 + 1 = 2^{ax} + ax$, 即 $x^2 + 1 = ax$

$$\text{当 } \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \text{ 有两个不同的交点, } a = x + \frac{1}{x}, a \in (2, \frac{5}{2}]$$

126. 函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} (x > 0)$, 函数 $g(x) = mx$, 若不等式 $f(x) + g(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成

立, 求实数 m 的范围?

解析: $\frac{e^x}{x} + mx > 0$, 则 $e^x + mx^2 > 0 \Rightarrow e^x > -mx^2$

$$\text{因为 } e^x \geq \frac{e^2}{4}x^2 \Rightarrow m < -\frac{e^2}{4} \text{ (切线放缩)}$$

127. 若 $h(x) = ae^x - \ln x + \ln a (a > 0)$, 当 $x > a$ 时, 不等式 $h(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的最小值?

解析: $ae^x - \ln x + \ln a \geq 0 \Rightarrow e^{x+\ln a} + x + \ln a \geq \ln x + x$

$$\text{所以: } x + \ln a \geq \ln x \Rightarrow \ln a \geq \ln x - x$$

$$\textcircled{1} 0 < a < 1, x \in (0, 1) \uparrow, (1, +\infty) \downarrow, \ln a \geq -1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{e}$$

$$\textcircled{2} a > 1, x \in [a, +\infty) \therefore a \geq 0 \text{ 恒成立. 综上: } a \geq \frac{1}{e}$$

128. 已知函数 $f(x) = x(e^x - a) - 2\ln x + 2\ln 2 - 2(a \in R)$, 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围 ()

解析: $e^{x+\ln x} - 2\ln x + 2\ln 2 - 2 - ax \geq 0 \Rightarrow e^{x+\ln x - \ln 2} - \ln x + \ln 2 - 1 - \frac{a}{2}x \geq 0$

$$\Rightarrow e^{x+\ln x - \ln 2} - x - \ln x + \ln 2 + (1 - \frac{a}{2})x \geq 0$$

$$\therefore 1 - \frac{a}{2} \geq 0 \Rightarrow a \leq 2$$

容易知道: $h(x) = e^x - x - 1 \geq 0$, $x = 0$ 取等号

$$h(x + \ln x - \ln 2) = e^{x+\ln x - \ln 2} - (x + \ln x - \ln 2) - 1 \geq 0, \quad x_0 + \ln x_0 = \ln 2 \text{ 取等}$$

① 当 $1 - \frac{1}{2}a \geq 0$ 即 $a \leq 2$ 时, 原式恒成立

② 当 $1 - \frac{1}{2}a < 0$ 即 $a > 2$ 时, $-ax < -2x$

$$g(x) = e^{x+\ln x - \ln 2} - (x + \ln x - \ln 2) - 1 + (1 - \frac{1}{2}a)x$$

$$< e^{x+\ln x - \ln 2} - (e^{x+\ln x - \ln 2} - (x + \ln x - \ln 2) - 1) - 1 = h(x + \ln x - \ln 2)$$

$$\text{当 } x_0 + \ln x_0 = \ln 2 \text{ 时, } h(x_0 + \ln x_0 - \ln 2) = 0$$

$$g(x_0) < h(x_0 + \ln x_0 - \ln 2) = 0, \text{ 矛盾: 综合 } a \leq 2$$

129. 已知函数 $f(x) = e^x - 2ax - 1, g(x) = 2a\ln(x+1), a \in R$, 若对任意

$x \in [0, +\infty), f(x) + g(x) \geq x$ 恒成立, 求 a 的取值范围 ()

解析: $e^x - 2ax - 1 + 2a\ln(x+1) - x \geq 0 \Rightarrow (e^x - x - 1)_{x=0}^{\geq 0} + 2a[\ln(x+1) - x]_{x=0}^{\leq 0} \geq 0$

$$\Rightarrow 2a \leq 0 \Rightarrow a \leq 0$$

130. 函数 $f(x) = \frac{1}{m}e^{mx} - \frac{1}{2}x^2$, 若 $m > 1$, 且对

任意 $x \in (e, +\infty), \frac{mx(mx-6) + 2f'(x)}{\ln x} \geq \ln x - 6$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

解析：原式化简为： $(mx)^2 - 6mx + 2e^{mx} \geq (Inx)^2 - 6Inx + 2x$ 。

$$\Leftrightarrow (mx)^2 - 6mx + 2e^{mx} \geq (Inx)^2 - 6Inx + 2e^{Inx}$$

构造 $h(x) = x^2 - 6 + 2e^x = 2(x - 3 + e^x)$ ，等价于 $h(mx) \geq h(Inx)$ ，

$$\because m > 1, x \in (e, +\infty) \Rightarrow mx > 1, Inx > 1,$$

当 $x > 1$ 时， $h'(x) = 2(x - 3 + e^x) > 2(1 - 3 + e) > 0$

$$\text{所以： } h(mx) \geq h(Inx) \Leftrightarrow mx \geq Inx \Leftrightarrow m \geq \frac{Inx}{x} \Rightarrow m \geq \left[\frac{Inx}{x} \right]_{\max} = \frac{1}{e}$$

综上： $m > 1$

131. 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{Inx} (a > 0)$ ，当 $x > 1$ 时， $f(x) \geq \frac{x}{e^x} \cdot \frac{In \frac{x}{a}}{Inx}$ ，求 a 的取值范围。

$$\text{解析： } \frac{ax}{Inx} \geq \frac{x}{e^x} \cdot \frac{In \frac{x}{a}}{Inx} \Rightarrow a \cdot e^x \geq In \frac{x}{a} \Rightarrow e^{x+Ina} \geq Inx - Ina \Rightarrow e^{x+Ina} + x + Ina \geq Inx + x$$

构造 $g(x) = e^x + x$ ，知单增

$$x + Ina \geq Inx \Rightarrow Ina \geq Inx - x, x > 1 \Rightarrow Ina \geq -1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{e}$$

132. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax + 1$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 对任意 $x > 0$ ， $xe^{2x} \geq f(x)$ 恒成立，求实数 a 的最大值。

$$\text{解： (1) } f'(x) = \frac{1}{x} + a = \frac{1+ax}{x} (x > 0)$$

当 $a \geq 0$ 时， $x \in (0, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{1+ax}{x} > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

当 $a < 0$ 时， $x \in (0, -\frac{1}{a})$ ， $f'(x) = \frac{1+ax}{x} > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增；

$x \in (-\frac{1}{a}, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{1+ax}{x} < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减；

综上：当 $a \geq 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 任意 $x > 0$, $xe^{2x} \geq f(x)$, 即 $xe^{2x} - \ln x - ax - 1 \geq 0$ 恒成立,

即 $e^{\ln x + 2x} - \ln x - ax - 1 \geq 0$ 恒成立;

令 $g(x) = e^{\ln x + 2x} - \ln x - ax - 1$, 则任意 $x > 0$, $g(x) = e^{\ln x + 2x} - \ln x - ax - 1 \geq 0$,

因为, 存在正实数 x_0 , 满足: $\ln x_0 + 2x_0 = 0$, 且 $g(x_0) = e^{\ln x_0 + 2x_0} - \ln x_0 - ax_0 - 1 \geq 0$,

所以 $2x_0 - ax_0 \geq 0$, 所以 $a \leq 2$.

下证: 当 $a = 2$ 时成立: 即证: $e^{\ln x + 2x} - \ln x - 2x - 1 \geq 0$,

因为 $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$,

所以: $e^{\ln x + 2x} - \ln x - 2x - 1 \geq \ln x + 2x + 1 - \ln x - 2x - 1 = 0$ 显然成立;

所以实数 a 的最大值为 2.

133. 已知 $a > 0$, 若 $a \ln x \leq x \ln a$ 恒成立, 则 a 的值是_____.

答案: e

解析: 两边同时除以 ax 得, $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln a}{a}$, 要使该不等式恒成立

即 $x = a$ 时, $\frac{\ln x}{x}$ 取最大值, 故 $a = e$.

134. 已知函数 $f(x) = (x - x^m + m \ln x)e^x + 1 (m < 0)$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时恒有 $f(x) \geq 0$, 求实数 m 的取值范围 ()

解析: $f(x) \geq 0 \Rightarrow x - x^m + m \ln x + e^{-x} \geq 0 \Rightarrow e^{-x} + x \geq x^m - m \ln x \Rightarrow e^{-x} + x \geq x^m - m \ln x$

$$\Rightarrow e^{-x} - (-x) \geq x^m - \ln x^m$$

设 $g(t) = e^t - t, g(-x) \geq g(\ln x^m)$

$$g'(t) = e^t - 1 = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow t \in (-\infty, 0) \text{ 递减}$$

$$\because -x < -1, \ln x^m = m \ln x < 0 \therefore -x \leq \ln x^m = m \ln x \Rightarrow m \geq \left(-\frac{x}{\ln x}\right)_{\max} = -e$$

综上 $[-e, 0)$

135. 若 $a > 0, x > 0, e^{\frac{x}{a}} - a^2 \ln(ax+b) \geq b$ 在定义域内恒成立, 求 a 的取值范围 ()

解析: $ax + e^{\frac{x}{a}} \geq a^2 \ln(ax+b) + ax + b \Rightarrow a^2 \ln e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}} \geq a^2 \ln(ax+b) + ax + b,$

构造函数 $g(x) = a^2 \ln x + x$, 易知 $g(x)$ 单增, 故有 $e^{\frac{x}{a}} \geq ax + b$

由 $e^x \geq x+1$ 结合图像得 $a \leq 1, b \leq 1$, 故 $a \in (0, 1]$

136. 当 $a > 0$ 时, 证明 $\frac{e^{2x}}{a} > \ln x + 2 + \ln \frac{2}{a}$

解析: 要证 $\frac{e^{2x}}{a} > \ln x + 2 + \ln \frac{2}{a}$, 即证: $e^{2x-\ln a} - \ln 2x - 2 + \ln a \geq 0$

构造函数 $h(x) = e^x - x - 1$

易证: $h(x) \geq h(0) = 0$

由于 $h(2x - \ln a) = e^{2x-\ln a} - 2x + \ln a - 1, h(\ln 2x) = 2x - \ln 2x - 1$

故 $h(2x - \ln a) + h(\ln 2x) = e^{2x-\ln a} - 2x + \ln a - 1 + 2x - 1 = e^{2x-\ln a} - \ln 2x + \ln a - 2 \geq 0$

当且仅当 $2x = \ln a$ 且 $\ln 2x = 0$ 即 $x = \frac{1}{2}, a = e$ 时等号成立

所以当 $a > 0$ 时, $\frac{e^{2x}}{a} \geq \ln x + 2 + \ln \frac{2}{a}$

137. 若 $a > 1$, 对任意 $x \in (e, +\infty)$, $\frac{2e^{ax} + a^2 x^2 - 6ax - 2x}{\ln x} \geq \ln x - 6$ 恒成立, 求 a 的取值范围 ()

解析: 由 $x > e$ 可得: 即为 $e^{ax} + \frac{a^2 x^2}{2} - 3ax \geq e^{\ln x} + \frac{\ln^2 x}{2} - 3 \ln x,$

因为 $a > 1, x > e$, 故 $ax > e, \ln x > 1$

令 $F(t) = e^t + \frac{t^2}{2} - 3t (t > 0)$, 则 $F(ax) > F(\ln x)$ 在 $x \in (e, +\infty)$ 上恒成立

易知函数 $F(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以只需要 $ax > \ln x$

即 $a > \frac{\ln x}{x}$, 即 $a > \left[\frac{\ln x}{x}\right]_{\max} = \frac{1}{e}$, 即 $a \geq \frac{1}{e}$, 结合 $a > 1$, 所以 $a \in (1, +\infty)$

138. 已知 $f(x) = e^{x+a} + ax$, $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 在定义域上单调递增, 求实数 a 的取值范围.

详解: (1) $f'(x) = e^{x+a} + a$, $x \in R$. $f'(x)$ 在 R 上单调递增.

当 $a \geq 0$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -a + \ln(-a)$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -a + \ln(-a)$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -a + \ln(-a)$;

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -a + \ln(-a))$ 上单调递减; 在 $(-a + \ln(-a), +\infty)$ 上单调递增

(2) $F(x) = e^{x+a} + ax - (x+1)\ln(x+1)$ 定义域是 $(-1, +\infty)$;

函数 $F(x)$ 在定义域上单调递增的充要条件是 $F'(x) \geq 0$ ($x > -1$) 恒成立.

法一: $\therefore F'(x) = e^{x+a} + a - \ln(x+1) - 1 \geq 0$ ($x > -1$) 恒成立, $\therefore F'(0) = e^a + a - 1 \geq 0$

令 $t(x) = e^x + x - 1$, 则 $t'(x) = e^x + 1 > 0 \therefore t(x)$ 在 R 单调递增,

$\therefore t(0) = 0, e^a + a - 1 = t(a) \geq 0 \therefore a \geq 0$

当 $a \geq 0$ 时,

记 $G(x) = F'(x)$, $G'(x) = e^{x+a} - \frac{1}{x+1} = h(x)$, $x > -1$

$h'(x) = e^{x+a} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \therefore G'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore$ 当 $x \rightarrow -1$ 时 $G'(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $G'(x) \rightarrow +\infty$;

$\therefore$ 存在唯一的 x_0 使 $G'(x_0) = e^{x_0+a} - \frac{1}{x_0+1} = 0$,8分

事实上, 取 $x_1 = -1 + \frac{1}{e^a}$,

$$\because a \geq 0 \therefore 0 < \frac{1}{e^a} \leq 1, \therefore -1 < x_1 \leq 0, \therefore e^{x_1+a} \leq e^a, \frac{1}{x_1+1} = e^a$$

$$\therefore G'(x_1) = G'(-1 + \frac{1}{e^a}) \leq 0$$

$$\text{又 } G'(0) = e^a - 1 \geq 0 \therefore \text{存在唯一的 } x_0 \in \left[-1 + \frac{1}{e^a}, 0\right], \text{使 } G'(x_0) = 0,$$

$$G'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0+a} = \frac{1}{x_0+1}, x_0 + a = -\ln(x_0+1)$$

$$\text{当 } -1 < x < x_0, G'(x) < G'(x_0) = 0; \text{ 当 } x > x_0, G'(x) > G'(x_0) = 0;$$

$\therefore G(x)$ 在 $(-1, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增.

$$\therefore F'(x)_{\min} = G(x)_{\min} = G(x_0) \dots \dots \dots 10 \text{分}$$

$$= e^{x_0+a} + a - \ln(x_0+1) - 1 = \frac{1}{x_0+1} + a + (x_0+a) - 1$$

$$= \frac{1}{x_0+1} + (x_0+1) - 2 + 2a \geq 2\sqrt{\frac{1}{x_0+1} \cdot (x_0+1)} - 2 + 2a = 2a \geq 0.$$

$$\therefore a \geq 0 \Rightarrow F'(x) \geq 0$$

综上所述 $a \geq 0$ 为所求

法二:

$$F'(x) = e^{x+a} + a - \ln(x+1) - 1 \geq 0 \quad (x > -1) \\ \Leftrightarrow e^{x+a} + (x+a) \geq x+1 + \ln(x+1) = e^{\ln(x+1)} + \ln(x+1)$$

令 $T(t) = e^t + t, T'(t) = e^t + 1 > 0, \therefore T(t)$ 在 R 上单调递增

$\therefore T(x+a) \geq T(\ln(x+1)) \therefore x+a \geq \ln(x+1)$ 恒成立.

$$\therefore a \geq S(x) = \ln(x+1) - x \therefore a \geq S(x)_{\max}$$

$$S'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \quad (x > -1)$$

$$\therefore -1 < x < 0 \text{ 时 } S'(x) > 0; x > 0 \text{ 时 } S'(x) < 0$$

$\therefore S(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$$\therefore S(x)_{\max} = S(0) = 0$$

$$\therefore a \geq 0$$

法三:

先证明 $h(x) = e^x - x - 1 \geq 0$, 证明如下:

$\therefore h'(x) = e^x - 1 \therefore x = 0$ 时 $h'(x) = 0$; $x < 0$ 时 $h'(x) < 0$; $x > 0$ 时 $h'(x) > 0$;

$\therefore x < 0$ 时 $h(x)$ 单调递减; $x > 0$ 时 $h(x)$ 单调递增. $\therefore$

$$h(x)_{\min} = h(0) = 0 \therefore h(x) \geq h(x)_{\min} = 0$$

$\therefore e^x \geq x + 1 \therefore x + 1 > 0$ 时 $\ln e^x \geq \ln(x + 1)$ 即 $x - \ln(x + 1) \geq 0$.

$\therefore$ 若 $a \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{x+a} + a - \ln(x+1) - 1 \geq (x+a+1) + [a - \ln(x+1) - 1] \\ &= x - \ln(x+1) + 2a \geq 2a \geq 0 \quad (x > -1) \text{恒成立} \end{aligned}$$

$\therefore$ 若 $a < 0$, 则 $e^a < 1 \therefore F'(0) = e^a + a - \ln 1 - 1 = e^a - 1 + a < 0$

$\therefore$ 当且仅当 $a \geq 0$ 时 $F'(x) \geq 0$ 恒成立