目 录

1977 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....1
1977 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....2
1977 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....3
1977 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....4
1977 年普通高等学校招生考试（河北卷）数学试卷.....5
1977 年普通高等学校招生考试（黑龙江卷）数学试卷.....6
1977 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....7
1977 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....8
1977 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....9
1977 年普通高等学校招生考试（天津卷）数学试卷.....10
1978 年普通高等学校招生考试（全国卷）数学试卷.....11
1978 年普通高等学校招生考试（备用卷）数学试卷.....12
1978 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....13
1978 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....14
1980 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....15
1980 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....16
1981 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....17
1981 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....18
1982 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....19
1982 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....20
1983 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....21
1983 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....22
1984 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....23
1984 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....24
1985 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....25
1985 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....26
1986 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....27
1986 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....28
1987 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....29
1987 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....30
1988 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....31
1988 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....32
1989 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....33
1989 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科试卷.....34
1990 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....35
1990 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....36
1990 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科数学.....37
1991 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....38
1991 年普通高等学校招生考试（三南卷）数学试卷.....39
1992 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....40
1992 年普通高等学校招生考试（三南卷）数学试卷.....41
1993 年普通高等学校招生考试（新高考）理科数学.....42
1993 年普通高等学校招生考试（新高考）文科数学.....43
1993 年普通高等学校招生考试（旧高考）理科数学.....44
1993 年普通高等学校招生考试（旧高考）文科数学.....45
1994 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....46
1994 年普通高等学校招生考试（旧高考）文科数学.....47
1995 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....48
1996 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....49
1997 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....50
1997 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科数学.....51
1998 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....52
1998 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科数学.....53
1999 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....54
1999 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科数学.....55
2000 年普通高等学校招生考试（京、皖卷）理科数学.....56
2000 年普通高等学校招生考试（京、皖卷）文科数学.....58
2000 年普通高等学校招生考试（广东卷）数学试卷.....60
2000 年普通高等学校招生考试（旧课程卷）理科数学.....62
2000 年普通高等学校招生考试（旧课程卷）文科数学.....64
2000 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....66
2000 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....68
2000 年普通高等学校招生考试（新课程卷）理科数学.....70
2000 年普通高等学校招生考试（旧课程卷）文科数学.....72
2001 年普通高等学校招生考试（京蒙卷）理科数学.....74
2001 年普通高等学校招生考试（京蒙卷）文科数学.....76
2001 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....78
2001 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....80
2001 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科数学.....82
2001 年普通高等学校招生考试（广东卷）数学试卷.....84
2001 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....86
2001 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....88
2002 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）理科数学.....90
2002 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）文科数学.....92
2002 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....94
2002 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....96
2002 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....98
2002 年普通高等学校招生考试（大纲卷）理科数学.....100
2002 年普通高等学校招生考试（大纲卷）文科数学.....102
2002 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....104
2002 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....106
2002 年普通高等学校招生考试（苏豫粤）数学试卷.....108
2002 年普通高等学校招生考试（新课标）理科数学.....110
2002 年普通高等学校招生考试（新课标）文科数学.....112

2003 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....114
2003 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....116
2003 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....118
2003 年普通高等学校招生考试（新课标）理科数学.....120
2003 年普通高等学校招生考试（新课标）文科数学.....122
2003 年普通高等学校招生考试（广东卷）数学试卷.....124
2003 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....126
2003 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）数学试卷.....128
2003 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....130
2003 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科数学.....132
2003 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....134
2003 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....136
2003 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....138
2003 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....140
2004 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....142
2004 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....144
2004 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）理科数学..... 146
2004 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）文科数学..... 148
2004 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....150
2004 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....152
2004 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....154
2004 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....156
2004 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....158
2004 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....160
2004 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....162
2004 年普通高等学校招生考试（广东卷）数学试卷.....164
2004 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....166
2004 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....168
2004 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....170
2004 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....172
2004 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....174
2004 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）数学试卷.....176
2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）理科数学.....178
2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）文科数学.....180
2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）理科数学.....182
2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）文科数学.....184
2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）理科数学.....186
2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 IIII）文科数学..... 188
2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 IV）理科数学..... 190
2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 IV）文科数学..... 192
2004 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....194
2004 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....196
2004 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....198
2004 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....200
2004 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....202
2004 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....204
2005 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）理科数学..... 206
2005 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）文科数学..... 208
2005 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....210
2005 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....212
2005 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....214
2005 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....216
2005 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....218
2005 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....220
2005 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....222
2005 年普通高等学校招生考试（广东卷）数学试卷.....224
2005 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....226
2005 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....228
2005 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....230
2005 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....232
2005 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....234
2005 年普通高等学校招生考试（江西卷）理科数学.....236
2005 年普通高等学校招生考试（江西卷）文科数学.....238
2005 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）数学试卷.....240
2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）理科数学.....242
2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）文科数学.....244
2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）理科数学.....246
2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）文科数学.....248
2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）理科数学.....250
2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 IIII）文科数学..... 252
2005 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....254
2005 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....256
2005 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....258
2005 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....260
2005 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....262
2005 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....264
2005 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....266
2005 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....268
2006 年普通高等学校春季招生考试（上海卷）数学试卷..... 270
2006 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....272
2006 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....274
2006 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....276
2006 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....278
2006 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....280
2006 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....282
2006 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....284
2006 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....286
2006 年普通高等学校招生考试（广东卷）数学试卷.....288
2006 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....290
2006 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....292

2006 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....294
2006 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....296
2006 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....298
2006 年普通高等学校招生考试（江西卷）理科数学.....300
2006 年普通高等学校招生考试（江西卷）文科数学.....302
2006 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）理科数学.....304
2006 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）文科数学.....306
2006 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅰ）理科数学.....308
2006 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅰ）文科数学.....310
2006 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅱ）理科数学.....312
2006 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅱ）文科数学.....314
2006 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....316
2006 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....318
2006 年普通高等学校招生考试（陕西卷）理科数学.....320
2006 年普通高等学校招生考试（陕西卷）文科数学.....322
2006 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....324
2006 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....326
2006 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....328
2006 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....330
2006 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....332
2006 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....334
2006 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....336
2006 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....338
2007 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....340
2007 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....342
2007 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....344
2007 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....346
2007 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....348
2007 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....350
2007 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅰ）理科数学.....352
2007 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅰ）文科数学.....354
2007 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅱ）理科数学.....356
2007 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅱ）文科数学.....358
2007 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....360
2007 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....362
2007 年普通高等学校招生考试（广东卷）理科数学.....364
2007 年普通高等学校招生考试（广东卷）文科数学.....366
2007 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....368
2007 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....370
2007 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....372
2007 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....374
2007 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....376
2007 年普通高等学校招生考试（江西卷）理科数学.....378
2007 年普通高等学校招生考试（江西卷）文科数学.....380
2007 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）理科数学.....382
2007 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）文科数学.....384
2007 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）理科数学.....386
2007 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）文科数学.....388
2007 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....390
2007 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....392
2007 年普通高等学校招生考试（陕西卷）理科数学.....394
2007 年普通高等学校招生考试（陕西卷）文科数学.....396
2007 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....398
2007 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....400
2007 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....402
2007 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....404
2007 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....406
2007 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....408
2007 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....410
2007 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....412
2008 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....414
2008 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....416
2008 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....418
2008 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....420
2008 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....422
2008 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....424
2008 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅰ）理科数学.....426
2008 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅰ）文科数学.....428
2008 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅱ）理科数学.....430
2008 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅱ）文科数学.....432
2008 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....434
2008 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....436
2008 年普通高等学校招生考试（广东卷）理科数学.....438
2008 年普通高等学校招生考试（广东卷）文科数学.....440
2008 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....442
2008 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....444
2008 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....446
2008 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....448
2008 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....450
2008 年普通高等学校招生考试（江西卷）理科数学.....452
2008 年普通高等学校招生考试（江西卷）文科数学.....454
2008 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）理科数学.....456
2008 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）文科数学.....458
2008 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）理科数学.....460
2008 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）文科数学.....462
2008 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....464
2008 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....466
2008 年普通高等学校招生考试（陕西卷）理科数学.....468
2008 年普通高等学校招生考试（陕西卷）文科数学.....470
2008 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....472

2008 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....474
2008 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....476
2008 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....478
2008 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....480
2008 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....482
2008 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....484
2008 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....486
2009 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....488
2009 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....490
2009 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....492
2009 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....494
2009 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....496
2009 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....498
2009 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅰ）理科数学.....500
2009 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅰ）文科数学.....502
2009 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅱ）理科数学.....504
2009 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅱ）文科数学.....506
2009 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....508
2009 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....510
2009 年普通高等学校招生考试（广东卷）理科数学.....512
2009 年普通高等学校招生考试（广东卷）文科数学.....514
2009 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....516
2009 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....518
2009 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....520
2009 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....522
2009 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....524
2009 年普通高等学校招生考试（江西卷）理科数学.....526
2009 年普通高等学校招生考试（江西卷）文科数学.....528
2009 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）理科数学.....530
2009 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）文科数学.....532
2009 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）理科数学.....534
2009 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）文科数学.....536
2009 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....538
2009 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....540
2009 年普通高等学校招生考试（陕西卷）理科数学.....542
2009 年普通高等学校招生考试（陕西卷）文科数学.....544
2009 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....546
2009 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....548
2009 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....550
2009 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....552
2009 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....554
2009 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....556
2009 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....558
2009 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....560
2010 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....562
2010 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....564
2010 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....566
2010 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....568
2010 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....570
2010 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....572
2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅰ）理科数学.....574
2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅰ）文科数学.....576
2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅱ）理科数学.....578
2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷Ⅱ）文科数学.....580
2010 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....582
2010 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....584
2010 年普通高等学校招生考试（广东卷）理科数学.....586
2010 年普通高等学校招生考试（广东卷）文科数学.....588
2010 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....590
2010 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....592
2010 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....594
2010 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....596
2010 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....598
2010 年普通高等学校招生考试（江西卷）理科数学.....600
2010 年普通高等学校招生考试（江西卷）文科数学.....602
2010 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）理科数学.....604
2010 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）文科数学.....606
2010 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....608
2010 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科数学.....610
2010 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....612
2010 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....614
2010 年普通高等学校招生考试（陕西卷）理科数学.....616
2010 年普通高等学校招生考试（陕西卷）文科数学.....618
2010 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....620
2010 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....622
2010 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....624
2010 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....626
2010 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....628
2010 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....630
2010 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....632
2010 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....634
2011 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....636
2011 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....638
2011 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....640
2011 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....642
2011 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....644
2011 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....646
2011 年普通高等学校招生考试（大纲卷）理科数学.....648
2011 年普通高等学校招生考试（大纲卷）文科数学.....650
2011 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....652

2011 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....654
2011 年普通高等学校招生考试（广东卷）理科数学.....656
2011 年普通高等学校招生考试（广东卷）文科数学.....658
2011 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....660
2011 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....662
2011 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....664
2011 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....666
2011 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....668
2011 年普通高等学校招生考试（江西卷）理科数学.....670
2011 年普通高等学校招生考试（江西卷）文科数学.....672
2011 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）理科数学.....674
2011 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）文科数学.....676
2011 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....678
2011 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科数学.....680
2011 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....682
2011 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....684
2011 年普通高等学校招生考试（陕西卷）理科数学.....686
2011 年普通高等学校招生考试（陕西卷）文科数学.....688
2011 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....690
2011 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....692
2011 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....694
2011 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....696
2011 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....698
2011 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....700
2011 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....702
2011 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....704
2012 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....706
2012 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....708
2012 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....710
2012 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....712
2012 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....714
2012 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....716
2012 年普通高等学校招生考试（大纲卷）理科数学.....718
2012 年普通高等学校招生考试（大纲卷）文科数学.....720
2012 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....722
2012 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....724
2012 年普通高等学校招生考试（广东卷）理科数学.....726
2012 年普通高等学校招生考试（广东卷）文科数学.....728
2012 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....730
2012 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....732
2012 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....734
2012 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....736
2012 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....738
2012 年普通高等学校招生考试（江西卷）理科数学.....740
2012 年普通高等学校招生考试（江西卷）文科数学.....742
2012 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）理科数学.....744
2012 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）文科数学.....746
2012 年普通高等学校招生考试（全国卷）理科数学.....748
2012 年普通高等学校招生考试（全国卷）文科数学.....750
2012 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....752
2012 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....754
2012 年普通高等学校招生考试（陕西卷）理科数学.....756
2012 年普通高等学校招生考试（陕西卷）文科数学.....758
2012 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....760
2012 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....762
2012 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....764
2012 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....766
2012 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....768
2012 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....770
2012 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....772
2012 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....774
2013 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....776
2013 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....778
2013 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....780
2013 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....782
2013 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....784
2013 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....786
2013 年普通高等学校招生考试（大纲卷）理科数学.....788
2013 年普通高等学校招生考试（大纲卷）文科数学.....790
2013 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....792
2013 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....794
2013 年普通高等学校招生考试（广东卷）理科数学.....796
2013 年普通高等学校招生考试（广东卷）文科数学.....798
2013 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....800
2013 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....802
2013 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....804
2013 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....806
2013 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....808
2013 年普通高等学校招生考试（江西卷）理科数学.....810
2013 年普通高等学校招生考试（江西卷）文科数学.....812
2013 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）理科数学.....814
2013 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）文科数学.....816
2013 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅰ）理科数学.....818
2013 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅰ）文科数学.....820
2013 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅱ）理科数学.....822
2013 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅱ）文科数学.....824
2013 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....826
2013 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....828
2013 年普通高等学校招生考试（陕西卷）理科数学.....830
2013 年普通高等学校招生考试（陕西卷）文科数学.....832

2013 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....834
2013 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....836
2013 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....838
2013 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....840
2013 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....842
2013 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....844
2013 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....846
2013 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....848
2013 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....850
2013 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....852
2014 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....854
2014 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....856
2014 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....858
2014 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....860
2014 年普通高等学校招生考试（大纲卷）理科数学.....862
2014 年普通高等学校招生考试（大纲卷）文科数学.....864
2014 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....866
2014 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....868
2014 年普通高等学校招生考试（广东卷）理科数学.....870
2014 年普通高等学校招生考试（广东卷）文科数学.....872
2014 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....874
2014 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....876
2014 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....878
2014 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....880
2014 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....882
2014 年普通高等学校招生考试（江西卷）理科数学.....884
2014 年普通高等学校招生考试（江西卷）文科数学.....886
2014 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）理科数学.....888
2014 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）文科数学.....890
2014 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅰ）理科数学.....892
2014 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅰ）文科数学.....894
2014 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅱ）理科数学.....896
2014 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅱ）文科数学.....898
2014 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....900
2014 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....902
2014 年普通高等学校招生考试（陕西卷）理科数学.....904
2014 年普通高等学校招生考试（陕西卷）文科数学.....906
2014 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....908
2014 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....910
2014 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....912
2014 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....914
2014 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....916
2014 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....918
2014 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....920
2014 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....922
2015 年普通高等学校招生考试（安徽卷）理科数学.....924
2015 年普通高等学校招生考试（安徽卷）文科数学.....926
2015 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....928
2015 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....930
2015 年普通高等学校招生考试（重庆卷）理科数学.....932
2015 年普通高等学校招生考试（重庆卷）文科数学.....934
2015 年普通高等学校招生考试（福建卷）理科数学.....936
2015 年普通高等学校招生考试（福建卷）文科数学.....938
2015 年普通高等学校招生考试（广东卷）理科数学.....940
2015 年普通高等学校招生考试（广东卷）文科数学.....942
2015 年普通高等学校招生考试（湖北卷）理科数学.....944
2015 年普通高等学校招生考试（湖北卷）文科数学.....946
2015 年普通高等学校招生考试（湖南卷）理科数学.....948
2015 年普通高等学校招生考试（湖南卷）文科数学.....950
2015 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....952
2015 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅰ）理科数学.....954
2015 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅰ）文科数学.....956
2015 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅱ）理科数学.....958
2015 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅱ）文科数学.....960
2015 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....962
2015 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....964
2015 年普通高等学校招生考试（陕西卷）理科数学.....966
2015 年普通高等学校招生考试（陕西卷）文科数学.....968
2015 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....970
2015 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....972
2015 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....974
2015 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....976
2015 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....978
2015 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....980
2015 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....982
2015 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....984
2016 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....986
2016 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....988
2016 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....990
2016 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅰ）理科数学.....992
2016 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅰ）文科数学.....994
2016 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅱ）理科数学.....996
2016 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅱ）文科数学.....998
2016 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅲ）理科数学..... 1000
2016 年普通高等学校招生考试（全国卷Ⅲ）文科数学..... 1002
2016 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....1004
2016 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....1006
2016 年普通高等学校招生考试（上海卷）理科数学.....1008
2016 年普通高等学校招生考试（上海卷）文科数学.....1010
2016 年普通高等学校招生考试（四川卷）理科数学.....1012

2016 年普通高等学校招生考试（四川卷）文科数学.....1014
2016 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....1016
2016 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....1018
2016 年普通高等学校招生考试（浙江卷）理科数学.....1020
2016 年普通高等学校招生考试（浙江卷）文科数学.....1022
2017 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....1024
2017 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....1026
2017 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....1028
2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）理科数学..... 1030
2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）文科数学..... 1032
2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）理科数学..... 1034
2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）文科数学..... 1036
2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）理科数学..... 1038
2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）文科数学..... 1040
2017 年普通高等学校招生考试（山东卷）理科数学.....1042
2017 年普通高等学校招生考试（山东卷）文科数学.....1044
2017 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....1046
2017 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....1048
2017 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....1050
2017 年普通高等学校招生考试（浙江卷）数学试卷.....1052
2018 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....1054
2018 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....1056
2018 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....1058
2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）理科数学..... 1060
2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）文科数学..... 1062
2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）理科数学..... 1064
2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）文科数学..... 1066
2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）理科数学..... 1068
2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）文科数学..... 1070
2018 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....1072
2018 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....1074
2018 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....1076
2018 年普通高等学校招生考试（浙江卷）数学试卷.....1078
2019 年普通高等学校招生考试（北京卷）理科数学.....1080
2019 年普通高等学校招生考试（北京卷）文科数学.....1082
2019 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....1084
2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）理科数学..... 1086
2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）文科数学..... 1088
2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）理科数学..... 1090
2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）文科数学..... 1092
2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）理科数学..... 1094
2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）文科数学..... 1096
2019 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....1098
2019 年普通高等学校招生考试（天津卷）理科数学.....1100
2019 年普通高等学校招生考试（天津卷）文科数学.....1102
2019 年普通高等学校招生考试（浙江卷）数学试卷.....1104
2020 年普通高等学校招生考试（北京卷）数学试卷.....1106
2020 年普通高等学校招生考试（江苏卷）数学试卷.....1108
2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）理科数学..... 1110
2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）文科数学..... 1112
2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）理科数学..... 1114
2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）文科数学..... 1116
2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）理科数学..... 1118
2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）文科数学..... 1120
2020 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....1122
2020 年普通高等学校招生考试（天津卷）数学试卷.....1124
2020 年普通高等学校招生考试（新高考 I）数学试卷..... 1126
2020 年普通高等学校招生考试（新高考 II）数学试卷..... 1128
2020 年普通高等学校招生考试（浙江卷）数学试卷.....1130
2021 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）理科数学..... 1132
2021 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）文科数学..... 1134
2021 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）理科数学..... 1136
2021 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）文科数学..... 1138
2021 年普通高等学校招生考试（上海卷）数学试卷.....1140
2021 年普通高等学校招生考试（新高考 I）数学试卷..... 1142
2021 年普通高等学校招生考试（浙江卷）数学试卷.....1144

1977 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

1. 解方程: $\sqrt{x-1}=3-x$.

2. 计算: $2^{-\frac{1}{2}}+\frac{2^0}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

3. 已知 $\lg 2=0.3010$, $\lg 3=0.4771$, 求 $\lg\sqrt{45}$.

4. 证明: $(1+\tan\alpha)^2=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

5. 求过两直线 $x+y-7=0$ 和 $3x-y-1=0$ 的交点且过 $(1,1)$ 点的直线方程.

6. 某工厂今年七月份的产值为 100 万元, 以后每月产值比上月增加 20%, 问今年七月份到十月份总产值是多少?

7. 已知二次函数 $y=x^2-6x+5$.
   (1) 求出它的图象的顶点坐标和对称轴方程;
   (2) 画出它的图象;
   (3) 分别求出它的图象和 x 轴、y 轴的交点坐标.

8. 一只船以 20 海里/小时的速度向正东航行, 起初船在 A 处看见一灯塔 B 在船的北 45° 东方向, 一小时后船在 C 处看见这个灯塔在船的北 15° 东方向, 求这时船和灯塔的距离 CB.

9. 一个圆内接三角形 ABC, $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D, 交外接圆于 E, 求证: $AD\cdot AE=AC\cdot AB$.

10. 当 m 取哪些值时, 直线 $y=x+m$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 有一个交点? 有两个交点? 没有交点? 当它们有一个交点时, 画出它的图象.

附加题

11. (1) 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{\pi}{x}, & (x\neq 0)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$ 的导数.

   (2) 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

12. (1) 试用 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述“函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续”的定义.

   (2) 试证明: 若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 且 $f(x_0)>0$, 则存在一个 x_0 的 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 在这个邻域内, 处处有 $f(x)>0$.

1977 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

1. 计算: $3^0+3^{-1}-\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. 化简: $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

3. 解方程 $\dfrac{1}{x-1}+1=\dfrac{4x-2}{x^2-1}$.

4. 不查表求 $\sin 105^\circ$ 的值.

5. 一个正三棱柱形的零件, 它的高是 10 cm, 底面边长是 2 cm, 求它的体积.

6. 一条直线过点 $(1,-3)$, 并且与直线 $2x+y-5=0$ 平行, 求这条直线的方程.

7. 证明: 等腰三角形两腰上的高相等.

8. 为了测湖岸边 A、B 两点的距离, 选择一点 C, 测得 $CA=50$ 米, $CB=30$ 米, $\angle ACB=120^\circ$, 求 AB.

9. 在 2 和 30 中间插入两个正数, 这两个正数插入后使前三个数成等比数列, 后三个数成等差数列, 求插入的两个正数?

10. 已知二次函数 $y=x^2-4x+3$.
    (1) 求出它的图象的顶点坐标和对称轴方程;
    (2) 画出它的图象;
    (3) 求出它的图象与直线 $y=x-3$ 的交点坐标.

1977 年普通高等学校招生考试（福建卷）

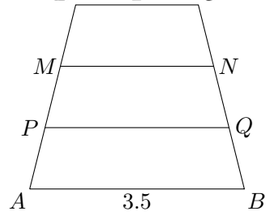
理科数学

1. (1) 计算: $5-3\times\left[\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}+1031\times(0.25-2^{-2})\right]\div 9^0$.

(2) $y=\dfrac{\cos 160^\circ-\cos 170^\circ}{\tan 155^\circ}$ 的值是正的还是负的? 为什么?

(3) 求函数 $y=\dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

(4) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $DM=MP=PA$, $MN\parallel PQ\parallel AB$, $DC=2$ cm, $AB=3.5$ cm, 求 MN 和 PQ 的长.



(5) 已知 $\lg 3=0.4771$, $\lg x=-3.5229$, 求 x.

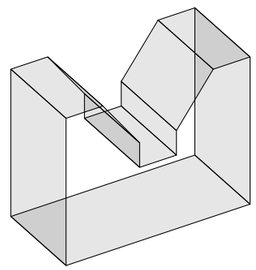
(6) 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$.

(7) 解方程: $\sqrt{4x+1}-2x+1=0$.

(8) 化简: $\dfrac{a^{2n+1}-6a^{2n}+9a^{2n-1}}{a^{n+1}-4a^n+3a^{n-1}}$.

(9) 求函数 $y=2-5x-3x^2$ 的极值.

(10) 画出下面 V 形铁块的三视图 (只要画草图)



2. (1) 解不等式: $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x+2}<0$.

(2) 证明: $\dfrac{2\cos\theta-\sin 2\theta}{2\cos\theta+\sin 2\theta}=\tan^2\left(\dfrac{90^\circ-\theta}{2}\right)$.

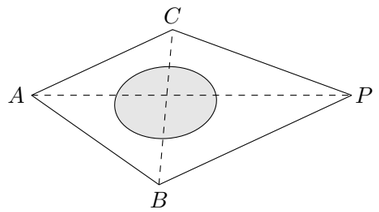
(3) 某中学革命师生自己动手油漆一个直径为 1.2 米的地球仪, 如果每平方米面积需要油漆 150 克, 问共需油漆多少克? (答案保留整数)

(4) 某农机厂开展“工业学大庆”运动, 在十月份生产拖拉机 1000 台. 这样, 一月至十月的产量恰好完成全年生产任务. 工人同志为了加速农业机械化, 计划在年底前再生产 2310 台, 求十一月、十二月份平均每月增长率.

3. 在半径为 R 的圆内接正六边形内, 依次连结各边的中点, 得一正六边形, 又在这一正六边形内, 再依次连结各边的中点, 又得一正六边形, 这样无限地继续下去, 求:
(1) 前 n 个正六边形的周长之和 S_n;
(2) 所有这些正六边形的周长之和 S.

4. 动点 $P(x,y)$ 到两定点 $A(-3,0)$ 和 $B(3,0)$ 的距离的比等于 2 , 求动点 P 的轨迹方程, 并说明这轨迹是什么图形.

5. 某大队在农田基本建设的规划中, 要测定被障碍物隔开的两点 A, P 之间的距离, 他们土法上马, 在障碍物的两侧, 选取两点 B 和 C (如图), 测得 $AB=AC=50$ m, $\angle BAC=60^\circ$, $\angle ABP=120^\circ$, $\angle ACP=135^\circ$, 求 A 和 P 之间的距离. (答案可用最简根式表示)



6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{24\alpha}-\dfrac{y^2}{16\cot\alpha}=1$ (α 为锐角) 和圆 $(x-m)^2+y^2=r^2$ 相切于点 $A(4\sqrt{3},4)$, 求 α, m, r 的值.

7. 设数列 1 , 2 , 4 , $\cdots$ 前 n 项和是 $S_n=a+bn+cn^2+dn^3$, 求这数列的通项 a_n 的公式, 并确定 a, b, c, d 的值.

附加题

8. 求函数 $y=\mathrm{e}^{-2x}\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的导数.

9. 求定积分: $\int_0^1\left(x\mathrm{e}^{x^2}+x^2\mathrm{e}^2\right)\mathrm{d}x$.

1977 年普通高等学校招生考试（福建卷）

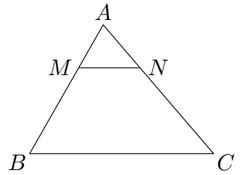
文科数学

1. (1) 计算: $5-3\times\left[\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}+1031\times(0.25-2^{-2})\right]\div 9^0$.

(2) 求 $\cos(-840^\circ)$ 的值.

(3) 化简: $\sqrt{(2x-3)^2}$.

(4) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $MN\ /\!/\ BC$, $MN=1$ cm, $BC=3$ cm, $BM=AM+2$, 求 AM 的长.



(5) 已知 $\lg 3=0.4771$, $\lg x=3.4771$, 求 x.

(6) 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$.

(7) 求函数 $y=x^2+2x-4$ 的极小值.

(8) 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, 求 $\tan\alpha$ 的值.

(9) 写出等比数列 $-\dfrac{2}{9}$, $\dfrac{2}{27}$, $-\dfrac{2}{81}$, $\cdots$ 的通项公式.

2. (1) 求函数 $y=\dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

(2) 证明: $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+\sin 2\alpha=1$.

(3) 解方程: $2\sqrt{x-3}+6=x$.

(4) 解不等式: $x^2-x-6<0$.

(5) 把分母有理化: $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$.

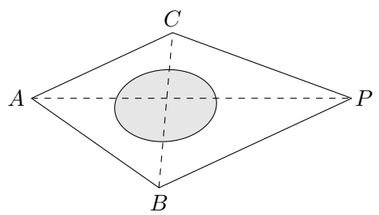
(6) 某中学革命师生自己动手油漆一个直径为 1.2 米的地球仪, 如果每平方米面积需要油漆 150 克, 问共需油漆多少克? (答案保留整数)

3. 某农机厂开展“工业学大庆”运动, 在十月份生产拖拉机 1000 台. 这样, 一月至十月的产量恰好完成全年生产任务. 工人同志为了加速农业机械化, 计划在年底前再生产 2310 台.
① 求十一月、十二月份每月增长率;
② 原计划年产拖拉机多少台?

4. 求抛物线 $y^2=9x$ 和圆 $x^2+y^2=36$ 在第一象限的交点处的切线方程.

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{24\alpha}-\dfrac{y^2}{16\cot\alpha}=1$ (α 为锐角) 和圆 $(x-m)^2+y^2=r^2$ 相切于点 $A(4\sqrt{3},4)$, 求 α, m, r 的值.

6. 某大队在农田基本建设的规划中, 要测定被障碍物隔开的两点 A, P 之间的距离, 他们土法上马, 在障碍物的两侧, 选取两点 B 和 C (如图), 测得 $AB=AC=50$ m, $\angle BAC=60^\circ$, $\angle ABP=120^\circ$, $\angle ACP=135^\circ$, 求 A 和 P 之间的距离. (答案可用最简根式表示)



1977 年普通高等学校招生考试（河北卷）

数学试卷

1. 解答下列各题:

(1) 叙述函数的定义.

(2) 求函数 $y=1-\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$ 的定义域.

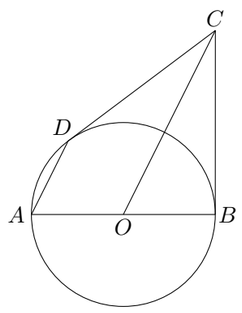
(3) 计算: $\left[1-(0.5)^{-2}\right]\div\left(-\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$.

(4) 计算: $\log_4 2$.

(5) 分解因式: x^2y-2y^3.

(6) 计算: $\sin\dfrac{4\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{25\pi}{6}\cdot\tan\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

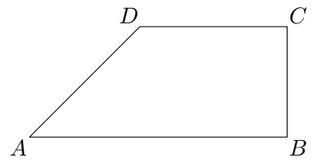
2. 证明: 如图, AB 是圆 O 的直径, CB 是圆 O 的切线, 切点为 B, OC 平行于弦 AD, 求证: DC 是圆 O 的切线.



3. 证明: $\dfrac{\sin 2\alpha+1}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\dfrac{1}{2}\tan\alpha+\dfrac{1}{2}$.

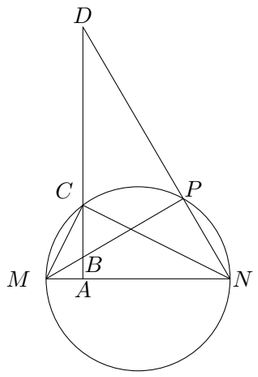
4. 已知 $2\lg x+\lg 2=\lg(x+6)$, 求 x.

5. 某生产队要建立一个形状是直角梯形的苗圃, 其两邻边借用夹角为 135° 的两面墙, 另外两边是总长为 30 米的篱笆 (如图, AD 和 DC 为墙) , 问篱笆的两边各多长时, 苗圃的面积最大? 最大面积是多少?



6. 工人师傅要用铁皮做一个上大下小的正四棱台形容器 (上面开口), 使其容积为 208 立方米, 高为 4 分米, 上口边长与下底面边长的比为 5 : 2, 做这样的容器需要多少平方米的铁皮? (不计容器的厚度和加工余量, 不要求写出已知、求解, 直接求解并画图即可)

7. 如图, MN 为圆的直径, P、C 为圆上两点, 连 PM, PN, 过 C 作 MN 的垂线与 MN, MP 和 NP 的延长线依次相交于 A, B, D, 求证: $AC^2=AB\cdot AD$.



8. 下列两题选做一题.

【甲】已知椭圆短轴长为 2 , 中心与抛物线 $y^2=4x$ 的顶点重合, 椭圆的一个焦点恰是此抛物线的焦点, 求椭圆方程及其长轴的长.

【乙】已知菱形的一对内角各为 60°, 边长为 4 , 以菱形对角线所在的直线为坐标轴建立直角坐标系, 以菱形 60° 角的两个顶点为焦点, 并且过菱形的另外两个顶点作椭圆, 求椭圆方程.

附加题

9. 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开为 x 的幂级数, 并求出收敛区间. (e=2.718 为自然对数的底数)

10. 利用定积分计算椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 所围成的面积.

1977 年普通高等学校招生考试（黑龙江卷）

数学试卷

1. 解答下列各题:
   (1) 解方程: $\sqrt{3x+4}=4$.

   (2) 解不等式: $|x|<5$.

   (3) 已知正三角形的外接圆半径为 $6\sqrt{3}$ cm, 求它的边长.

2. 计算下列各题:
   (1) $\sqrt{m^2-2ma+a^2}$.

   (2) $\cos 78^\circ\cdot\cos 3^\circ+\cos 12^\circ\cdot\sin 3^\circ$.

   (3) $\arcsin\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$.

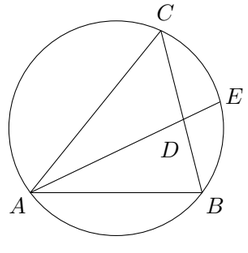
3. 解下列各题:
   (1) 解方程: $3^{x+1}-9^{\frac{x}{2}}=18$.

   (2) 求数列 2 , 4 , 8 , 16 , $\cdots$ 前十项的和.

4. 解下列各题:
   (1) 圆锥的高为 6 cm, 母线和底面半径成 30° 角, 求它的侧面积.

   (2) 求过点 $(1,4)$ 且与直线 $2x-5y+3=0$ 垂直的直线方程.

5. 如果 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D, 交它的外接圆于 E, 那么 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.



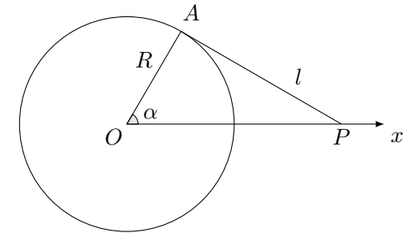
6. 前进大队响应毛主席关于“绿化祖国”的伟大号召, 1975 年造林 200 亩, 又知 1975 年至 1977 年这三年内共造林 728 亩, 求后两年造林面积的年平均增长率是多少?

7. 解方程: $\lg(2^x+2x-16)=x(1-\lg 5)$.

8. 已知三角形的三边成等差数列, 周长为 36 cm, 面积为 54 cm^2, 求三边的长.

附加题

9. 如图, AP 表示发动机的连杆, OA 表示它的曲柄. 当 A 在圆上作圆周运动时, P 在 x 轴上作直线运动, 求 P 点的横坐标. 为什么当 α 是直角时, $\angle P$ 是最大?



10. 求曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

1977 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

1. (1) 计算: $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}-(3.14)^{0}+\left(-\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

(2) 求函数 $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$ 的定义域.

(3) 解方程: $5^{x^2+2x}=125$.

(4) 计算: $-\log_3\left(\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}\right)$.

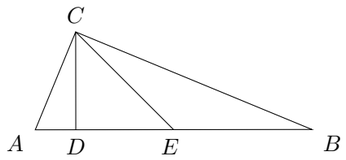
(5) 把直角坐标方程 $(x-3)^2+y^2=9$ 化为极坐标方程.

(6) 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

(7) 分解因式: $x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$.

2. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作倾斜角为 $\dfrac{3}{4}\pi$ 的直线, 它与抛物线相交于 A、B 两点. 求 A、B 两点间的距离.

3. 在直角三角形 ABC 中, $\angle ACB=90^\circ$, CD、CE 分别为斜边 AB 上的高和中线, 且 $\angle BCD$ 与 $\angle ACD$ 之比为 $3:1$, 求证: $CD=DE$.



4. 在周长为 300 cm 的圆周上, 有甲、乙两球以大小不等的速度作匀速圆周运动. 甲球从 A 点出发按逆时针方向运动, 乙球从 B 点出发按顺时针方向运动, 两球相遇于 C 点相遇后, 两球各自反方向作匀速圆周运动, 但这时甲球速度的大小是原来的 2 倍, 乙球速度的大小是原来的一半, 以后他们第二次相遇于 D 点. 已知 $\overset{\frown}{AmC}=40$ 厘米, $\overset{\frown}{BnD}=20$ 厘米, 求 $\overset{\frown}{ACB}$ 的长度.

5. (1) 若三角形三内角成等差数列, 求证: 必有一内角为 60°.

(2) 若三角形三内角成等差数列, 而且三边又成等比数列, 求证: 三角形三内角都是 60°.

6. 在两条平行直线 AB 和 CD 上分别取定一点 M 和 N, 在直线 AB 上取一定线段 $ME=a$; 在线段 MN 上取一点 K, 连结 EK 并延长交 CD 于 F. 试问 K 取在哪里时, $\triangle EMK$ 与 $\triangle FNK$ 的面积之和最小? 最小值是多少?

附加题

7. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

8. 求不定积分: $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

1977 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

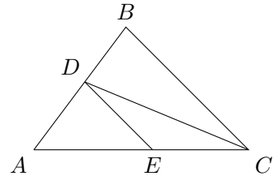
1. (1) 化简: $\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)\div\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$.

(2) 计算: $\dfrac{1}{2}\lg 25+\lg 2-\lg\sqrt{0.1}-\log_2 9\times\log_3 2$.

(3) $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$, 验算 i 是否方程 $2x^4+3x^3-3x^2+3x-5=0$ 的解.

(4) 求证: $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}+\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}=\dfrac{2}{\cos 2\theta}$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 的平分线交 AB 于 D, 过 D 作 BC 的平行线交 AC 于 E, 已知 $BC=a$, $AC=b$, 求 DE 的长.



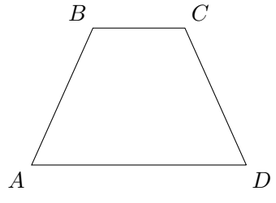
3. 已知圆 A 的直径为 $2\sqrt{3}$, 圆 B 的直径为 $4-2\sqrt{3}$, 圆 C 的直径为 2, 圆 A 与圆 B 外切, 圆 A 又与圆 C 外切, $\angle A=60°$, 求 BC 及 $\angle C$.

4. 正六棱锥 $V-ABCDEF$ 的高为 2 cm, 底面边长为 2 cm.
(1) 按 1 : 1 画出它的二视图;
(2) 求其侧面积;
(3) 求它的侧棱和底面的夹角.

5. 解不等式: $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ x^2-x-6>0\end{cases}$, 并在数轴上把它的解表示出来.

6. 已知两定点 $A(-4,0)$、$B(4,0)$, 一动点 $P(x,y)$ 与两定点 A、B 的连线 PA、PB 的斜率的乘积为 $-\dfrac{1}{4}$. 求点 P 的轨迹方程, 并把它化为标准方程, 指出是什么曲线.

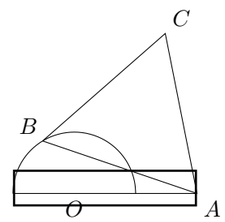
7. 等腰梯形的周长为 60, 底角为 60°, 问这梯形各边长为多少时, 面积最大?



8. 当 k 为何值时, 方程组 $\begin{cases}x-\sqrt{y-2}=0 & (1)\\ kx-y-2k-10=0 & (2)\end{cases}$ 有两组相同的解? 并求出它的解.

附加题

9. 如图所示, 半圆 O 的直径为 2, A 为半圆直径的延长线上的一点, 且 $OA=2$, B 为半圆上任一点, 以 AB 为边作等边 $\triangle ABC$, 问 B 在什么地方时, 四边形 $OACB$ 的面积最大? 并求出这个面积的最大值.



10. 已知曲线 $y=x^2-2x+3$ 与直线 $y=x+3$ 相交于点 $P(0,3)$、$Q(3,6)$ 两点.
(1) 分别求出曲线在交点的切线的斜率;
(2) 求出曲线与直线所围成的图形的面积.

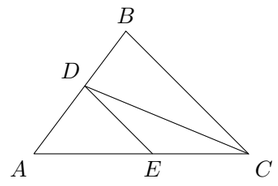
1977 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

1. (1) 计算: $\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\right]\div\frac{3}{2}$.

(2) 某生产队去年养猪 96 头, 今年养猪 120 头, 问今年比去年增加百分之几? 计划明年比今年多养 40%, 明年养猪几头?

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 的平分线交 AB 于 D, 过 D 作 BC 的平分线交 AC 于 E, 已知 $BC=a$, $AC=b$, 求 DE 的长.



3. (1) 化简: $\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)\div\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$.

(2) 解不等式: $\frac{2x-1}{3}>\frac{3x-1}{2}-4$.

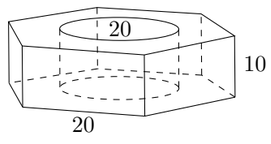
(3) 解方程: $\frac{4}{x+3}-\frac{1}{x-3}=1-\frac{2x}{x^2-9}$.

4. (1) 计算: $\frac{\sin 225^\circ+\tan 330^\circ}{\cos(-120^\circ)}$.

(2) 求证: $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$.

(3) $\triangle ABC$ 中, $\angle A=45^\circ$, $\angle B=75^\circ$, $AB=12$, 求 BC 的长.

5. 六角螺帽尺寸如图, 求它的体积 (精确的 1 mm^3).



6. 求直线 $x+\sqrt{3}y+3\sqrt{3}=0$ 的斜率和倾角, 并画出它的图形.

7. 当 x 为何值时, 函数 $y=x^2-8x+5$ 的值最小, 并求出这个最小值.

8. 将浓度为 96% 和 36% 的甲、乙两种流酸配制成浓度为 70% 的流酸 600 升, 问应从甲、乙两种流酸中各取多少升?

1977 年普通高等学校招生考试（天津卷）

数学试卷

1. (1) 在什么条件下, $\dfrac{y}{2x}$

① 是正数;

② 是负数;

③ 等于零;

④ 没有意义?

(2) 比较下列各组数的大小, 并说明理由.

① $\cos 31^\circ$ 与 $\cos 30^\circ$.

② $\log_2 1$ 与 $\log_2 \dfrac{1}{4}$.

(3) 求值:

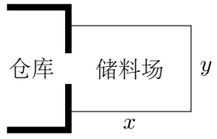
① $\tan\left(5\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

② $(-2)^0 \times (0.01)^{\frac{1}{2}}$.

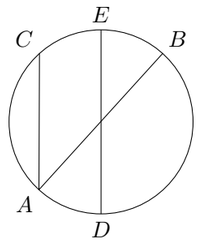
(4) 计算: $\lg 12.5 - \lg\dfrac{5}{8} + \lg\sin 30^\circ$.

(5) 解方程: $\dfrac{4x}{x^2-4} - \dfrac{2}{x-2} = 1 - \dfrac{1}{x+2}$.

2. (1) 某工厂准备在仓库的一侧建立一个矩形储料场 (如图), 现有 50 米长的铁丝网, 如果用它来围成这个储料场, 那么长和宽各是多少时, 这个储料场的面积最大? 并求出这个最大的面积.

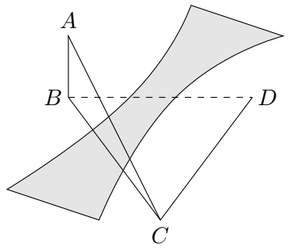


(2) 如图, 已知 AB、DE 是圆 O 的直径, AC 是弦, $AC \parallel DE$, 求证: $CE = EB$.



3. 如果已知 $bx^2 - 4bx + 2(a+c) = 0$ $(b \neq 0)$ 有两个相等的实数根, 求证: a, b, c 成等差数列.

4. (1) 如图, 为求河对岸某建筑物的高 AB, 在地面上引一条基线 $CD = a$, 测得 $\angle ACB = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $\angle BDC = \gamma$, 求 AB.



(2) 如果 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $a = 33$ 米, 求建筑物 AB 的高. (保留一位小数)

5. (1) 求直线 $3x - 2y + 1 = 0$ 和 $x + 3y + 4 = 0$ 的交点坐标.

(2) 求通过上述交点, 并同直线 $x + 3y + 4 = 0$ 垂直的直线方程.

附加题

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{x - \sin nx}$ 的值.

7. 计算: $\int_0^4 \dfrac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$..

1978 年普通高等学校招生考试（全国卷）

数学试卷

1. (1) 分解因式: $x^2-4xy+4y^2-4z^2$.

(2) 已知正方形的边长为 a, 求侧面积等于这个正方形的面积, 高等于这个正方形边长的直圆柱体的体积.

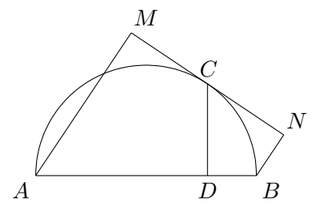
(3) 求函数 $y=\sqrt{\lg(2+x)}$ 的定义域.

(4) 不查表求 $\cos 80^\circ\cos 35^\circ+\cos 10^\circ\cos 55^\circ$ 的值.

(5) 化简: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(\sqrt{4ab^{-1}}\right)^3}{(0.1)^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$.

2. 已知方程 $kx^2+y^2=4$, 其中 k 为实数. 对于不同范围的 k 值, 分别指出方程所代表图形的内形, 并画出显示其数量特征的草图.

3. 如图, AB 是半圆的直径, C 是半圆上一点, 直线 MN 切半圆于 C 点, $AM\perp MN$ 于 M 点, $BN\perp MN$ 于 N 点, $CD\perp AB$ 于 D 点, 求证:
(1) $CD=CM=CN$;
(2) $CD^2=AM\cdot BN$.



4. 已知 $\log_{18}9=a$, $18^b=5$, 求 $\log_{36}45$.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角的大小成等差数列, $\tan A\tan C=2+\sqrt{3}$, 求角 A, B, C 的大小. 又已知顶点 C 的对边 c 上的高等于 $4\sqrt{3}$, 求三角形各边 a, b, c 的长. (提示: 必要时可验证 $(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$)

6. 已知 α, β 为锐角, $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$, $3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0$. 求证: $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

7. 已知函数 $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$ (m 为实数).
(1) m 是什么数值时, y 的极值是 0?
(2) 求证: 不论 m 是什么数值, 函数图象 (即抛物线) 的顶点都在同一条直线 L_1 上, 画出 $m=-1$、0、1 时抛物线的草图, 来检验这个结论;
(3) 平行于 L_1 的直线中, 哪些与抛物线相交, 哪些不相交? 求证: 任一条平行于 L_1 而与抛物线相交的直线, 被各抛物线截出的线段都相等.

1978 年普通高等学校招生考试（备用卷）

数学试卷

1. (1) 分解因式: $x^2-2xy+y^2+2x-2y-3$.

(2) 求 $\sin 30^\circ-\tan 0^\circ+\cot\dfrac{\pi}{4}-\cos^2\dfrac{5\pi}{6}$.

(3) 求函数 $y=\dfrac{\lg(25-5^x)}{x+1}$ 的定义域.

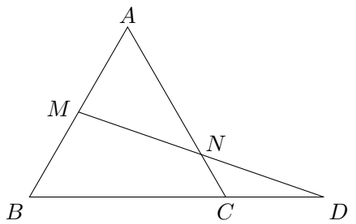
(4) 已知直圆锥体的底面半径等于 1 cm, 母线的长等于 2 cm, 求它的体积.

(5) 计算: $10\big(2+\sqrt{5}\big)^{-1}-\left(\dfrac{1}{500}\right)^{-\frac{1}{2}}+30\left(\dfrac{125}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的值.

2. 已知两数 x_1, x_2 满足下列条件:
(1) 它们的和是等差数列 $1, 3, \cdots$ 的第 20 项;
(2) 它们的积是等比数列 $2, -6, \cdots$ 的前 4 项和, 求根为 $\dfrac{1}{x_1}$, $\dfrac{1}{x_2}$ 的方程.

3. 已知: $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 AD 交 BC 的延长线于 D 点, 求证: $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BD}{CD}$.

4. 如图, CD 是 BC 的延长线, $AB=BC=CA=CD=a$, DM 与 AB, AC 分别交于 M 点和 N 点, 且 $\angle BDM=\alpha$. 求证: $BM=\dfrac{4a\tan\alpha}{\sqrt{3}+\tan\alpha}$, $CN=\dfrac{4a\tan\alpha}{\sqrt{3}-\tan\alpha}$.



5. 设 $f(x)=4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2$ $(p\neq 0)$. 求证:
(1) 如果 $f(x)$ 的系数满足 $p^2-4q-4(m+1)=0$, 那么 $f(x)$ 恰好是一个二次三项式的平方;
(2) 如果 $f(x)$ 与 $F(x)=(2x^2+ax+b)^2$ 表示同一个多项式, 那么 $p^2-4q-4(m+1)=0$.

6. 已知: $a\sin x+b\cos x=0$, $A\sin 2x+B\cos 2x=C$, 其中 a, b 不同时为 0, 求证: $2abA+(b^2-a^2)B+(a^2+b^2)C=0$.

7. 已知 L 为过点 $P\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$ 倾斜角为 30° 的直线, 圆 C 为中心在坐标原点而半径等于 1 的圆, Q 表示顶点在原点而焦点在 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8},0\right)$ 的抛物线. 设 A 为 L 和 C 在第三象限的交点, B 为 C 和 Q 在第四象限的交点.
(1) 写出直线 L、圆 C 和抛物线 Q 的方程, 并作草图;
(2) 写出线段 PA、圆弧 AB 和抛物线上 OB 一段的函数表达式;
(3) 设 P'、B' 依次为从 P、B 到 x 轴的垂足, 求由圆弧 AB 和直线段 BB'、$B'P'$、$P'P$、PA 所包含的面积.

1979 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 若 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$, 求证: x, y, z 成等差数列.

2. 化简: $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\csc^2 x}}}$.

3. 甲, 乙二容器内都盛有酒精, 甲有 V_1 公斤, 乙有 V_2 公斤. 甲中纯酒精与水(重量) 之比为 $m_1:n_1$, 乙中纯酒精与水之比为 $m_2:n_2$. 问将二者混合后所得液体中纯酒精与水之比是多少?

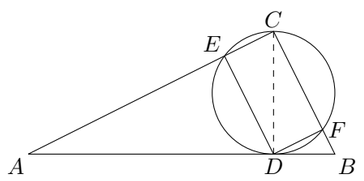
4. 叙述并证明勾股定理.

5. 外国船只除特许外不得进入离我海岸线 D 里以内的区域. 设 A 及 B 是我们的观测站, A 及 B 间的距离为 S 里, 海岸线是过 A, B 的直线, 一外国船在 P 点, 在 A 站测得 $\angle BAP=\alpha$, 同时在 B 站测得 $\angle BAP=\beta$. 问 α 及 β 满足什么简单的三角函数值不等式, 就应当向此未经特许的外国船发出警告, 命令退出我海域?

6. 设三棱锥 $V-ABC$ 中, $\angle AVB=\angle BVC=\angle CVA=90^\circ$. 求证: $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

7. 美国的物价从 1939 年的 100 增加到四十年后 1979 年的 500 , 如果每年物价增长率相同, 问每年增长百分之几?
(注意: $x<0.1$, 可用: $\ln(1+x)\approx x$, 取 $\lg 2=0.3$, $\ln 10=2.3$)

8. 设 $CEDF$ 是一个已知圆的内接矩形, 过 D 作该圆的切线与 CE 的延长线相交于点 A, 与 CF 的延长线相交于点 B. 求证: $\dfrac{BF}{AE}=\dfrac{BC^3}{AC^3}$.



9. 试问数列 $\lg 100$, $\lg\left(100\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\lg\left(100\sin^2\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\cdots$, $\lg\left(100\sin^{n-1}\dfrac{\pi}{4}\right)$ 前多少项的和的值最大? 并求这最大值. ($\lg 2=0.301$)

10. 设等腰 $\triangle OAB$ 的顶角为 2θ, 高为 h.
(1) $\triangle OAB$ 内有一动点 P, 到三边 OA, OB, AB 的距离分别为 $|PD|$, $|PF|$, $|PE|$, 并且满足关系 $|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$. 求 P 点的轨迹;
(2) 在上述轨迹中定出点 P 的坐标, 使得 $|PD|+|PE|=|PF|$.

1979 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 求函数 $y=2x^2-x+1$ 的极小值.

2. 化简: $\left[\left(1+\sin^2\theta\right)^2-\cos^4\theta\right]\left[(1+\cos^2\theta)^2-\sin^4\theta\right]$.

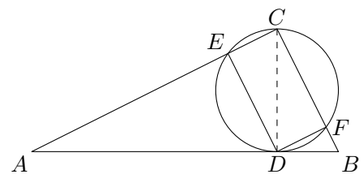
3. 甲, 乙二容器内都盛有酒精, 甲有 V_1 公斤, 乙有 V_2 公斤. 甲中纯酒精与水 (重量) 之比为 $m_1:n_1$, 乙中纯酒精与水之比为 $m_2:n_2$. 问将二者混合后所得液体中纯酒精与水之比是多少?

4. 叙述并证明勾股定理.

5. 外国船只除特许外不得进入离我海岸线 D 里以内的区域. 设 A 及 B 是我们的观测站, A 及 B 间的距离为 S 里, 海岸线是过 A, B 的直线, 一外国船在 P 点, 在 A 站测得 $\angle BAP=\alpha$, 同时在 B 站测得 $\angle BAP=\beta$. 问 α 及 β 满足什么简单的三角函数值不等式, 就应当向此未经特许的外国船发出警告, 命令退出我海域?

6. 美国的物价从 1939 年的 100 增加到四十年后 1979 年的 500 , 如果每年物价增长率相同, 问每年增长百分之几?
(注意: $x<0.1$, 可用: $\ln(1+x)\approx x$, 取 $\lg 2=0.3$, $\ln 10=2.3$)

7. 设 $CEDF$ 是一个已知圆的内接矩形, 过 D 作该圆的切线与 CE 的延长线相交于点 A, 与 CF 的延长线相交于点 B. 求证: $\dfrac{BF}{AE}=\dfrac{BC^3}{AC^3}$.



8. 过原点 O 作圆 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 的任意割线交圆于 P_1, P_2 两点, 求 P_1P_2 的中点 P 的轨迹.

1980 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 将多项式 x^5y-9xy^5 分别在下列范围内分解因式:
(1) 有理数范围;

(2) 实数范围;

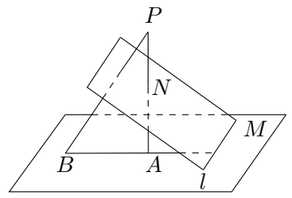
(3) 复数范围.

2. 半径为 1、2、3 的三个圆两两外切. 证明: 以这三个圆的圆心为顶点的三角形是直角三角形.

3. 用解析几何方法证明: 三角形的三条高线交于一点.

4. 证明对数换底公式: $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ (a, b, N 都是正数, $a\neq 1$, $b\neq 1$).

5. 直升飞机上一点 P 在地面 M 上的正射影是 A, 从 P 看地面上一物体 B (不同于 A). 直线 PB 垂直于飞机窗玻璃所在的平面 N (如图). 证明: 平面 N 必与平面 M 相交, 且交线 l 垂直于 AB.



6. 设三角函数 $f(x)=\sin\left(\dfrac{k\pi}{5}+\dfrac{\pi}{3}\right)$, 其中 $k\neq 0$.
(1) 写出 $f(x)$ 极大值 M、极小值 m 与最小正周期 T;
(2) 试求最小的正整数 k, 使得当自变量 x 在任意两个整数间 (包括整数本身) 变化时, 函数 $f(x)$ 至少有一个值是 M 与一个值是 m.

7. CD 为直角 $\triangle ABC$ 中斜边 AB 上的高, 已知 $\triangle ACD$、$\triangle CBD$、$\triangle ABC$ 的面积成等比数列, 求 $\angle B$ (用反三角函数表示).

8. 已知 $0<\alpha<\pi$, 证明: $2\sin\alpha\leqslant\cot\dfrac{\alpha}{2}$; 并讨论 α 为何值时等号成立.

9. 抛物线的方程是 $y^2=2x$, 有一个半径为 1 的圆, 圆心在 x 轴上运动. 问这个圆运动到什么位置时, 圆与抛物线在交点处的切线互相垂直.
(注: 设 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 上一点, 则抛物线在 P 点处的切线斜率是 $\dfrac{p}{y_0}$).

附加题

10. 设直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\\y=b+mt\end{cases}$ (t 是参数), 椭圆 E 的参数方程是 $\begin{cases}x=1+a\cos\theta,(a\neq 0)\\y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 是参数), 问 a、b 应满足什么条件, 使得对于任意 m 值来说, 直线 l 与椭圆 E 总有公共点.

1980 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 化简: $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$.

2. 解方程组: $\begin{cases}2x-3y-z=5\\4x+2y+3z=9\\3x+2y=-1\end{cases}$.

3. 用解析法证明: 直径所对的圆周角是直角.

4. 某地区 1979 年的轻工业产值占工业总产值的 20%, 要使 1980 年的工业总产值比上一年增长 10%, 且使 1980 年的轻工业产值占工业总产值的 24%, 问 1980 年轻工业产值应比上一年增长百分之几?

5. 设 $\dfrac{3\pi}{4}<\theta<\dfrac{5\pi}{4}$, 化简: $\dfrac{\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\theta\right)\left[\sin(\pi-\theta)-\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]}}{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

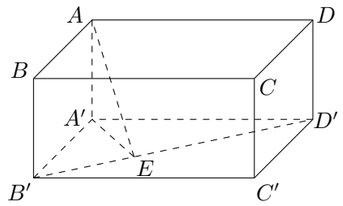
6. (1) 若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 将四边形分成面积相等的两个三角形, 证明: 直线 AC 必平分对角线 BD;

(2) 写出 (1) 的逆命题, 这个逆命题是否正确? 为什么?

7. 如图, 长方形框架 $ABCD-A'B'C'D'$ 三边 AB、AD、AA' 的长分别为 6、8、3.6, AE 与底面的对角线 $B'D'$ 垂直于 E.

(1) 证明 $A'E\perp B'D'$;

(2) 求 AE 的长.



8. (1) 把参数方程 $\begin{cases}x=\sec t\\y=2\tan t\end{cases}$ (t 为参数) 化为直角坐标方程, 并画出方程的曲线的略图;

(2) 当 $0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\pi\leqslant t<\dfrac{3\pi}{2}$ 时, 各得到曲线的哪一部分?

1981 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 设 A 表示有理数的集合，B 表示无理数的集合，即设 $A=$ {有理数}，$B=$ {无理数}，试写出：
(1) $A\cup B$；
(2) $A\cap B$.

2. 在 A、B、C、D 四位候选人中，
(1) 如果选举正、副班长各一人，共有几种选法？写出所有可能的选举结果；
(2) 如果选举班委三人，共有几种选法？写出所有可能的选举结果.

3. 下表所列各小题中，指出 A 是 B 的充分条件，还是必要条件，还是充要条件，或者都不是.

A	B	A是B的什么条件
四边形$ABCD$为平行四边形	四边形$ABCD$为矩形	
$a=3$	$\lvert a\rvert=3$	
$\theta=150^\circ$	$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$	
点(a,b)在圆$x^2+y^2=R^2$上	$a^2+b^2=R^2$	

4. 写出余弦定理（只写一个公式即可），并加以证明.

5. 解不等式（x 为未知数）：$\begin{vmatrix} x-a & b & -c \\ a & x-b & c \\ -a & b & x-c \end{vmatrix}>0$.

6. 用数学归纳法证明等式：$\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$. 对一切自然数 n 都成立.

7. 设 1980 年底我国人口以 10 亿计算.
(1) 如果我国人口每年比上年平均递增 2%，那么到 2000 年底将达到多少？
(2) 要使 2000 年底我国人口不超过 12 亿，那么每年比上年平均递增率最高是多少？

下列对数值可供选用：

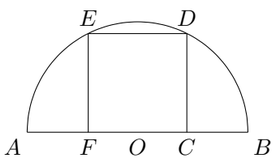
$\lg 1.0087=0.00377$	$\lg 1.0092=0.00396$	$\lg 1.0096=0.00417$
$\lg 1.0200=0.00860$	$\lg 1.2000=0.07918$	$\lg 1.3098=0.11720$
$\lg 1.4568=0.16340$	$\lg 1.4859=0.17200$	$\lg 1.5157=0.18060$

8. 在 120° 的二面角 $P-a-Q$ 的两个面 P 和 Q 内，分别有点 A 和点 B，已知点 A 和点 B 到棱 a 的距离分别为 2 和 4，且线段 $AB=10$.
(1) 求直线 AB 和棱 a 所成的角；
(2) 求直线 AB 和平面 Q 所成的角.

9. 给定双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$.
(1) 过点 $A(2,1)$ 的直线 L 与所给的双曲线交于两点 P_1 及 P_2，求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程；
(2) 过点 $B(1,1)$ 能否作直线 m，使 m 与所给双曲线交于两点 Q_1 及 Q_2，且点 B 是线段 Q_1Q_2 的中点？这样的直线 m 如果存在，求出它的方程；如果不存在，说明理由.

附加题

10. 已知以 AB 为直径的半圆有一个内接正方形 $CDEF$，其边长为 1（如图）. 设 $AC=a$，$BC=b$，作数列 $u_1=a-b$，$u_2=a^2-ab+b^2$，$u_3=a^3-a^2b+ab^2-b^3$，$\cdots$，$u_k=a^k-a^{k-1}b+a^{k-2}b2-\cdots+(-1)^kb^k$；求证：$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$.



1981 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 设 A 表示有理数的集合，B 表示无理数的集合，即设 $A=$ {有理数}，$B=$ {无理数}，试写出：
   (1) $A\cup B$；
   (2) $A\cap B$.

2. 化简：$\left[-\dfrac{a^7b^2}{\sqrt{3}(a+b)^2}\right]^2\times\left[\dfrac{a^2-b^2}{a^2\sqrt{b}}\right]^4\div\left[\dfrac{a^2(b-a)}{2}\right]^3$.

3. 在 A、B、C、D 四位候选人中，
   (1) 如果选举正、副班长各一人，共有几种选法？写出所有可能的选举结果；
   (2) 如果选举班委三人，共有几种选法？写出所有可能的选举结果.

4. 求函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的最大值.

5. 写出正弦定理，并对钝角三角形的情况加以证明.

6. 已知正方形 $ABCD$ 的相对顶点 $A(0,-1)$ 和 $C(2,5)$，求顶点 B 和 D 的坐标.

7. 设 1980 年底我国人口以 10 亿计算.
   (1) 如果我国人口每年比上年平均递增 2%，那么到 2000 年底将达到多少？
   (2) 要使 2000 年底我国人口不超过 12 亿，那么每年比上年平均递增率最高是多少？

下列对数值可供选用：		
$\lg 1.0087=0.00377$	$\lg 1.0092=0.00396$	$\lg 1.0096=0.00417$
$\lg 1.0200=0.00860$	$\lg 1.2000=0.07918$	$\lg 1.3098=0.11720$
$\lg 1.4568=0.16340$	$\lg 1.4859=0.17200$	$\lg 1.5157=0.18060$

8. $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为一正四棱柱，过 A、C、B_1 三点作一截面，求证：截面 $ACB_1\perp$ 对角面 DBB_1D_1.

9. (1) 设抛物线 $y^2=4x$ 截直线 $y=2x+k$ 所得的弦长为 $3\sqrt{5}$，求 k 的值.
   (2) 以本题 (1) 得到的弦为底边，以 x 轴上的点 P 为顶点做成三角形. 当这三角形的面积为 9 时，求 P 的坐标.

1982 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 填表:

	函数	使函数有意义的x的实数范围
1	$y=\sqrt{-x^2}$	
2	$y=\sqrt{(-x)^2}$	
3	$y=\arcsin(\sin x)$	
4	$y=\sin(\arcsin x)$	
5	$y=10^{\lg x}$	
6	$y=\lg 10^x$	

2. (1) 求 $(-1+\mathrm{i})^{20}$ 展开式中第 15 项的数值;

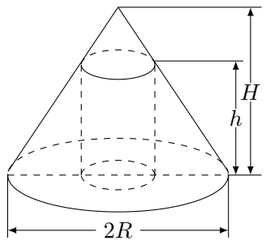
(2) 求 $y=\cos^2\dfrac{x}{3}$ 的导数.

3. 在平面直角坐标系内, 下列方程表示什么曲线? 画出它们的图形.

(1) $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 1 \\ -3y & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$;

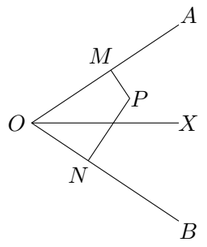
(2) $\begin{cases} x=1+\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \end{cases}$.

4. 已知圆锥体的底面半径为 R, 高为 H, 求内接于这个圆锥体并且体积最大的圆柱体的高 h (如图).

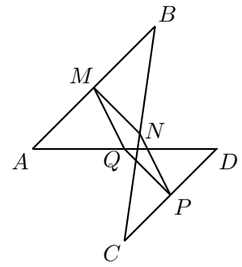


5. 设 $0<x<1$, $a>0$, $a\neq 1$, 比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小. (要写出比较过程)

6. 如图: 已知锐角 $\angle AOB=2\alpha$ 内有动点 P, $PM\perp OA$, $PN\perp OB$, 且四边形 $PMON$ 的面积等于常数 c^2. 今以 O 为极点, $\angle AOB$ 的角平分线 OX 为极轴, 求动点 P 的轨迹的极坐标方程, 并说明它表示什么曲线.



7. 已知空间四边形 $ABCD$ 中 $AB=BC$, $CD=DA$, M, N, P, Q 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点 (如图). 求证: $MNPQ$ 是一个矩形.



8. 抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形有两边与抛物线 $x^2=2qy$ 相切, 证明这个三角形的第三边也与 $x^2=2qy$ 相切.

附加题

9. 已知数列 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 和数列 b_1, b_2, $\cdots$, b_n, $\cdots$, 其中 $a_1=p$, $b_1=q$, $a_n=pa_{n-1}$, $b_n=qa_{n-1}+rb_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$, (p, q, r 是已知常数, 且 $q\neq 0$, $p>r>0$).

(1) 用 p, q, r, n 表示 b_n, 并用数学归纳法加以证明;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{\sqrt{{a_n}^2+{b_n}^2}}$.

1982 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 填表:

	函数	使函数有意义的x的实数范围
1	$y=\sqrt{-x^2}$	
2	$y=\sqrt{(-x)^2}$	
3	$y=10^{\lg x}$	
4	$y=\lg 10^x$	

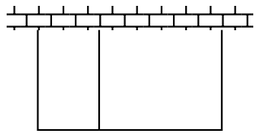
2. 求 $(-1+\mathrm{i})^{20}$ 展开式中第 15 项的数值.

3. 在平面直角坐标系内, 表中的方程表示什么曲线? 并画出它们的图形:

	方程	曲线名称	图形
1	$4x^2+y^2=4$		
2	$x-3=0$		

4. 已知 $x-y=\dfrac{1}{2}$, $x^2+y^2=1$, 求 x^2-y^2 的值.

5. 以墙为一边, 用篱笆围成长方形的场地, 并用平行于一边的篱笆隔开 (如图). 已知篱笆的总长为定值 L, 这块场地的长和宽各为多少时场地的面积最大? 最大面积是多少?

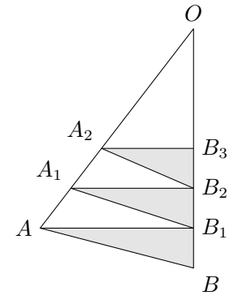


6. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a.
(1) 用平面 A_1BC_1 截去一角后, 求剩余部分的体积;
(2) 求 A_1B 和 B_1C 所成的角.

7. 已知定点 A, B 且 $AB=2a$, 如果动点 P 到点 A 的距离和到点 B 的距离之比为 $2:1$, 求点 P 的轨迹方程, 并说明它表示什么曲线.

8. 求 $\tan 9^\circ+\cot 117^\circ-\tan 243^\circ-\cot 351^\circ$ 的值.

9. 如图, 已知 $\triangle AOB$ 中, $OA=b$, $OB=a$, $\angle AOB=\theta$ ($a\geqslant b$, θ 是锐角). 作 $AB_1\perp OB$, $B_1A_1\parallel BA$; 再作 $A_1B_2\perp OB$, $B_2A_2\parallel BA$; 如此无限连续作下去. 设 $\triangle ABB_1$, $\triangle A_1B_1B_2$, $\cdots$ 的面积分别为 S_1, S_2, $\cdots$, 求无穷数列 S_1, S_2, $\cdots$ 的和.



1983 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 两条异面直线, 指的是 （ ）

(A) 在空间内不相交的两条直线

(B) 分别位于两个不同平面内的两条直线

(C) 某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线

(D) 不在同一平面内的两条直线

2. 方程 $x^2-y^2=0$ 表示的图形是 （ ）

(A) 两条相交直线　　(B) 两条平行直线

(C) 两条重合直线　　(D) 一个点

3. 三个数 a, b, c 不全为零的充要条件是 （ ）

(A) a, b, c 都不是零　　(B) a, b, c 中最多有一个是零

(C) a, b, c 中只有一个是　　(D) a, b, c 中至少有一个不是零

4. 设 $\alpha=\dfrac{4\pi}{3}$, 则 $\arccos(\cos\alpha)$ 的值是 （ ）

(A) $\dfrac{4\pi}{3}$　　(B) $-\dfrac{2\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

5. 0.3^2, $\log_2 0.3$, $2^{0.3}$ 这三个数之间的大小顺序是 （ ）

(A) $0.3^2<2^{0.3}<\log_2 0.3$　　(B) $0.3^2<\log_2 0.3<2^{0.3}$

(C) $\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$　　(D) $\log_2 0.3<2^{0.3}<0.3^2$

6. (1) 在同一平面直角坐标系内, 分别画出两个方程 $y=-\sqrt{x}$, $x=\sqrt{-y}$ 的图形, 并写出它们交点的坐标.

(2) 在极坐标系内, 方程 $\rho=5\cos\theta$ 表示什么曲线? 画出它的图形.

7. (1) 已知 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin 2x$, 求微分 $\mathrm{d}y$.

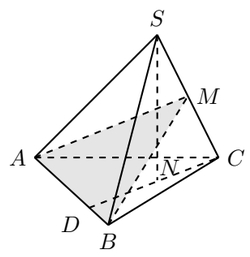
(2) 一个小组共有 10 名同学, 其中 4 名是女同学, 6 名是男同学. 要从小组内选出 3 名代表, 其中至少有 1 名女同学, 求一共有多少种选法.

8. 计算行列式 (要求结果最简): $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos(\alpha+\varphi) & \cos\alpha\\ \cos\beta & \sin(\beta-\varphi) & \sin\beta\\ \sin\varphi & \cos 2\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$.

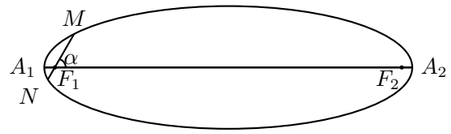
9. (1) 证明: 对于任意实数 t, 复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\mathrm{i}$ 的模 $r=|z|$ 适合 $r\leqslant\sqrt[4]{2}$.

(2) 当实数 t 取什么值时, 复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\mathrm{i}$ 的幅角主值 θ 适合 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$?

10. 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, S 在底面上的射影 N 位于底面的高 CD 上; M 是侧棱 SC 上的一点, 使截面 MAB 与底面所成的角等于 $\angle NSC$, 求证: SC 垂直于截面 MAB.



11. 如图, 已知椭圆长轴 $|A_1A_2|=6$, 焦距 $|F_1F_2|=4\sqrt{2}$, 过椭圆焦点 F_1 作一直线, 交椭圆于两点 M, N. 设 $\angle F_2F_1M=\alpha$ $(0\leqslant\alpha<\pi)$, 当 α 取什么值时, $|MN|$ 等于椭圆短轴的长?



12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=b$ $(b\neq 0)$, 它的前 n 项的和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ $(n\geqslant 1)$, 并且 S_1, S_2, S_n, $\cdots$ 是一个等比数列, 其公比为 p ($p\neq 0$ 且 $|p|<1$).

(1) 证明: a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$ (即 $\{a_n\}$ 从第二项起) 是一个等比数列;

(2) 设 $W_n=a_1S_1+a_2S_2+a_3S_3+\cdots+a_nS_n$ $(n\geqslant 1)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}W_n$ (用 b, p 表示).

13. (1) 已知 a, b 为实数, 并且 $\mathrm{e}<a<b$, 其中 e 是自然对数的底数, 证明: $a^b>b^a$;

(2) 如果正实数 a, b 满足 $a^b=b^a$, 且 $a<1$, 证明: $a=b$.

1983 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 在直角坐标系内, 函数 $y=|x|$ 的图象 （ ）

(A) 关于坐标轴、原点都不对称　　(B) 关于原点对称

(C) 关于 x 轴对称　　(D) 关于 y 轴对称

2. 抛物线 $x^2+y=0$ 的焦点位于 （ ）

(A) y 轴的负半轴上　　(B) y 轴的正半轴上

(C) x 轴的负半轴上　　(D) x 轴的正半轴上

3. 两条异面直线, 指的是 （ ）

(A) 在空间内不相交的两条直线

(B) 分别位于两个不同平面内的两条直线

(C) 某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线

(D) 不在同一平面内的两条直线

4. 对任何 $180^\circ<\alpha<360^\circ$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 的值等于 （ ）

(A) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$　　(B) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

(C) $-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$　　(D) $-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

5. 0.3^2, $\log_2 0.3$, $2^{0.3}$ 这三个数之间的大小顺序是 （ ）

(A) $0.3^2<2^{0.3}<\log_2 0.3$　　(B) $0.3^2<\log_2 0.3<2^{0.3}$

(C) $\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$　　(D) $\log_2 0.3<2^{0.3}<0.3^2$

6. 在平面直角坐标系内, 表中的方程表示什么图形? 画出这些图形.

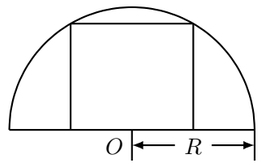
方程	$x^2+y^2=2x$	$x^2-y^2=0$
图形名称		
图形		

7. (1) 求函数 $y=\sqrt{x+5}\log_2(36-x^2)$ 的定义域.

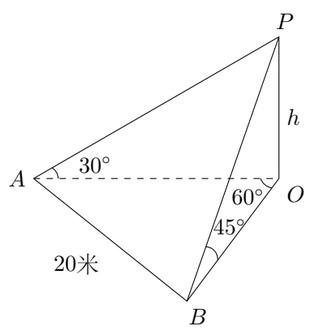
(2) 一个小组共有 10 名同学, 其中 4 名是女同学, 6 名是男同学. 要从小组内选出 3 名代表, 其中至少有 1 名女同学, 求一共有多少种选法.

8. 已知复数 $z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$, 求证: $z^3+\dfrac{1}{z^3}=2\cos 3\alpha$.

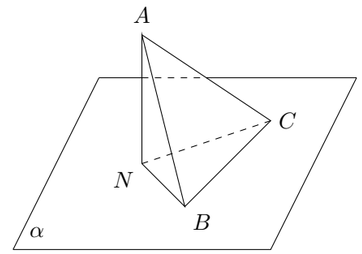
9. 在圆心为 O、半径为常数 R 的半圆板内画内接矩形 (如图), 当矩形的长和宽各取多少时, 矩形的面积最大? 求出这个最大面积.



10. 如图, 地平面上有一旗杆 OP, 为了测得它的高度 h, 在地面上选一基线 AB, $AB=20$ 米, 在 A 点处测得 P 点的仰角 $\angle OAP=30^\circ$, 在 B 点处测得 P 点的仰角 $\angle OBP=45^\circ$, 又测得 $\angle AOB=60^\circ$, 求旗杆的高度 h (结果可以保留根号).

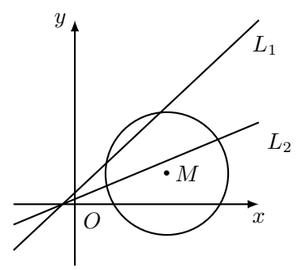


11. 如图, 已知一块直角三角形板 ABC 的 BC 边在平面 α 内, $\angle ABC=60^\circ$, $\angle ACB=30^\circ$, $BC=24$ cm, A 点在平面 α 内的射影为 N, $AN=9$ cm. 求以 A 为顶点的三棱锥 $A-NBC$ 的体积 (结果可以保留根号).



12. 一个等比数列有三项, 如果把第二项加上 4, 那么所得的三项就成为等差数列; 如果再把这等差数列的第三项加上 32, 那么所得的三项又成等比数列, 求原来的等比数列.

13. 如图, 已知两条直线 $L_1:2x-3y+2=0$, $L_2:3x-2y+3=0$. 有一动圆 (圆心和半径都在变动) 与 L_1, L_2 都相交, 并且 L_1, L_2 被截在圆内的两条线段的长度分别是定值 26, 24. 求圆心 M 的轨迹方程, 并说出轨迹的名称.



1984 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 数集 $X=\{(2n+1)\pi, n\text{是整数}\}$ 与数集 $Y=\{(4k\pm1)\pi, k\text{是整数}\}$ 之间的关系是 （ ）

(A) $X\subseteq Y$　(B) $X\supseteq Y$　(C) $X=Y$　(D) $X\neq Y$

2. 如果圆 $x^2+y^2+Gx+Ey+F=0$ 与 x 轴相切于原点, 那么 （ ）

(A) $F=0$, $G\neq0$, $E\neq0$　(B) $E=0$, $F=0$, $G\neq0$

(C) $G=0$, $F=0$, $E\neq0$　(D) $G=0$, $E=0$, $F\neq0$

3. 如果 n 是正整数, 那么 $\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$ 的值 （ ）

(A) 一定是零　(B) 一定是偶数

(C) 是整数但不一定是偶数　(D) 不一定是整数

4. $\arccos(-x)$ 大于 $\arccos x$ 的充分条件是 （ ）

(A) $x\in(0,1]$　(B) $x\in(-1,0)$　(C) $x\in[0,1]$　(D) $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

5. 如果 θ 是第二象限角, 且满足 $\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin\theta}$, 那么 $\frac{\theta}{2}$ （ ）

(A) 是第一象限角

(B) 是第三象限角

(C) 可能是第一象限角, 也可能是第三象限角

(D) 是第二象限角

6. 已知圆柱的侧面展开图是边长为 2 与 4 的矩形, 求圆柱的体积.

7. 函数 $\log_{0.5}(x^2+4x+4)$ 在什么区间上是增函数?

8. 求方程 $(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{2}$ 的解集.

9. 求 $\left(|x|+\frac{1}{|x|}-2\right)^3$ 的展开式中的常数项.

10. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^n}{3^n+1}$ 的值.

11. 要排一张有 6 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的演出节目单, 任何两个舞蹈节目不得相邻, 问有多少种不同的排法 (只要求写出式子, 不必计算).

12. 设 $H(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0\\ 1, & x>0\end{cases}$, 画出函数 $y=H(x-1)$ 的图象.

13. 画出极坐标方程 $(\rho-2)\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$ $(\rho>0)$ 的曲线.

14. 已知三个平面两两相交, 有三条交线. 求证: 这三条交线交于一点或互相平行.

15. 设 c, d, x 为实数, $c\neq0$, x 为未知数. 讨论方程 $\log_{\left(cx+\frac{d}{x}\right)}x=-1$ 在什么情况下有解, 有解时求出它的解.

16. 设 $p\neq0$, 实系数一元二次方程 $z^2-2pz+q=0$ 有两个虚数根 z_1, z_2. 再设 z_1, z_2 在复平面内的对应点是 Z_1, Z_2. 求以 Z_1, Z_2 为焦点且经过原点的椭圆的长轴的长.

17. 求经过定点 $M(1,2)$, 以 y 轴为准线, 离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆的左顶点的轨迹方程.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 所对的边分别为 a, b, c, 且 $c=10$, $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$, P 为 $\triangle ABC$ 的内切圆上的动点. 求点 P 到顶点 A, B, C 的距离的平方和的最大值与最小值.

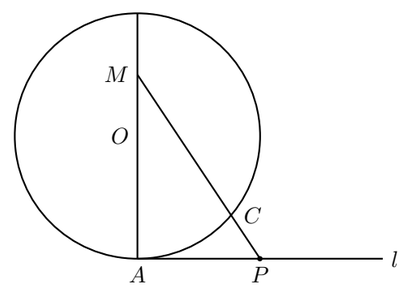
19. 设 $a>2$, 给定数列 $\{x_n\}$, 其中 $x_1=a$, $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}$ $(n=1,2\cdots)$. 求证:

(1) $x_n>2$, 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$ $(n=1,2\cdots)$;

(2) 如果 $a\leqslant3$, 那么 $x_n\leqslant2+\frac{1}{2^{n-1}}$ $(n=1,2\cdots)$;

(3) 如果 $a>3$, 那么当 $n\geqslant\frac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$ 时, 必有 $x_{n+1}<3$.

20. 如图, 已知圆心为 O、半径为 1 的圆与直线 L 相切于点 A, 一动点 P 自切点 A 沿直线 L 向右移动时, 取 $\overset{\frown}{AC}$ 的长为 $\frac{2}{3}AP$, 直线 PC 与直线 AO 交于点 M. 又知当 $AP=\frac{3\pi}{4}$ 时, 点 P 的速度为 v, 求这时点 M 的速度.



1984 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 数集 $X=\{(2n+1)\pi, n\text{是整数}\}$ 与数集 $Y=\{(4k\pm1)\pi, k\text{是整数}\}$ 之间的关系是 （ ）

(A) $X\subseteq Y$　(B) $X\supseteq Y$　(C) $X=Y$　(D) $X\neq Y$

2. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象 （ ）

(A) 关于 y 轴对称　(B) 关于原点对称

(C) 关于直线 $x+y=0$ 对称　(D) 关于直线 $x-y=0$ 对称

3. 复数 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 的三角形式是 （ ）

(A) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$　(B) $\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$

(C) $\cos\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}$

4. 直线与平面平行的充要条件是这条直线与平面内的 （ ）

(A) 一条直线不相交　(B) 两条直线不相交

(C) 任意一条直线都不相交　(D) 无数条直线不相交

5. 方程 $x^2-79x+1=0$ 的两根可分别作为 （ ）

(A) 一椭圆和一双曲线的离心率　(B) 两抛物线的离心率

(C) 一椭圆和一抛物线的离心率　(D) 两椭圆的离心率

6. 已知函数 $\log_{0.5}(2x-3)>0$, 求 x 的取值范围.

7. 已知圆柱的侧面展开图是边长为 2 与 4 的矩形, 求圆柱的体积.

8. 已知实数 m 满足 $2x^2-(2\mathrm{i}-1)x+m-\mathrm{i}=0$, 求 m 及 x 的值.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)+(n^2+2)+\cdots+(n^2+n)}{n(n-1)(n-2)}$ 的值.

10. 要排一张有 6 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的演出节目单, 任何两个舞蹈节目不得相邻, 问有多少种不同的排法 (只要求写出式子, 不必计算).

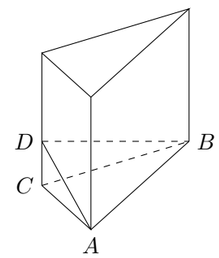
11. 画出方程 $y^2=-4x$ 的曲线.

12. 画出函数 $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ 的图象.

13. 已知等差数列 a, b, c 中的三个数都是正数, 且公差不为零. 求证它们的倒数所组成的数列 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ 不可能成等差数列.

14. 把 $1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$ 化成三角函数的积的形式 (要求结果最简).

15. 如图, 经过正三棱柱底面一边 AB, 作与底面成 30° 角的平面, 已知截面三角形 ABD 的面积为 32 cm^2, 求截得的三棱锥 $D-ABC$ 的体积.



16. 某工厂 1983 年生产某种产品 2 万件, 计划从 1984 年开始, 每年的产量比上一年增长 20%. 问从哪一年开始, 这家工厂生产这种产品的年产量超过 12 万件 (已知 $\lg 2=0.3010$, $\lg 3=0.4771$).

17. 已知两个椭圆的方程分别是 $C_1: x^2+9y^2-45=0$, $C_2: x^2+9y^2-6x-27=0$.

(1) 求这两个椭圆的中心、焦点的坐标;

(2) 求经过这两个椭圆的交点且与直线 $x-2y+11=0$ 相切的圆的方程.

1985 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 如果正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a, 那么四面体 $A'-ABD$ 的体积是 （ ）

(A) $\dfrac{a^3}{2}$　(B) $\dfrac{a^3}{3}$　(C) $\dfrac{a^3}{4}$　(D) $\dfrac{a^3}{6}$

2. $\tan x=1$ 是 $x=\dfrac{5}{4}\pi$ 的 （ ）

(A) 必要条件　(B) 充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分又不必要的条件

3. 在下面给出的函数中, 哪一个函数既是区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数又是以 π 为周期的偶函数 （ ）

(A) $y=x^2$ $(x\in\mathbf{R})$　(B) $y=|\sin x|$ $(x\in\mathbf{R})$

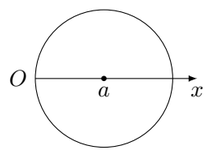
(C) $y=\cos 2x$ $(x\in\mathbf{R})$　(D) $y=\mathrm{e}^{\sin 2x}$ $(x\in\mathbf{R})$

4. 极坐标方程 $\rho=a\sin\theta$ $(a>0)$ 的图象是 （ ）

(A)

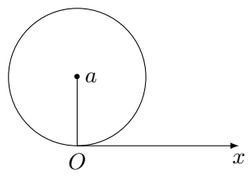


(B)



(C)

(D)



5. 用 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字, 可以组成比 20000 大, 并且百位数不是数字 3 的没有重复数字的五位数, 共有 （ ）

(A) 96 个　(B) 78 个　(C) 72 个　(D) 64 个

6. 求方程 $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ 解集.

7. 设 $|a|\leqslant 1$, 求 $\arccos a+\arccos(-a)$ 的值.

8. 求曲线 $y^2=-16x+64$ 的焦点.

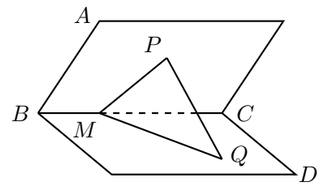
9. 设 $(3x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 求 $a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ 的值.

10. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$, 求函数 $f(x^2)$ 的定义域.

11. 解方程: $\log_4(3-x)+\log_{0.25}(3+x)=\log_4(1-x)+\log_{0.25}(2x+1)$.

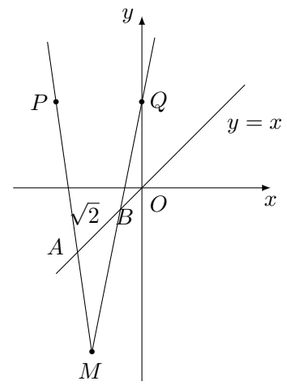
12. 解不等式: $\sqrt{2x+5}>x+1$.

13. 如图, 设平面 AC 和 BD 相交于 BC, 它们所成的一个二面角为 $45°$, P 为平面 AC 内的一点, Q 为面 BD 内的一点. 已知直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 内的射影, 并且 M 在 BC 上. 又设 PQ 与平面 BD 所成的角为 β, $\angle CMQ=\theta$ $(0°<\theta<90°)$, 线段 PM 的长为 a, 求线段 PQ 的长.



14. 设 O 为复平面的原点, Z_1 和 Z_2 为复平面内的两动点, 并且满足:
(1) Z_1 和 Z_2 所对应的复数的辐角分别为定值 θ 和 $-\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$;
(2) $\triangle OZ_1Z_2$ 的面积为定值 S, 求 $\triangle OZ_1Z_2$ 的重心 Z 所对应的复数的模的最小值.

15. 已知两点 $P(-2,2)$, $Q(0,2)$ 以及一条直线: $L: y=x$, 设长为 $\sqrt{2}$ 的线段 AB 在直线 L 上移动, 如图, 求直线 PA 和 QB 的交点 M 的轨迹方程. (要求把结果写成普通方程)



16. 设 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$ $(n=1,2\cdots)$.
(1) 证明: 不等式 $\dfrac{n(n+1)}{2}<a_n<\dfrac{(n+1)^2}{2}$ 对所有的正整数 n 都成立;
(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$ $(n=1,2\cdots)$, 用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{2}$.

17. 设 a, b 是两个实数, $A=\{(x,y)|x=n, y=na+b, n$ 是整数$\}$, $B=\{(x,y)|x=m, y=3m^2+15, m$ 是整数$\}$, $C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xOy 内的点集合, 讨论是否存在 a 和 b 使得
(1) $A\cap B\neq\varnothing$ ($\varnothing$ 表示空集),
(2) $(a,b)\in C$
同时成立.

18. 已知曲线 $y=x^3-6x^2+11x-6$. 在它对应于 $x\in[0,2]$ 的弧段上求一点 P, 使得曲线在该点的切线在 y 轴上的截距为最小, 并求出这个最小值.

1985 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 如果正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a, 那么四面体 $A'-ABD$ 的体积是 （ ）

(A) $\frac{a^3}{2}$　(B) $\frac{a^3}{3}$　(C) $\frac{a^3}{4}$　(D) $\frac{a^3}{6}$

2. $\tan x=1$ 是 $x=\frac{5}{4}\pi$ 的 （ ）

(A) 必要条件　(B) 充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分又不必要的条件

3. 设集合 $X=\{0,1,2,4,5,7\}$, $Y=\{1,3,6,8,9\}$, $Z=\{3,7,8\}$, 那么集合 $(X\cap Y)\cup Z$ 是 （ ）

(A) $\{0,1,2,6,8\}$　(B) $\{3,7,8\}$

(C) $\{1,3,7,8\}$　(D) $\{1,3,6,7,8\}$

4. 在下面给出的函数中, 哪一个函数既是区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数又是以 π 为周期的偶函数 （ ）

(A) $y=x^2$ $(x\in\mathbf{R})$　(B) $y=|\sin x|$ $(x\in\mathbf{R})$

(C) $y=\cos 2x$ $(x\in\mathbf{R})$　(D) $y=\mathrm{e}^{\sin 2x}$ $(x\in\mathbf{R})$

5. 用 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字, 可以组成比 20000 大, 并且百位数不是数字 3 的没有重复数字的五位数, 共有 （ ）

(A) 96 个　(B) 78 个　(C) 72 个　(D) 64 个

6. 求函数 $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ 的定义域.

7. 求圆锥曲线 $3x^2-y^2+6x+2y-1=0$ 的离心率.

8. 求函数 $y=-x^2+4x-2$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值和最小值.

9. 设 $(3x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 求 $a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ 的值.

10. 设 i 是虚数单位, 求 $(1+\mathrm{i})^6$ 的值.

11. 设 $S_1=1^2$, $S_2=1^2+2^2+1^2$, $S_3=1^2+2^2+3^2+2^2+1^2$, $\cdots$, $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$, $\cdots$.
用数学归纳法证明: 公式 $S_n=\frac{n(2n^2+1)}{3}$ 对所有的正整数 n 都成立.

12. 证明三角恒等式: $2\sin^4x+\frac{3}{4}\sin^2 2x+5\cos^4x-\cos 3x\cos x=2(1+\cos^2x)$.

13. 解方程: $\lg(3-x)-\lg(3+x)=\lg(1-x)-\lg(2x+1)$.

14. 解不等式: $\sqrt{2x+5}>x+1$.

15. 已知三棱锥 $V-ABC$ 的三个侧面与底面所成的二面角都是 β, 它的高是 h. 求这个所棱锥底面的内切圆半径.

16. 已知圆 $C:x^2+y^2+4x-12y+39=0$ 和直线 $L:3x-4y+5=0$. 求圆 C 关于直线 L 的对称的圆的方程.

17. 设首项为 1, 公比为 q $(q>0)$ 的等比数列的前 n 项之和为 S_n. 又设 $T_n=\frac{S_n}{S_{n+1}}$, $n=1,2,\cdots$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

1986 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 在下列各数中, 已表示成三角形式的复数是 （ ）

(A) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$　(B) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(C) $2\left(\sin\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}\right)$　(D) $-2\left(\sin\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}\right)$

2. 函数 $y=(0.2)^{-x}+1$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\log_5(x+1)$　(B) $y=\log_x 5+1$

(C) $y=\log_5(x-1)$　(D) $y=\log_5 x-1$

3. 极坐标方程 $\rho\cos\theta=\frac{4}{3}$ 表示 （ ）

(A) 一条平行于 x 轴的直线　(B) 一条垂直于 x 轴的直线

(C) 一个圆　(D) 一条抛物线

4. 函数 $y=\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x$ 是 （ ）

(A) 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数　(B) 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

(C) 周期为 $\frac{\pi}{4}$ 的奇函数　(D) 周期为 $\frac{\pi}{4}$ 的偶函数

5. 给出 20 个数: 87, 91, 94, 88, 93, 91, 89, 87, 92, 86, 90, 92, 88, 90, 91, 86, 89, 92, 95, 88, 它们的和是 （ ）

(A) 1789　(B) 1799　(C) 1879　(D) 1899

6. 设甲是乙的充分条件, 乙是丙的充要条件, 丙是丁的必要条件, 那么丁是甲的 （ ）

(A) 充分条件　(B) 必要条件

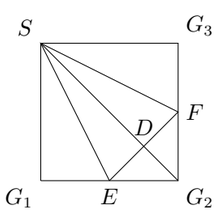
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要的条件

7. 如果方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$ 所表示的曲线关于直线 $y=x$ 对称, 那么必有 （ ）

(A) $D=E$　(B) $D=F$

(C) $E=F$　(D) $D=E=F$

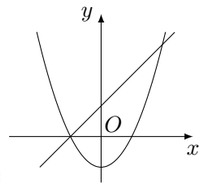
8. 在正方形 $SG_1G_2G_3$ 中, E、F 分别是 G_1G_2 及 G_2G_3 的中点, D 是 EF 的中点, 现在沿 SE、SF 及 EF 把这个正方形折成一个四面体, 使 G_1、G_2、G_3 三点重合, 重合后的点记为 G, 那么, 在四面体 $S-EFG$ 中必有（ ）

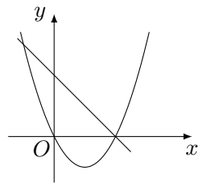


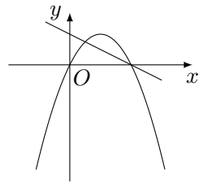
(A) $SG\perp\triangle EFG$ 所在平面　(B) $SD\perp\triangle EFG$ 所在平面

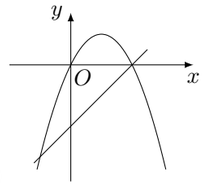
(C) $GF\perp\triangle SEF$ 所在平面　(D) $GD\perp\triangle SEF$ 所在平面

9. 在下列各图中, $y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b$ $(ab\neq 0)$ 的图象只可能是（ ）

(A)


(B)


(C)


(D)


10. 当 $x\in[-1,0]$ 时, 在下面关系式中正确的是 （ ）

(A) $\pi-\arccos(-x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

(B) $\pi-\arcsin(-x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$

(C) $\pi-\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

(D) $\pi-\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$

11. 求方程 $\sqrt{25^{(x^2+x-0.5)}}=\sqrt[4]{5}$ 的解.

12. 已知 $\omega=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 求 $\omega^2+\omega+1$ 的值.

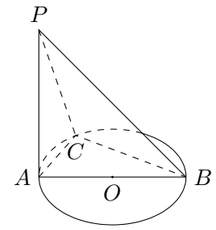
13. 在 xOy 平面上, 四边形 $ABCD$ 的四个顶点坐标依次为 $(0,0)$、$(1,0)$、$(2,1)$ 及 $(0,3)$, 求这个四边形绕 x 轴旋转一周所得到的几何体的体积.

14. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$.

15. 求 $\left(2x^3-\frac{1}{x^2}\right)^5$ 展开式中的常数项.

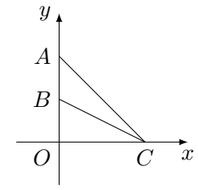
16. 已知 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$, 求 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$ 的值.

17. 如图, AB 是圆 O 的直径, PA 垂直于圆 O 所在的平面, C 是圆周上不同于 A、B 的任一点, 求证: 平面 PAC 垂直于平面 PBC.



18. 当 $\sin 2x>0$, 求不等式 $\log_{0.5}(x^2-2x-15)>\log_{0.5}(x+13)$ 的解集.

19. 如图, 在平面直角坐标系中, 在 y 轴的正半轴 (坐标原点除外) 上给定两点 A、B 试在 x 轴的正半轴 (坐标原点除外) 上求点 C, 使 $\angle ACB$ 取得最大值.



20. 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素, $A\cup B$ 含有 4 个元素, 试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数:
(1) $C\subseteq A\cup B$ 且 C 中含有 3 个元素,
(2) $C\cap A\neq\varnothing$ ($\varnothing$ 表示空集).

21. 过点 $M(-1,0)$ 的直线 L_1 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 P_1、P_2 两点. 记: 线段 P_1P_2 的中点为 P; 过点 P 和这个抛物线的焦点 F 的直线为 L_2; L_1 的斜率为 k. 试把直线 L_2 的斜率与直线 L_1 的斜率之比表示为 k 的函数, 并指出这个函数的定义域、单调区间, 同时说明在每一单调区间上它是增函数还是减函数.

22. 已知 $x_1>0$, $x_1\neq 1$, 且 $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$, $(n=1,2,\cdots)$. 试证: 数列 $\{x_n\}$ 或者对任意自然数 n 都满足 $x_n<x_{n+1}$, 或者对任意自然数 n 都满足 $x_n>x_{n+1}$.

附加题

23. 求 $y=x\arctan x^2$ 的导数.

24. 求过点 $(-1,0)$ 并与曲线 $y=\frac{x+1}{x+2}$ 相切的直线方程.

1986 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 在下列各数中, 已表示成三角形式的复数是 （ ）

(A) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$　(B) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(C) $2\left(\sin\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}\right)$　(D) $-2\left(\sin\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}\right)$

2. 函数 $y=5^x+1$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\log_5(x+1)$　(B) $y=\log_x 5+1$

(C) $y=\log_5(x-1)$　(D) $y=\log_{(x-1)}5$

3. 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{3,4,5\}$, $B=\{1,3,6\}$, 那么集合 $\{2,7,8\}$ 是 （ ）

(A) $A\cup B$　(B) $A\cap B$　(C) $\overline{A}\cup\overline{B}$　(D) $\overline{A}\cap\overline{B}$

4. 函数 $y=\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x$ 是 （ ）

(A) 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数　(B) 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

(C) 周期为 $\frac{\pi}{4}$ 的奇函数　(D) 周期为 $\frac{\pi}{4}$ 的偶函数

5. 已知 $c>0$, 在下列不等式中成立的一个是 （ ）

(A) $c>2^c$　(B) $c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$

(C) $2^c<\left(\frac{1}{2}\right)^c$　(D) $2^c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$

6. 有以下 20 个数: 87, 91, 94, 88, 93, 91, 89, 87, 92, 86, 90, 92, 88, 90, 91, 86, 89, 92, 95, 88, 它们的和是 （ ）

(A) 1789　(B) 1799　(C) 1879　(D) 1899

7. 已知某正方体对角线长为 a, 那么这个正方体的全面积是 （ ）

(A) $2\sqrt{2}a^2$　(B) $2a^2$　(C) $2\sqrt{3}a^2$　(D) $3\sqrt{2}a^2$

8. 如果方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$ 所表示的曲线关于直线 $y=x$ 对称, 那么必有 （ ）

(A) $D=E$　(B) $D=F$

(C) $E=F$　(D) $D=E=F$

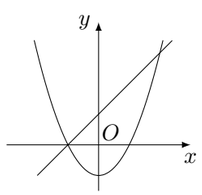
9. 设甲是乙的充分条件, 乙是丙的充要条件, 丙是丁的必要条件, 那么丁是甲的 （ ）

(A) 充分条件　(B) 必要条件

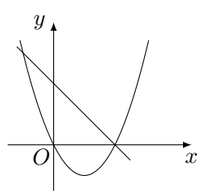
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要的条件

10. 在下列各图中, $y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b$ $(ab\neq 0)$ 的图象只可能是( )

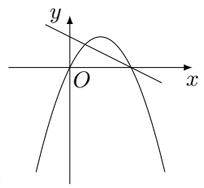
(A)



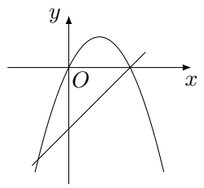
(B)



(C)



(D)



11. 求方程 $\sqrt{25^{(x^2+x-0.5)}}=\sqrt[4]{5}$ 的解.

12. 已知 $\omega=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 求 $\omega^2+\omega+1$ 的值.

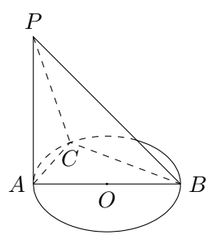
13. 在 xOy 平面上, $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标依次为 $(0,0)$、$(1,0)$、$(0,3)$, 将这个三角形绕 x 轴旋转一周, 求所得到的几何体的体积.

14. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+7}{5n^2+4}$.

15. 求 $\left(2x^3-\frac{1}{x^2}\right)^5$ 展开式中的常数项.

16. 求与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 有公共焦点, 且离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的双曲线方程.

17. 如图, AB 是圆 O 的直径, PA 垂直于圆 O 所在的平面, C 是圆周上不同于 A、B 的任一点, 求证: 平面 PAC 垂直于平面 PBC.



18. 求满足方程 $|z+3-\sqrt{3}\mathrm{i}|=\sqrt{3}$ 的辐角主值最小的复数 z.

19. 已知抛物线 $y^2=x+1$, 定点 $A(3,1)$, B 为抛物线上任意一点, 点 P 在线段 AB 上, 且有 $BP:PA=1:2$, 当点 B 在抛物线上变动时, 求点 P 的轨迹方程, 并指出这个轨迹为那种曲线.

20. 甲、乙、丙、丁四个公司承包 8 项工程, 甲公司承包 3 项, 乙公司承包 1 项, 丙、丁两个公司各承包 2 项, 问共有多少种承包方式.

21. 已知 $\sin A+\sin 3A+\sin 5A=a$, $\cos A+\cos 3A+\cos 5A=b$. 求证:

(1) 当 $b\neq 0$ 时, $\tan 3A=\frac{a}{b}$;

(2) $(1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2$.

22. 已知数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_1=\frac{4}{3}$, $a_2=\frac{13}{9}$, 且当 $n\geqslant 3$ 时, $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{3}(a_{n-1}-a_{n-2})$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

1987 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T$, $T \not\subseteq S$, 令 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X$ 等于 （ ）

(A) X　　(B) T　　(C) $\varnothing$　　(D) S

2. 设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, 令 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, 那么它的准线方程为 （ ）

(A) $y = \pm\dfrac{a^2}{c}$　　(B) $y = \pm\dfrac{b^2}{c}$

(C) $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$　　(D) $x = \pm\dfrac{b^2}{c}$

3. 设 a, b 是满足 $ab < 0$ 的实数, 那么 （ ）

(A) $|a+b| > |a-b|$　　(B) $|a+b| < |a-b|$

(C) $|a-b| < ||a| - |b||$　　(D) $|a-b| < |a| + |b|$

4. 已知 E, F, G, H 为空间中的四个点, 设命题甲: 点 E, F, G, H 不共面, 命题乙: 直线 EF 和 GH 不相交. 那么 （ ）

(A) 甲是乙的充分条件, 但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件, 但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

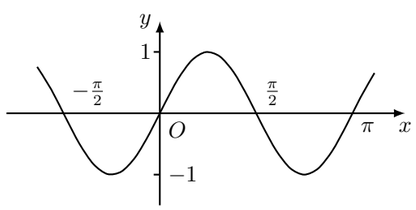
(D) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙必要条件

5. 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为增函数的是 （ ）

(A) $y = -\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　　(B) $y = \dfrac{x}{1-x}$

(C) $y = -(x+1)^2$　　(D) $y = 1 + x^2$

6. 要得到函数 $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \sin 2x$ 的图象 (如图) （ ）



(A) 向左平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$　　(B) 向右平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$

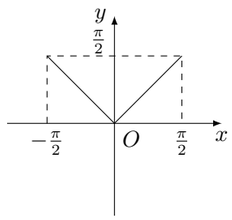
(C) 向左平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$　　(D) 向右平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$

7. 极坐标方程 $\rho = \sin\theta + 2\cos\theta$ 所表示的曲线是 （ ）

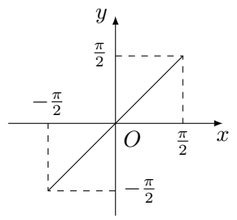
(A) 直线　　(B) 圆　　(C) 双曲线　　(D) 抛物线

8. 函数 $y = \arccos(\cos x)$ $\left(x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的图象是 （ ）

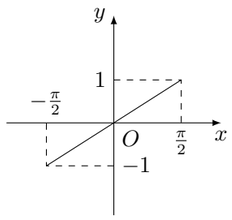
(A)



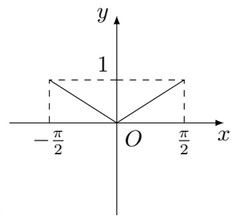
(B)



(C)



(D)



9. 求函数 $y = \tan\dfrac{2x}{3}$ 的周期.

10. 已知方程 $\dfrac{x^2}{2+\lambda} - \dfrac{y^2}{1+\lambda} = 1$ 表示双曲线, 求 λ 的范围.

11. 若 $(1+x)^n$ 的展开式中, x^3 的系数等于 x 的系数的 7 倍, 求 n.

12. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+1} + \dfrac{3}{n^2+1} + \cdots + \dfrac{2n}{n^2+1}\right)$.

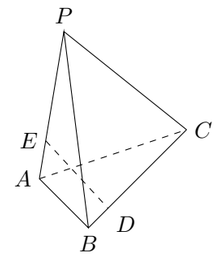
13. 在抛物线 $y = 4x^2$ 上求一点, 使该点到直线 $y = 4x - 5$ 的距离为最短.

14. 由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字且数字 1 与 2 不相邻的五位数. 求这种五位数的个数.

15. 一个正三棱台的下底和上底的周长分别为 30 cm 和 12 cm, 而侧面积等于两底面积之差, 求斜高.

16. 求 $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ 的值.

17. 如图, 三棱锥 $P - ABC$ 中, 已知 $PA \perp BC$, $PA = BC = L$, PA, BC 的公垂线 $ED = h$. 求证: 三棱锥 $P - ABC$ 的体积 $V = \dfrac{1}{6}L^2 h$.



18. 设对所有实数 x, 不等式 $x^2\log_2\dfrac{4(a+1)}{a} + 2x\log_2\dfrac{2a}{a+1} + \log_2\dfrac{(a+1)^2}{4a^2} > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

19. 设复数 z_1 和 z_2 满足关系式 $z_1\overline{z_2} + \overline{A}z_1 + A\overline{z_2} = 0$, 其中 A 为不等于 0 的复数. 证明:

(1) $|z_1 + A||z_2 + A| = |A|^2$;

(2) $\dfrac{z_1 + A}{z_2 + A} = \left|\dfrac{z_1 + A}{z_2 + A}\right|$.

20. 设数列 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 的前 n 项的和 S_n 与 a_n 的关系是 $S_n = -ba_n + 1 - \dfrac{1}{(1+b)^n}$, 其中 b 是与 n 无关的常数, 且 $b \neq -1$.

(1) 求 a_n 和 a_{n-1} 的关系式;

(2) 写出用 n 和 b 表示 a_n 的表达式;

(3) 当 $0 < b < 1$ 时, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

21. 定长为 3 的线段 AB 的两端点在抛物线 $y^2 = x$ 上移动, 记线段 AB 的中点为 M, 求点 M 到 y 轴的最短距离, 并求此时点 M 的坐标.

附加题

22. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)^x$.

23. 设 $y = x\ln(1+x^2)$, 求 y'.

1987 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \nsubseteq T$, $T \nsubseteq S$, 令 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X$ 等于 （ ）

(A) X　(B) T　(C) $\varnothing$　(D) S

2. 设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, 令 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, 那么它的准线方程为 （ ）

(A) $y = \pm\dfrac{a^2}{c}$　(B) $y = \pm\dfrac{b^2}{c}$

(C) $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$　(D) $x = \pm\dfrac{b^2}{c}$

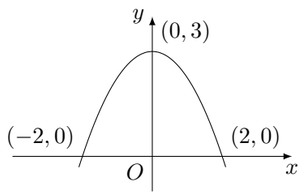
3. 设 $\log_3 4 \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 m = \log_4 16$, 那么 m 等于 （ ）

(A) $\dfrac{9}{2}$　(B) 9　(C) 18　(D) 27

4. 复数 $\sin 40^\circ - \mathrm{i}\cos 40^\circ$ 的辐角为 （ ）

(A) 40°　(B) 140°　(C) 220°　(D) 310°

5. 二次函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, 那么此函数为 （ ）



(A) $y = x^2 - 4$　(B) $y = 4 - x^2$

(C) $y = \dfrac{3}{4}(4 - x^2)$　(D) $y = \dfrac{3}{4}(2 - x^2)$

6. 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为增函数的是 （ ）

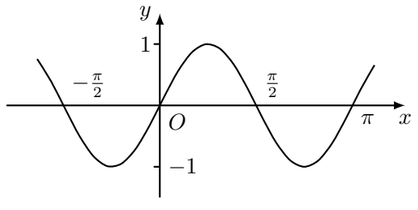
(A) $y = -\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　(B) $y = \dfrac{x}{1 - x}$

(C) $y = -(x + 1)^2$　(D) $y = 1 + x^2$

7. 已知平面上一点 P 在原坐标系中的坐标为 $(0, m)$ $(m \neq 0)$, 而在平移后所得到的新坐标系中的坐标为 $(m, 0)$, 那么新坐标系的原点 O' 在原坐标系中的坐标为 （ ）

(A) $(-m, m)$　(B) $(m, -m)$　(C) (m, m)　(D) $(-m, -m)$

8. 要得到函数 $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \sin 2x$ 的图象 (如图) （ ）



(A) 向左平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$　(B) 向右平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$

(C) 向左平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$　(D) 向右平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$

9. 求函数 $y = \sin^2 2x$ 的周期.

10. 已知方程 $\dfrac{x^2}{2 + \lambda} - \dfrac{y^2}{1 + \lambda} = 1$ 表示双曲线, 求 λ 的范围.

11. 若 $(1 + x)^n$ 的展开式中, x^3 的系数等于 x 的系数的 7 倍, 求 n.

12. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{2n}{n^2}\right)$.

13. 由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字且数字 1 与 2 不相邻的五位数. 求这种五位数的个数.

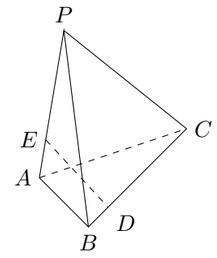
14. 求函数 $y = \log_2(1 + 2x - 3x^2)$ 的定义域.

15. 圆锥底面积为 3π, 母线与底面所的成角为 60°, 求它的体积.

16. 发电厂发出的电是三相交流电, 它的三根导线上的电流强度分别是时间 t 的函数: $I_A = I\sin\omega t$, $I_B = I\sin(\omega t + 120^\circ)$, $I_C = I\sin(\omega t + 240^\circ)$, 求 $I_A + I_B + I_C$ 的值.

17. 在复平面内, 已知等边三角形的两个顶点表示的复数分别为 2, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 求第三个顶点表示的复数.

18. 如图, 三棱锥 $P - ABC$ 中, 已知 $PA \perp BC$, $PA = BC = L$, PA, BC 的公垂线 $ED = h$. 求证: 三棱锥 $P - ABC$ 的体积 $V = \dfrac{1}{6}L^2 h$.



19. 设对所有实数 x, 不等式 $x^2\log_2\dfrac{4(a+1)}{a} + 2x\log_2\dfrac{2a}{a+1} + \log_2\dfrac{(a+1)^2}{4a^2} > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

20. 设复数 z_1 和 z_2 满足关系式 $z_1\overline{z_2} + \overline{A}z_1 + A\overline{z_2} = 0$, 其中 A 为不等于 0 的复数. 证明:

(1) $|z_1 + A||z_2 + A| = |A|^2$;

(2) $\dfrac{z_1 + A}{z_2 + A} = \left|\dfrac{z_1 + A}{z_2 + A}\right|$.

21. 设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的前 n 项的和 S_n 与 a_n 满足 $S_n = ka_n + 1$ (其中 k 是与 n 无关的常数, 且 $k \neq 1$).

(1) 试写出用 n, k 表示的 a_n 的表达式;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, 求 k 的取值范围.

22. 正方形 $ABCD$ 在直角坐标平面内, 已知其一条边 AB 在直线 $y = x + 4$ 上, C, D 在抛物线 $x = y^2$ 上, 求正方形 $ABCD$ 的面积.

1988 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2$ 的值等于 （ ）

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-\mathrm{i}$

2. 设圆 M 的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=2$, 直线 L 的方程为 $x+y-3=0$, 点 P 的坐标为 $(2,1)$, 那么 （ ）

(A) 点 P 在直线 L 上, 但不在圆 M 上

(B) 点 P 在圆 M 上, 但不在直线 L 上

(C) 点 P 既在圆 M 上, 又在直线 L 上

(D) 点 P 既不在直线 L 上, 也不在圆 M 上

3. 集合 $\{1,2,3\}$ 的子集共有 （ ）

(A) 7 个 (B) 8 个 (C) 6 个 (D) 5 个

4. 已知双曲线方程 $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$, 那么它的焦距是 （ ）

(A) 10 (B) 5 (C) $\sqrt{15}$ (D) $2\sqrt{15}$

5. 在 $(x-\sqrt{3})^{10}$ 的展开式中, x^6 的系数是 （ ）

(A) $-27\mathrm{C}_{10}^6$ (B) $27\mathrm{C}_{10}^4$ (C) $-9\mathrm{C}_{10}^6$ (D) $9\mathrm{C}_{10}^4$

6. 函数 $y=\cos^4 x-\sin^4 x$ 的最小正周期是 （ ）

(A) π (B) 2π (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) 4π

7. 方程 $4\cos^2 x-4\sqrt{3}\cos x+3=0$ 的解集是 （ ）

(A) $\{x|x=k\pi+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\}$

(B) $\{x|x=k\pi+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$

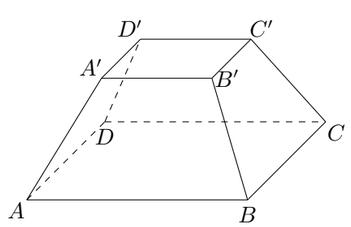
(C) $\{x|x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\}$

(D) $\{x|x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$

8. 极坐标方程 $\rho=\dfrac{4}{3-2\cos\theta}$ 所表示的曲线是 （ ）

(A) 圆 (B) 双曲线右支 (C) 抛物线 (D) 椭圆

9. 如图, 正四棱台中, $A'D'$ 所在的直线与 BB' 所在的直线是 （ ）



(A) 相交直线 (B) 平行直线

(C) 不互相垂直的异面直线 (D) 互相垂直的异面直线

10. $\tan\left(\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan 3\right)$ 的值等于 （ ）

(A) 4 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{8}$ (D) 8

11. 设命题甲: $\triangle ABC$ 的一个内角为 60°. 命题乙: $\triangle ABC$ 的三内角的度数成等差数列数列. 那么 （ ）

(A) 甲是乙的充分条件, 但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件, 但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

12. 在复平面内, 若复数 z 满足 $|z+1|=|z-\mathrm{i}|$, 则 z 所对应的点 Z 的集合构成的图形是 （ ）

(A) 圆 (B) 直线 (C) 椭圆 (D) 双曲线

13. 如果曲线 $x^2-y^2-2x-2y-1=0$ 经过平移坐标轴后的新方程为 $x'^2-y'^2=1$, 那么新坐标系的原点在原坐标系中的坐标为 （ ）

(A) $(1,1)$ (B) $(-1,-1)$ (C) $(-1,1)$ (D) $(1,-1)$

14. 假设在 200 件产品中有 3 件次品, 现在从中任意抽取 5 件, 其中至少有 2 件次品的抽法有 （ ）

(A) $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{197}^3$ 种 (B) $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{197}^3+\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_{197}^2$ 种

(C) $\mathrm{C}_{200}^5-\mathrm{C}_{197}^5$ 种 (D) $\mathrm{C}_{200}^5-\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_{197}^4$ 种

15. 已知二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的平面角是锐角, C 是平面 α 内一点 (它不在棱 AB 上), 点 D 是点 C 在面 β 上的射影, 点 E 是棱 AB 上满足 $\angle CEB$ 为锐角的任一点, 那么 （ ）

(A) $\angle CEB>\angle DEB$

(B) $\angle CEB=\angle DEB$

(C) $\angle CEB<\angle DEB$

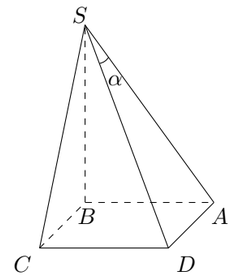
(D) $\angle CEB$ 与 $\angle DEB$ 的大小关系不能确定

16. 求复数 $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 的模和辐角的主值.

17. 解方程: $9^{-x}-2\cdot 3^{1-x}=27$.

18. 已知 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$, $3\pi<\theta<\dfrac{7\pi}{2}$, 求 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 的值.

19. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, 侧棱 SB 垂直于底面, 并且 $SB=\sqrt{3}$, 用 α 表示 $\angle ASD$, 求 $\sin\alpha$ 的值.



20. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$, 并且 $a_1=b$ $(b\neq 0)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots a_n}{a_6+a_7+a_8+\cdots a_n}$.

21. 已知 $\tan x=a$, 求 $\dfrac{3\sin x+\sin 3x}{3\cos x+\cos 3x}$ 的值.

22. 如图, 正三棱锥 $S-ABC$ 的侧面是边长为 a 的正三角形, D 是 SA 的中点, E 是 BC 的中点, 求 $\triangle SDE$ 绕直线 SE 旋转一周所得的旋转体的体积.

23. 设 $a>0$, $a\neq 1$, $t>0$, 比较 $\dfrac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\dfrac{t+1}{2}$ 的大小, 并证明你的结论.

24. 给定实数 a, 且 $a\neq 0$, $a\neq 1$, 设函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$ $(x\in\mathbf{R}$, 且 $x\neq\dfrac{1}{a})$. 证明:
(1) 经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴;
(2) 这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

25. 直线 L 的方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$, 其中 $p>0$; 椭圆的中心为 $D\left(2+\dfrac{p}{2},0\right)$, 焦点在 x 轴上, 长半轴长为 2, 短半轴长为 1, 它的一个顶点为 $A\left(\dfrac{p}{2},0\right)$. 问 p 在哪个范围内取值时, 椭圆上有四个不同的点, 它们中每一个点到点 A 的距离等于该点到直线 L 的距离.

1988 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2$ 的值等于 （ ）

(A) 1　(B) -1　(C) i　(D) $-\mathrm{i}$

2. 圆 M 的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=2$, 直线 L 的方程为 $x+y-3=0$, 点 P 的坐标为 $(2,1)$, 那么 （ ）

(A) 点 P 在直线 L 上, 但不在圆 M 上

(B) 点 P 在圆 M 上, 但不在直线 L 上

(C) 点 P 既在圆 M 上, 又在直线 L 上

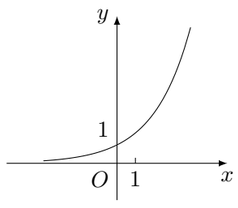
(D) 点 P 既不在直线 L 上, 也不在圆 M 上

3. 集合 $\{1,2,3\}$ 的子集共有 （ ）

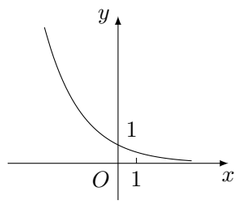
(A) 5 个　(B) 6 个　(C) 7 个　(D) 8 个

4. 函数 $y=a^x(0<a<1)$ 的图象是 （ ）

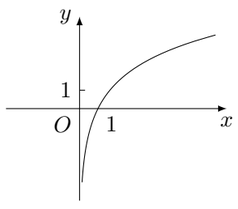
(A)



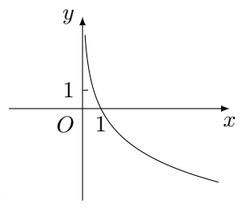
(B)



(C)



(D)



5. 已知椭圆方程 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{11}=1$, 那么它的焦距是 （ ）

(A) 6　(B) 3　(C) $2\sqrt{31}$　(D) $\sqrt{31}$

6. 在复平面内, 与复数 $z=-1-\mathrm{i}$ 的共轭复数对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

7. 在 $(x-\sqrt{3})^{10}$ 的展开式中, x^6 的系数是 （ ）

(A) $-27\mathrm{C}_{10}^6$　(B) $27\mathrm{C}_{10}^4$　(C) $-9\mathrm{C}_{10}^6$　(D) $9\mathrm{C}_{10}^4$

8. 函数 $y=3\cos\left(\dfrac{2}{5}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\dfrac{2}{5}\pi$　(B) $\dfrac{5}{2}\pi$　(C) 2π　(D) 5π

9. $\sin\left(-\dfrac{19}{6}\pi\right)$ 的值等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. 直线 $x+ay=2a+2$ 与 $ax+y=a+1$ 平行 (不重合) 的充要条件是( )

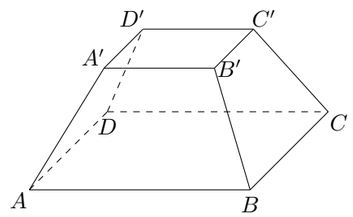
(A) $a=\dfrac{1}{2}$　(B) $a=-\dfrac{1}{2}$　(C) $a=1$　(D) $a=-1$

11. 函数 $y=\dfrac{x-2}{2x-1}\left(x\in\mathbf{R},x\neq\dfrac{1}{2}\right)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\dfrac{x-2}{2x-1}\left(x\in\mathbf{R},x\neq\dfrac{1}{2}\right)$　(B) $y=\dfrac{2x-1}{x-2}\ (x\in\mathbf{R},x\neq2)$

(C) $y=\dfrac{x+2}{2x-1}\left(x\in\mathbf{R},x\neq\dfrac{1}{2}\right)$　(D) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}\ (x\in\mathbf{R},x\neq-2)$

12. 如图, 正四棱台中, $A'D'$ 所在的直线与 BB' 所在的直线是 （ ）



(A) 相交直线　(B) 平行直线

(C) 不互相垂直的异面直线　(D) 互相垂直的异面直线

13. 函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在闭区间 （ ）

(A) $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数　(B) $\left[-\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数

(C) $[-\pi,0]$ 上是增函数　(D) $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上是增函数

14. 假设在 200 件产品中有 3 件次品, 现在从中任意抽取 5 件, 其中至少有 2 件次品的抽法有 （ ）

(A) $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{197}^3+\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_{197}^2$ 种　(B) $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{197}^3$ 种

(C) $\mathrm{C}_{200}^5-\mathrm{C}_{197}^5$ 种　(D) $\mathrm{C}_{200}^5-\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_{197}^4$ 种

15. 已知二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的平面角是锐角 θ, α 内一点 C 到 β 的距离为 3, 点 C 到棱 AB 的距离为 4, 那么 $\tan\theta$ 的值等于 （ ）

(A) $\dfrac{3}{4}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{3}{7}\sqrt{7}$　(D) $\dfrac{1}{3}\sqrt{7}$

16. 求复数 $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 的模和辐角的主值.

17. 解方程: $9^{-x}-2\cdot3^{1-x}=27$.

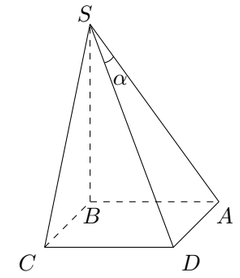
18. 已知 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$, $3\pi<\theta<\dfrac{7\pi}{2}$, 求 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 的值.

19. 一个直角三角形的两条直角边的长分别为 3 cm 和 4 cm, 将这个直角三角形以斜边为轴旋转一周, 求所得旋转体的体积.

20. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n}{n^2+3n-1}$.

21. 证明: $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

22. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, 侧棱 SB 垂直于底面, 并且 $SB=\sqrt{3}$, 用 α 表示 $\angle ASD$, 求 $\sin\alpha$ 的值.



23. 在双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支上求点 $P(a,b)$, 使该点到直线 $y=x$ 的距离为 $\sqrt{2}$.

24. 解不等式: $\lg\left(x-\dfrac{1}{x}\right)<0$.

25. 一个数列 $\{a_n\}$: 当 n 为奇数时, $a_n=5n+1$; 当 n 为偶数时, $a_n=2^{\frac{n}{2}}$. 求这个数列的前 $2m$ 项的和 (m 是正整数).

1989 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 如果 $I=\{a,b,c,d,e\}$, $M=\{a,c,d\}$, $N=\{b,d,e\}$, 其中 I 是全集, 那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 等于 （ ）

(A) $\varnothing$ (B) $\{d\}$ (C) $\{a,c\}$ (D) $\{b,e\}$

2. 与函数 $y=x$ 有相同图象的一个函数是 （ ）

(A) $y=\sqrt{x^2}$ (B) $y=\dfrac{x^2}{x}$

(C) $y=a^{\log_a x}$, 其中 $a>0$, $a\neq 1$. (D) $y=\log_a a^x$, 其中 $a>0$, $a\neq 1$.

3. 如果圆锥的底面半径为 $\sqrt{2}$, 高为 2 , 那么它的侧面积是 （ ）

(A) $4\sqrt{3}\pi$ (B) $2\sqrt{2}\pi$ (C) $2\sqrt{3}\pi$ (D) $4\sqrt{2}\pi$

4. $\cos\left[\arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right)-\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]$ 的值等于 （ ）

(A) -1 (B) $-\dfrac{7}{25}$ (C) $\dfrac{7}{25}$ (D) $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

5. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 如果 $a_1+a_2+a_3=18$, $a_2+a_3+a_4=-9$, 且 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 的值等于 （ ）

(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 48

6. 如果 $|\cos\theta|=\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{5}{2}\pi<\theta<3\pi$, 那么 $\sin\dfrac{\theta}{2}$ 的值等于 （ ）

(A) $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ (C) $-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

7. 设复数 z 满足关系式 $z+|\bar{z}|=2+\mathrm{i}$, 那么 z 等于 （ ）

(A) $-\dfrac{3}{4}+\mathrm{i}$ (B) $\dfrac{3}{4}-\mathrm{i}$ (C) $-\dfrac{3}{4}-\mathrm{i}$ (D) $\dfrac{3}{4}+\mathrm{i}$

8. 已知球的两个平行截面的面积分别为 5 π 和 8 π, 它们位于球心的同一侧, 且相距为 1, 那么这个球的半径是 （ ）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 5

9. 已知椭圆的极坐标方程是 $\rho=\dfrac{5}{3-2\cos\theta}$, 那么它的短轴长是 （ ）

(A) $\dfrac{10}{3}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{3}$

10. 如果双曲线 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到它的右焦点的距离是 8, 那么点 P 到它的右准线的距离是 （ ）

(A) 10 (B) $\dfrac{32\sqrt{7}}{7}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $\dfrac{32}{5}$

11. 已知 $f(x)=8+2x-x^2$, 如果 $g(x)=f(2-x^2)$, 那么 $g(x)$ （ ）

(A) 在区间 $(-1,0)$ 上是减函数 (B) 在区间 $(0,1)$ 上是减函数

(C) 在区间 $(-2,0)$ 上是增函数 (D) 在区间 $(0,2)$ 上是增函数

12. 由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数, 其中小于 50000 的偶数共有 （ ）

(A) 60 个 (B) 48 个 (C) 36 个 (D) 24 个

13. 方程 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ 的解集是_____.

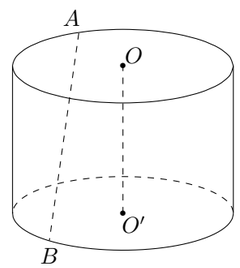
14. 不等式 $|x^2-3x|>4$ 的解集是_____.

15. 函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$ 的反函数的定义域是_____.

16. 已知 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$, 那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$_____.

17. 已知 A 和 B 是两个命题, 如果 A 是 B 的充分条件, 那么 B 是 A 的_____条件; $\overline{A}$ 是 $\overline{B}$ 的_____条件.

18. 如图, 已知圆柱的底面半径是 3, 高是 4, A、B 两点分别在两底面的圆周上, 并且 $AB=5$, 那么直线 AB 与轴 OO' 之间的距离等于_____.

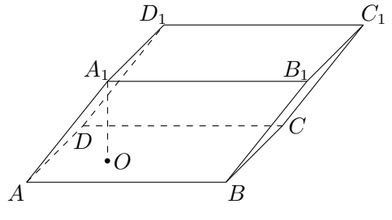


19. 证明: $\tan\dfrac{3x}{2}-\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$.

20. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=3$, $AB\perp AD$, $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\dfrac{\pi}{3}$.

(1) 求证: 顶点 A_1 在底面 $ABCD$ 的射影 O 在 $\angle BAD$ 的平分线上;

(2) 求这个平行六面体的体积.



21. 自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 L 射到 x 轴上, 被 x 轴反射, 其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切, 求光线 L 所在直线的方程.

22. 已知 $a>0$, $a\neq 1$, 试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围.

23. 是否存在常数 a, b, c 使得等式 $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$ 对一切自然数 n 都成立? 并证明你的结论.

24. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2 为周期的函数, 对 $k\in\mathbf{Z}$, 用 I_k 表示区间 $(2k-1,2k+1]$, 已知当 $x\in I_0$ 时, $f(x)=x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析表达式;

(2) 对自然数 k, 求集合 $M_k=\{a|$ 使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不等的实根$\}$.

1989 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 如果 $I=\{a,b,c,d,e\}$, $M=\{a,c,d\}$, $N=\{b,d,e\}$, 其中 I 是全集, 那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 等于 （ ）

(A) $\varnothing$ (B) $\{d\}$ (C) $\{a,c\}$ (D) $\{b,e\}$

2. 与函数 $y=x$ 有相同图象的一个函数是 （ ）

(A) $y=\sqrt{x^2}$ (B) $y=\dfrac{x^2}{x}$

(C) $y=a^{\log_a x}$, 其中 $a>0$, $a\neq 1$. (D) $y=\log_a a^x$, 其中 $a>0$, $a\neq 1$.

3. 如果圆锥的底面半径为 $\sqrt{2}$, 高为 2, 那么它的侧面积是 （ ）

(A) $4\sqrt{3}\pi$ (B) $2\sqrt{2}\pi$ (C) $2\sqrt{3}\pi$ (D) $4\sqrt{2}\pi$

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 如果 $a_1+a_2=12$, $a_2+a_3=-6$, 且 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 的值等于 （ ）

(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 48

5. 如果 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$, 那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7$ 的值等于 （ ）

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 2

6. 如果 $|\cos\theta|=\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{5}{2}\pi<\theta<3\pi$, 那么 $\sin\dfrac{\theta}{2}$ 的值等于 （ ）

(A) $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ (C) $-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

7. 直线 $2x+3y-6=0$ 关于点 $(1,-1)$ 对称的直线是 （ ）

(A) $3x-2y+2=0$ (B) $2x+3y+7=0$

(C) $3x-2y-12=0$ (D) $2x+3y+8=0$

8. 已知球的两个平行截面的面积分别为 5 π 和 8 π, 它们位于球心的同一侧, 且相距为 1, 那么这个球的半径是 （ ）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 5

9. 由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数, 其中偶数共有 （ ）

(A) 60 个 (B) 48 个 (C) 36 个 (D) 24 个

10. 如果双曲线 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到它的右焦点的距离是 8, 那么点 P 到它的右准线的距离是 （ ）

(A) 10 (B) $\dfrac{32\sqrt{7}}{7}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $\dfrac{32}{5}$

11. 如果 $|x|\leqslant\dfrac{\pi}{4}$, 那么函数 $f(x)=\cos^2x+\sin x$ 最小值是 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ (B) $-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ (C) -1 (D) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

12. 已知 $f(x)=8+2x-x^2$, 如果 $g(x)=f(2-x^2)$, 那么 $g(x)$ （ ）

(A) 在区间 $(-1,0)$ 上是减函数 (B) 在区间 $(0,1)$ 上是减函数

(C) 在区间 $(-2,0)$ 上是增函数 (D) 在区间 $(0,2)$ 上是增函数

13. 给定三点 $A(1,0)$, $B(-1,0)$, $C(1,2)$, 那么通过点 A 并且与直线 BC 垂直的直线方程是_____.

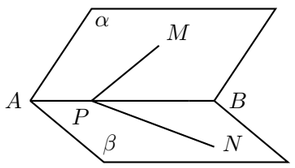
14. 不等式 $|x^2-3x|>4$ 的解集是_____.

15. 函数 $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 的反函数的定义域是_____.

16. 已知 A 和 B 是两个命题, 如果 A 是 B 的充分条件, 那么 B 是 A 的_____条件; $\overline{A}$ 是 $\overline{B}$ 的_____条件.

17. 已知 $0<a<1$, $0<b<1$, $a^{\log_b(x-3)}<1$, 那么 x 的取值范围是_____.

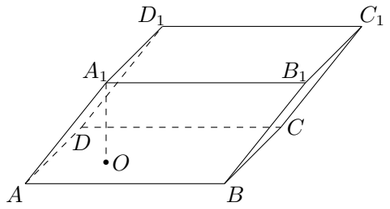
18. 如图, P 是二面角 $\alpha-AB-\beta$ 棱 AB 上的一点, 分别在 α, β 上引射线 PM, PN, 如果 $\angle BPM=\angle BPN=45°$, $\angle MPN=60°$, 那么二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的大小是_____.



19. 设复数 $z=(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^5$, 求 z 的模和辐角的主值.

20. 证明: $\tan\dfrac{3x}{2}-\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$.

21. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=3$, $AB\perp AD$, $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\dfrac{\pi}{3}$.
(1) 求证: 顶点 A_1 在底面 $ABCD$ 的射影 O 在 $\angle BAD$ 的平分线上;
(2) 求这个平行六面体的体积.



22. 用数学归纳法证明: $(1\cdot 2^2-2\cdot 3^2)+(3\cdot 4^2-4\cdot 5^2)+\cdots+[(2n-1)(2n)^2-2n(2n+1)^2]=-n(n+1)(4n+3)$.

23. 已知 $a>0$, $a\neq 1$, 试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围.

24. 给定椭圆方程 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b>0)$, 求与这个椭圆有公共焦点的双曲线, 使得以它们的交点为顶点的四边形面积最大, 并求相应的四边形的顶点坐标.

1990 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 方程 $2^{\log_3 x}=\dfrac{1}{4}$ 的解是 （ ）

(A) $x=\dfrac{1}{9}$ (B) $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $x=\sqrt{3}$ (D) $x=9$

2. 把复数 $1+\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$, 所得到的向量对应的复数是 （ ）

(A) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (B) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

(C) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (D) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

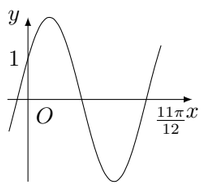
3. 如果轴截面为正方形的圆柱的侧面积是 S, 那么圆柱的体积等于 （ ）

(A) $\dfrac{S}{2}\sqrt{S}$ (B) $\dfrac{S}{2}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$ (C) $\dfrac{S}{4}\sqrt{S}$ (D) $\dfrac{S}{4}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$

4. 方程 $\sin 2x=\sin x$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的解的个数是 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 如图是函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)\ \left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象, 那么 （ ）



(A) $\omega=\dfrac{10}{11}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\omega=\dfrac{10}{11}$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$

(C) $\omega=2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\omega=2$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$

6. 函数 $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}+\dfrac{|\cos x|}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{|\tan x|}+\dfrac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是 （ ）

(A) $\{-2,4\}$ (B) $\{-2,0,4\}$

(C) $\{-2,0,2,4\}$ (D) $\{-4,-2,0,4\}$

7. 如果直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=3x-b$ 关于直线 $y=x$ 对称, 那么 （ ）

(A) $a=\dfrac{1}{3}$, $b=6$ (B) $a=\dfrac{1}{3}$, $b=-6$

(C) $a=3$, $b=-2$ (D) $a=3$, $b=6$

8. 极坐标方程 $4\rho\sin^2\dfrac{\theta}{2}=5$ 表示的曲线是 （ ）

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线的一支 (D) 抛物线

9. 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$, 集合 $M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$, $N=\{(x,y)\,|y\neq x+1\}$. 那么 $\overline{M\cup N}$ 等于 （ ）

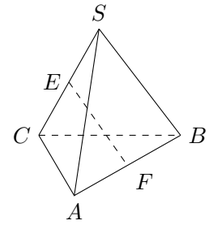
(A) $\varnothing$ (B) $\{(2,3)\}$

(C) $(2,3)$ (D) $\{(x,y)|y=x+1\}$

10. 如果实数 x, y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$, 那么 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sqrt{3}$

11. 如图, 正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱与底面边长相等, 如果 E、F 分别为 SC、AB 的中点, 那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于 （ ）



(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°

12. 已知 $h>0$. 设命题甲为: 两个实数 a, b 满足 $|a-b|<2h$; 命题乙为: 两个实数 a, b 满足 $|a-1|<h$ 且 $|b-1|<h$. 那么甲是乙的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

13. A, B, C, D, E 五人并排站成一排, 如果 B 必须站在 A 的右边 (A, B 可以不相邻), 那么不同的排法共有 （ ）

(A) 24 种 (B) 60 种 (C) 90 种 (D) 120 种

14. 以一个正方体的顶点为顶点的四面体共有 （ ）

(A) 70 个 (B) 64 个 (C) 58 个 (D) 52 个

15. 设函数 $y=\arctan x$ 的图象沿 x 轴正方向平移 2 个单位所得到的图象为 C. 又设图象 C' 与 C 关于原点对称, 那么 C' 所对应的函数是 （ ）

(A) $y=-\arctan(x-2)$ (B) $y=\arctan(x-2)$

(C) $y=-\arctan(x+2)$ (D) $y=\arctan(x+2)$

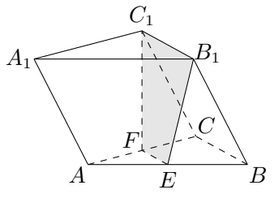
16. 双曲线 $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ 的准线方程是_____.

17. $(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5$ 的展开式中, x^2 的系数等于_____.

18. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 如果 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n}{S_n}$ 等于_____.

19. 函数 $y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ 的最大值是_____.

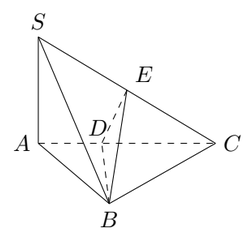
20. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 E、F 分别为 AB、AC 的中点, 平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1、V_2 的两部分, 那么 $V_1:V_2=$_____.



21. 有四个数, 其中前三个数成等差数列, 后三个数成等比数列, 并且第一个数与第四个数的和是 16, 第二个数与第三个数的和是 12. 求这四个数.

22. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{4}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$, 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

23. 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA\perp$ 底面 ABC, $AB\perp BC$. DE 垂直平分 SC, 且分别交 AC、SC 于 D、E. 又 $SA=AB$, $SB=BC$. 求以 BD 为棱, 以 BDE 与 BDC 为面的二面角的度数.



24. 设 $a\geqslant 0$, 在复数集 $\mathbf{C}$ 中解方程: $z^2+2|z|=a$.

25. 设椭圆的中心是坐标原点, 长轴在 x 轴上, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 已知点 $P\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 到这个椭圆上的点的最远距离是 $\sqrt{7}$. 求这个椭圆的方程, 并求椭圆上到点 P 的距离等于 $\sqrt{7}$ 的点的坐标.

26. $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa}{n}$, 其中 a 是实数, n 是任意自然数且 $n\geqslant 2$.

(1) 如果 $f(x)$ 当 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义, 求 a 的取值范围;

(2) 如果 $a\in(0,1]$, 证明: $2f(x)<f(2x)$ 当 $x\neq 0$ 时成立.

1990 年普通高等学校招生考试（上海卷）

数学试卷

1. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+4}}{x+2}$ 的定义域是_____.

2. 函数 $y=\arcsin x$, $(x\in[-1,1])$ 的反函数是_____.

3. 过点 $(1,2)$ 且与直线 $2x+y-1=0$ 平行的直线方程是_____.

4. 已知圆柱的轴截面是正方形, 它的面积是 $4\ \text{cm}^2$, 那么这个圆柱的体积是_____cm^3. (结果中保留 π)

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A=-\dfrac{3}{5}$, 则 $\sin\dfrac{A}{2}=$_____.

6. 设复数, 则的值是_____.

7. 已知圆锥的中截面周长为 a, 母线长为 l, 则它的侧面积等于_____.

8. 已知 $(x+a)^7$ 的展开式中, x^4 的系数是 -280, 则实数 $a=$_____.

9. 双曲线 $2mx^2-my^2=2$ 的一条准线是 $y=1$, 则 $m=$_____.

10. 平面上, 四条平行直线与另外五条平行直线互相垂直, 则它的矩形共有_____个 (结果用数值表示) .

11. 圆的半径是 1, 圆心的极坐标是 $(1,0)$, 则这个圆的极坐标方程是 (　　)

(A) $\rho=\cos\theta$　(B) $\rho=\sin\theta$　(C) $\rho=2\cos\theta$　(D) $\rho=2\sin\theta$

12. 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, "$f(x)$, $g(x)$ 都是奇函数"是"$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积是偶函数"的 (　　)

(A) 必要条件但非充分条件　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 充分必要条件　(D) 非充分条件也非必要条件

13. 设点 P 在有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的延长线上, P 分 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ, 则 (　　)

(A) $\lambda<-1$　(B) $-1<\lambda<0$　(C) $0<\lambda<1$　(D) $\lambda>1$

14. 设 $2^a=3$, $2^b=6$, $2^c=12$, 则数列 a, b, c (　　)

(A) 是等差数列但不是等比数列　(B) 是等比数列但不是等差数列

(C) 既是等差数列又是等比数列　(D) 既不是等差数列又不是等比数列

15. 设 α 角属于第二象限, 且 $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=-\cos\dfrac{\alpha}{2}$, 则 $\dfrac{\alpha}{2}$ 角属于 (　　)

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

16. 设过长方体同一个顶点的三个面的对角线长分别是 a, b, c, 那么这个长方体的对角线长是 (　　)

(A) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$　(B) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$

(C) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$　(D) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$

17. 函数 $f(x)=a\tan\dfrac{x}{a}$ 的最小正周期是 (　　)

(A) πa　(B) $\pi|a|$　(C) $\dfrac{\pi}{a}$　(D) $\dfrac{\pi}{|a|}$

18. 已知 $1<x<d$, 令 $a=(\log_d x)^2$, $b=\log_d(x^2)$, $b=\log_d(\log_d x)$, 则 (　　)

(A) $a<b<c$　(B) $a<c<b$　(C) $c<b<a$　(D) $c<a<b$

19. 设 a, b 是两条异面直线, 那么下列四个命题中的假命题是 (　　)

(A) 经过直线 a 有且只有一个平面平行于直线 b

(B) 经过直线 a 有且只有一个平面垂直于直线 b

(C) 存在分别经过直线 a 和 b 的两个互相平行的平面

(D) 存在分别经过直线 a 和 b 的两个互相垂直的平面

20. 下列四个函数中, 在定义域内不具有单调性的函数是 (　　)

(A) $y=\cot(\arccos x)$　(B) $y=\tan(\arcsin x)$

(C) $y=\sin(\arctan x)$　(D) $y=\cos(\arctan x)$

21. 已知 $\log_5(x^2+2x-2)=0$, $2\log_5(x+2)-\log_5 y+\dfrac{1}{2}=0$, 求 y 的值.

22. 求方程 $\sqrt{5\cos x+\cos 2x}+\sin x=0$ 在 $[0,2\pi)$ 上的解.

23. 已知点 P 直线 $x=2$ 上移动, 直线 l 通过原点且与 OP 垂直, 通过点 $A(1,0)$ 及点 P 的直线 m 和直线 l 交于点 Q. 求点 Q 的轨迹方程, 并指出该轨迹的名称和它的焦点坐标.

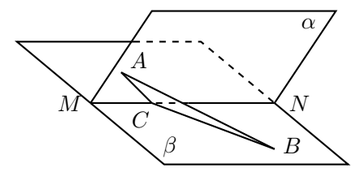
24. 已知直线 $L:x-ny=0$, $(n\in\mathbf{N})$; 圆 $M:(x+1)^2+(y+1)^2=1$; 抛物线 $\Phi:y=(x-1)^2$. 又 L 与 M 交于点 A, B; L 与 Φ 交于点 C, D. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|AB|^2}{|CD|^2}$.

25. 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ (其中 $a\in\mathbf{R}$) 的解集依次记为 A 与 B. 求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

26. 如图, 平面 α, β 相交于直线 MN, 点 A 在平面 α 上, 点 B 在平面 β 上, 点 C 在直线 MN 上, $\angle ACM=\angle BCN=45°$, A—MN—B 是 $60°$ 的二面角, $AC=1$. 求:

(1) 点 A 到平面 β 的距离;

(2) 二面角 A—BC—M 的大小 (用反三角函数表示) .



27. 复平面上点 A, B 对应的复数分别为 $z_1=2$, $z_2=-3$, 点 P 对应的复数为 z, $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ 的辐角主值为 φ. 当点 P 在以原点为圆心, 1 为半径的上半圆周 (不包括两个端点) 上运动时, 求 φ 的最小值.

1990 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 方程 $2^{\log_3 x}=\dfrac{1}{4}$ 的解是 （ ）

(A) $x=\dfrac{1}{9}$　(B) $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $x=\sqrt{3}$　(D) $x=9$

2. $\cos^2 75^\circ+\cos^2 15^\circ+\cos 75^\circ\cos 15^\circ$ 的值等于 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{5}{4}$　(D) $1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

3. 如果轴截面为正方形的圆柱的侧面积是 S, 那么圆柱的体积等于 （ ）

(A) $\dfrac{S}{2}\sqrt{S}$　(B) $\dfrac{S}{2}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$　(C) $\dfrac{S}{4}\sqrt{S}$　(D) $\dfrac{S}{4}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$

4. 把复数 $1+\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$, 所得到的向量对应的复数是 （ ）

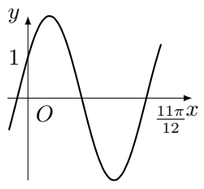
(A) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　(B) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

(C) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　(D) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

5. 曲线 $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ 的准线方程是 （ ）

(A) $y=\pm\dfrac{16}{\sqrt{7}}$　(B) $x=\pm\dfrac{16}{\sqrt{7}}$　(C) $y=\pm\dfrac{16}{5}$　(D) $x=\pm\dfrac{16}{5}$

6. 如图是函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象, 那么 （ ）



(A) $\omega=\dfrac{10}{11}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\omega=\dfrac{10}{11}$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$

(C) $\omega=2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　(D) $\omega=2$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$

7. 设命题甲为: $0<x<5$; 命题乙为: $|x-2|<3$. 那么 （ ）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

8. 函数 $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}+\dfrac{|\cos x|}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{|\tan x|}+\dfrac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是 （ ）

(A) $\{-2,4\}$　(B) $\{-2,0,4\}$

(C) $\{-2,0,2,4\}$　(D) $\{-4,-2,0,4\}$

9. 如果直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=3x-b$ 关于直线 $y=x$ 对称, 那么 （ ）

(A) $a=\dfrac{1}{3}$, $b=6$　(B) $a=\dfrac{1}{3}$, $b=-6$

(C) $a=3$, $b=-2$　(D) $a=3$, $b=6$

10. 如果抛物线 $y^2=a(x+1)$ 的准线方程是 $x=-3$, 那么这条抛物线的焦点坐标是 （ ）

(A) $(3,0)$　(B) $(2,0)$　(C) $(1,0)$　(D) $(-1,0)$

11. 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$, 集合 $M=\left\{x,y\middle|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right\}$, $N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$. 那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 等于 （ ）

(A) $\varnothing$　(B) $\{(2,3)\}$

(C) $(2,3)$　(D) $\{(x,y)|y=x+1\}$

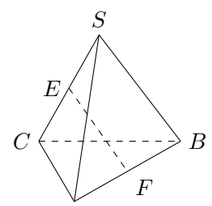
12. A, B, C, D, E 五人并排站成一排, 如果 B 必须站在 A 的右边 (A, B 可以不相邻), 那么不同的排法共有 （ ）

(A) 24 种　(B) 60 种　(C) 90 种　(D) 120 种

13. 已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$, 且 $f(-2)=10$, 那么 $f(2)$ 等于 （ ）

(A) -26　(B) -18　(C) -10　(D) 10

14. 如图, 正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱与底面边长相等, E, F 分别为 SC, AB 的中点, 则异面直线 EF 与 SA 所成的角等于 （ ）



(A) 90°　(B) 60°　(C) 45°　(D) 30°

15. 以一个正三棱柱的顶点为顶点的四面体共有 （ ）

(A) 6 个　(B) 12 个　(C) 18 个　(D) 30 个

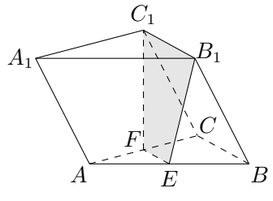
16. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 那么 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ 的值等于_____.

17. $(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5$ 的展开式中, x^2 的系数等于_____.

18. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 如果 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n}{S_n}$ 等于_____.

19. 如果实数 x, y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$, 那么 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值是_____.

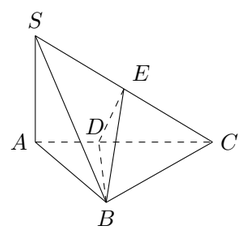
20. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 E、F 分别为 AB、AC 的中点, 平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1、V_2 的两部分, 那么 $V_1:V_2=$_____.



21. 有四个数, 其中前三个数成等差数列, 后三个数成等比数列, 并且第一个数与第四个数的和是 16, 第二个数与第三个数的和是 12. 求这四个数.

22. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{4}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$, 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

23. 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA\perp$ 底面 ABC, $AB\perp BC$. DE 垂直平分 SC, 且分别交 AC、SC 于 D、E. 又 $SA=AB$, $SB=BC$. 求以 BD 为棱, 以 BDE 与 BDC 为面的二面角的度数.



24. 已知 $a>0$, $a\neq1$, 解不等式: $\log_a(4+3x-x^2)-\log_a(2x-1)>\log_a 2$.

25. 设 $a\geqslant0$, 在复数集 $\mathbf{C}$ 中解方程: $z^2+2|z|=a$.

26. 设椭圆的中心是坐标原点, 长轴在 x 轴上, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 已知点 $P\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 到这个椭圆上的点的最远距离是 $\sqrt{7}$. 求这个椭圆的方程, 并求椭圆上到点 P 的距离等于 $\sqrt{7}$ 的点的坐标.

1991 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, 并且 α 是第二象限的角, 那么 $\tan\alpha$ 的值等于 （ ）

(A) $-\dfrac{4}{3}$ (B) $-\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{4}{3}$

2. 焦点在 $(-1,0)$, 顶点在 $(1,0)$ 的抛物线方程是 （ ）

(A) $y^2=8(x+1)$ (B) $y^2=-8(x+1)$

(C) $y^2=8(x-1)$ (D) $y^2=-8(x-1)$

3. 函数 $y=\cos^4 x-\sin^4 x$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

4. 如果把两条异面直线看成“一对”, 那么六棱锥的棱所在的 12 条直线中, 异面直线共有 （ ）

(A) 12 对 (B) 24 对 (C) 36 对 (D) 48 对

5. 函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 的图象的一条对称轴的方程是 （ ）

(A) $x=-\dfrac{\pi}{2}$ (B) $x=-\dfrac{\pi}{4}$ (C) $x=\dfrac{\pi}{8}$ (D) $x=\dfrac{5\pi}{4}$

6. 如果三棱锥 $S-ABC$ 的底面是不等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等, 且顶点 S 在底面的射影 O 在 $\triangle ABC$ 内, 那么 O 是 $\triangle ABC$ 的( )

(A) 垂心 (B) 重心 (C) 外心 (D) 内心

7. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_n>0$, $a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$, 那么 a_3+a_5 的值等于 （ ）

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

8. 如果圆锥曲线的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{16}{5-3\cos\theta}$, 那么它的焦点的极坐标为 （ ）

(A) $(0,0)$, $(6,\pi)$ (B) $(-3,0)$, $(3,0)$

(C) $(0,0)$, $(3,0)$ (D) $(0,0)$, $(6,0)$

9. 从 4 台甲型和 5 台乙型电视机中任意取出 3 台, 其中至少要有甲型与乙型电视机各 1 台, 则不同的取法共有 （ ）

(A) 140 种 (B) 84 种 (C) 70 种 (D) 35 种

10. 如果 $AC<0$ 且 $BC<0$, 那么直线 $Ax+By+C=0$ 不通过 （ ）

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

11. 设甲、乙、丙是三个命题. 如果甲是乙的必要条件; 丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件, 那么 （ ）

(A) 丙是甲的充分条件, 但不是甲的必要条件

(B) 丙是甲的必要条件, 但不是甲的充分条件

(C) 丙是甲的充要条件

(D) 丙不是甲的充分条件, 也不是甲的必要条件

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)\right]$ 的值等于 （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

13. 如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,7]$ 上是增函数且最小值为 5, 那么 $f(x)$ 在区间 $[-7,-3]$ 上是 （ ）

(A) 增函数且最小值为 -5 (B) 增函数且最大值为 -5

(C) 减函数且最小值为 -5 (D) 减函数且最大值为 -5

14. 圆 $x^2+2x+y^2+4y-3=0$ 上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有 （ ）

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

15. 设全集为 $\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $M=\{x|f(x)\neq 0\}$, $N=\{x|g(x)\neq 0\}$, 那么集合 $\{x|f(x)g(x)=0\}$ 等于 （ ）

(A) $\overline{M}\cap\overline{N}$ (B) $\overline{M}\cup N$ (C) $M\cup\overline{N}$ (D) $\overline{M}\cup\overline{N}$

16. $\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{2}$ 的值是_____.

17. 不等式 $6^{x^2+x-2}<1$ 的解集是_____.

18. 已知正三棱台上底面边长为 2, 下底面边长为 4, 且侧棱与底面所成的角是 $45°$, 那么这个正三棱台的体积等于_____.

19. $(ax+1)^7$ 的展开式中, x^3 的系数是 x^2 的系数与 x^4 的系数的等差中项. 若实数 $a>1$, 那么 $a=$_____.

20. 在球面上有四个点 P、A、B、C, 如果 PA、PB、PC 两两互相垂直, 且 $PA=PB=PC=a$. 那么这个球面的面积是_____.

21. 求函数 $y=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x$ 的最小值, 并写出使函数 y 取最小值的 x 的集合.

22. 已知复数 $z=1+\mathrm{i}$, 求复数 $\dfrac{z^2-3z+6}{z+1}$ 的模和辐角的主值.

23. 已知 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, E、F 分别是 AB、AD 的中点, GC 垂直于 $ABCD$ 所在的平面, 且 $GC=2$. 求点 B 到平面 EFG 的距离.

24. 根据函数单调性的定义, 证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

25. 已知 n 为自然数, 实数 $a>1$, 解关于 x 的不等式 : $\log_a x-4\log_{a^2}x+12\log_{a^3}x+\cdots+n(-2)^{n-1}\log_{a^n}x>\dfrac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$.

26. 双曲线的中心在坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 过双曲线右焦点且斜率为 $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于 P、Q 两点. 若 $OP\perp OQ$, $|PQ|=4$, 求双曲线的方程.

1991 年普通高等学校招生考试（三南卷）

数学试卷

1. $\sin 15^\circ \cos 30^\circ \sin 75^\circ$ 的值等于 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$

2. 已知一个等差数列的第 5 项等于 10, 前 3 项的和等于 3, 那么 （ ）

(A) 它的首项是 -2, 公差是 3 (B) 它的首项是 2, 公差是 -3

(C) 它的首项是 -3, 公差是 2 (D) 它的首项是 3, 公差是 -2

3. 设正六棱锥的底面边长为 1, 侧棱长为 $\sqrt{5}$, 那么它的体积为 （ ）

(A) $6\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

4. 在直角坐标系 xOy 中, 参数方程 $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t^2 - 1 \end{cases}$ (其中 t 是参数) 表示的曲线是 （ ）

(A) 双曲线 (B) 抛物线 (C) 直线 (D) 圆

5. 设全集为自然数集 $\mathbf{N}$, $E = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$, $F = \{x | x = 4n, n \in \mathbf{N}\}$, 那么集合 N 可以表示成 （ ）

(A) $E \cap F$ (B) $\overline{E} \cup F$ (C) $E \cup \overline{F}$ (D) $\overline{E} \cap \overline{F}$

6. 已知 z_1, z_2 是两个给定的复数, 且 $z_1 \neq z_2$, 它们在复平面上分别对应于点 Z_1 和点 Z_2. 如果 z 满足方程 $|z - z_1| - |z - z_2| = 0$, 那么 z 对应的点 Z 的集合是 （ ）

(A) 双曲线 (B) 线段 Z_1Z_2 的垂直平分线

(C) 分别过 Z_1, Z_2 的两条相交直线 (D) 椭圆

7. 设 $5\pi < \theta < 6\pi$, $\cos\frac{\theta}{2} = a$, 那么 $\sin\frac{\theta}{4}$ 等于 （ ）

(A) $-\frac{\sqrt{1+a}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{1-a}}{2}$ (C) $-\sqrt{\frac{1+a}{2}}$ (D) $-\sqrt{\frac{1-a}{2}}$

8. 函数 $y = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数为 （ ）

(A) $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ (B) $y = -\arcsin x$, $x \in [-1, 1]$

(C) $y = \pi + \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ (D) $y = \pi - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$

9. 复数 $z = -3\left(\sin\frac{4}{3}\pi - \mathrm{i}\cos\frac{4}{3}\pi\right)$ 的辐角的主值是 （ ）

(A) $\frac{4}{3}\pi$ (B) $\frac{5}{3}\pi$ (C) $\frac{11}{6}\pi$ (D) $\frac{\pi}{6}$

10. 满足 $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{1}{2}$ 的 x 的集合是 （ ）

(A) $\left\{x \middle| 2k\pi + \frac{5}{12}\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{13}{12}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

(B) $\left\{x \middle| 2k\pi - \frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{7}{12}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

(C) $\left\{x \middle| 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{5}{6}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

(D) $\left\{x \middle| 2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ 或 } 2k\pi + \frac{5}{6}\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

11. 点 $(4, 0)$ 关于直线 $5x + 4y + 21 = 0$ 的对称点是 （ ）

(A) $(-6, 8)$ (B) $(-8, -6)$ (C) $(6, 8)$ (D) $(-6, -8)$

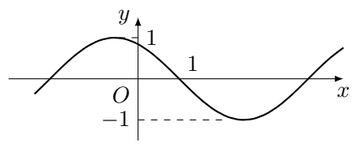
12. 极坐标方程 $4\sin 2\theta = 3$ 表示的曲线是 （ ）

(A) 二条射线 (B) 二条相交直线 (C) 圆 (D) 抛物线

13. 由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成无重复数字的六位数, 其中个位数字小于十位数字的共有 （ ）

(A) 210 个 (B) 300 个 (C) 464 个 (D) 600 个

14. 如图是周期为 2π 的三角函数 $y = f(x)$ 的图象, 那么 $f(x)$ 可以写成（ ）



(A) $\sin(1 + x)$ (B) $\sin(-1 - x)$ (C) $\sin(x - 1)$ (D) $\sin(1 - x)$

15. 设命题甲为 $\lg x^2 = 0$; 命题乙为 $x = 1$. 那么 （ ）

(A) 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件

(B) 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

16. $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中常数项是 （ ）

(A) -160 (B) -20 (C) 20 (D) 160

17. 体积相等的正方体, 球, 等边圆柱 (即底面直径与母线相等的圆柱) 的全面积分别为 S_1, S_2, S_3, 那么它们的大小关系为 （ ）

(A) $S_1 < S_2 < S_3$ (B) $S_1 < S_3 < S_2$ (C) $S_2 < S_3 < S_1$ (D) $S_2 < S_1 < S_3$

18. 曲线 $2y^2 + 3x + 3 = 0$ 与曲线 $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ 的公共点的个数是( )

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

19. 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$ 的离心率为 _____.

20. 设复数 $z_1 = 2 - \mathrm{i}$, $z_2 = 1 - 3\mathrm{i}$, 则复数 $\frac{\mathrm{i}}{z_1} + \frac{\bar{z}_2}{5}$ 的虚部等于_____.

21. 已知圆台的上, 下底面半径分别为 r, $2r$, 侧面积等于上, 下底面积之和, 则圆台的高为 _____.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n \cdot 2^n + 1}{n \cdot 3^n - 1} =$ _____.

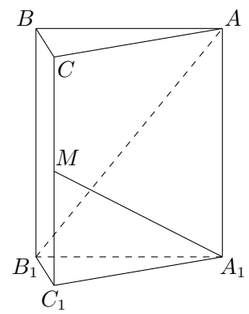
23. 在体积为 V 的斜三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 中, 已知 S 是侧棱 CC' 上的一点, 过点 S, A, B 的截面截得的三棱锥的体积为 V_1, 那么过点 S, A', B' 的截面截得的三棱锥的体积为 _____.

24. 设函数 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ 的定义域是 $\{n, n+1\}$ (n 是自然数) , 那么在 $f(x)$ 的值域中共有 _____个整数.

25. 已知 α, β 为锐角, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 求 $\cos\beta$ 的值.

26. 解不等式: $\sqrt{5 - 4x - x^2} \geqslant x$.

27. 如图, 已知直棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 1$, $AA_1 = \sqrt{6}$, M 是 CC_1 的中点. 求证: $AB_1 \perp A_1M$.



28. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = 1$, S_n 是它的前 n 项和; $\{b_n\}$ 是等比数列, 其公比的绝对值小于 1, T_n 是它的前 n 项和, 如果 $a_3 = b_2$, $S_5 = 2T_2 - 6$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 9$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

29. 已知双曲线 C 的实半轴长与虚半轴的乘积为 $\sqrt{3}$, C 的两个焦点分别为 F_1, F_2, 直线 l 过 F_2 且与直线 F_1F_2 的夹角为 $\tan\varphi = \frac{\sqrt{21}}{2}$, l 与线段 F_1F_2 的垂直平分线的交点是 P, 线段 PF_2 与双曲线 C 的交点为 Q, 且 $|PQ| : |QF_2| = 2 : 1$. 求双曲线 C 的方程.

30. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数;

(2) 证明: 对于任意不小于 3 的自然数 n, 都有 $f(n) > \frac{n}{n+1}$.

1992 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. $\dfrac{\log_8 9}{\log_2 3}$ 的值是 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2

2. 如果函数 $y=\sin(\omega x)\cos(\omega x)$ 的最小正周期是 4π, 那么常数 ω 为 （ ）

(A) 4 (B) 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

3. 极坐标方程分别是 $\rho=\cos\theta$ 和 $\rho=\sin\theta$ 的两个圆的圆心距是 （ ）

(A) 2 (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

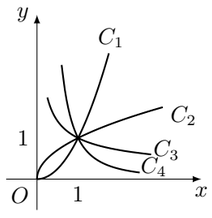
4. 方程 $\sin 4x\cos 5x=-\cos 4x\sin 5x$ 的一个解是 （ ）

(A) 10° (B) 20° (C) 50° (D) 70°

5. 已知轴截面是正方形的圆柱的高与球的直径相等, 则圆柱的全面积与球的表面积的比是 （ ）

(A) 6 : 5 (B) 5 : 4 (C) 4 : 3 (D) 3 : 2

6. 如图, 图中曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限的图象. 已知 n 取 $\pm 2, \pm\dfrac{1}{2}$ 四个值, 则相应于曲线 C_1、C_2、C_3、C_4 的 n 依次为 （ ）



(A) $-2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 2$ (B) $2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -2$

(C) $-\dfrac{1}{2}, -2, 2, \dfrac{1}{2}$ (D) $2, \dfrac{1}{2}, -2, -\dfrac{1}{2}$

7. 若 $\log_a 2<\log_b 2<0$, 则 （ ）

(A) $0<a<b<1$ (B) $0<b<a<1$ (C) $a>b>1$ (D) $b>a>1$

8. 直线 $\begin{cases} x=t\cdot\sin 20^\circ+3 \\ y=-t\cdot\cos 20^\circ \end{cases}$ (t 为参数) 的倾斜角是 （ ）

(A) 20° (B) 70° (C) 110° (D) 160°

9. 在四棱锥的四个侧面中, 直角三角形最多可有 （ ）

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

10. 圆心在抛物线 $y^2=2x$ 上, 且与 x 轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程是 （ ）

(A) $x^2+y^2-x-2y-\dfrac{1}{4}=0$ (B) $x^2+y^2+x-2y+1=0$

(C) $x^2+y^2-x-2y+1=0$ (D) $x^2+y^2-x-2y+\dfrac{1}{4}=0$

11. 在 $(x^2+3x+2)^5$ 的展开式中 x 的系数为 （ ）

(A) 160 (B) 240 (C) 360 (D) 800

12. 若 $0<a<1$, 在 $[0,2\pi]$ 上满足 $\sin x\geqslant a$ 的 x 的范围是 （ ）

(A) $[0,\arcsin a]$ (B) $[\arcsin a,\pi-\arcsin a]$

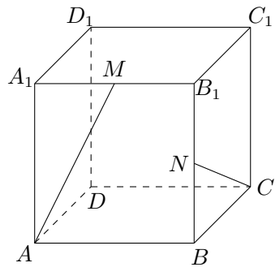
(C) $[\pi-\arcsin a,\pi]$ (D) $\left[\arcsin a,\dfrac{\pi}{2}+\arcsin a\right]$

13. 已知直线 l_1 和 l_2 夹角的平分线为 $y=x$, 如果 l_1 的方程是 $ax+by+c=0(ab>0)$, 那么 l_2 的方程是 （ ）

(A) $bx+ay+c=0$ (B) $ax-by+c=0$

(C) $bx+ay-c=0$ (D) $bx-ay+c=0$

14. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 和 N 分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点, 那么直线 AM 与 CN 所成角的余弦值是 （ ）



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{2}{5}$

15. 已知复数 z 的模为 2, 则 $|z-\mathrm{i}|$ 的最大值为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) 3

16. 函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{2}$ 的反函数 （ ）

(A) 是奇函数, 它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

(B) 是偶函数, 它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

(C) 是奇函数, 它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

(D) 是偶函数, 它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

17. 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$, 那么 （ ）

(A) $f(2)<f(1)<f(4)$ (B) $f(1)<f(2)<f(4)$

(C) $f(2)<f(4)<f(1)$ (D) $f(4)<f(2)<f(1)$

18. 长方体的全面积为 11, 十二条棱长度之和为 24, 则这个长方体的一条对角线长为 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{14}$ (C) 5 (D) 6

19. 方程 $\dfrac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$ 的解是_____.

20. $\sin 15^\circ\sin 75^\circ$ 的值是_____.

21. 设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S, 其中由 3 个元素组成的子集数为 T, 则 $\dfrac{T}{S}$ 的值为_____.

22. 焦点为 $F_1(-2,0)$ 和 $F_2(6,0)$, 离心率为 2 的双曲线的方程是_____.

23. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq 0$, 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列, 则 $\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}$ 的值是_____.

24. 已知 $z\in\mathbf{C}$, 解方程: $z\bar{z}-3\mathrm{i}\bar{z}=1+3\mathrm{i}$.

25. 已知 $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{12}{13}$, $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$. 求 $\sin 2\alpha$ 的值.

26. 已知: 两条异面直线 a、b 所成的角为 θ, 它们的公垂线段 AA_1 的长度为 d. 在直线 a、b 上分别取点 E、F, 设 $A_1E=m$, $AF=n$. 求证: $EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}$.

27. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_3=12$, $S_{12}>0$, $S_{13}<0$.
(1) 求公差 d 的取值范围;
(2) 指出 $S_1, S_2, \cdots, S_{12}$ 中哪一个值最大, 并说明理由.

28. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, A、B 是椭圆上的两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 $P(x_0,0)$. 证明: $-\dfrac{a^2-b^2}{a}<x_0<\dfrac{a^2-b^2}{a}$.

1992 年普通高等学校招生考试（三南卷）

数学试卷

1. 设函数 $z=\mathrm{i}^2+\sqrt{3}\mathrm{i}$, 那么 $\arg z$ 是 （ ）

(A) $\frac{5}{6}\pi$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2}{3}\pi$ (D) $-\frac{4}{3}\pi$

2. 如果等边圆柱 (即底面直径与母线相等的圆柱) 的体积是 16π cm^3, 那么它的底面半径等于 （ ）

(A) $4\sqrt[3]{2}$ cm (B) 4 cm (C) $2\sqrt[3]{2}$ cm (D) 2 cm

3. $\dfrac{\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{\arctan(-\sqrt{3})}$ 的值等于 （ ）

(A) 1 (B) 0 (C) $-\frac{2}{5}$ (D) $-\frac{6}{5}$

4. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$ $(x<1)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=1+2^{-x}$ $(x\in\mathbf{R})$ (B) $y=1-2^{-x}$ $(x\in\mathbf{R})$

(C) $y=1+2^{x}$ $(x\in\mathbf{R})$ (D) $y=1-2^{x}$ $(x\in\mathbf{R})$

5. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 如果 $AB=BC=a$, $AA_1=2a$, 那么点 A 到直线 A_1C 的距离等于 （ ）

(A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$ (B) $\frac{3\sqrt{6}}{2}a$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}a$

6. 函数 $y=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的最小正周期等于 （ ）

(A) π (B) 2π (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

7. 有一个椭圆, 它的极坐标方程是 （ ）

(A) $\rho=\dfrac{5}{\sqrt{3}-2\cos\theta}$ (B) $\rho=\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\theta}$

(C) $\rho=\dfrac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{5}$ (D) $\rho=\dfrac{5}{2-\sqrt{3}\cos\theta}$

8. 不等式 $|\sqrt{x-2}-3|<1$ 的解集是 （ ）

(A) $\{x|5<x<16\}$ (B) $\{x|6<x<18\}$

(C) $\{x|7<x<20\}$ (D) $\{x|8<x<22\}$

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d, 如果它的前 n 项和 $S_n=-n^2$, 那么 （ ）

(A) $a_n=2n-1$, $d=-2$ (B) $a_n=2n-1$, $d=2$

(C) $a_n=-2n+1$, $d=-2$ (D) $a_n=-2n+1$, $d=2$

10. 方程 $\cos 2x=3\cos x+1$ 的解集是 （ ）

(A) $\left\{x\left|x=2k\pi\pm\frac{2}{3}\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ (B) $\left\{x\left|x=k\pi\pm\frac{1}{3}\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

(C) $\left\{x\left|x=k\pi\pm\frac{2}{3}\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ (D) $\left\{x\left|x=2k\pi\pm\frac{1}{3}\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

11. 有一条半径是 2 的弧, 其度数是 60°, 它绕经过弧的中点的直径旋转得到一个球冠, 那么这个球冠的面积是 （ ）

(A) $4(2-\sqrt{3})\pi$ (B) $2(2-\sqrt{3}\pi)$ (C) $4\sqrt{3}\pi$ (D) $2\sqrt{3}\pi$

12. 某小组共有 10 名学生, 其中女生 3 名. 现选举 2 名代表, 至少有 1 名女生当选的不同的选法共有 （ ）

(A) 27 种 (B) 48 种 (C) 21 种 (D) 24 种

13. 设全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x|\sqrt{x^2}>2\}$, $N=\{x|\log_x 7>\log_3 7\}$, 那么 $M\cap\overline{N}=$ （ ）

(A) $\{x|x<-2\}$ (B) $\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

(C) $\{x|x\geqslant 3\}$ (D) $\{x|-2\leqslant x<3\}$

14. 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, 公比 $q=2$, 且 $a_1a_2a_3\cdots a_{30}=2^{30}$, 那么 $a_3a_6a_9\cdots a_{30}$ 等于 （ ）

(A) 2^{10} (B) 2^{20} (C) 2^{16} (D) 2^{15}

15. 设 $\triangle ABC$ 不是直角三角形, A 和 B 是它的两个内角, 那么 （ ）

(A) “$A<B$”是“$\tan A<\tan B$”的充分条件, 但不是必要条件

(B) “$A<B$”是“$\tan A<\tan B$”的必要条件, 但不是充分条件

(C) “$A<B$”是“$\tan A<\tan B$”的充分必要条件

(D) “$A<B$”是“$\tan A<\tan B$”的充分条件, 也不是必要条件

16. 对于定义域是 $\mathbf{R}$ 的任何奇函数 $f(x)$, 都有 （ ）

(A) $f(x)-f(-x)>0$ $(x\in\mathbf{R})$ (B) $f(x)-f(-x)\leqslant 0$ $(x\in\mathbf{R})$

(C) $f(x)f(-x)\leqslant 0$ $(x\in\mathbf{R})$ (D) $f(x)f(-x)>0$ $(x\in\mathbf{R})$

17. 如果双曲线的两条渐近线的方程是 $y=\pm\frac{3}{2}x$, 焦点坐标是 $(-\sqrt{26},0)$ 和 $(\sqrt{26},0)$, 那么它的两条准线之间的距离是 （ ）

(A) $\frac{8}{13}\sqrt{26}$ (B) $\frac{4}{13}\sqrt{26}$ (C) $\frac{18}{13}\sqrt{26}$ (D) $\frac{9}{13}\sqrt{26}$

18. $\tan\dfrac{\pi}{8}=$ _____.

19. 设直线的参数方程是 $\begin{cases}x=2+\frac{1}{2}t\\ y=3+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$, 那么它的斜截式方程是 _____.

20. 如果三角形的顶点分别是 $O(0,0)$, $A(0,15)$, $B(-8,0)$, 那么它的内切圆方程是_____.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]=$ _____.

22. 91^{92} 除以 100 的余数是 _____.

23. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的体积是 V, 棱 BC 的长是 a, 面 ABC 和面 DBC 的面积分别是 S_1 和 S_2. 设面 ABC 和面 DBC 所成的二面角是 α, 那么 $\sin\alpha=$ _____.

24. 已知关于 x 的方程 $2a^{2x-2}-7a^{x-1}+3=0$ 有一个根是 2, 求 a 的值和方程其余的根.

25. 已知平面 α 和不在这个平面内的直线 a 都垂直于平面 β. 求证: $a\parallel\alpha$.

26. 证明不等式: $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

27. 设抛物线经过两点 $(-1,6)$ 和 $(-1,-2)$ 对称轴与 x 轴平行, 开口向右, 直线 $y=2x+7$ 被抛物线截得的线段的长是 $4\sqrt{10}$, 求抛物线的方程.

28. 求同时满足下列两个条件的所有复数 z:

① $z+\dfrac{10}{z}$ 是实数, 且 $1<z+\dfrac{10}{z}\leqslant 6$;

② z 的实部和虚部都是整数.

1993 年普通高等学校招生考试（新高考）

理科数学

1. 函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的最小正周期是 （ ）

(A) 2π (B) $2\sqrt{2}\pi$ (C) π (D) $\dfrac{\pi}{4}$

2. 如果双曲线的焦距为 6, 两条准线间的距离为 4, 那么该双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (D) 2

3. 和直线 $3x-4y+5=0$ 关于 x 轴对称的直线的方程为 （ ）

(A) $3x+4y-5=0$ (B) $3x+4y+5=0$

(C) $-3x+4y-5=0$ (D) $-3x+4y+5=0$

4. 极坐标方程 $\rho=\dfrac{4}{3-5\cos\theta}$ 所表示的曲线是 （ ）

(A) 焦点到准线距离为 $\dfrac{4}{5}$ 的椭圆

(B) 焦点到准线距离为 $\dfrac{4}{5}$ 的双曲线右支

(C) 焦点到准线距离为 $\dfrac{4}{3}$ 的椭圆

(D) 焦点到准线距离为 $\dfrac{4}{3}$ 的双曲线右支

5. $y=x^{\frac{3}{5}}$ 在 $[-1,1]$ 上是 （ ）

(A) 增函数且是奇函数 (B) 增函数且是偶函数

(C) 减函数且是奇函数 (D) 减函数且是偶函数

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-1}{2n^2-n+5}$ 的值为 （ ）

(A) $-\dfrac{1}{5}$ (B) $-\dfrac{5}{2}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{5}{2}$

7. 集合 $M=\{x|x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{x|x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$, 则（ ）

(A) $M=N$ (B) $M\supseteq N$ (C) $M\subseteq N$ (D) $M\cap N=\varnothing$

8. $\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ$ 的值是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

9. 参数方程 $\begin{cases}x=\left|\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right|\\ y=\dfrac{1}{2}(1+\sin\theta)\end{cases}$ $(0<\theta<2\pi)$ 表示 （ ）

(A) 双曲线的一支, 这支过点 $\left(1\ \ \dfrac{1}{2}\right)$

(B) 抛物线的一部分, 这部分过 $\left(1\ \ \dfrac{1}{2}\right)$

(C) 双曲线的一支, 这支过点 $\left(-1\ \ \dfrac{1}{2}\right)$

(D) 抛物线的一部分, 这部分过 $\left(-1\ \ \dfrac{1}{2}\right)$

10. 若 a、b 是任意实数, 且 $a>b$, 则 （ ）

(A) $a^2>b^2$ (B) $\dfrac{b}{a}<1$

(C) $\lg(a-b)>0$ (D) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$

11. 一动圆与两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切, 则动圆圆心轨迹为 （ ）

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线的一支 (D) 抛物线

12. 圆柱轴截面的周长 l 为定值, 那么圆柱体积的最大值是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{l}{6}\right)^3\pi$ (B) $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{l}{2}\right)^3\pi$ (C) $\left(\dfrac{l}{4}\right)^3\pi$ (D) $2\left(\dfrac{l}{4}\right)^3\pi$

13. $(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$ 展开式中 x^4 的系数为 （ ）

(A) -40 (B) 10 (C) 40 (D) 45

14. 直角梯形的一个内角为 45°, 下底长为上底长的 $\dfrac{3}{2}$, 这个梯形绕下底所在的直线旋转一周所成的旋转体的全面积为 $(5+\sqrt{2})\pi$, 则旋转体的体积为（ ）

(A) 2π (B) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{3}\pi$ (C) $\dfrac{5+\sqrt{2}}{3}\pi$ (D) $\dfrac{7}{3}\pi$

15. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 为各项都大于零的等比数列, 公比 $q\neq 1$, 则 （ ）

(A) $a_1+a_8>a_4+a_5$

(B) $a_1+a_8<a_4+a_5$

(C) $a_1+a_8=a_4+a_5$

(D) a_1+a_8 和 a_4+a_5 的大小关系不能由已知条件确定

16. 设有如下三个命题:
甲: 相交两直线 l, m 都在平面 α 内, 并且都不在平面 β 内.
乙: l, m 之中至少有一条与 β 相交.
丙: α 与 β 相交.
当甲成立时 （ ）

(A) 乙是丙的充分而不必要的条件

(B) 乙是丙的必要而不充分的条件

(C) 乙是丙的充分且必要的条件

(D) 乙既不是丙的充分条件又不是丙的必要条件

17. 将数字 1, 2, 3, 4 填入标号为 1, 2, 3, 4 的四个方格里, 每格填一个数字, 则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法有 （ ）

(A) 6 种 (B) 9 种 (C) 11 种 (D) 23 种

18. $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{2}+\arccos\dfrac{1}{3}\right)=$ _____.

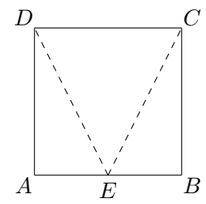
19. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{9k^2}-\dfrac{y^2}{4k^2}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 没有公共点, 则实数 k 的取值范围为_____.

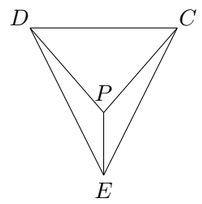
20. 从 1, 2, $\cdots$, 10 这十个数中取出四个数, 使它们的和为奇数, 共有_____种取法 (用数字作答).

21. 设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$, 则 $f^{-1}(0)=$ _____.

22. 建造一个容积为 8 m^3, 深为 2 m 的长方体无盖水池. 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 那么水池的最低总造价为_____元.

23. 如图, $ABCD$ 是正方形, E 是 AB 的中点, 如将 $\triangle DAE$ 和 $\triangle CBE$ 分别沿虚线 DE 和 CE 折起, 使 AE 与 BE 重合, 记 A 与 B 重合的点为 P, 则面 PCD 与面 ECD 所成的二面角为_____度.





24. 已知 $f(x)=\log_a\dfrac{1+x}{1-x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$.
(1) 求 $f(x)$ 的定义域;
(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性并予以证明;
(3) 求使 $f(x)>0$ 的 x 取值范围.

25. 已知数列 $\dfrac{8\cdot 1}{1^2\cdot 3^2}, \dfrac{8\cdot 2}{3^2\cdot 5^2}, \cdots, \dfrac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \cdots$. S_n 为其前 n 项和.
计算得 $S_1=\dfrac{8}{9}$, $S_2=\dfrac{24}{25}$, $S_3=\dfrac{48}{49}$, $S_4=\dfrac{80}{81}$.
观察上述结果, 推测出计算 S_n 的公式, 并用数学归纳法加以证明.

26. 已知: 平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=$ 直线 a. α, β 同垂直于平面 γ, 又同平行于直线 b. 求证: (1) $a\perp\gamma$; (2) $b\perp\gamma$.

27. 在面积为 1 的 $\triangle PMN$ 中, $\tan\angle PMN=\dfrac{1}{2}$, $\tan\angle MNP=-2$. 建立适当的坐标系, 求以 M, N 为焦点且过点 P 的椭圆方程.

28. 设复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ $(0<\theta<\pi)$, $\omega=\dfrac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$, 并且 $|\omega|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\arg\omega<\dfrac{\pi}{2}$, 求 θ.

1993 年普通高等学校招生考试（新高考）

文科数学

1. 函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的最小正周期是 （ ）

(A) 2π (B) $2\sqrt{2}\pi$ (C) π (D) $\dfrac{\pi}{4}$

2. 如果双曲线的焦距为 6, 两条准线间的距离为 4, 那么该双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (D) 2

3. 和直线 $3x-4y+5=0$ 关于 x 轴对称的直线的方程为 （ ）

(A) $3x+4y-5=0$ (B) $3x+4y+5=0$

(C) $-3x+4y-5=0$ (D) $-3x+4y+5=0$

4. $\mathrm{i}^{2n-3}+\mathrm{i}^{2n-1}+\mathrm{i}^{2n+1}+\mathrm{i}^{2n+3}$ 的值为 （ ）

(A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 4

5. $y=x^{\frac{3}{5}}$ 在 $[-1,1]$ 上是 （ ）

(A) 增函数且是奇函数 (B) 增函数且是偶函数

(C) 减函数且是奇函数 (D) 减函数且是偶函数

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-1}{2n^2-n+5}$ 的值为 （ ）

(A) $-\dfrac{1}{5}$ (B) $-\dfrac{5}{2}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{5}{2}$

7. 集合 $M=\{x|x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{x|x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$, 则 （ ）

(A) $M=N$ (B) $M\supseteq N$ (C) $M\subseteq N$ (D) $M\cap N=\varnothing$

8. $\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ$ 的值是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

9. 圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离的最小值是 （ ）

(A) 6 (B) 4 (C) 5 (D) 1

10. 若 a、b 是任意实数, 且 $a>b$, 则 （ ）

(A) $a^2>b^2$ (B) $\dfrac{b}{a}<1$

(C) $\lg(a-b)>0$ (D) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$

11. 一动圆与两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切, 则动圆圆心轨迹为 （ ）

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线的一支 (D) 抛物线

12. 圆柱轴截面的周长 l 为定值, 那么圆柱体积的最大值是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{l}{6}\right)^3\pi$ (B) $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{l}{2}\right)^3\pi$ (C) $\left(\dfrac{l}{4}\right)^3\pi$ (D) $2\left(\dfrac{l}{4}\right)^3\pi$

13. $(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$ 展开式中 x^4 的系数为 （ ）

(A) -40 (B) 10 (C) 40 (D) 45

14. 直角梯形的一个内角为 45°, 下底长为上底长的 $\dfrac{3}{2}$, 这个梯形绕下底所在的直线旋转一周所成的旋转体的全面积为 $(5+\sqrt{2})\pi$, 则旋转体的体积为( )

(A) 2π (B) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{3}\pi$ (C) $\dfrac{5+\sqrt{2}}{3}\pi$ (D) $\dfrac{7}{3}\pi$

15. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 为各项都大于零的等比数列, 公比 $q\neq 1$, 则 （ ）

(A) $a_1+a_8>a_4+a_5$

(B) $a_1+a_8<a_4+a_5$

(C) $a_1+a_8=a_4+a_5$

(D) a_1+a_8 和 a_4+a_5 的大小关系不能由已知条件确定

16. 设有如下三个命题:
甲: 相交两直线 l, m 都在平面 α 内, 并且都不在平面 β 内.
乙: l, m 之中至少有一条与 β 相交.
丙: α 与 β 相交.
当甲成立时 （ ）

(A) 乙是丙的充分而不必要的条件

(B) 乙是丙的必要而不充分的条件

(C) 乙是丙的充分且必要的条件

(D) 乙既不是丙的充分条件又不是丙的必要条件

17. 将数字 1, 2, 3, 4 填入标号为 1, 2, 3, 4 的四个方格里, 每格填一个数字, 则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法有 （ ）

(A) 6 种 (B) 9 种 (C) 11 种 (D) 23 种

18. $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{2}+\arccos\dfrac{1}{3}\right)=$ _____.

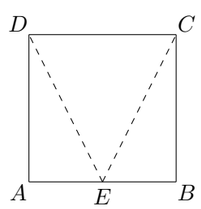
19. 设 $a>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^{n+1}}{1+a^{n-1}}=$ _____.

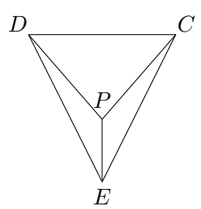
20. 从 1, 2, $\cdots$, 10 这十个数中取出四个数, 使它们的和为奇数, 共有_____种取法 (用数字作答).

21. 设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$, 则 $f^{-1}(0)=$ _____.

22. 建造一个容积为 8 m^3, 深为 2 m 的长方体无盖水池. 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 那么水池的最低总造价为_____元.

23. 如图, $ABCD$ 是正方形, E 是 AB 的中点, 如将 $\triangle DAE$ 和 $\triangle CBE$ 分别沿虚线 DE 和 CE 折起, 使 AE 与 BE 重合, 记 A 与 B 重合的点为 P, 则面 PCD 与面 ECD 所成的二面角为_____度.





24. 求 $\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ$ 的值.

25. 已知 $f(x)=\log_a\dfrac{1+x}{1-x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$.
(1) 求 $f(x)$ 的定义域;
(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性并予以证明;
(3) 求使 $f(x)>0$ 的 x 取值范围.

26. 已知数列 $\dfrac{8\cdot 1}{1^2\cdot 3^2}, \dfrac{8\cdot 2}{3^2\cdot 5^2}, \cdots, \dfrac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \cdots$. S_n 为其前 n 项和.
计算得 $S_1=\dfrac{8}{9}$, $S_2=\dfrac{24}{25}$, $S_3=\dfrac{48}{49}$, $S_4=\dfrac{80}{81}$.
观察上述结果, 推测出计算 S_n 的公式, 并用数学归纳法加以证明.

27. 已知: 平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=$ 直线 a. α, β 同垂直于平面 γ, 又同平行于直线 b. 求证: (1) $a\perp\gamma$; (2) $b\perp\gamma$.

28. 在面积为 1 的 $\triangle PMN$ 中, $\tan\angle PMN=\dfrac{1}{2}$, $\tan\angle MNP=-2$. 建立适当的坐标系, 求以 M, N 为焦点且过点 P 的椭圆方程.

1993 年普通高等学校招生考试（旧高考）

理科数学

1. 如果双曲线的实半轴长为 2, 焦距为 6, 那么该双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

2. 函数 $y=\frac{1-\tan^2 2x}{1+\tan^2 2x}$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

3. 当圆锥的侧面积和底面积的比值是 $\sqrt{2}$ 时, 圆锥的轴截面顶角是 （ ）

(A) 45° (B) 60° (C) 90° (D) 120°

4. 当 $z=-\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ 时, $z^{100}+z^{50}+1$ 的值等于 （ ）

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-\mathrm{i}$

5. 直线 $bx+ay=ab(a<0,b<0)$ 的倾斜角是 （ ）

(A) $\arctan\left(-\frac{b}{a}\right)$ (B) $\arctan\left(-\frac{a}{b}\right)$

(C) $\pi-\arctan\frac{b}{a}$ (D) $\pi-\arctan\frac{a}{b}$

6. 在直角三角形中两锐角为 A 和 B, 则 $\sin A\sin B$ 的 （ ）

(A) 有最大值 $\frac{1}{2}$ 和最小值 0 (B) 有最大值 $\frac{1}{2}$, 但无最小值

(C) 既无最大值, 也无最小值 (D) 有最大值 1, 但无最小值

7. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5a_6=9$, 则 $\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}$ 的值为 （ ）

(A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) $2+\log_3 5$

8. $F(x)=\left(1+\frac{2}{2^x-1}\right)f(x)$ $(x\neq 0)$ 是偶函数, 且 $f(x)$ 不恒等于零, 则 $f(x)$ 的 （ ）

(A) 是奇函数 (B) 是偶函数

(C) 可能是奇函数也可能是偶函数 (D) 不是奇函数也不是偶函数

9. 曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=3t^2+2\\ y=t^2-1\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 5)$, 则曲线是 （ ）

(A) 线段 (B) 双曲线的一支 (C) 圆弧 (D) 射线

10. 若 a、b 是任意实数, 且 $a>b$, 则 （ ）

(A) $a^2>b^2$ (B) $\frac{b}{a}<1$

(C) $\lg(a-b)>0$ (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

11. 已知集合 $E=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$, $F=\{\theta|\tan\theta<\sin\theta\}$, 那么 $E\cap F$ 为区间 （ ）

(A) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ (C) $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

12. 一动圆与两圆: $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切, 则动圆圆心的轨迹为 （ ）

(A) 抛物线 (B) 圆 (C) 双曲线的一支 (D) 椭圆

13. 若正棱锥的底面边长与侧棱长相等, 则该棱锥一定不是 （ ）

(A) 三棱锥 (B) 四棱锥 (C) 五棱锥 (D) 六棱锥

14. 如果圆柱轴截面的周长 l 为定值, 那么圆柱体积的最大值是 （ ）

(A) $\left(\frac{l}{6}\right)^3\pi$ (B) $\left(\frac{l}{3}\right)^3\pi$ (C) $\left(\frac{l}{4}\right)^3\pi$ (D) $\frac{1}{4}\left(\frac{l}{4}\right)^3\pi$

15. 由 $(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$ 展开所得的 x 的多项式中, 系数为有理数的共有 （ ）

(A) 50 项 (B) 17 项 (C) 16 项 (D) 15 项

16. 设 a, b, c 都是正数, 且 $3a=4b=6c$, 那么 （ ）

(A) $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (B) $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ (C) $\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$ (D) $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$

17. 同室四人各写一张贺年卡, 先集中起来, 然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡, 则四张贺年卡不同的分配方式有 （ ）

(A) 6 种 (B) 9 种 (C) 11 种 (D) 23 种

18. 已知异面直线 a 与 b 所成的角为 50°, P 为空间上一定点, 则过点 P 且与 a, b 所成的角都是 30° 的直线有且仅有 （ ）

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

19. 抛物线 $y^2=4x$ 的弦 AB 垂直于 x 轴, 若 AB 的长为 $4\sqrt{3}$, 则焦点到 AB 的距离为_____.

20. 在半径为 30 m 的圆形广场中央上空, 设置一个照明光源, 射向地面的光呈圆锥形, 且其轴截面顶角为 120°. 若要光源恰好照亮整个广场, 则其高度应为_____m (精确到 0.1 m).

21. 在 50 件产品中有 4 件是次品, 从中任意抽出 5 件, 至少有 3 件是次品的抽法共_____种 (用数字作答).

22. 建造一个容积为 8 m^3, 深为 2 m 的长方体无盖水池, 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 那么水池的最低总造价为_____元.

23. 设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$, 则 $f^{-1}(0)=$_____.

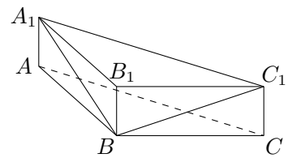
24. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$, 首项 $a_1>0$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ia_{i+1}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$_____.

25. 解不等式: $2+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)+\log_2\frac{1}{x}>0$.

26. 如图, $A_1B_1C_1-ABC$ 是直三棱柱, 过点 A_1、B、C_1 的平面和平面 ABC 的交线记作 l.

(1) 判定直线 A_1C_1 和 l 的位置关系, 并加以证明;

(2) 若 $A_1A=1$, $AB=4$, $BC=3$, $\angle ABC=90°$, 求顶点到直线 l 的距离.



27. 在面积为 1 的 $\triangle PMN$ 中, $\tan M=\frac{1}{2}$, $\tan N=-2$, 建立适当的坐标系, 求出以 M, N 为焦点且过点 P 的椭圆方程.

28. 设复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ $(0<\theta<\pi)$, $\omega=\frac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$, 已知 $|\omega|=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\arg\omega=\frac{\pi}{2}$, 求 θ.

29. 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α, β. 证明:

(1) 如果 $|\alpha|<2$, $|\beta|<2$, 那么 $2|\alpha|<4+b$ 且 $|b|<4$;

(2) 如果 $2|\alpha|<4+b$ 且 $|b|<4$, 那么 $|\alpha|<2$, $|\beta|<2$.

1993 年普通高等学校招生考试（旧高考）

文科数学

1. 如果双曲线的实半轴长为 2, 焦距为 6, 那么该双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

2. 函数 $y=\frac{1-\tan^2 2x}{1+\tan^2 2x}$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

3. 当圆锥的侧面积和底面积的比值是 $\sqrt{2}$ 时, 圆锥的轴截面顶角是 （ ）

(A) 45° (B) 60° (C) 90° (D) 120°

4. 当 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ 时, $z^{100}+z^{50}+1$ 的值等于 （ ）

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-\mathrm{i}$

5. 若正棱锥的底面边长与侧棱长相等, 则该棱锥一定不是 （ ）

(A) 三棱锥 (B) 四棱锥 (C) 五棱锥 (D) 六棱锥

6. 在直角三角形中两锐角为 A 和 B, 则 $\sin A\sin B$ （ ）

(A) 有最大值 $\frac{1}{2}$ 和最小值 0 (B) 有最大值 $\frac{1}{2}$, 但无最小值

(C) 既无最大值, 也无最小值 (D) 有最大值 1, 但无最小值

7. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5a_6=9$, 则 $\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}$ 的值为 （ ）

(A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) $2+\log_3 5$

8. $F(x)=\left(1+\frac{2}{2^x-1}\right)f(x)$ $(x\neq 0)$ 是偶函数, 且 $f(x)$ 不恒等于零, 则 $f(x)$ （ ）

(A) 是奇函数 (B) 是偶函数

(C) 可能是奇函数也可能是偶函数 (D) 不是奇函数也不是偶函数

9. 设直线 $2x-y-\sqrt{3}=0$ 与 y 轴的交点为 P, 把圆 $(x+1)^2+y^2=25$ 的直径分为两段, 则其长度之比为 （ ）

(A) 7 : 3 或 3 : 7 (B) 7 : 4 或 4 : 7 (C) 7 : 5 或 5 : 7 (D) 7 : 6 或 6 : 7

10. 若 a、b 是任意实数, 且 $a>b$, 则 （ ）

(A) $a^2>b^2$ (B) $\frac{b}{a}<1$

(C) $\lg(a-b)>0$ (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

11. 已知集合 $E=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$, $F=\{\theta|\tan\theta<\sin\theta\}$, 那么 $E\cap F$ 为区间 （ ）

(A) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ (C) $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

12. 一动圆与两圆: $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切, 则动圆圆心的轨迹为 （ ）

(A) 抛物线 (B) 圆 (C) 双曲线的一支 (D) 椭圆

13. 若直线 $ax+by+c=0$ 在第一、二、三象限, 则 （ ）

(A) $ab>0$, $bc>0$ (B) $ab>0$, $bc<0$

(C) $ab<0$, $bc>0$ (D) $ab<0$, $bc<0$

14. 如果圆柱轴截面的周长 l 为定值, 那么圆柱体积的最大值是 （ ）

(A) $\left(\frac{l}{6}\right)^3\pi$ (B) $\left(\frac{l}{3}\right)^3\pi$ (C) $\left(\frac{l}{4}\right)^3\pi$ (D) $\frac{1}{4}\left(\frac{l}{4}\right)^3\pi$

15. 由 $(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$ 展开所得的 x 的多项式中, 系数为有理数的共有 （ ）

(A) 50 项 (B) 17 项 (C) 16 项 (D) 15 项

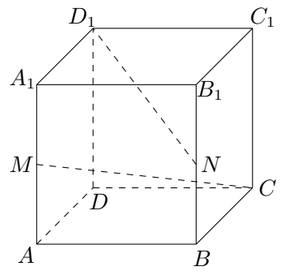
16. 设 a, b, c 都是正数, 且 $3a=4b=6c$, 那么 （ ）

(A) $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (B) $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ (C) $\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$ (D) $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$

17. 同室四人各写一张贺年卡, 先集中起来, 然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡, 则四张贺年卡不同的分配方式有 （ ）

(A) 6 种 (B) 9 种 (C) 11 种 (D) 23 种

18. 在正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中, M、N 分别为 A_1A 和 B_1B 的中点 (如图). 若 θ 为直线 CM 与 D_1N 所成的角, 则 $\sin\theta$ 的值为 （ ）



(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ (D) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

19. 抛物线 $y^2=4x$ 的弦 AB 垂直于 x 轴, 若 AB 的长为 $4\sqrt{3}$, 则焦点到 AB 的距离为_____.

20. 在半径为 30 m 的圆形广场中央上空, 设置一个照明光源, 射向地面的光呈圆锥形, 且其轴截面顶角为 120°. 若要光源恰好照亮整个广场, 则其高度应为_____m (精确到 0.1 m).

21. 在 50 件产品中有 4 件是次品, 从中任意抽出 5 件, 至少有 3 件是次品的抽法共_____种 (用数字作答).

22. 建造一个容积为 8 m^3, 深为 2 m 的长方体无盖水池, 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 那么水池的最低总造价为_____元.

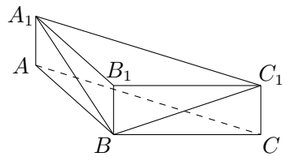
23. 设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$, 则 $f^{-1}(0)=$_____.

24. 设 $a>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1+a^{n+1}}=$_____.

25. 解方程: $\lg(x^2+4x-26)-\lg(x-3)=1$.

26. 已知数列 $\frac{8\cdot 1}{1^2\cdot 3^2}$, $\frac{8\cdot 2}{3^2\cdot 5^2}$, $\cdots$, $\frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, $\cdots$. S_n 为其前 n 项和.
计算得 $S_1=\frac{8}{9}$, $S_2=\frac{24}{25}$, $S_3=\frac{48}{49}$, $S_4=\frac{80}{81}$.
观察上述结果, 推测出计算 S_n 的公式, 并用数学归纳法加以证明.

27. 如图, $A_1B_1C_1-ABC$ 是直三棱柱, 过点 A_1、B、C_1 的平面和平面 ABC 的交线记作 l.
(1) 判定直线 A_1C_1 和 l 的位置关系, 并加以证明;
(2) 若 $A_1A=1$, $AB=4$, $BC=3$, $\angle ABC=90°$, 求顶点到直线 l 的距离.



28. 在面积为 1 的 $\triangle PMN$ 中, $\tan M=\frac{1}{2}$, $\tan N=-2$, 建立适当的坐标系, 求出以 M, N 为焦点且过点 P 的椭圆方程.

29. 设复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ $(0<\theta<\pi)$, $\omega=\frac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$, 已知 $|\omega|=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\arg\omega=\frac{\pi}{2}$, 求 θ.

1994 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{0,1,2,3\}$, 集合 $B=\{2,3,4\}$, 则 $\overline{A}\cup\overline{B}=$ （ ）

(A) $\{0\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{0,1,4\}$ (D) $\{0,1,2,3,4\}$

2. 如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 那么实数 k 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,+\infty)$ (B) $(0,2)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $(0,1)$

3. 极坐标方程 $\rho=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ 所表示的曲线是 （ ）

(A) 双曲线 (B) 椭圆 (C) 抛物线 (D) 圆

4. 设 θ 是第二象限的角, 则必有 （ ）

(A) $\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$ (B) $\tan\frac{\theta}{2}<\cot\frac{\theta}{2}$ (C) $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$ (D) $\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$

5. 某种细菌在培养过程中, 每 20 分钟分裂一次 (一个分裂为两个). 经过 3 小时, 这种细菌由 1 个可繁殖成 （ ）

(A) 511 个 (B) 512 个 (C) 1023 个 (D) 1024 个

6. 在下列函数中, 以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期的函数是 （ ）

(A) $y=\sin 2x+\cos 4x$ (B) $y=\sin 2x\cos 4x$

(C) $y=\sin 2x+\cos 2x$ (D) $y=\sin 2x\cos 2x$

7. 已知正六棱台的上、下底面边长分别为 2 和 4, 高为 2, 则其体积为（ ）

(A) $32\sqrt{3}$ (B) $28\sqrt{3}$ (C) $24\sqrt{3}$ (D) $20\sqrt{3}$

8. 设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点, 点 P 在双曲线上且满足 $\angle F_1PF_2=90^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 （ ）

(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

9. 如果复数 z 满足 $|z+\mathrm{i}|+|z-\mathrm{i}|=2$, 那么 $|z+\mathrm{i}+1|$ 的最小值是 （ ）

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

10. 有甲、乙、丙三项任务, 甲需 2 人承担, 乙、丙各需 1 人承担. 从 10 人中选派 4 人承担这三项任务, 不同的选法共有 （ ）

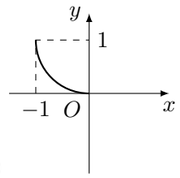
(A) 1260 种 (B) 2025 种 (C) 2520 种 (D) 5040 种

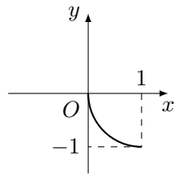
11. 对于直线 m、n 和平面 α、β, $\alpha\perp\beta$ 的一个充分条件是 （ ）

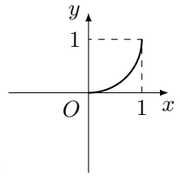
(A) $m\perp n$, $m/\!/\alpha$, $n/\!/\beta$ (B) $m\perp n$, $\alpha\cap\beta=m$, $n\subset\alpha$

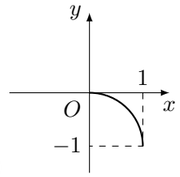
(C) $m/\!/n$, $n\perp\beta$, $m\subset\alpha$ (D) $m/\!/n$, $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$

12. 设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$, 则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

13. 已知过球面上 A、B、C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半, 且 $AB=BC=CA=2$, 则球面面积是 （ ）

(A) $\frac{16}{9}\pi$ (B) $\frac{8}{3}\pi$ (C) 4π (D) $\frac{64}{9}\pi$

14. 函数 $y=\arccos(\sin x)$ $\left(-\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值域是 （ ）

(A) $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ (B) $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right)$ (C) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ (D) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$

15. 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和, 如果 $f(x)=\lg(10^x+1)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 那么( )

(A) $g(x)=x$, $h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

(B) $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$, $h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

(C) $g(x)=\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

(D) $g(x)=-\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

16. 在 $(3-x)^7$ 的展开式中, x^5 的系数是_____. (用数字作答)

17. 抛物线 $y^2=8-4x$ 的准线方程是_____, 圆心在该抛物线的顶点且与其准线相切的圆的方程是_____.

18. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$, $\theta\in(0,\pi)$, 则 $\cot\theta$ 的值是_____.

19. 设圆锥底面圆周上两点 A、B 间的距离为 2, 圆锥顶点到直线 AB 的距离为 $\sqrt{3}$, AB 和圆锥的轴的距离为 1, 则该圆锥的体积为_____.

20. 在测量某物理量的过程中, 因仪器和观察的误差, 使得 n 次测量分别得到 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 共 n 个数据, 我们规定所测量物理量的“最佳近似值”a 是这样一个量: 与其他近似值比较, a 与各数据的差的平方和最小. 依此规定, 从 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 推出的 $a=$ _____.

21. 已知 $z=1+\mathrm{i}$.

(1) 设 $\omega=z^2+3\overline{z}-4$, 求 ω 的三角形式;

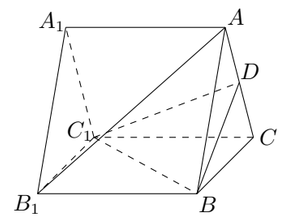
(2) 如果 $\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-\mathrm{i}$, 求实数 a, b 的值.

22. 已知函数 $f(x)=\tan x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 若 x_1, $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 且 $x_1\neq x_2$, 证明: $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

23. 如图, 已知 $A_1B_1C_1-ABC$ 是正三棱柱, D 是 AC 中点.

(1) 证明: $AB_1/\!/$ 平面 DBC_1;

(2) 假设 $AB_1\perp BC_1$, 求以 BC_1 为棱, DBC_1 与 CBC_1 为面的二面角 α 的度数.



24. 已知直线 l 过坐标原点, 抛物线 C 顶点在原点, 焦点在 x 轴正半轴上. 若点 $A(-1,0)$ 和点 $B(0,8)$ 关于 l 的对称点都在 C 上, 求直线 l 和抛物线 C 的方程.

25. 设 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列, 其前 n 项和为 S_n, 且对于所有的自然数 n, a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项.

(1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 (写出推证过程);

(3) 令 $b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ $(n\in\mathbf{N})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n-n)$.

1994 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{0,1,2,3\}$, 集合 $B=\{2,3,4\}$, 则 $\overline{A}\cup\overline{B}=$ （ ）

(A) $\{0\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{0,1,4\}$ (D) $\{0,1,2,3,4\}$

2. 如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 那么实数 k 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,+\infty)$ (B) $(0,2)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $(0,1)$

3. 点 $(0,5)$ 到直线 $y=2x$ 的距离是 （ ）

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. 设 θ 是第二象限的角, 则必有 （ ）

(A) $\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$ (B) $\tan\frac{\theta}{2}<\cot\frac{\theta}{2}$ (C) $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$ (D) $\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$

5. 某种细菌在培养过程中, 每 20 分钟分裂一次 (一个分裂为两个). 经过 3 小时, 这种细菌由 1 个可繁殖成 （ ）

(A) 511 个 (B) 512 个 (C) 1023 个 (D) 1024 个

6. 在下列函数中, 以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期的函数是 （ ）

(A) $y=\sin 2x+\cos 4x$ (B) $y=\sin 2x\cos 4x$

(C) $y=\sin 2x+\cos 2x$ (D) $y=\sin 2x\cos 2x$

7. 已知正六棱台的上、下底面边长分别为 2 和 4, 高为 2, 则其体积为（ ）

(A) $32\sqrt{3}$ (B) $28\sqrt{3}$ (C) $24\sqrt{3}$ (D) $20\sqrt{3}$

8. 设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点, 点 P 在双曲线上且满足 $\angle F_1PF_2=90^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 （ ）

(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

9. 如果复数 z 满足 $|z+\mathrm{i}|+|z-\mathrm{i}|=2$, 那么 $|z+\mathrm{i}+1|$ 的最小值是 （ ）

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

10. 有甲、乙、丙三项任务, 甲需 2 人承担, 乙、丙各需 1 人承担. 从 10 人中选派 4 人承担这三项任务, 不同的选法共有 （ ）

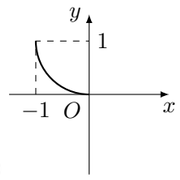
(A) 1260 种 (B) 2025 种 (C) 2520 种 (D) 5040 种

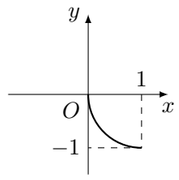
11. 对于直线 m、n 和平面 α、β, $\alpha\perp\beta$ 的一个充分条件是 （ ）

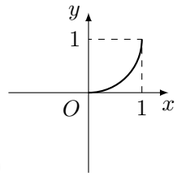
(A) $m\perp n$, $m/\!/\alpha$, $n/\!/\beta$ (B) $m\perp n$, $\alpha\cap\beta=m$, $n\subset\alpha$

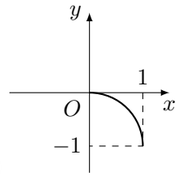
(C) $m/\!/n$, $n\perp\beta$, $m\subset\alpha$ (D) $m/\!/n$, $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$

12. 设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$, 则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

13. 已知过球面上 A、B、C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半, 且 $AB=BC=CA=2$, 则球面面积是 （ ）

(A) $\frac{16}{9}\pi$ (B) $\frac{8}{3}\pi$ (C) 4π (D) $\frac{64}{9}\pi$

14. 如果函数 $y=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称, 那么 $a=$ （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $-\sqrt{2}$ (C) 1 (D) -1

15. 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和, 如果 $f(x)=\lg(10^x+1), x\in(-\infty,+\infty)$, 那么( )

(A) $g(x)=x$, $h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

(B) $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$, $h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

(C) $g(x)=\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

(D) $g(x)=-\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

16. 在 $(3-x)^7$ 的展开式中, x^5 的系数是_____. (用数字作答)

17. 抛物线 $y^2=8-4x$ 的准线方程是_____, 圆心在该抛物线的顶点且与其准线相切的圆的方程是_____.

18. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$, $\theta\in(0,\pi)$, 则 $\cot\theta$ 的值是_____.

19. 设圆锥底面圆周上两点 A、B 间的距离为 2, 圆锥顶点到直线 AB 的距离为 $\sqrt{3}$, AB 和圆锥的轴的距离为 1, 则该圆锥的体积为_____.

20. 在测量某物理量的过程中, 因仪器和观察的误差, 使得 n 次测量分别得到 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 共 n 个数据, 我们规定所测量物理量的“最佳近似值”a 是这样一个量: 与其他近似值比较, a 与各数据的差的平方和最小. 依此规定, 从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 推出的 $a=$ _____.

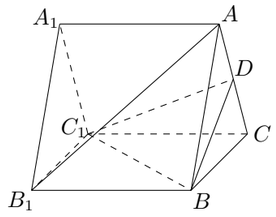
21. 求函数 $y=\frac{\sin 3x\sin^3x+\cos 3x\cos^3x}{\cos^2 2x}+\sin 2x$ 的最小值.

22. 已知函数 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1, x\in\mathbf{R}_+)$, 若 x_1, $x_2\in\mathbf{R}_+$, 判断 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 与 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小, 并加以证明.

23. 如图, 已知 $A_1B_1C_1-ABC$ 是正三棱柱, D 是 AC 中点.

(1) 证明: $AB_1/\!/$ 平面 DBC_1;

(2) 假设 $AB_1\perp BC_1$, $BC=2$, 求线段 AB_1 在侧面 B_1BCC_1 上的射影长.



24. 已知直角坐标平面上点 $Q(2,0)$ 和圆 $C: x^2+y^2=1$, 动点 M 到圆 C 的切线长与 $|MQ|$ 的比等于常数 λ $(\lambda>0)$. 求动点 M 的轨迹方程, 说明它表示什么曲线.

25. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若对于所有的自然数 n, 都有 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$, 证明 $\{a_n\}$ 是等差数列.

1995 年普通高等学校招生考试（全国卷）

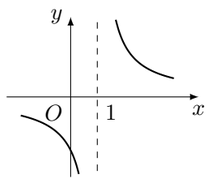
理科数学

1. 已知 I 为全集, 集合 M, $N \subseteq I$, 若 $M \cap N = N$, 则 （ ）

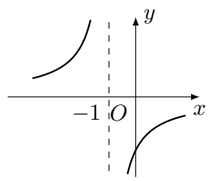
(A) $\overline{M} \supseteq \overline{N}$　(B) $M \subseteq \overline{N}$　(C) $\overline{M} \subseteq \overline{N}$　(D) $M \supseteq \overline{N}$

2. 函数 $y = -\dfrac{1}{x+1}$ 的图象是 （ ）

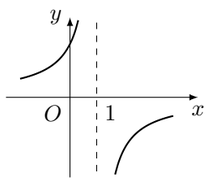
(A)



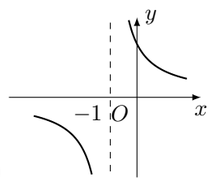
(B)



(C)



(D)



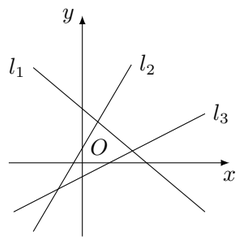
3. 函数 $y = 4\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 3\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是 （ ）

(A) 6π　(B) 2π　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

4. 正方体的全面积是 a^2, 它的顶点都在球面上, 这个球的表面积是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi a^2}{3}$　(B) $\dfrac{\pi a^2}{2}$　(C) $2\pi a^2$　(D) $3\pi a^2$

5. 如图, 若图中的直线 l_1, l_2, l_3 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3, 则 （ ）



(A) $k_1 < k_2 < k_3$　(B) $k_3 < k_1 < k_2$　(C) $k_3 < k_2 < k_1$　(D) $k_1 < k_3 < k_2$

6. 在 $(1-x^3)(1+x)^{10}$ 的展开式中, x^5 的系数是 （ ）

(A) -297　(B) -252　(C) 297　(D) 207

7. 使 $\arcsin x > \arccos x$ 成立的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$　(C) $\left[-1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　(D) $[-1, 0)$

8. 双曲线 $3x^2 - y^2 = 3$ 的渐近线方程是 （ ）

(A) $y = \pm 3x$　(B) $y = \pm\dfrac{1}{3}x$　(C) $y = \pm\sqrt{3}x$　(D) $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

9. 已知 θ 是第三象限角, 且 $\sin^4\theta + \cos^4\theta = \dfrac{5}{9}$, 那么 $\sin 2\theta$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(B) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $-\dfrac{2}{3}$

10. 已知直线 $l \perp$ 平面 α, 直线 $m \subset$ 平面 β, 有下面四个命题:
① $\alpha \parallel \beta \Rightarrow l \perp m$; ② $\alpha \perp \beta \Rightarrow l \parallel m$; ③ $l \parallel m \Rightarrow \alpha \perp \beta$; ④ $l \perp m \Rightarrow \alpha \parallel \beta$.
其中正确的两个命题是 （ ）

(A) ①与②　(B) ③与④　(C) ②与④　(D) ①与③

11. 已知 $y = \log_a(2 - ax)$ 在 $[0, 1]$ 上是 x 的减函数, 则 a 的取值范围是（ ）

(A) $(0, 1)$　(B) $(1, 2)$　(C) $(0, 2)$　(D) $[2, +\infty)$

12. 等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n, 若 $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{2n}{3n+1}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 等于 （ ）

(A) 1　(B) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{4}{9}$

13. 用 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字组成没有重复数字的三位数, 其中偶数共有（ ）

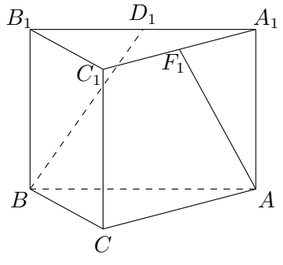
(A) 24 个　(B) 30 个　(C) 40 个　(D) 60 个

14. 在极坐标系中, 椭圆的二焦点分别在极点和点 $(2c, 0)$, 离心率为 e, 则它的极坐标方程是 （ ）

(A) $\rho = \dfrac{c(1-e)}{1 - e\cos\theta}$　(B) $\rho = \dfrac{c(1-e^2)}{1 - e\cos\theta}$

(C) $\rho = \dfrac{c(1-e)}{1 - e\cos\theta}$　(D) $\rho = \dfrac{c(1-e^2)}{e(1 - e\cos\theta)}$

15. 如图, $A_1B_1C_1 - ABC$ 是直三棱柱, $\angle BCA = 90°$, 点 D_1, F_1 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, 若 $BC = CA = CC_1$, 则 BD_1 与 AF_1 所成的角的余弦值是 （ ）



(A) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{30}}{15}$　(D) $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

16. 不等式 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-8} > 3^{-2x}$ 的解集是_____.

17. 已知圆台上、下底面圆周都在球面上, 且下底面过球心, 母线与底面所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则圆台的体积与球体积之比为_____.

18. 函数 $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\cos x$ 的最小值是_____.

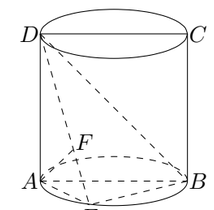
19. 直线 l 过抛物线 $y^2 = a(x+1)$ $(a > 0)$ 的焦点, 并且与 x 轴垂直, 若 l 被抛物线截得的线段长为 4, 则 $a =$ _____.

20. 四个不同的小球放入编号为 1, 2, 3, 4 的四个盒中, 则恰有一个空盒的放法共有_____种. (用数字作答)

21. 在复平面上, 一个正方形的四个顶点按照逆时针方向依次为 Z_1, Z_2, Z_3, O (其中 O 是原点), 已知 Z_2 对应复数 $Z_2 = 1+\sqrt{3}\mathrm{i}$. 求 Z_1 和 Z_3 对应的复数.

22. 求 $\sin^2 20° + \cos^2 50° + \sin 20°\cos 50°$ 的值.

23. 如图, 圆柱的轴截面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在底面的圆周上, $AF \perp DE$, F 是垂足.
(1) 求证: $AF \perp DB$;
(2) 如果圆柱与三棱锥 $D - ABE$ 的体积的比等于 3π, 求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成的角.



24. 某地为促进淡水鱼养殖业的发展, 将价格控制在适当范围内, 决定对淡水鱼养殖提供政府补贴. 设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克, 政府补贴为 t 元/千克. 根据市场调查, 当 $8 \leqslant x \leqslant 14$ 时, 淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似满足关系: $P = 1000(x + t - 8)$ $(x \geqslant 8, t \geqslant 0)$, $Q = 500\sqrt{40 - (x-8)^2}$ $(8 \leqslant x \leqslant 14)$. 当 $P = Q$ 时市场价格称为市场平衡价格.
(1) 将市场平衡价格表示为政府补贴的函数, 并求出函数的定义域;
(2) 为使市场平衡价格不高于每千克 10 元, 政府补贴至少为每千克多少元?

25. 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 是其前 n 项和.
(1) 证明: $\dfrac{\lg S_n + \lg S_{n+2}}{2} < \lg S_{n+1}$;
(2) 是否存在常数 $c > 0$, 使得 $\dfrac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} = \lg(S_{n+1} - c)$ 成立? 并证明你的结论.

26. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{24} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, 直线 $l: \dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{8} = 1$. P 是 l 上一点, 射线 OP 交椭圆于点 R, 又点 Q 在 OP 上且满足 $|OQ| \cdot |OP| = |OR|^2$, 当点 P 在 l 上移动时, 求点 Q 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么曲线.

1996 年普通高等学校招生考试（全国卷）

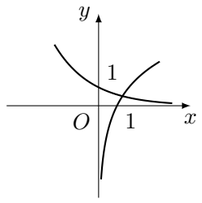
理科数学

1. 已知全集 $I=\mathbf{N}$, 集合 $A=\{x|x=2n, n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x|x=4n, n\in\mathbf{N}\}$, 则 （ ）

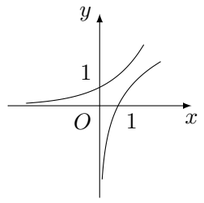
(A) $I=A\cup B$　(B) $I=\overline{A}\cup B$　(C) $I=A\cup\overline{B}$　(D) $I=\overline{A}\cup\overline{B}$

2. 当 $a>1$ 时, 在同一坐标系中, 函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象 （ ）

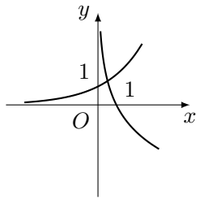
(A)



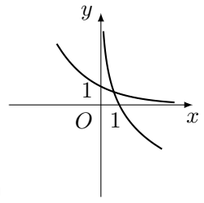
(B)



(C)



(D)



3. 若 $\sin^2 x>\cos^2 x$, 则 x 的取值范围是 （ ）

(A) $\left\{x\left|2k\pi-\frac{3}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{1}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

(B) $\left\{x\left|2k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{5}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

(C) $\left\{x\left|k\pi-\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{1}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

(D) $\left\{x\left|k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

4. 复数 $\dfrac{(2+2\mathrm{i})^4}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^5}$ 等于 （ ）

(A) $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　(B) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　(C) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　(D) $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

5. 如果直线 l、m 与平面 α、β、γ 满足: $l=\beta\cap\gamma$, $l\parallel\alpha$, $m\subset\alpha$, $m\perp\gamma$, 那么必有 （ ）

(A) $\alpha\perp\gamma$ 且 $l\perp m$　(B) $\alpha\perp\gamma$ 且 $m\parallel\beta$

(C) $m\parallel\beta$ 且 $l\perp m$　(D) $\alpha\parallel\beta$ 且 $\alpha\perp\gamma$

6. 当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的 （ ）

(A) 最大值是 1, 最小值是 -1　(B) 最大值是 1, 最小值是 $-\dfrac{1}{2}$

(C) 最大值是 2, 最小值是 -2　(D) 最大值是 2, 最小值是 -1

7. 椭圆 $\begin{cases}x=3+3\cos\varphi\\ y=-1+5\sin\varphi\end{cases}$ 的两个焦点坐标是 （ ）

(A) $(-3,5)$, $(-3,-3)$　(B) $(3,3)$, $(3,-5)$

(C) $(1,1)$, $(-7,1)$　(D) $(7,-1)$, $(-1,-1)$

8. 若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\arcsin\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]+\arccos\left[\sin\left(\pi+\alpha\right)\right]$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $-\dfrac{\pi}{2}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$　(D) $-\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$

9. 将边长为 a 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起, 使得 $BD=a$, 则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{a^3}{6}$　(B) $\dfrac{a^3}{12}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

10. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=-1$, 前 n 项和为 S_n, 若 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{31}{32}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $-\dfrac{2}{3}$　(C) 2　(D) -2

11. 椭圆的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$, 则它在短轴上的两个顶点的极坐标是 （ ）

(A) $(3,0)$, $(1,\pi)$

(B) $\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

(C) $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(2,\dfrac{5\pi}{3}\right)$

(D) $\left(\sqrt{7},\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{7},2\pi-\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

12. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30, 前 $2m$ 项和为 100, 则它的前 $3m$ 项和为 （ ）

(A) 130　(B) 170　(C) 210　(D) 260

13. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<a<b)$ 的半焦距为 c, 直线 l 过 $(a,0)$, $(0,b)$ 两点, 已知原点到直线 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

14. 母线长为 1 的圆锥体积最大时, 其侧面展开图圆心角 φ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　(C) $\sqrt{2}\pi$　(D) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

15. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数, $f(x+2)=-f(x)$, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=x$, 则 $f(7.5)$ 等于 （ ）

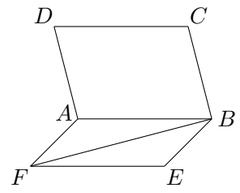
(A) 0.5　(B) -0.5　(C) 1.5　(D) -1.5

16. 已知圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 与抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线相切, 则 $p=$_____.

17. 正六边形的中心和顶点共 7 个点, 以其中 3 个点为顶点的三角形共有_____个. (用数字作答)

18. $\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ$ 的值是_____.

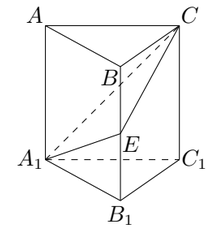
19. 如图, 正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $ABEF$ 所在平面成 60° 的二面角, 则异面直线 AD 与 BF 所成角的余弦值是_____.



20. 解不等式: $\log_a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)>1$.

21. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 满足: $A+C=2B$, $\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\cos B}$, 求 $\cos\dfrac{A-C}{2}$ 的值.

22. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $E\in BB_1$, 截面 $A_1EC\perp$ 侧面 AC_1.
(1) 求证: $BE=EB_1$;
(2) 若 $AA_1=A_1B_1$, 求平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角 (锐角) 的度数.



23. 某地现有耕地 10000 公顷, 规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%, 人均粮食占有量比现在提高 10%. 如果人口年增长率为 1%, 那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷 (精确到 1 公顷)?
(粮食单产 $=\dfrac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$, 人均粮食占有量 $=\dfrac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$)

24. 已知 l_1, l_2 是过点 $P(-\sqrt{2},0)$ 的两条互相垂直的直线, 且 l_1, l_2 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 各有两个交点, 分别为 A_1, B_1 和 A_2, B_2.
(1) 求 l_1 的斜率 k_1 的取值范围;
(2) 若 $|A_1B_1|=\sqrt{5}\,|A_2B_2|$, l_1, 求 l_1, l_2 的方程.

25. 已知 a,b, c 是实数, 函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=ax+b$, 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $|f(x)|\leqslant 1$.
(1) 证明: $|c|\leqslant 1$;
(2) 证明: 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $|g(x)|\leqslant 2$;
(3) 设 $a>0$, 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $g(x)$ 的最大值为 2, 求 $f(x)$.

1997 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 设集合 $M=\{x|0\leqslant x<2\}$, 集合 $N=\{x|x^2-2x-3<0\}$, 集合 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{x\,|0\leqslant x<1\}$　(B) $\{x\,|0\leqslant x<2\}$

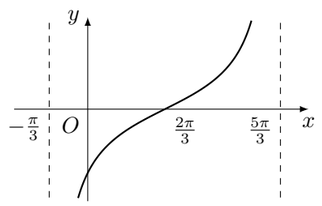
(C) $\{x\,|0\leqslant x\leqslant 1\}$　(D) $\{x\,|0\leqslant x\leqslant 2\}$

2. 如果直线 $ax+2y+2=0$ 与直线 $3x-y-2=0$ 平行, 那么系数 $a=$（ ）

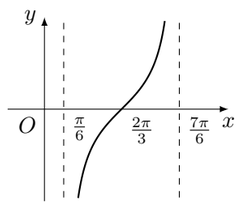
(A) -3　(B) -6　(C) $-\dfrac{3}{2}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

3. 函数 $y=\tan\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的图象是（ ）

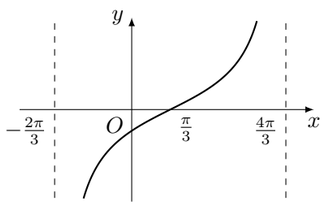
(A)



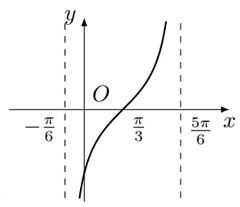
(B)



(C)



(D)



4. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的三个侧面与底面全等, 且 $AB=AC=\sqrt{3}$, $BC=2$, 则以 BC 为棱, 以面 BCD 与面 BCA 为面的二面角的大小是（ ）

(A) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $\arccos\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

5. 函数 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)+\cos 2x$ 的最小正周期是（ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) π　(C) 2π　(D) 4π

6. 满足 $\arccos(1-x)\geqslant\arccos x$ 的 x 的取值范围是（ ）

(A) $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$　(B) $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$　(C) $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$　(D) $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

7. 将 $y=2^x$ 的图象_____, 再作关于直线 $y=x$ 对称的图象, 可得到函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象.（ ）

(A) 先向左平行移动 1 个单位　(B) 先向右平行移动 1 个单位

(C) 先向上平行移动 1 个单位　(D) 先向下平行移动 1 个单位

8. 长方体一个顶点上三条棱的长分别是 3, 4, 5, 且它的八个顶点都在同一个球面上, 这个球的表面积是（ ）

(A) $20\sqrt{2}\pi$　(B) $25\sqrt{2}\pi$　(C) 50π　(D) 200π

9. 曲线的参数方程是 $\begin{cases}x=1-\dfrac{1}{t}\\ y=1-t^2\end{cases}$ (t 是参数, $t\neq 0$), 它的普通方程是（ ）

(A) $(x-1)^2(y-1)=1$　(B) $y=\dfrac{x(x-2)}{(1-x)^2}$

(C) $y=\dfrac{1}{(1-x)^2}-1$　(D) $y=\dfrac{x}{1-x^2}+1$

10. 函数 $y=\cos^2 x-3\cos x+2$ 的最小值为（ ）

(A) 2　(B) 0　(C) $-\dfrac{1}{4}$　(D) 6

11. 椭圆 C 与椭圆 $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ 关于直线 $x+y=0$ 对称, 椭圆 C 的方程是（ ）

(A) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$　(B) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

(C) $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$　(D) $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

12. 圆台上、下底面积分别为 π、4π, 侧面积为 6π, 这个圆台的体积是（ ）

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　(B) $2\sqrt{3}\pi$　(C) $\dfrac{7\sqrt{3}\pi}{6}$　(D) $\dfrac{7\sqrt{3}\pi}{3}$

13. 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数 $f(x)$ 为增函数, 偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象重合, 设 $a>b>0$, 给出下列不等式:
① $f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$; ② $f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$;
③ $f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$; ④ $f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$.
其中成立的是（ ）

(A) ①与④　(B) ②与③　(C) ①与③　(D) ②与④

14. 不等式组 $\begin{cases}x>0\\ \dfrac{3-x}{3+x}>\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|\end{cases}$ 的解集是（ ）

(A) $\{x|0<x<2\}$　(B) $\{x|0<x<2.5\}$

(C) $\{x|0<x<\sqrt{6}\}$　(D) $\{x|0<x<3\}$

15. 四面体的顶点和各棱中点共 10 个点, 在其中取 4 个不共面的点, 不同的取法共有（ ）

(A) 150 种　(B) 147 种　(C) 144 种　(D) 141 种

16. 已知 $\left(\dfrac{a}{x}-\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{9}{4}$, 常数 a 的值为_____.

17. 已知直线的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则极点到该直线的距离是_____.

18. $\dfrac{\sin 7^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}$ 的值为_____.

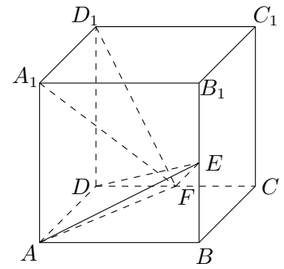
19. 已知 m, l 是直线, α, β 是平面, 给出下列命题:
① 若 l 垂直于 α 内的两条相交直线, 则 $l\perp\alpha$;
② 若 l 平行于 α, 则 l 平行于 α 内的所有直线;
③ 若 $m\subset\alpha$, $l\subset\beta$, 且 $l\perp m$, 则 $\alpha\perp\beta$;
④ 若 $l\subset\beta$, 且 $l\perp\alpha$, 则 $\alpha\perp\beta$;
⑤ 若 $m\subset\alpha$, $l\subset\beta$, 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\parallel l$.
其中正确的命题的序号是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

20. 已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, $\omega=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$. 复数 $\overline{z\omega}$, $z^2\omega^3$ 在复数平面上所对应的点分别为 P, Q. 证明 $\triangle OPQ$ 是等腰直角三角形 (其中 O 为原点).

21. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是由正数组成的等比数列, 公比分别为 p, q, 其中 $p>q$, 且 $p\neq 1$, $q\neq 1$. 设 $c_n=a_n+b_n$, S_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_{n-1}}$.

22. 甲、乙两地相距 S 千米, 汽车从甲地匀速行驶到乙地, 速度不得超过 c 千米/时. 已知汽车每小时的运输成本 (以元为单位) 由可变部分和固定部分组成: 可变部分与速度 v (千米/时) 的平方成正比, 比例系数为 b; 固定部分为 a 元.
(1) 把全程运输成本 y (元) 表示为速度 v (千米/时) 的函数, 并指出这个函数的定义域;
(2) 为了使全程运输成本最小, 汽车应以多大速度行驶?

23. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BB_1, CD 的中点.
(1) 证明: $AD\perp D_1F$;
(2) 求 AE 与 D_1F 所成的角;
(3) 证明: 面 AED 面 $A1FD1$;
(4) 设 $AA_1=2$, 求三棱锥 $F-A_1ED_1$ 的体积.



24. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a>0$), 方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1, x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.
(1) 当 $x\in(0,x_1)$ 时, 证明 $x<f(x)<x_1$;
(2) 设函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称, 证明 $x_0<\dfrac{x_1}{2}$.

25. 设圆满足: ① 截 y 轴所得弦长为 2; ② 被 x 轴分成两段圆弧, 其弧长的比为 3 : 1, 在满足条件①、②的所有圆中, 求圆心到直线 $l:x-2y=0$ 的距离最小的圆的方程.

1997 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 设集合 $M=\{x|0\leqslant x<2\}$, 集合 $N=\{x|x^2-2x-3<0\}$, 集合 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{x\,|0\leqslant x<1\}$　(B) $\{x\,|0\leqslant x<2\}$

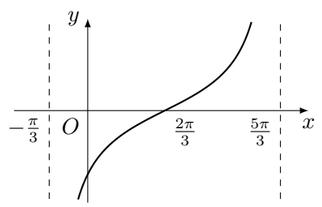
(C) $\{x\,|0\leqslant x\leqslant 1\}$　(D) $\{x\,|0\leqslant x\leqslant 2\}$

2. 如果直线 $ax+2y+2=0$ 与直线 $3x-y-2=0$ 平行, 那么系数 $a=$（ ）

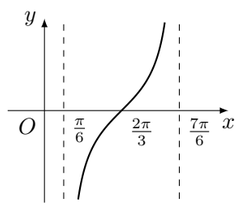
(A) -3　(B) -6　(C) $-\dfrac{3}{2}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

3. 函数 $y=\tan\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的图象是（ ）

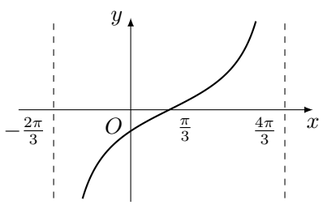
(A)



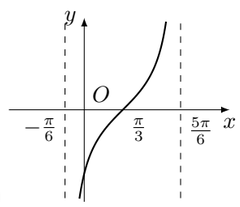
(B)



(C)



(D)



4. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的三个侧面与底面全等, 且 $AB=AC=\sqrt{3}$, $BC=2$, 则以 BC 为棱, 以面 BCD 与面 BCA 为面的二面角的大小是（ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

5. 函数 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)+\sin 2x$ 的最小正周期是（ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) π　(C) 2π　(D) 4π

6. 满足 $\tan\alpha\geqslant\cot\alpha$ 的 α 的一个取值区间是（ ）

(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$　(B) $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$　(C) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$　(D) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$

7. 设函数 $y=f(x)$ 定义在实数集上, 则函数 $y=f(x-1)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图象关于.（ ）

(A) 直线 $y=0$ 对称　(B) 直线 $x=0$ 对称

(C) 直线 $y=1$ 对称　(D) 直线 $x=1$ 对称

8. 长方体一个顶点上三条棱的长分别是 3, 4, 5, 且它的八个顶点都在同一个球面上, 这个球的表面积是（ ）

(A) $20\sqrt{2}\pi$　(B) $25\sqrt{2}\pi$　(C) 50π　(D) 200π

9. 如果直线 l 将圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 平分, 且不通过第四象限, 那么 l 的斜率的取值范围是（ ）

(A) $[0,2]$　(B) $[0,1]$　(C) $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$　(D) $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$

10. 函数 $y=\cos^2 x-3\cos x+2$ 的最小值为（ ）

(A) 2　(B) 0　(C) $-\dfrac{1}{4}$　(D) 6

11. 椭圆 C 与椭圆 $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ 关于直线 $x+y=0$ 对称, 椭圆 C 的方程是（ ）

(A) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$　(B) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

(C) $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$　(D) $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

12. 圆台上、下底面积分别为 π、4π, 侧面积为 6π , 这个圆台的体积是（ ）

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　(B) $2\sqrt{3}\pi$　(C) $\dfrac{7\sqrt{3}\pi}{6}$　(D) $\dfrac{7\sqrt{3}\pi}{3}$

13. 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数 $f(x)$ 为增函数, 偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象重合, 设 $a>b>0$, 给出下列不等式:
① $f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$; ② $f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$;
③ $f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$; ④ $f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$.
其中成立的是（ ）

(A) ①与④　(B) ②与③　(C) ①与③　(D) ②与④

14. 不等式组 $\begin{cases}x>0\\ \dfrac{3-x}{3+x}>\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|\end{cases}$ 的解集是（ ）

(A) $\{x|0<x<2\}$　(B) $\{x|0<x<2.5\}$

(C) $\{x|0<x<\sqrt{6}\}$　(D) $\{x|0<x<3\}$

15. 四面体的一个顶点为 A, 从其他顶点与棱的中点中取 3 个点, 使它们和点 A 在同一平面上, 不同的取法共有（ ）

(A) 30 种　(B) 33 种　(C) 36 种　(D) 39 种

16. 已知 $\left(\dfrac{a}{x}-\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{9}{4}$, 常数 a 的值为_____.

17. 已知直线 $x-y=2$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A, B 两点, 那么线段 AB 的中点坐标是_____.

18. $\dfrac{\sin 7^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}$ 的值为_____.

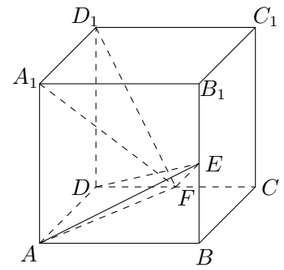
19. 已知 m, l 是直线, α, β 是平面, 给出下列命题:
① 若 l 垂直于 α 内的两条相交直线, 则 $l\perp\alpha$;
② 若 l 平行于 α, 则 l 平行于 α 内的所有直线;
③ 若 $m\subset\alpha$, $l\subset\beta$, 且 $l\perp m$, 则 $\alpha\perp\beta$;
④ 若 $l\subset\beta$, 且 $l\perp\alpha$, 则 $\alpha\perp\beta$;
⑤ 若 $m\subset\alpha$, $l\subset\beta$, 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\parallel l$.
其中正确的命题的序号是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

20. 已知复数 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $\omega=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$. 求复数 $z\omega+z\omega^3$ 的模及辐角主值.

21. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和. 已知 $\dfrac{S_3}{3}$ 与 $\dfrac{S_4}{4}$ 的等比中项为 $\dfrac{S_1}{5}$, $\dfrac{S_3}{3}$ 与 $\dfrac{S_4}{4}$ 的等差中项为 1. 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .

22. 甲、乙两地相距 S 千米, 汽车从甲地匀速行驶到乙地, 速度不得超过 c 千米/时. 已知汽车每小时的运输成本 (以元为单位) 由可变部分和固定部分组成: 可变部分与速度 v (千米/时) 的平方成正比, 比例系数为 b; 固定部分为 a 元.
(1) 把全程运输成本 y (元) 表示为速度 v (千米/时) 的函数, 并指出这个函数的定义域;
(2) 为了使全程运输成本最小, 汽车应以多大速度行驶?

23. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BB_1, CD 的中点.
(1) 证明: $AD\perp D_1F$;
(2) 求 AE 与 D_1F 所成的角;
(3) 证明: 面 AED 面 $A1FD1$;
(4) 设 $AA_1=2$, 求三棱锥 $F-A_1ED_1$ 的体积.



24. 已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于 A、B 两点, 分别过点 A、B 作 y 轴的平行线与函数的 $y=\log_2 x$ 的图象交于 C、D 两点.
(1) 证明: 点 C、D 和原点 O 在同一条直线上;
(2) 当 BC 平行于 x 轴时, 求点 A 的坐标.

25. 设圆满足: ① 截 y 轴所得弦长为 2; ② 被 x 轴分成两段圆弧, 其弧长的比为 3 : 1; ③ 圆心到直线 $l:x-2y=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 求该的圆的方程.

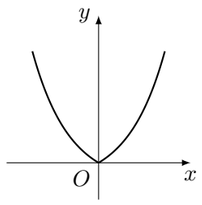
1998 年普通高等学校招生考试（全国卷）

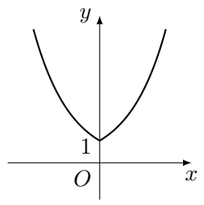
理科数学

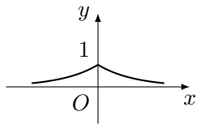
1. $\sin 600^\circ$ 的值是 （ ）

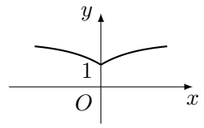
(A) $\frac{1}{2}$　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 函数 $y=a^{|x|}$ $(a>1)$ 的图象是 （ ）

(A)


(B)


(C)


(D)


3. 曲线的极坐标方程 $\rho=4\sin\theta$ 化成直角坐标方程为 （ ）

(A) $x^2+(y+2)^2=4$　(B) $x^2+(y-2)^2=4$

(C) $(x-2)^2+y^2=4$　(D) $(x+2)^2+y^2=4$

4. 两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是（ ）

(A) $A_1A_2+B_1B_2=0$　(B) $A_1A_2-B_1B_2=0$

(C) $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$　(D) $\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=1$

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ （ ）

(A) x $(x\neq 0)$　(B) $\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$　(C) $-x$ $(x\neq 0)$　(D) $-\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$

6. 已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$ 在第一象限, 则在 $[0,2\pi]$ 内 α 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$　(B) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

(C) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$　(D) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

7. 已知圆锥的全面积是底面积的 3 倍, 那么该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为 （ ）

(A) 120°　(B) 150°　(C) 180°　(D) 240°

8. 复数 $-\mathrm{i}$ 的一个立方根是 i, 它的另外两个立方根是 （ ）

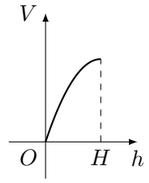
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}$　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}$　(C) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　(D) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

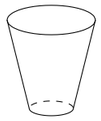
9. 如果棱台的两底面积分别是 S, S', 中截面的面积是 S_0, 那么 （ ）

(A) $2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$　(B) $S_0=\sqrt{SS'}$

(C) $2S_0=S+S'$　(D) $S_0^2=2SS'$

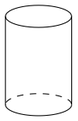
10. 向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止, 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如下图所示, 那么水瓶的形状是 （ ）



(A)


(B)


(C)


(D)


11. 3 名医生和 6 名护士被分配到 3 所学校为学生体检, 每校分配 1 名医生和 2 名护士, 不同的分配方法共有 （ ）

(A) 90 种　(B) 180 种　(C) 270 种　(D) 540 种

12. 椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为 F_1 和 F_2, 点 P 在椭圆上, 如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上, 那么 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的 （ ）

(A) 7 倍　(B) 5 倍　(C) 4 倍　(D) 3 倍

13. 球面上有 3 个点, 其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的 $\frac{1}{6}$, 经过这 3 个点的小圆的周长为 4π, 那么这个球的半径为 （ ）

(A) $4\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 2　(D) $\sqrt{3}$

14. 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列, 其最小内角为 （ ）

(A) $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　(B) $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　(C) $\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　(D) $\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

15. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1>1$, 且前 n 项和 S_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a_1}$, 那么 a_1 的取值范围是 （ ）

(A) $(1,+\infty)$　(B) $(1,4)$　(C) $(1,2)$　(D) $(1,\sqrt{2})$

16. 设圆过双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的一个顶点和一个焦点, 圆心在此双曲线上, 则圆心到双曲线中心的距离是_____.

17. $(x+2)^{10}(x^2-1)$ 的展开式中 x^{10} 的系数为_____. (用数字作答)

18. 在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中, 当底面四边形 $ABCD$ 满足条件_____时, 有 $A_1C\perp B_1D_1$. (注: 填上你认为正确的一种条件即可, 不必考虑所有可能的情形)

19. 关于函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$, 有下列命题:

① 由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是 π 的整数倍;

② $y=f(x)$ 的表达式可改写为 $y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$;

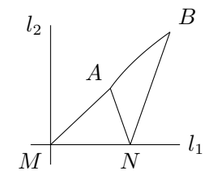
③ $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称;

④ $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称.

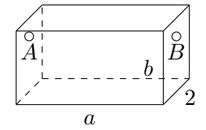
其中正确的命题的序号是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

20. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 设 $a+c=2b$, $A-C=\frac{\pi}{3}$, 求 $\sin B$ 的值.

21. 如图, 直线 l_1 和 l_2 相交于点 M, $l_1\perp l_2$, 点 $N\in l_1$. 以 A, B 为端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等. 若 $\triangle AMN$ 为锐角三角形, $|AM|=\sqrt{17}$, $|AN|=3$, 且 $|BN|=6$. 建立适当的坐标系, 求曲线段 C 的方程.



22. 如图, 为处理含有某种杂质的污水, 要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱, 污水从 A 孔流入, 经沉淀后从 B 孔流出. 设箱体的长度为 a 米, 高度为 b 米. 已知流出的水中该杂质的质量分数与 a, b 的乘积 ab 成反比. 现有制箱材料 60 平方米. 问当 a, b 各为多少米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小. (A、B 孔的面积忽略不计)

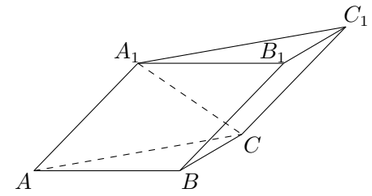


23. 已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 与底面 ABC 垂直, $\angle ABC=90^\circ$, $BC=2$, $AC=2\sqrt{3}$, 且 $AA_1\perp A_1C$, $AA_1=A_1C$.

(1) 求侧棱 A_1A 与底面 ABC 所成角的大小;

(2) 求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小;

(3) 求顶点 C 到侧面 A_1ABB_1 的距离.



24. 设曲线 C 的方程是 $y=x^3-x$, 将 C 沿 x 轴、y 轴正向分别平行移动 t、s 单位长度后得曲线 C_1.

(1) 写出曲线 C_1 的方程;

(2) 证明曲线 C 与 C_1 关于点 $A\left(\frac{t}{2},\frac{s}{2}\right)$ 对称;

(3) 如果曲线 C 与 C_1 有且仅有一个公共点, 证明 $s=\frac{t^3}{4}-t$ 且 $t\neq 0$.

25. 已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_1=1$, $b_1+b_2+\cdots+b_{10}=145$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\log_a\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$ (其中 $a>0$, 且 $a\neq 1$), 记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 试比较 S_n 与 $\frac{1}{3}\log_a b_n+1$ 的大小, 并证明你的结论.

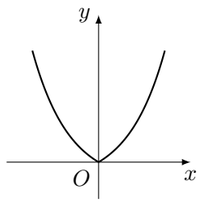
1998 年普通高等学校招生考试（全国卷）

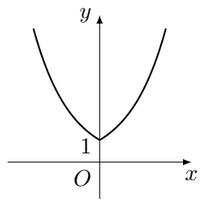
文科数学

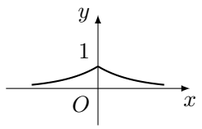
1. $\sin 600^\circ$ 的值是 （ ）

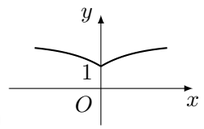
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 函数 $y=a^{|x|}$ $(a>1)$ 的图象是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

3. 已知直线 $x=a$ $(a>0)$ 和圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 相切, 那么 a 的值是( )

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

4. 两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是( )

(A) $A_1A_2+B_1B_2=0$ (B) $A_1A_2-B_1B_2=0$

(C) $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$ (D) $\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=1$

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ （ ）

(A) x $(x\neq 0)$ (B) $\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ (C) $-x$ $(x\neq 0)$ (D) $-\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$

6. 已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$ 在第一象限, 则在 $[0,2\pi]$ 内 α 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

(C) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

7. 已知圆锥的全面积是底面积的 3 倍, 那么该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为 （ ）

(A) 120° (B) 150° (C) 180° (D) 240°

8. 复数 $-\mathrm{i}$ 的一个立方根是 i, 它的另外两个立方根是 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (C) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ (D) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

9. 如果棱台的两底面积分别是 S, S', 中截面的面积是 S_0, 那么 （ ）

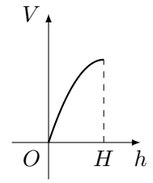
(A) $2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$ (B) $S_0=\sqrt{SS'}$

(C) $2S_0=S+S'$ (D) $S_0^2=2SS'$

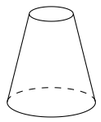
10. 2 名医生和 4 名护士被分配到 2 所学校为学生体检, 每校分配 1 名医生和 2 名护士, 不同的分配方法共有 （ ）

(A) 6 种 (B) 12 种 (C) 18 种 (D) 24 种

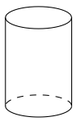
11. 向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止, 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如下图所示, 那么水瓶的形状是 （ ）



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

12. 椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为 F_1 和 F_2, 点 P 在椭圆上, 如果线段 PF_1 的中点 M 在 y 轴上, 那么点 M 的纵坐标是 （ ）

(A) 7 倍 (B) 5 倍 (C) 4 倍 (D) 3 倍

13. 球面上有 3 个点, 其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的 $\frac{1}{6}$, 经过这 3 个点的小圆的周长为 4π, 那么这个球的半径为 （ ）

(A) $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\pm\frac{3}{4}$

14. 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列, 其最小内角的正弦值为( )

(A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}$

15. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $-\frac{1}{2}$, 前 n 项和为 S_n, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a_1}$, 那么 a_1 的值为 （ ）

(A) $\pm\sqrt{3}$ (B) $\pm\frac{3}{2}$ (C) $\pm\sqrt{2}$ (D) $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

16. 设圆过双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的一个顶点和一个焦点, 圆心在此双曲线上, 则圆心到双曲线中心的距离是_____.

17. $(x+2)^{10}(x^2-1)$ 的展开式中 x 的系数为_____. (用数字作答)

18. 在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中, 当底面四边形 $ABCD$ 满足条件_____时, 有 $A_1C\perp B_1D_1$. (注: 填上你认为正确的一种条件即可, 不必考虑所有可能的情形)

19. 关于函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$, 有下列命题:

① 由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是 π 的整数倍;

② $y=f(x)$ 的表达式可改写为 $y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$;

③ $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称;

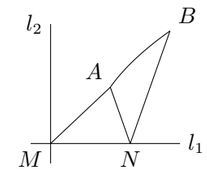
④ $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称.

其中正确的命题的序号是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

20. 设 $a\neq b$, 解关于 x 的不等式: $a^2x+b^2(1-x)\geqslant[ax+b(1-x)]^2$.

21. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 设 $a+c=2b$, $A-C=\frac{\pi}{3}$, 求 $\sin B$ 的值.

22. 如图, 直线 l_1 和 l_2 相交于点 M, $l_1\perp l_2$, 点 $N\in l_1$. 以 A, B 为端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等. 若 $\triangle AMN$ 为锐角三角形, $|AM|=\sqrt{17}$, $|AN|=3$, 且 $|BN|=6$. 建立适当的坐标系, 求曲线段 C 的方程.

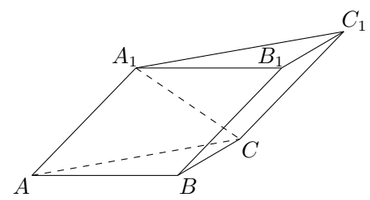


23. 已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 与底面 ABC 垂直, $\angle ABC=90^\circ$, $BC=2$, $AC=2\sqrt{3}$, 且 $AA_1\perp A_1C$, $AA_1=A_1C$.

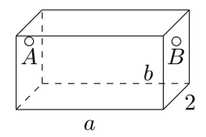
(1) 求侧棱 A_1A 与底面 ABC 所成角的大小;

(2) 求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小;

(3) 求侧棱 B_1B 和侧面 A_1ACC_1 的距离.



24. 如图, 为处理含有某种杂质的污水, 要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱, 污水从 A 孔流入, 经沉淀后从 B 孔流出. 设箱体的长度为 a 米, 高度为 b 米. 已知流出的水中该杂质的质量分数与 a, b 的乘积 ab 成反比. 现有制箱材料 60 平方米. 问当 a, b 各为多少米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小. (A、B 孔的面积忽略不计)



25. 已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_1=1$, $b_1+b_2+\cdots+b_{10}=145$.

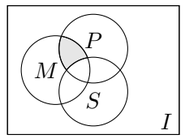
(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\lg\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$ (其中 $a>0$, 且 $a\neq 1$), 记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 试比较 S_n 与 $\frac{1}{2}\lg b_n+1$ 的大小, 并证明你的结论.

1999 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

1. 如图, I 是全集, M、P、S 是 I 的 3 个子集, 则阴影部分所表示的集合是 (　　)



(A) $(M\cap P)\cap S$　(B) $(M\cap P)\cup S$　(C) $(M\cap P)\cap\overline{S}$　(D) $(M\cap P)\cup\overline{S}$

2. 已知映射 $f:A\to B$, 其中, 集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$, 集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象, 且对任意的 $a\in A$, 在 B 中和它对应的元素是 $|a|$, 则集合 B 中元素的个数是 (　　)

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

3. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$, $f(a)=b$, $ab\neq 0$, 则 $g(b)$ 等于 (　　)

(A) a　(B) a^{-1}　(C) b　(D) b^{-1}

4. 函数 $f(x)=M\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数, 且 $f(a)=-M$, $f(b)=M$, 则函数 $g(x)=M\cos(\omega x+\varphi)$ 在 $[a,b]$ 上 (　　)

(A) 是增函数　(B) 是减函数

(C) 可以取得最大值 M　(D) 可以取得最小值 $-M$

5. 若 $f(x)\sin x$ 是周期为 π 的奇函数, 则 $f(x)$ 可以是 (　　)

(A) $\sin x$　(B) $\cos x$　(C) $\sin 2x$　(D) $\cos 2x$

6. 在极坐标系中, 曲线 $\rho=4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 关于 (　　)

(A) 直线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 轴对称　(B) 直线 $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ 轴对称

(C) 点 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 中心对称　(D) 极点中心对称

7. 将若干毫升水倒入底面半径为 2 cm 的圆柱形器皿中, 量得水面的高度为 6cm , 若将这些水倒入轴截面是正三角形的倒圆锥形器皿中, 则水面的高度是 (　　)

(A) $6\sqrt{3}$ cm　(B) 6 cm　(C) $2\sqrt[3]{18}$ cm　(D) $3\sqrt[3]{12}$ cm

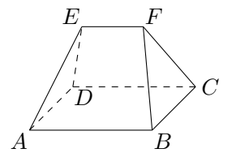
8. 若 $\left(2x+\sqrt{3}\right)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$, 则 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2$ 的值为 (　　)

(A) 1　(B) -1　(C) 0　(D) 2

9. 直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 得的劣弧所对的圆心角为(　　)

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

10. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, $EF/\!/AB$, $EF=\dfrac{3}{2}$, EF 与面 AC 的距离为 2, 则该多面体的体积为(　　)



(A) $\dfrac{9}{2}$　(B) 5　(C) 6　(D) $\dfrac{15}{2}$

11. 若 $\sin\alpha>\tan\alpha>\cot\alpha$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha\in$ (　　)

(A) $\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right)$　(B) $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$　(C) $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$　(D) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$

12. 如果圆台的上底面半径为 5, 下底面半径为 R, 中截面把圆台分为上、下两个圆台, 它们的侧面积的比为 1 : 2, 那么 $R=$ (　　)

(A) 10　(B) 15　(C) 20　(D) 25

13. 已知两点 $M\left(1,\dfrac{5}{4}\right)$, $N\left(-4,-\dfrac{5}{4}\right)$, 给出下列曲线方程:

① $4x+2y-1=0$; ② $x^2+y^2=3$; ③ $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$; ④ $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

在曲线上存在点 P 满足 $|MP|=|NP|$ 的所有曲线方程是 (　　)

(A) ①③　(B) ②④　(C) ①②③　(D) ②③④

14. 某电脑用户计划使用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘, 根据需要, 软件至少买 3 片, 磁盘至少买 2 盒, 则不同的选购方式共有 (　　)

(A) 5 种　(B) 6 种　(C) 7 种　(D) 8 种

15. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点为 F_1, 右准线为 l_1, 若过 F_1 且垂直于 x 轴的弦长等于点 F_1 到 l_1 的距离, 则椭圆的率心率是_____.

16. 在一块并排 10 垄的田地中, 选择 2 垄分别种植 A、B 两种作物, 每种作物种植一垄, 为有利于作物生长, 要求 A、B 两种作物的间隔不小于 6 垄, 则不同的选垄方法共有_____种. (用数字作答)

17. 若正数 a、b 满足 $ab=a+b+3$, 则 ab 的取值范围是_____.

18. α、β 是两个不同的平面, m、n 是平面 α 及 β 之外的两条不同直线, 给出四个论断: ① $m\perp n$; ② $\alpha\perp\beta$; ③ $n\perp\beta$; ④ $m\perp\alpha$.

以其中三个论断作为条件, 余下一个论断作为结论, 写出你认为正确的一个命题:_____.

19. 解不等式: $\sqrt{3\log_a x-2}<2\log_a x-1$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

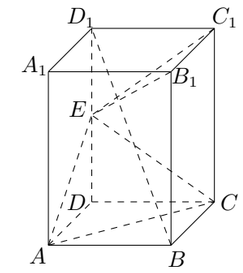
20. 设复数 $z=3\cos\theta+\mathrm{i}\cdot 2\sin\theta$, 求函数 $y=\theta-\arg z$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最大值以及对应的 θ 值.

21. 如图, 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 点 E 在棱 D_1D 上, 截面 $EAC/\!/D_1B$, 且面 EAC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 45°, $AB=a$.

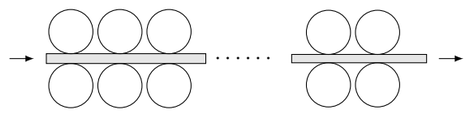
(1) 求截面 EAC 的面积;

(2) 求异面直线 A_1B_1 与 AC 之间的距离;

(3) 求三棱锥 B_1-EAC 的体积.



22. 如图为一台冷轧机的示意图. 冷轧机由若干对轧辊组成, 带钢从一端输入, 经过各对轧辊逐步减薄后输出.



(1) 输入带钢的厚度为 α, 输出带钢的厚度为 β, 若每对轧辊的减薄率不超过 r_0. 问冷轧机至少需要安装多少对轧辊?

(一对轧辊减薄率 $=\dfrac{\text{输入该对的带钢厚度}-\text{从该对输出的带钢厚度}}{\text{输入该对的带钢厚度}}$)

(2) 已知一台冷轧机共有 4 对减薄率为 20% 的轧辊, 所有轧辊周长均为 1600 若第 k 对轧辊有缺陷, 每滚动一周在带钢上压出一个疵点, 在冷轧机输出的带钢上, 疵点的间距为 L_k. 为了便于检修, 请计算 L_1、L_2、L_3 并填入下表 (轧钢过程中, 带钢宽度不变, 且不考虑损耗).

轧辊序号	1	2	3	4
疵点间距 L_k/mm				1600

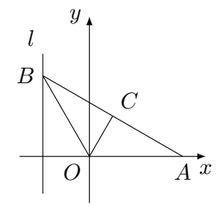
23. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象是自原点出发的一条折线, 当 $n\leqslant y\leqslant n+1$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 时, 该图象是斜率为 b^n 的线段 (其中正常数 $b\neq 1$), 设数列 $\{x_n\}$ 由 $f(x_n)=n$ $(n=1,2,\cdots)$ 定义.

(1) 求 x_1、x_2 和 x_n 的表达式;

(2) 求 $f(x)$ 的表达式, 并写出其定义域;

(3) 证明: $y=f(x)$ 的图象与 $y=x$ 的图象没有横坐标大于 1 的交点.

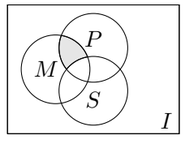
24. 如图, 给出定点 $A(a,0)$ $(a>0)$ 和直线 $l:x=-1$. B 是直线 l 上的动点, $\angle BOA$ 的角平分线交 AB 于点 C. 求点 C 的轨迹方程, 并讨论方程表示的曲线类型与 a 值的关系.



1999 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

1. 如图, I 是全集, M、P、S 是 I 的 3 个子集, 则阴影部分所表示的集合是 （　）



(A) $(M\cap P)\cap S$　(B) $(M\cap P)\cup S$　(C) $(M\cap P)\cap\overline{S}$　(D) $(M\cap P)\cup\overline{S}$

2. 已知映射 $f:A\to B$, 其中, 集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$, 集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象, 且对任意的 $a\in A$, 在 B 中和它对应的元素是 $|a|$, 则集合 B 中元素的个数是 （　）

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

3. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$, $f(a)=b$, $ab\neq 0$, 则 $g(b)$ 等于 （　）

(A) a　(B) a^{-1}　(C) b　(D) b^{-1}

4. 函数 $f(x)=M\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数, 且 $f(x)=-M, f(b)=M$, 则函数 $g(x)=M\cos(\omega x+\varphi)$ 在 $[a,b]$ 上 （　）

(A) 是增函数　(B) 是减函数

(C) 可以取得最大值 M　(D) 可以取得最小值 $-M$

5. 若 $f(x)\sin x$ 是周期为 π 的奇函数, 则 $f(x)$ 可以是 （　）

(A) $\sin x$　(B) $\cos x$　(C) $\sin 2x$　(D) $\cos 2x$

6. 曲线 $x^2+y^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y=0$ 关于 （　）

(A) 直线 $x=\sqrt{2}$ 轴对称　(B) 直线 $y=-x$ 轴对称

(C) 点 $(-2,\sqrt{2})$ 中心对称　(D) 点 $(-\sqrt{2},0)$ 中心对称

7. 将若干毫升水倒入底面半径为 2 cm 的圆柱形器皿中, 量得水面的高度为 6cm , 若将这些水倒入轴截面是正三角形的倒圆锥形器皿中, 则水面的高度是 （　）

(A) $6\sqrt{3}$ cm　(B) 6 cm　(C) $2\sqrt[3]{18}$ cm　(D) $3\sqrt[3]{12}$ cm

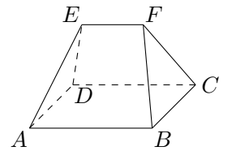
8. 若 $\left(2x+\sqrt{3}\right)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, 则 $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2$ 的值为 （　）

(A) -1　(B) 1　(C) 0　(D) 2

9. 直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 得的劣弧所对的圆心角为（　）

(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{3}$　(D) $\frac{\pi}{2}$

10. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, $EF\parallel AB$, $EF=\frac{3}{2}$, EF 与面 AC 的距离为 2, 则该多面体的体积为（　）



(A) $\frac{9}{2}$　(B) 5　(C) 6　(D) $\frac{15}{2}$

11. 若 $\sin\alpha>\tan\alpha>\cot\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha\in$ （　）

(A) $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$　(B) $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$　(C) $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$　(D) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

12. 如果圆台的上底面半径为 5, 下底面半径为 R, 中截面把圆台分为上、下两个圆台, 它们的侧面积的比为 1 : 2, 那么 $R=$ （　）

(A) 10　(B) 15　(C) 20　(D) 25

13. 给出下列曲线方程:

① $4x+2y-1=0$; ② $x^2+y^2=3$; ③ $\frac{x^2}{2}+y^2=1$; ④ $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

其中与直线 $y=-2x-3$ 有交点的所有曲线方程是 （　）

(A) ①③　(B) ②④　(C) ①②③　(D) ②③④

14. 某电脑用户计划使用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘, 根据需要, 软件至少买 3 片, 磁盘至少买 2 盒, 则不同的选购方式共有 （　）

(A) 5 种　(B) 6 种　(C) 7 种　(D) 8 种

15. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点为 F_1, 右准线为 l_1, 若过 F_1 且垂直于 x 轴的弦长等于点 F_1 到 l_1 的距离, 则椭圆的率心率是_____.

16. 在一块并排 10 垄的田地中, 选择 2 垄分别种植 A、B 两种作物, 每种作物种植一垄, 为有利于作物生长, 要求 A、B 两种作物的间隔不小于 6 垄, 则不同的选垄方法共有_____种. (用数字作答)

17. 若正数 a、b 满足 $ab=a+b+3$, 则 ab 的取值范围是_____.

18. α、β 是两个不同的平面, m、n 是平面 α 及 β 之外的两条不同直线, 给出四个论断: ① $m\perp n$; ② $\alpha\perp\beta$; ③ $n\perp\beta$; ④ $m\perp\alpha$.

以其中三个论断作为条件, 余下一个论断作为结论, 写出你认为正确的一个命题:_____.

19. 解方程: $\sqrt{3\lg x-2}-3\lg x+4=0$.

20. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n, 已知 $a_n=5S_n-3$ $(n\in\mathbf{N})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$ 的值.

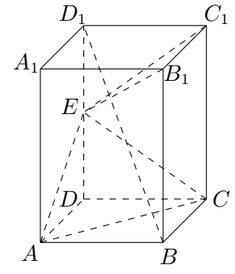
21. 设复数 $z=3\cos\theta+\mathrm{i}\cdot 2\sin\theta$, 求函数 $y=\theta-\arg z$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值以及对应的 θ 值.

22. 如图, 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 点 E 在棱 D_1D 上, 截面 $EAC\parallel D_1B$, 且面 EAC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 45°, $AB=a$.

(1) 求截面 EAC 的面积;

(2) 求异面直线 A_1B_1 与 AC 之间的距离;

(3) 求三棱锥 B_1-EAC 的体积.



23. 如图为一台冷轧机的示意图. 冷轧机由若干对轧辊组成, 带钢从一端输入, 经过各对轧辊逐步减薄后输出.

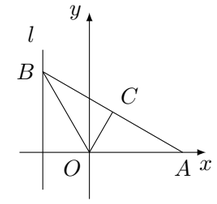
(1) 输入带钢的厚度为 α, 输出带钢的厚度为 β, 若每对轧辊的减薄率不超过 r_0. 问冷轧机至少需要安装多少对轧辊?

(一对轧辊减薄率 $=\frac{\text{输入该对的带钢厚度}-\text{从该对输出的带钢厚度}}{\text{输入该对的带钢厚度}}$)

(2) 已知一台冷轧机共有 4 对减薄率为 20% 的轧辊, 所有轧辊周长均为 1600 若第 k 对轧辊有缺陷, 每滚动一周在带钢上压出一个疵点, 在冷轧机输出的带钢上, 疵点的间距为 L_k. 为了便于检修, 请计算 L_1、L_2、L_3 并填入下表 (轧钢过程中, 带钢宽度不变, 且不考虑损耗).

轧辊序号	1	2	3	4
疵点间距 L_k/mm				1600

24. 如图, 给出定点 $A(a,0)$ $(a>0)$ 和直线 $l:x=-1$. B 是直线 l 上的动点, $\angle BOA$ 的角平分线交 AB 于点 C. 求点 C 的轨迹方程, 并讨论方程表示的曲线类型与 a 值的关系.



2000 年普通高等学校春季招生考试（京、皖）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $z_1=3+\mathrm{i}$, $z_2=1-\mathrm{i}$, 则 $z=z_1\cdot z_2$ 在复平面内的对应点位于（　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 设全集 $I=\{a,b,c,d,e\}$, 集合 $M=\{a,c,d\}$, $N=\{b,d,e\}$, 那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 是（　）

(A) $\varnothing$　(B) $\{d\}$　(C) $\{a,c\}$　(D) $\{b,e\}$

3. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 的两条渐近线互相垂直, 那么该双曲线的离心率是（　）

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\dfrac{3}{2}$

4. 曲线 $xy=1$ 的参数方程是（　）

(A) $\begin{cases}x=t^{\frac{1}{2}}\\ y=t^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x=\sin\alpha,\\ y=\csc\alpha\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x=\cos\alpha\\ y=\sec\alpha\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x=\tan\alpha\\ y=\cot\alpha\end{cases}$

5. 一个圆锥的底面直径和高都同一个球的直径相等, 那么圆锥与球的体积之比是（　）

(A) 1 : 3　(B) 2 : 3　(C) 1 : 2　(D) 2 : 9

6. 直线 $\theta=a$ 和直线 $\rho\sin(\theta-a)=1$ 的位置关系是

(A) 垂直　(B) 平行　(C) 相交但不垂直 (D) 重合

7. 函数 $y=\lg|x|$（　）

(A) 是偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增

(B) 是偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减

(C) 是奇函数, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增

(D) 是奇函数, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减

8. 从单词“equation”选取 5 个不同的字母排成一排, 含有“qu”(其中“qu”相连且顺序不变) 的不同排列共有（　）

(A) 120 个　(B) 480 个　(C) 720 个　(D) 840 个

9. 椭圆短轴长是 2, 长轴长是短轴的 2 倍, 则椭圆中心到其准线距离是（　）

(A) $\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$　(B) $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$　(C) $\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$　(D) $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

10. 函数 $y=\dfrac{1}{2+\sin x+\cos x}$ 的最大值是（　）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$　(C) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. 设复数 $z_1=2\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$ $\left(\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在复平面上对应向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, 将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按顺时针方向旋转 $\dfrac{3}{4}\pi$ 后得到向量 $\overrightarrow{OZ_2}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数为 $z_2=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, 则 $\tan\varphi=$（　）

(A) $\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$　(B) $\dfrac{2\tan\theta-1}{2\tan\theta+1}$　(C) $\dfrac{1}{2\tan\theta+1}$　(D) $\dfrac{1}{2\tan\theta-1}$

12. 设 α, β 是一个钝角三角形的两个锐角, 下列四个不等式中不正确的是（　）

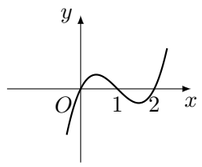
(A) $\tan\alpha\tan\beta<1$　(B) $\sin\alpha+\sin\beta<\sqrt{2}$

(C) $\cos\alpha+\cos\beta>1$　(D) $\dfrac{1}{2}\tan(\alpha+\beta)<\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=0$, 则有（　）

(A) $a_1+a_{101}>0$　(B) $a_2+a_{100}<0$　(C) $a_3+a_{99}=0$　(D) $a_{51}=51$

14. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图, 则（　）



(A) $b\in(-\infty,0)$　(B) $b\in(0,1)$　(C) $b\in(1,2)$　(D) $b\in(2,+\infty)$

二、填空题

15. 函数 $y=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是_____.

16. 已知一体积为 72 的正四面体, 连结两个面的重心 E、F, 则线段 EF 的长是_____.

17. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 展开式中的常数项是_____.

18. 在空间, 下列命题正确的是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

① 如果两条直线 a、b 分别与直线 l 平行, 那么 $a\parallel b$;

② 如果两条直线 a 与平面 β 内的一条直线 b 平行, 那么 $a\parallel\beta$;

③ 如果直线 a 与平面 β 内的一条直线 b、c 都有垂直, 那么 $a\perp\beta$;

④ 如果平面 β 内的一条直线 a 垂直平面 γ, 那么 $\beta\perp\gamma$.

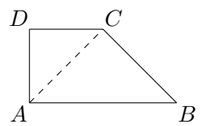
三、解答题

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 对边分别为 a、b、c, 证明: $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

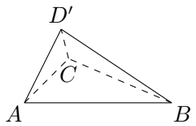
20. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle D=\angle BAD=90^\circ$, $AD=DC=\dfrac{1}{2}AB=a$ (如图一) . 将 $\triangle ADC$ 沿 AC 折起, 使 D 到 D'. 记面 ACD' 为 α, 面 ABC 为 β, 面 BCD' 为 γ .

(1) 若二面角 $\alpha-AC-\beta$ 为直二面角 (如图二), 求二面角 $\beta-BC-\gamma$ 的大小;

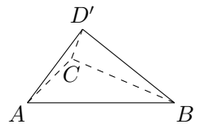
(2) 若二面角 $\alpha-AC-\beta$ 为 60° (如图三), 求三棱锥 $D'-ABC$ 的体积.



图一



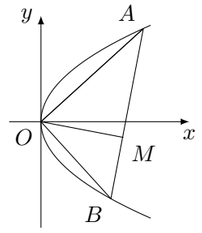
图二



图三

21. 设函数 $f(x)=|\lg x|$, 若 $0<a<b$, 且 $f(a)>f(b)$, 证明: $ab<1$.

22. 如图, 设点 A 和 B 为抛物线 $y^2=4px\ (p>0)$ 上原点以外的两个动点, 已知 $OA\perp OB$, $OM\perp AB$. 求点 M 的轨迹方程, 并说明它表示什么曲线.



23. 某地区上年度电价为 0.8 元/kW · h, 年用电量为 a kW · h 本年度计划将电价降到 0.55 元/kW · h 至 0.75 元/kW · h 之间, 而用户期望电价为 0.4 元/kW · h 经测算, 下调电价后新增的用电量与实际电价和用户期望电价的差成反比 (比例系数为 k) . 该地区电力的成本为 0.3 元/kW · h.

(1) 写出本年度电价下调后, 电力部门的收益 y 与实际电价 x 的函数关系式;

(2) 设 $k=0.2a$, 当电价最低定为多少时仍可保证电力部门的收益比上年至少增长 20%?

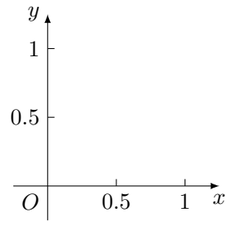
注: 收益 = 实际用电量 × (实际电价 − 成本价)

24. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}f_1(x), x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\\ f_2(x), x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$, 其中 $f_1(x)=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$, $f_2(x)=-2x+2$.

(1) 在下面坐标系上画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 设 $y=f_2(x)\ \left(x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\right)$ 的反函数为 $y=g(x)$, $a_1=1$, $a_2=g(a_1)$, $\cdots$, $a_n=g(a_{n-1})$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$;

(3) 若 $x_0\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$, $x_1=f(x_0)$, $f(x_1)=x_0$, 求 x_0.



2000 年普通高等学校春季招生考试（京、皖）

文科数学

一、选择题

1. 复数 $z_1=3+\mathrm{i}$, $z_2=1-\mathrm{i}$, 则 $z=z_1\cdot z_2$ 在复平面内的对应点位于（　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 设全集 $I=\{a,b,c,d,e\}$, 集合 $M=\{a,c,d\}$, $N=\{b,d,e\}$, 那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 是（　）

(A) $\varnothing$　(B) $\{d\}$　(C) $\{a,c\}$　(D) $\{b,e\}$

3. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 的两条渐近线互相垂直, 那么该双曲线的离心率是（　）

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\dfrac{3}{2}$

4. 下列方程关于 $x=y$ 对称的是

(A) $x^2-x+y^2=1$　(B) $x^2y+xy^2=1$

(C) $x-y=1$　(D) $x^2-y^2=1$

5. 一个圆锥的底面直径和高都同一个球的直径相等, 那么圆锥与球的体积之比是（　）

(A) 1 : 3　(B) 2 : 3　(C) 1 : 2　(D) 2 : 9

6. 直线 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+y=3$ 和直线 $x+(\sqrt{2}-\sqrt{3})y=2$ 的位置关系是（　）

(A) 相交但不垂直 (B) 垂直　(C) 平行　(D) 重合

7. 函数 $y=\lg|x|$（　）

(A) 是偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增

(B) 是偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减

(C) 是奇函数, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增

(D) 是奇函数, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减

8. 从单词“equation”选取 5 个不同的字母排成一排, 含有“qu”(其中“qu”相连且顺序不变) 的不同排列共有（　）

(A) 120 个　(B) 480 个　(C) 720 个　(D) 840 个

9. 椭圆短轴长是 2, 长轴长是短轴的 2 倍, 则椭圆中心到其准线距离是（　）

(A) $\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$　(B) $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$　(C) $\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$　(D) $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

10. 函数 $y=\sin x+\cos x+2$ 的最小值是（　）

(A) $2-\sqrt{2}$　(B) $2+\sqrt{2}$　(C) 0　(D) 1

11. 设复数 $z_1=-1-\mathrm{i}$ 在复平面上对应向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, 将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按顺时针方向旋转 $\dfrac{5}{6}\pi$ 后得到向量 $\overrightarrow{OZ_2}$, 令 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数为 z_2 的辐角主值为 θ, 则 $\tan\theta=$（　）

(A) $2-\sqrt{3}$　(B) $-2+\sqrt{3}$　(C) $2+\sqrt{3}$　(D) $-2-\sqrt{3}$

12. 设 α,β 是一个钝角三角形的两个锐角, 下列四个不等式中不正确的是（　）

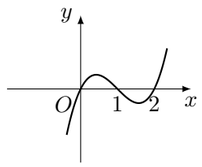
(A) $\tan\alpha\tan\beta<1$　(B) $\sin\alpha+\sin\beta<\sqrt{2}$

(C) $\cos\alpha+\cos\beta>1$　(D) $\dfrac{1}{2}\tan(\alpha+\beta)<\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=0$, 则有（　）

(A) $a_1+a_{101}>0$　(B) $a_2+a_{100}<0$　(C) $a_3+a_{99}=0$　(D) $a_{51}=51$

14. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图, 则（　）



(A) $b\in(-\infty,0)$　(B) $b\in(0,1)$　(C) $b\in(1,2)$　(D) $b\in(2,+\infty)$

二、填空题

15. 函数 $y=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是_____.

16. 已知一体积为 72 的正四面体, 连结两个面的重心 E、F, 则线段 EF 的长是_____.

17. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 展开式中的常数项是_____.

18. 在空间, 下列命题正确的是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

① 如果两条直线 a、b 分别与直线 l 平行, 那么 $a\parallel b$;

② 如果两条直线 a 与平面 β 内的一条直线 b 平行, 那么 $a\parallel\beta$;

③ 如果直线 a 与平面 β 内的一条直线 b、c 都有垂直, 那么 $a\perp\beta$;

④ 如果平面 β 内的一条直线 a 垂直平面 γ, 那么 $\beta\perp\gamma$.

三、解答题

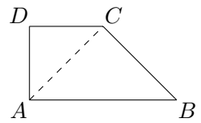
19. 已知二次函数 $f(x)=(\lg a)x^2+2x+4\lg a$ 的最大值为 3, 求 a 的值.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 对边分别为 a、b、c, 证明: $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

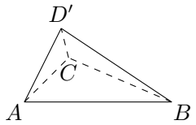
21. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle D=\angle BAD=90^\circ$, $AD=DC=\dfrac{1}{2}AB=a$ (如图一) . 将 $\triangle ADC$ 沿 AC 折起, 使 D 到 D'. 记面 ACD' 为 α, 面 ABC 为 β, 面 BCD' 为 γ .

(1) 若二面角 $\alpha-AC-\beta$ 为直二面角 (如图二), 求二面角 $\beta-BC-\gamma$ 的大小;

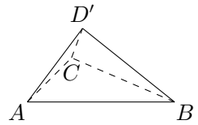
(2) 若二面角 $\alpha-AC-\beta$ 为 60° (如图三), 求三棱锥 $D'-ABC$ 的体积.



图一



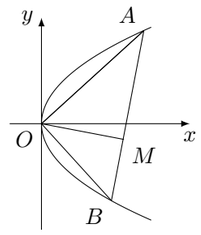
图二



图三

22. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差和等比数列 $\{b_n\}$ 的公比相等, 且都等于 $d(d>0, d\neq 1)$, 若 $a_1=b_1$, $a_3=3b_3$, $a_5=5b_5$, 求 a_n, b_n.

23. 如图, 设点 A 和 B 为抛物线 $y^2=4px$ $(p>0)$ 上原点以外的两个动点, 已知 $OA\perp OB$, $OM\perp AB$. 求点 M 的轨迹方程, 并说明它表示什么曲线.



24. 某地区上年度电价为 0.8 元/kW · h, 年用电量为 a kW · h 本年度计划将电价降到 0.55 元/kW · h 至 0.75 元/kW · h 之间, 而用户期望电价为 0.4 元/kW · h 经测算, 下调电价后新增的用电量与实际电价和用户期望电价的差成反比 (比例系数为 k) . 该地区电力的成本为 0.3 元/kW · h.

(1) 写出本年度电价下调后, 电力部门的收益 y 与实际电价 x 的函数关系式;

(2) 设 $k=0.2a$, 当电价最低定为多少时仍可保证电力部门的收益比上年至少增长 20%?

注: 收益 = 实际用电量 × (实际电价 − 成本价)

2000 年普通高等学校招生考试（广东卷）

数学试卷

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$, 那么 A 的真子集的个数是 （ ）

(A) 15　　(B) 16　　(C) 3　　(D) 4

2. 在复平面内, 把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $-2\sqrt{3}\mathrm{i}$　　(C) $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$　　(D) $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $3\sqrt{2}$　　(C) 6　　(D) $\sqrt{6}$

4. 已知 $\sin\alpha>\sin\beta$, 那么下列命题成立的是 （ ）

(A) 若 α、β 是第一象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

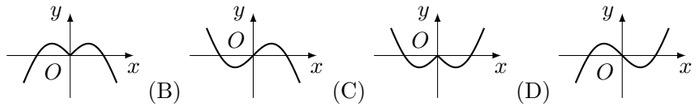
(B) 若 α、β 是第二象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

(C) 若 α、β 是第三象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

(D) 若 α、β 是第四象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

5. 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是 （ ）

(A)　(B)　(C)　(D)



6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
…	…

某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于（ ）

(A) 800 − 900 元　　(B) 900 − 1200 元

(C) 1200 − 1500 元　　(D) 1500 − 2800 元

7. 若 $a>b>1$, $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$, $Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, $R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则

(A) $R<P<Q$　(B) $P<Q<R$　(C) $Q<P<R$　(D) $P<R<Q$

8. 以极坐标系中的点 $(1,1)$ 为圆心, 1 为半径的圆的方程是 （ ）

(A) $\rho=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$　　(B) $\rho=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

(C) $\rho=2\cos(\theta-1)$　　(D) $\rho=2\sin(\theta-1)$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 （ ）

(A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$　　(B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$　　(C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$　　(D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

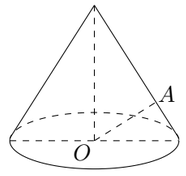
10. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 （ ）

(A) $y=\sqrt{3}x$　　(B) $y=-\sqrt{3}x$　　(C) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　(D) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于 （ ）

(A) $2a$　　(B) $\frac{1}{2a}$　　(C) $4a$　　(D) $\frac{4}{a}$

12. 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角的余弦值为 （ ）



(A) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(D) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

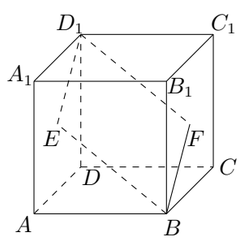
二、填空题

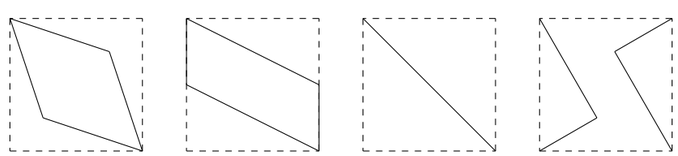
13. 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员, 派 5 名参加比赛, 3 名主力队员要安排在第一、三、五位置, 其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置, 那么不同的出场安排共有_____种 (用数字作答).

14. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1、F_2, 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2-n{a_n}^2+a_{n+1}a_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n=$ _____.

16. 如图, E、F 分别为正方体面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_____. (要求: 把可能的图序号都填上)





①　②　③　④

三、解答题

17. 已知函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 当函数 y 取得最大值时, 求自变量 x 的集合;

(2) 该函数的图象可由 $y=\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

18. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列, $T_n=na_1+(n-1)a_2\cdots+2a_{n-1}+a_n$, 已知 $T_1=1$, $T_2=4$.

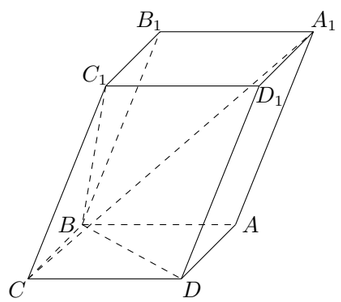
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比;

(2) 求数列 $\{T_n\}$ 的通项公式.

19. 如图, 已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C\perp BD$;

(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.



20. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

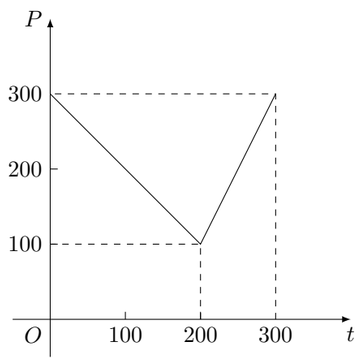
(2) 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

21. 某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示.

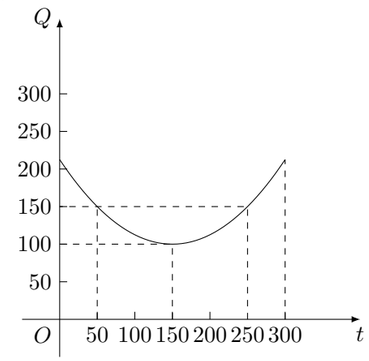
(1) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式 $p=f(t)$ 和图二表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;

(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?

注: 市场售价各种植成本的单位: 元/10^2kg, 时间单位: 天.

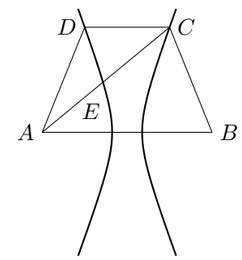


图一



图二

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ, 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点, 当 $\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.



2000 年普通高等学校招生考试（旧课程卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$, 映射 $f: A \to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射成集合 B 中的元素 $2^n + n$, 则在映射 f 下, 象 20 的原象是 （ ）

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

2. 在复平面内, 把复数 $3 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $-2\sqrt{3}\mathrm{i}$　　(C) $\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$　　(D) $3 + \sqrt{3}\mathrm{i}$

3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $3\sqrt{2}$　　(C) 6　　(D) $\sqrt{6}$

4. 已知 $\sin\alpha > \sin\beta$, 那么下列命题成立的是 （ ）

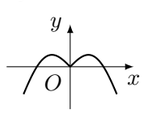
(A) 若 α、β 是第一象限角, 则 $\cos\alpha > \cos\beta$

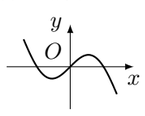
(B) 若 α、β 是第二象限角, 则 $\tan\alpha > \tan\beta$

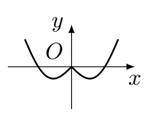
(C) 若 α、β 是第三象限角, 则 $\cos\alpha > \cos\beta$

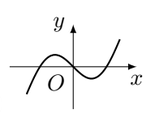
(D) 若 α、β 是第四象限角, 则 $\tan\alpha > \tan\beta$

5. 函数 $y = -x\cos x$ 的部分图象是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
…	…

某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于（ ）

(A) 800 − 900 元　　(B) 900 − 1200 元

(C) 1200 − 1500 元　　(D) 1500 − 2800 元

7. 若 $a > b > 1$, $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$, $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$, $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则

(A) $R < P < Q$　(B) $P < Q < R$　(C) $Q < P < R$　(D) $P < R < Q$

8. 以极坐标系中的点 $(1, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆的方程是 （ ）

(A) $\rho = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$　　(B) $\rho = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

(C) $\rho = 2\cos(\theta - 1)$　　(D) $\rho = 2\sin(\theta - 1)$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 （ ）

(A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$　　(B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$　　(C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$　　(D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

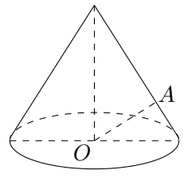
10. 过原点的直线与圆 $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 （ ）

(A) $y = \sqrt{3}x$　　(B) $y = -\sqrt{3}x$　　(C) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$　　(D) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y = ax^2$ $(a > 0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 等于 （ ）

(A) $2a$　　(B) $\frac{1}{2a}$　　(C) $4a$　　(D) $\frac{4}{a}$

12. 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角为 （ ）



(A) $\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　(B) $\arccos\frac{1}{2}$　　(C) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(D) $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

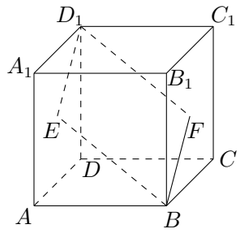
二、填空题

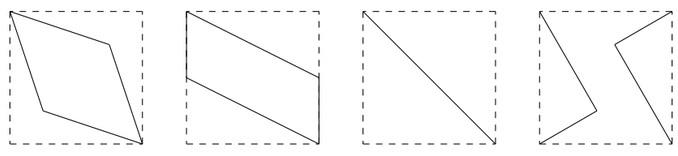
13. 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员, 派 5 名参加比赛, 3 名主力队员要安排在第一、三、五位置, 其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置, 那么不同的出场安排共有_____种 (用数字作答).

14. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点 F_1、F_2, 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1 P F_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 - n{a_n}^2 + a_{n+1}a_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n =$ _____.

16. 如图, E、F 分别为正方体面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_____. (要求: 把可能的图序号都填上)





三、解答题

17. 已知函数 $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 当函数 y 取得最大值时, 求自变量 x 的集合;

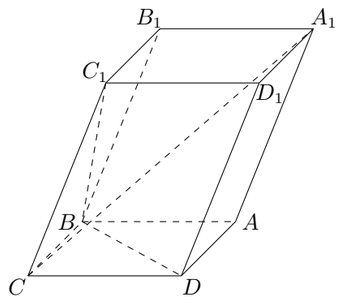
(2) 该函数的图象可由 $y = \sin x$ $(x \in \mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

18. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_7 = 7$, $S_{15} = 75$, T_n 为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n.

19. 如图, 已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C\perp BD$;

(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.



20. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

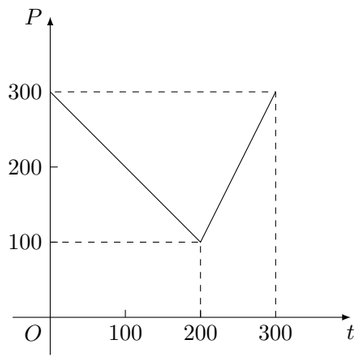
(2) 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

21. 某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示.

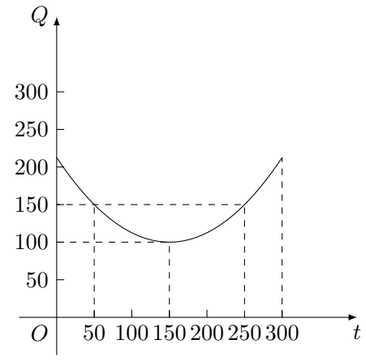
(1) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式 $p=f(t)$ 和图二表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;

(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?

注: 市场售价各种植成本的单位: 元/10^2kg, 时间单位: 天.

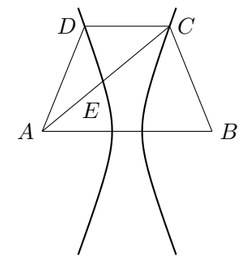


图一



图二

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ, 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点, 当 $\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.



2000 年普通高等学校招生考试（旧课程卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|x\in\mathbf{Z}\text{ 且 }-10\leqslant x\leqslant -1\}$, $B=\{x|x\in\mathbf{Z}\text{ 且 }|x|\leqslant 5\}$, 则 $A\cup B$ 中的元素个数是 (　)

(A) 11　　(B) 10　　(C) 16　　(D) 15

2. 在复平面内, 把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是 (　)

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $-2\sqrt{3}\mathrm{i}$　　(C) $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$　　(D) $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 (　)

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $3\sqrt{2}$　　(C) 6　　(D) $\sqrt{6}$

4. 已知 $\sin\alpha>\sin\beta$, 那么下列命题成立的是 (　)

(A) 若 α、β 是第一象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

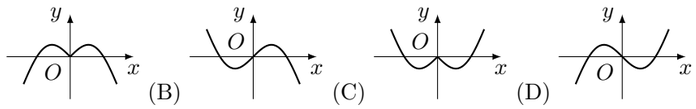
(B) 若 α、β 是第二象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

(C) 若 α、β 是第三象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

(D) 若 α、β 是第四象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

5. 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是 (　)

(A)　(B)　(C)　(D)



6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
···	···

某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于(　)

(A) 800 − 900 元　　(B) 900 − 1200 元

(C) 1200 − 1500 元　　(D) 1500 − 2800 元

7. 若 $a>b>1$, $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$, $Q=\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, $R=\lg\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, 则

(A) $R<P<Q$　　(B) $P<Q<R$　　(C) $Q<P<R$　　(D) $P<R<Q$

8. 已知两条直线 $l_1:y=x$, $l_2:ax-y=0$, 其中 a 为实数. 当这两条直线的夹角在 $\left(0,\dfrac{\pi}{12}\right)$ 内变动时, a 的取值范围是 (　)

(A) $(0,1)$　　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$

(C) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)\cup(1,\sqrt{3})$　　(D) $(1,\sqrt{3})$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 (　)

(A) $\dfrac{1+2\pi}{2\pi}$　　(B) $\dfrac{1+4\pi}{4\pi}$　　(C) $\dfrac{1+2\pi}{\pi}$　　(D) $\dfrac{1+4\pi}{2\pi}$

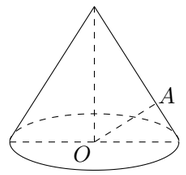
10. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 (　)

(A) $y=\sqrt{3}x$　　(B) $y=-\sqrt{3}x$　　(C) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　　(D) $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ 等于 (　)

(A) $2a$　　(B) $\dfrac{1}{2a}$　　(C) $4a$　　(D) $\dfrac{4}{a}$

12. 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角为 (　)



(A) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　(B) $\arccos\dfrac{1}{2}$　　(C) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(D) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

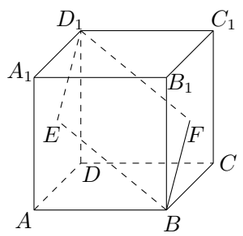
二、填空题

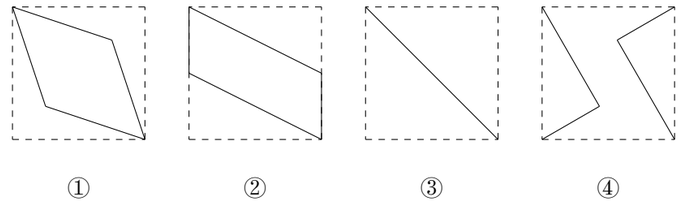
13. 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员, 派 5 名参加比赛, 3 名主力队员要安排在第一、三、五位置, 其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置, 那么不同的出场安排共有_____种 (用数字作答).

14. 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1、F_2, 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2-n{a_n}^2+a_{n+1}a_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n=$ _____.

16. 如图, E、F 分别为正方体面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_____. (要求: 把可能的图序号都填上)





三、解答题

17. 已知函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$, $x\in\mathbf{R}$.

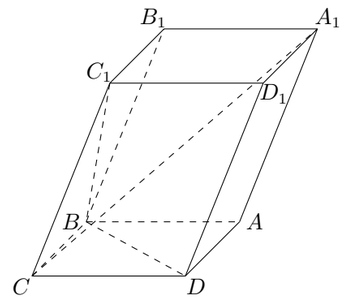
(1) 当函数 y 取得最大值时, 求自变量 x 的集合;

(2) 该函数的图象可由 $y=\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

18. 如图, 已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C\perp BD$;

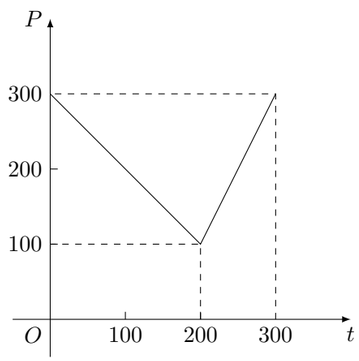
(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.



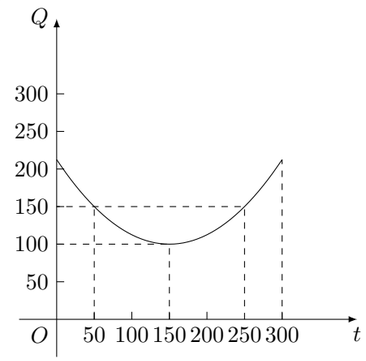
19. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$.
(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;
(2) 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

20. (1) 已知数列 $\{c_n\}$, 其中 $c_n=2^n+3^n$, 且数列 $\{c_{n+1}-pc_n\}$ 为等比数列, 求常数 p;
(2) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列, $c_n=a_n+b_n$, 证明数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列.

21. 某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示.
(1) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式 $p=f(t)$ 和图二表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;
(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?
注: 市场售价各种植成本的单位: 元/10^2kg, 时间单位: 天.

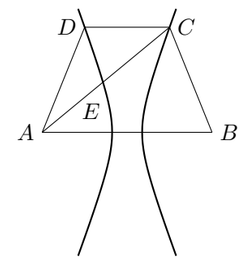


图一



图二

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ, 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点, 当 $\frac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.



2000 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$、$\overrightarrow{OB}=(3,m)$, 若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 则 $m=$_____.

2. 函数 $y=\log_2\dfrac{2x-1}{3-x}$ 的定义域为_____.

3. 圆锥曲线 $\begin{cases}x=4\sec\theta+1\\ y=3\tan\theta\end{cases}$ 的焦点坐标是_____.

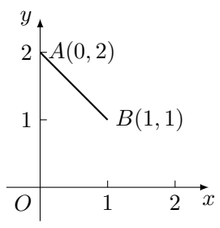
4. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n=$_____.

5. 已知 $f(x)=2^x+b$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $y=f^{-1}(x)$ 的图象经过点 $Q(5,2)$, 则 $b=$_____.

6. 根据上海市人大十一届三次会议上的市政府工作报告, 1999 年上海市完成 GDP (GDP 是指国内生产总值) 4035 亿元, 2000 年上海市 GDP 预期增长 9%, 市委、市府提出本市常住人口每年的自然增长率将控制在 0.08%, 若 GDP 与人口均按这样的速度增长, 则要使本市年人均 GDP 达到或超过 1999 年的 2 倍, 至少需_____年.
按: 1999 年本市常住人口总数约 1300 万.

7. 命题 A: 底面为正三角形, 且顶点在底面的射影为底面中心的三棱锥是正三棱锥, 命题 A 的等价题 B 可以是: 底面为正三角形, 且_____的三棱锥是正三棱锥.

8. 设函数 $y=f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数, 它在区间 $[0,1]$ 上的图象为如图所示的线段 AB, 则在区间 $[1,2]$ 上 $f(x)=$_____.



9. 在二项式 $(x-1)^{11}$ 的展开式中, 系数最小的项的系数为_____. (结果用数值表示)

10. 有红、黄、蓝三种颜色的旗帜各 3 面, 在每种颜色的 3 面旗帜上分别标上号码 1、2 和 3, 现任取出 3 面, 它们的颜色与号码均不相同的概率是_____.

11. 在极坐标系中, 若过点 $(3,0)$ 且与极轴垂直的直线交曲线 $\rho=4\cos\theta$ 于 A, B 两点, 则 $|AB|=$_____.

12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{10}=0$, 则有等式 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$ $(n<19,\ n\in\mathbf{N}^*)$ 成立, 类比上述性质, 相应地: 在等此数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_9=1$, 则有等式_____成立.

二、选择题

13. 复数 $z=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$ (i 是虚数单位) 的三角形式是 (　　)

(A) $3\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right]$　　(B) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

(C) $3\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$　　(D) $3\left(\cos\dfrac{6\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\dfrac{6\pi}{5}\right)$

14. 设有不同的直线 a、b 和不同的平面 α、β、γ, 给出下列三个命题:
① 若 $a\parallel\alpha$, $b\parallel\alpha$, 则 $a\parallel b$; ② 若 $a\parallel\alpha$, $a\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$; ③ 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha//\beta$. 其中正确的个数是 (　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

15. 若集合 $S=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$, $T=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$, 则 $S\cap T$ 是(　　)

(A) S　　(B) T　　(C) $\varnothing$　　(D) 有限集

16. 下列命题中正确的命题是 (　　)

(A) 若点 $P(a,2a)$ $(a\neq0)$ 为角 α 终边上一点, 则 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(B) 同时满足 $\sin a=\dfrac{1}{2}$, $\cos a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的角 a 有且只有一个

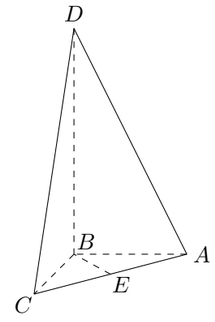
(C) 当 $|a|<1$ 时, $\tan(\arcsin a)$ 的值恒正

(D) 三角方程 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 的解集为 $\{x|x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

三、解答题

17. 已知椭圆 C 的焦点分别为 $F_1(-2\sqrt{2},0)$ 和 $F_2(2\sqrt{2},0)$, 长轴长为 6, 设直 $y=x+2$ 交椭圆 C 于 A、B 两点, 求线段 AB 的中点坐标.

18. 如图所示四面体 $ABCD$ 中, AB、BC、BD 两两互相垂直, 且 $AB=BC=2$, E 是 AC 中点, 异面直线 AD 与 BE 所成的角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.



19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$, $x\in[1,+\infty)$.
(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;
(2) 若对任意 $x\in[1,+\infty)$, $f(x)>0$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

20. 根据指令 (r,θ) $(r\geqslant 0,-180^\circ\leqslant\theta\leqslant 180^\circ)$, 机器人在平面上能完成下列动作: 先原地旋转角度 θ (θ 为正时, 按逆时针方向旋转 θ, θ 为负时, 按顺时针方向旋转 $-\theta$), 再朝其面对的方向沿直线行走距离 r.

(1) 现机器人在直角坐标系的坐标原点, 且面对 x 轴正方向, 试给机器人下一个指令, 使其移动到点 $(4,4)$;

(2) 机器人在完成该指令后, 发现在点 $(17,0)$ 处有一小球正向坐标原点作匀速直线滚动, 已知小球滚动的速度为机器人直线行走速度的 2 倍, 若忽略机器人原地旋转所需的时间, 问机器人最快可在何处截住小球? 并给出机器人截住小球所需的指令. (结果精确到小数点后两位)



21. 在 xOy 平面上有一点列 $P_1(a_1,b_1)$, $P_2(a_2,b_2)$, $\cdots$, $P_n(a_n,b_n)$, $\cdots$, 对每个自然数 n, 点 P_n 位于函数 $y=2000\cdot\left(\dfrac{a}{10}\right)^2$ $(0<a<10)$ 的图象上, 且点 P_n, 点 $(n,0)$ 与点 $(n+1,0)$ 构成一个以 P_n 为顶点的等腰三角形.

(1) 求点 P_n 的纵坐标 b_n 的表达式;

(2) 若对每个自然数 n, 以 b_n, b_{n+1}, b_{n+2} 为边长能构成一个三角形, 求 a 取值范围;

(3) 设 $B_n=b_1b_2\cdots b_n$ $(n\in\mathbf{N})$, 若 a 取 (2) 中确定的范围内的最小整数, 求数列 $\{B_n\}$ 的最大项的项数.

22. 已知复数 $z_0=1-m\mathrm{i}$ $(m>0)$, $z=x+y\mathrm{i}$ 和 $\omega=x'+y'\mathrm{i}$, 其中 x, y, x', y' 均为实数, i 为虚数单位, 且对于任意复数 z, 有 $\omega=\overline{z_0}\cdot\overline{z}$, $|\omega|=2|z|$.

(1) 试求 m 的值, 并分别写出 x' 和 y' 用 x、y 表示的关系式;

(2) 将 (x,y) 作为点 P 的坐标, (x',y') 作为点 Q 的坐标, 上述关系可以看作是坐标平面上点的一个变换: 它将平面上的点 P 变到这一平面上的点 Q, 当点 P 在直线 $y=x+1$ 上移动时, 试求点 P 经该变换后得到的点 Q 的轨迹方程;

(3) 是否存在这样的直线: 它上面的任一点经上述变换后得到的点仍在该直线上? 若存在, 试求出所有这些直线; 若不存在, 则说明理由.

2000 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$、$\overrightarrow{OB}=(3,m)$, 若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 则 $m=$_____.

2. 函数 $y=\log_2\dfrac{2x-1}{3-x}$ 的定义域为_____.

3. 圆锥曲线 $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点坐标是_____.

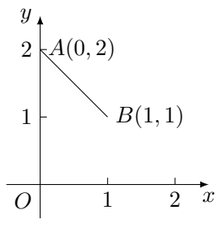
4. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n=$_____.

5. 已知 $f(x)=2^x+b$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $y=f^{-1}(x)$ 的图象经过点 $Q(5,2)$, 则 $b=$_____.

6. 根据上海市人大十一届三次会议上的市政府工作报告, 1999 年上海市完成 GDP (GDP 是指国内生产总值) 4035 亿元, 2000 年上海市 GDP 预期增长 9%, 市委、市府提出本市常住人口每年的自然增长率将控制在 0.08%, 若 GDP 与人口均按这样的速度增长, 则要使本市年人均 GDP 达到或超过 1999 年的 2 倍, 至少需_____年.
按: 1999 年本市常住人口总数约 1300 万.

7. 命题 A: 底面为正三角形, 且顶点在底面的射影为底面中心的三棱锥是正三棱锥, 命题 A 的等价题 B 可以是: 底面为正三角形, 且_____的三棱锥是正三棱锥.

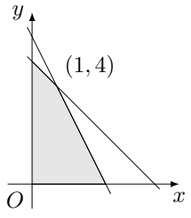
8. 设函数 $y=f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数, 它在区间 $[0,1]$ 上的图象为如图所示的线段 AB, 则在区间 $[1,2]$ 上 $f(x)=$_____.



9. 在二项式 $(x-1)^{11}$ 的展开式中, 系数最小的项的系数为_____. (结果用数值表示)

10. 有红、黄、蓝三种颜色的旗帜各 3 面, 在每种颜色的 3 面旗帜上分别标上号码 1、2 和 3, 现任取出 3 面, 它们的颜色与号码均不相同的概率是_____.

11. 图中阴影部分的点满足不等式组 $\begin{cases}x+y\leqslant 5\\2x+y\leqslant 6\\x\geqslant 0,y\geqslant 0\end{cases}$, 在这些点中, 使目标函数 $k=6x+8y$ 取得最大值的点的坐标是_____.



12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{10}=0$, 则有等式 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$ $(n<19,\ n\in\mathbf{N}^*)$ 成立, 类比上述性质, 相应地: 在等此数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_9=1$, 则有等式_____成立.

二、选择题

13. 函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\left(\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 是 (　)

(A) 增函数　(B) 减函数　(C) 偶函数　(D) 奇函数

14. 设有不同的直线 a、b 和不同的平面 α、β、γ, 给出下列三个命题:
① 若 $a\parallel\alpha$, $b\parallel\alpha$, 则 $a\parallel b$; ② 若 $a\parallel\alpha$, $a\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$; ③ 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha//\beta$. 其中正确的个数是 (　)

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

15. 若集合 $S=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$, $T=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$, 则 $S\cap T$ 是(　)

(A) S　(B) T　(C) $\varnothing$　(D) 有限集

16. 下列命题中正确的命题是 (　)

(A) 若点 $P(a,2a)$ $(a\neq 0)$ 为角 α 终边上一点, 则 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(B) 同时满足 $\sin a=\dfrac{1}{2}$, $\cos a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的角 a 有且只有一个

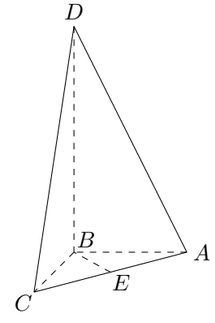
(C) 当 $|a|<1$ 时, $\tan(\arcsin a)$ 的值恒正

(D) 三角方程 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 的解集为 $\{x|x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

三、解答题

17. 已知椭圆 C 的焦点分别为 $F_1(-2\sqrt{2},0)$ 和 $F_2(2\sqrt{2},0)$, 长轴长为 6, 设直 $y=x+2$ 交椭圆 C 于 A、B 两点, 求线段 AB 的中点坐标.

18. 如图所示四面体 $ABCD$ 中, AB、BC、BD 两两互相垂直, 且 $AB=BC=2$, E 是 AC 中点, 异面直线 AD 与 BE 所成的角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.



19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$, $x\in[1,+\infty)$.
(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;
(2) 若对任意 $x\in[1,+\infty)$, $f(x)>0$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

20. 根据指令 (r,θ) $(r\geqslant 0,-180^\circ\leqslant\theta\leqslant 180^\circ)$, 机器人在平面上能完成下列动作: 先原地旋转角度 θ (θ 为正时, 按逆时针方向旋转 θ, θ 为负时, 按顺时针方向旋转 $-\theta$), 再朝其面对的方向沿直线行走距离 r.

(1) 现机器人在直角坐标系的坐标原点, 且面对 x 轴正方向, 试给机器人下一个指令, 使其移动到点 $(4,4)$;

(2) 机器人在完成该指令后, 发现在点 $(17,0)$ 处有一小球正向坐标原点作匀速直线滚动, 已知小球滚动的速度为机器人直线行走速度的 2 倍, 若忽略机器人原地旋转所需的时间, 问机器人最快可在何处截住小球? 并给出机器人截住小球所需的指令. (结果精确到小数点后两位)



21. 在 xOy 平面上有一点列 $P_1(a_1,b_1)$, $P_2(a_2,b_2)$, $\cdots$, $P_n(a_n,b_n)$, $\cdots$, 对每个自然数 n, 点 P_n 位于函数 $y=2000\cdot\left(\dfrac{a}{10}\right)^2$ $(0<a<10)$ 的图象上, 且点 P_n, 点 $(n,0)$ 与点 $(n+1,0)$ 构成一个以 P_n 为顶点的等腰三角形.

(1) 求点 P_n 的纵坐标 b_n 的表达式;

(2) 若对每个自然数 n, 以 b_n, b_{n+1}, b_{n+2} 为边长能构成一个三角形, 求 a 取值范围;

(3) 设 $c_n=\lg(b_n)$ $(n\in\mathbf{N})$, 若 a 取 (2) 中确定的范围内的最小整数, 问数列 $\{c_n\}$ 前多少项的和最大? 试说明理由.

22. 已知复数 $z_0=1-m\mathrm{i}$ $(m>0)$, $z=x+y\mathrm{i}$ 和 $\omega=x'+y'\mathrm{i}$, 其中 x, y, x', y' 均为实数, i 为虚数单位, 且对于任意复数 z, 有 $\omega=\overline{z_0}\cdot\overline{z}$, $|\omega|=2|z|$.

(1) 试求 m 的值, 并分别写出 x' 和 y' 用 x、y 表示的关系式;

(2) 将 (x,y) 作为点 P 的坐标, (x',y') 作为点 Q 的坐标, 上述关系可以看作是坐标平面上点的一个变换: 它将平面上的点 P 变到这一平面上的点 Q, 已知点 P 经该变换后得到的点 Q 的坐标为 $(\sqrt{3},2)$, 试求点 P 的坐标;

(3) 若直线 $y=kx$ 上的任一点经上述变换后得到的点仍在该直线上, 试求 k 的值.

2000 年普通高等学校招生考试（新课程卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)\,|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$, 映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 映射成集合 B 中的元素 $(x+y,x-y)$, 则在映射 f 下, 象 $(2,1)$ 的原象是 （ ）

(A) $(3,1)$ (B) $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ (D) $(1,3)$

2. 在复平面内, 把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (C) $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ (D) $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

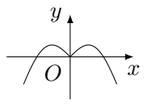
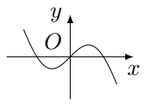
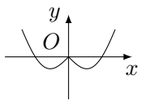
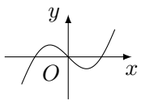
3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $\sqrt{6}$

4. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是任意的非零平面向量, 且相互不共线, 则① $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=0$; ② $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; ③ $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直; ④ $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$ 中, 是真命题的有 （ ）

(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ②④

5. 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是 （ ）

(A)  (B)  (C)  (D) 

6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
…	…

某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于（ ）

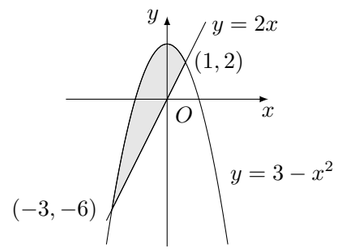
(A) 800 − 900 元 (B) 900 − 1200 元

(C) 1200 − 1500 元 (D) 1500 − 2800 元

7. 若 $a>b>1$, $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$, $Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, $R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则

(A) $R<P<Q$ (B) $P<Q<R$ (C) $Q<P<R$ (D) $P<R<Q$

8. 图中阴影部分的面积是 （ ）



(A) $2\sqrt{3}$ (B) $9-2\sqrt{3}$ (C) $\frac{32}{3}$ (D) $\frac{35}{3}$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 （ ）

(A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$ (B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$ (C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$ (D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

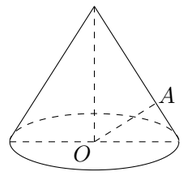
10. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 （ ）

(A) $y=\sqrt{3}x$ (B) $y=-\sqrt{3}x$ (C) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ (D) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于 （ ）

(A) $2a$ (B) $\frac{1}{2a}$ (C) $4a$ (D) $\frac{4}{a}$

12. 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角为 （ ）



(A) $\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (B) $\arccos\frac{1}{2}$ (C) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

二、填空题

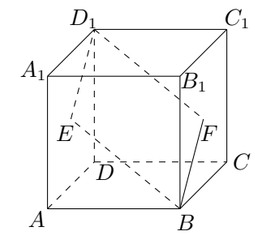
13. 某厂生产电子元件, 其产品的次品率为 5%, 现从一批产品中任意地连续取出 2 件, 其中次品 ξ 的概率分布是:

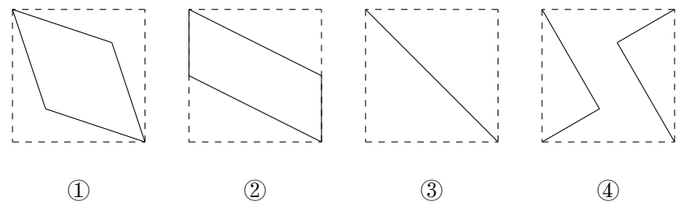
ξ	0	1	2
p			

14. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1、F_2, 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2-n{a_n}^2+a_{n+1}a_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n=$ _____.

16. 如图, E、F 分别为正方体面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_____. (要求: 把可能的图序号都填上)

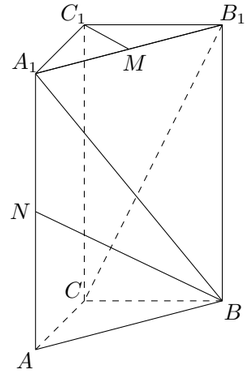




三、解答题

17. 甲、乙二人参加普法知识竞答, 共有 10 个不同的题目, 其中选择题 6 个, 判断题 4 个甲、乙二人依次各抽一题.
(1) 甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是多少?
(2) 甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率是多少?

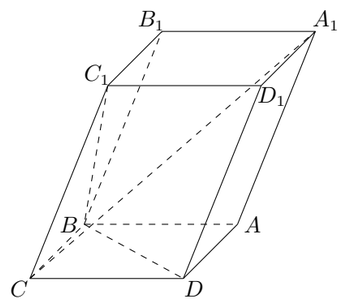
18. 【甲】如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 底面 $\triangle ABC$ 中, $CA=CB=1$, $\angle BCA=90^\circ$, 棱 $AA_1=2$, M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点.
(1) 求 $\overrightarrow{BN}$ 的长;
(2) 求 $\cos<\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}>$ 的值;
(3) 求证 $A_1B\perp C_1M$.



【乙】如图, 已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C\perp BD$;

(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.



19. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_7=7$, $S_{15}=75$, T_n 为数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n.

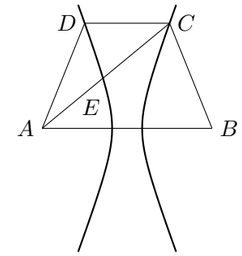
20. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

(2) 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

21. 用总长 14.8 m 的钢条制成一个长方体容器的框架, 如果所制做容器的底面的一边比另一边长 0.5 m, 那么高为多少时容器的容积最大? 并求出它的最大容积

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ, 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点, 当 $\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.



2000 年普通高等学校招生考试（新课程卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$, $B=\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$, 则 $A\cup B$ 中的元素个数是 （ ）

(A) 11　　(B) 10　　(C) 16　　(D) 15

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是任意的非零平面向量, 且相互不共线, 则① $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=0$; ② $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; ③ $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直; ④ $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$ 中, 是真命题的有 （ ）

(A) ①②　　(B) ②③　　(C) ③④　　(D) ②④

3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $3\sqrt{2}$　　(C) 6　　(D) $\sqrt{6}$

4. 已知 $\sin\alpha>\sin\beta$, 那么下列命题成立的是 （ ）

(A) 若 α、β 是第一象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

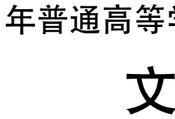
(B) 若 α、β 是第二象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

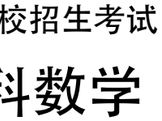
(C) 若 α、β 是第三象限角, 则 $\cos\alpha>\cos\beta$

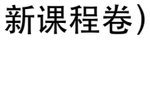
(D) 若 α、β 是第四象限角, 则 $\tan\alpha>\tan\beta$

5. 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
…	…

某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于（ ）

(A) 800 − 900 元　　(B) 900 − 1200 元

(C) 1200 − 1500 元　　(D) 1500 − 2800 元

7. 若 $a>b>1$, $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$, $Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, $R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则

(A) $R<P<Q$　(B) $P<Q<R$　(C) $Q<P<R$　(D) $P<R<Q$

8. 已知两条直线 $l_1:y=x$, $l_2:ax-y=0$, 其中 a 为实数. 当这两条直线的夹角在 $\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ 内变动时, a 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,1)$　　(B) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$

(C) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)\cup(1,\sqrt{3})$　　(D) $(1,\sqrt{3})$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 （ ）

(A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$　　(B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$　　(C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$　　(D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

10. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 （ ）

(A) $y=\sqrt{3}x$　　(B) $y=-\sqrt{3}x$　　(C) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　(D) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于 （ ）

(A) $2a$　　(B) $\frac{1}{2a}$　　(C) $4a$　　(D) $\frac{4}{a}$

12. 二项式 $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}x\right)^{50}$ 的展开式中系数为有理数的项共有 （ ）

(A) 6 项　　(B) 7 项　　(C) 8 项　　(D) 9 项

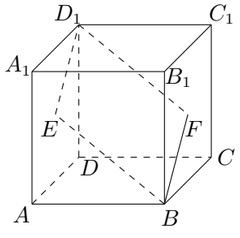
二、填空题

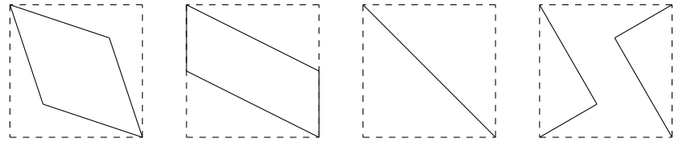
13. 从含有 500 个个体的总体中一次性地抽取 25 个个体, 假定其中每个个体被抽到的概率相等, 那么总体中的每个个体被抽取的概率等于_____.

14. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1、F_2, 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2-n{a_n}^2+a_{n+1}a_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n=$_____.

16. 如图, E、F 分别为正方体面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_____. (要求: 把可能的图序号都填上)





三、解答题

17. 甲、乙二人参加普法知识竞答, 共有 10 个不同的题目, 其中选择题 6 个, 判断题 4 个甲、乙二人依次各抽一题.

(1) 甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是多少?

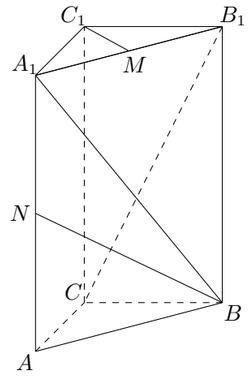
(2) 甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率是多少?

18. 【甲】如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 底面 $\triangle ABC$ 中, $CA=CB=1$, $\angle BCA=90^\circ$, 棱 $AA_1=2$, M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点.

(1) 求 $\overrightarrow{BN}$ 的长;

(2) 求 $\cos<\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}>$ 的值;

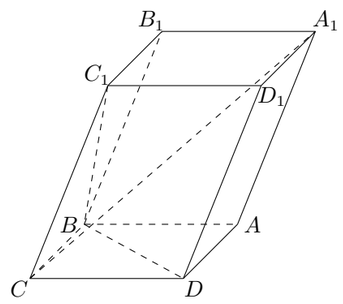
(3) 求证 $A_1B\perp C_1M$.



【乙】如图, 已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C\perp BD$;

(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.



19. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_7=7$, $S_{15}=75$, T_n 为数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n.

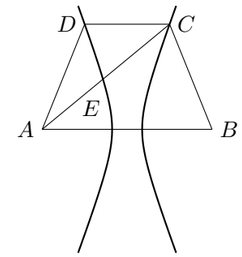
20. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

(2) 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

21. 用总长 14.8 m 的钢条制成一个长方体容器的框架, 如果所制做容器的底面的一边比另一边长 0.5 m, 那么高为多少时容器的容积最大? 并求出它的最大容积

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所成的比为 λ, 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点, 当 $\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.



2001 年普通高等学校春季招生考试（京蒙皖）

理科数学

一、选择题

1. 集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的子集个数是 （ ）

(A) 32 (B) 31 (C) 16 (D) 15

2. 函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 对于任意的实数 x, y 都有 （ ）

(A) $f(xy)=f(x)f(y)$ (B) $f(xy)=f(x)+f(y)$

(C) $f(x+y)=f(x)f(y)$ (D) $f(x+y)=f(x)+f(y)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_{2n}^{n}}{C_{2n+2}^{n+1}}=$ （ ）

(A) 0 (B) 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

4. 函数 $y=-\sqrt{1-x}$ ($x\leqslant 1$) 的反函数是 （ ）

(A) $y=x^2-1$ ($-1\leqslant x\leqslant 0$) (B) $y=x^2-1$ ($0\leqslant x\leqslant 1$)

(C) $y=1-x^2$ ($x\leqslant 0$) (D) $y=1-x^2$ ($0\leqslant x\leqslant 1$)

5. 极坐标系中, 圆 $\rho=4\cos\theta+3\sin\theta$ 的圆心的坐标是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{5}{2},\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$ (B) $\left(5,\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$ (C) $\left(5,\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$ (D) $\left(\dfrac{5}{2},\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$

6. 设动点 P 在直线 $x=1$ 上, O 为坐标原点. 以 OP 为直角边、点 O 为直角顶点作等腰 Rt$\triangle OPQ$, 则动点 Q 的轨迹是 （ ）

(A) 圆 (B) 两条平行直线

(C) 抛物线 (D) 双曲线

7. 已知 $f(x^6)=\log_2 x$, 那么 $f(8)$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) 8 (C) 18 (D) $\dfrac{1}{2}$

8. 若 A、B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则点 $P(\cos B-\sin A,\sin B-\cos A)$ 在 （ ）

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

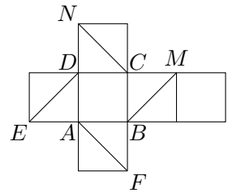
9. 如果圆锥的侧面展开图是半圆, 那么这个圆锥的顶角 (圆锥轴截面中两条母线的夹角) 是 （ ）

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

10. 若实数 a, b 满足 $a+b=2$, 则 3^a+3^b 的最小值是 （ ）

(A) 18 (B) 6 (C) $2\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt[4]{3}$

11. 如图是正方体的平面展开图. 在这个正方体中, ① BM 与 ED 平行; ② CN 与 BE 是异面直线; ③ CN 与 BM 成 60° 角; ④ DM 与 BN 垂直. 以上四个命题中, 正确命题的序号是 （ ）



(A) ①②③ (B) ②④ (C) ③④ (D) ②③④

12. 根据市场调查结果, 预测某种家用商品从年初开始的 n 个月内累积的需求量 S_n (万件) 近似地满足 $S_n=\dfrac{n}{90}(21n-n^2-5)$ ($n=1,2,\cdots,12$). 按此预测, 在本年度内, 需求量超过 1.5 万件的月份是 （ ）

(A) 5 月、6 月 (B) 6 月、7 月 (C) 7 月、8 月 (D) 8 月、9 月

二、填空题

13. 已知球内接正方体的表面积为 S, 那么球体积等于_____.

14. 椭圆 $x^2+4y^2=4$ 长轴上一个顶点为 A, 以 A 为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形, 该三角形的面积是_____.

15. 已知 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ (α、β、γ 均为锐角), 那么 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 的最大值等于_____.

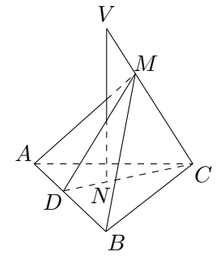
16. 已知 m、n 是直线, α、β、γ 是平面, 给出下列命题:
① 若 $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=m$, $n\perp m$, 则 $n\perp\alpha$ 或 $n\perp\beta$;
② 若 $\alpha\parallel\beta$, $\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$, 则 $m\parallel n$;
③ 若 m 不垂直于 α, 则 m 不可能垂直于 α 内的无数条直线;
④ 若 $\alpha\cap\beta=m$, $n\parallel m$, 且 $n\not\subset\alpha$, $n\not\subset\beta$, 则 $n\parallel\alpha$ 且 $n\parallel\beta$.
其中正确的命题的序号是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ ($a>b>0$), 求 $f(x)$ 的单调区间, 并证明 $f(x)$ 在其单调区间上的单调性.

18. 已知 $z^7=1$ ($z\in\mathbf{C}$ 且 $z\neq 1$).
(1) 证明 $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$;
(2) 设 z 的辐角为 α, 求 $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$ 的值.

19. 已知 VC 是 $\triangle ABC$ 所在平面的一条斜线, 点 N 是 V 在平面 ABC 上的射影, 且在 $\triangle ABC$ 的高 CD 上. $AB=a$, VC 与 AB 之间的距离为 h, 点 $M\in VC$.
(1) 证明 $\angle MDC$ 是二面角 $M-AB-C$ 的平面角;
(2) 当 $\angle MDC=\angle CVN$ 时, 证明 $VC\perp$ 平面 AMB;
(3) 若 $\angle MDC=\angle CVN=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求四面体 $MABC$ 的体积.



20. 在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, 使这 $n+2$ 个数成等比数列; 又在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$, 使这 $n+2$ 个数成等差数列. 记 $A_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$.
(1) 求数列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 的通项;
(2) 当 $n \geqslant 7$ 时, 比较 A_n 与 B_n 的大小, 并证明你的结论.

21. 某摩托车生产企业, 上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆, 出厂价为 1.2 万元/辆, 年销售量为 1000 辆. 本年度为适应市场需求, 计划提高产品档次, 适度增加投入成本. 若每辆车投入成本增加的比例为 x $(0 < x < 1)$, 则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$, 同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$. 已知年利润 = (出厂价 − 投入成本) × 年销售量.
(1) 写出本年度预计的年利润 y 与投入成本增加的比例 x 的关系式;
(2) 为使本年度的年利润比上年有所增加, 问投入成本增加的比例 x 应在什么范围内?

22. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. 过动点 $M(a, 0)$ 且斜率为 1 的直线 l 与该抛物线交于不同的两点 A、B, $|AB| \leqslant 2p$.
(1) 求 a 的取值范围;
(2) 若线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 N, 求 Rt$\triangle NAB$ 面积的最大值.

2001 年普通高等学校春季招生考试（京蒙皖）

文科数学

一、选择题

1. 集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的子集个数是 （ ）

(A) 32 (B) 31 (C) 16 (D) 15

2. 函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 对于任意的实数 x, y 都有 （ ）

(A) $f(xy)=f(x)f(y)$ (B) $f(xy)=f(x)+f(y)$

(C) $f(x+y)=f(x)f(y)$ (D) $f(x+y)=f(x)+f(y)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_{2n}^{n}}{C_{2n+2}^{n+1}}=$ （ ）

(A) 0 (B) 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

4. 函数 $y=-\sqrt{1-x}$ ($x\leqslant 1$) 的反函数是 （ ）

(A) $y=x^2-1$ ($-1\leqslant x\leqslant 0$) (B) $y=x^2-1$ ($0\leqslant x\leqslant 1$)

(C) $y=1-x^2$ ($x\leqslant 0$) (D) $y=1-x^2$ ($0\leqslant x\leqslant 1$)

5. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两焦点, 过点 F_2 的直线交椭圆于点 A, B, 若 $|AB|=5$, 则 $|AF_1|+|BF_1|=$ （ ）

(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 16

6. 设动点 P 在直线 $x=1$ 上, O 为坐标原点. 以 OP 为直角边、点 O 为直角顶点作等腰 Rt$\triangle OPQ$, 则动点 Q 的轨迹是 （ ）

(A) 圆 (B) 两条平行直线

(C) 抛物线 (D) 双曲线

7. 已知 $f(x^6)=\log_2 x$, 那么 $f(8)$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) 8 (C) 18 (D) $\dfrac{1}{2}$

8. 若 A、B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则点 $P(\cos B-\sin A,\sin B-\cos A)$ 在 （ ）

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

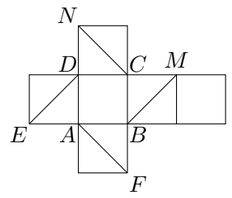
9. 如果圆锥的侧面展开图是半圆, 那么这个圆锥的顶角 (圆锥轴截面中两条母线的夹角) 是 （ ）

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

10. 若实数 a, b 满足 $a+b=2$, 则 3^a+3^b 的最小值是 （ ）

(A) 18 (B) 6 (C) $2\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt[4]{3}$

11. 如图是正方体的平面展开图. 在这个正方体中, ① BM 与 ED 平行; ② CN 与 BE 是异面直线; ③ CN 与 BM 成 60° 角; ④ DM 与 BN 垂直. 以上四个命题中, 正确命题的序号是 （ ）



(A) ①②③ (B) ②④ (C) ③④ (D) ②③④

12. 根据市场调查结果, 预测某种家用商品从年初开始的 n 个月内累积的需求量 S_n (万件) 近似地满足 $S_n=\dfrac{n}{90}(21n-n^2-5)$ ($n=1,2,\cdots,12$). 按此预测, 在本年度内, 需求量超过 1.5 万件的月份是 （ ）

(A) 5 月、6 月 (B) 6 月、7 月 (C) 7 月、8 月 (D) 8 月、9 月

二、填空题

13. 已知球内接正方体的表面积为 S, 那么球体积等于_____.

14. 椭圆 $x^2+4y^2=4$ 长轴上一个顶点为 A, 以 A 为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形, 该三角形的面积是_____.

15. 已知 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ (α、β、γ 均为锐角), 那么 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 的最大值等于_____.

16. 已知 m、n 是直线, α、β、γ 是平面, 给出下列命题:
① 若 $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=m$, $n\perp m$, 则 $n\perp\alpha$ 或 $n\perp\beta$;
② 若 $\alpha\parallel\beta$, $\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$, 则 $m\parallel n$;
③ 若 m 不垂直于 α, 则 m 不可能垂直于 α 内的无数条直线;
④ 若 $\alpha\cap\beta=m$, $n\parallel m$, 且 $n\not\subset\alpha$, $n\not\subset\beta$, 则 $n\parallel\alpha$ 且 $n\parallel\beta$.
其中正确的命题的序号是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

三、解答题

17. 方程 $2x^2+mx+n=0$ 有实根, 且 2, m, n 为等差数列的前三项. 求该等差数列公差 d 的取值范围.

18. 设函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ ($a>b>0$), 求 $f(x)$ 的单调区间, 并证明 $f(x)$ 在其单调区间上的单调性.

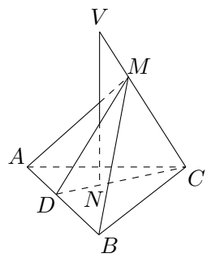
19. 已知 $z^7=1$ ($z\in\mathbf{C}$ 且 $z\neq 1$).
(1) 证明 $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$;
(2) 设 z 的辐角为 α, 求 $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$ 的值.

20. 已知 VC 是 $\triangle ABC$ 所在平面的一条斜线, 点 N 是 V 在平面 ABC 上的射影, 且在 $\triangle ABC$ 的高 CD 上. $AB=a$, VC 与 AB 之间的距离为 h, 点 $M\in VC$.

(1) 证明 $\angle MDC$ 是二面角 $M-AB-C$ 的平面角;

(2) 当 $\angle MDC=\angle CVN$ 时, 证明 $VC\perp$ 平面 AMB;

(3) 若 $\angle MDC=\angle CVN=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求四面体 $MABC$ 的体积.



21. 某摩托车生产企业, 上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆, 出厂价为 1.2 万元/辆, 年销售量为 1000 辆. 本年度为适应市场需求, 计划提高产品档次, 适度增加投入成本. 若每辆车投入成本增加的比例为 x $(0<x<1)$, 则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$, 同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$. 已知年利润 = (出厂价 − 投入成本) × 年销售量.

(1) 写出本年度预计的年利润 y 与投入成本增加的比例 x 的关系式;

(2) 为使本年度的年利润比上年有所增加, 问投入成本增加的比例 x 应在什么范围内?

22. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$. 过动点 $M(a,0)$ 且斜率为 1 的直线 l 与该抛物线交于不同的两点 A、B.

(1) 若 $|AB|\leqslant 2p$, 求 a 的取值范围;

(2) 若线段 AB 的垂直平分线交 AB 于点 Q, 交 x 轴于点 N, 试求 Rt$\triangle MNQ$ 的面积.

2001 年普通高等学校春季招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 函数 $f(x)=x^2+1\ (x\leqslant 0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

2. 若复数 z 满足方程 $z\mathrm{i}=\mathrm{i}-1$ (i 是虚数单位), 则 $z=$_____.

3. 函数 $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ 的最小正周期为_____.

4. 二项式 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项的值为_____.

5. 若双曲线的一个顶点坐标为 $(3,0)$, 焦距为 10, 则它的标准方程为_____.

6. 圆心在直线 $y=x$ 上且与 x 轴相切于点 $(1,0)$ 的圆的方程为_____.

7. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n=$_____.

8. 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 所成角的大小为_____.

9. 在大小相同的 6 个球中, 2 个红球, 4 个是白球. 若从中任意选取 3 个, 则所选的 3 个球中至少有 1 个红球的概率是_____. (结果用分数表示)

10. 若记号“$*$”表示求两个实数 a 与 b 的算术平均数的运算, 即 $a*b=\dfrac{a+b}{2}$, 则两边均含有运算符号“$*$”和“$+$”, 且对于任意 3 个实数 a、b、c 都能成立的一个等式可以是_____.

11. 关于 x 的函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$ 有以下命题:
(1) 对任意的 φ, $f(x)$ 都是非奇非偶函数;
(2) 不存在 φ, 使 $f(x)$ 既是奇函数, 又是偶函数;
(3) 存在 φ, 使 $f(x)$ 是奇函数;
(4) 对任意的 φ, $f(x)$ 都不是偶函数.
其中一个假命题的序号是_____. 因为当 $\varphi=$_____时, 该命题的结论不成立.

12. 甲、乙两人于同一天分别携款 1 万元到银行储蓄, 甲存五年期定期储蓄, 年利率为 2.88%. 乙存一年期定期储蓄, 年利率为 2.25%, 并在每年到期时将本息续存一年期定期储蓄. 按规定每次计息时, 储户须交纳利息的 20% 作为利息税, 若存满五年后两人同时从银行取出存款, 则甲与乙所得本息之和的差为_____元. (假定利率五年内保持不变, 结果精确到 1 分)

二、选择题

13. 若 a、b 为实数, 则 $a>b>0$ 是 $a^2>b^2$ 的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件
(C) 充要条件　(D) 既非充分条件也非必要条件

14. 若直线 $x=1$ 的倾斜角为 α, 则 α （　）

(A) 等于 0　(B) 等于 $\dfrac{\pi}{4}$　(C) 等于 $\dfrac{\pi}{2}$　(D) 不存在

15. 若有平面 α 与 β, 且 $\alpha\cap\beta=l$, $\alpha\perp\beta$, $P\in\alpha$, $P\notin l$, 则下列命题中的假命题为 （　）

(A) 过点 P 且垂直于 α 的直线平行于 β
(B) 过点 P 且垂直于 l 的平面垂直于 β
(C) 过点 P 且垂直于 β 的直线在 α 内
(D) 过点 P 且垂直于 l 的直线在 α 内

16. 若数列 $\{a_n\}$ 前 8 项的值各异, 且 $a_{n+8}=a_n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 都成立, 则下列数列中可取遍 $\{a_n\}$ 前 8 项值的数列为 （　）

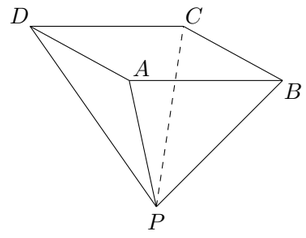
(A) $\{a_{2k+1}\}$　(B) $\{a_{3k+1}\}$　(C) $\{a_{4k+1}\}$　(D) $\{a_{6k+1}\}$

三、解答题

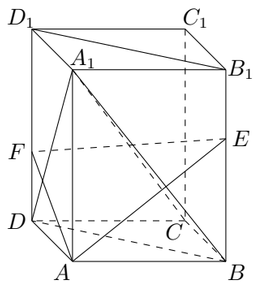
17. 已知 $\mathbf{R}$ 为全集, $A=\left\{x\left|\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\right.\right\}$, $B=\left\{x\left|\dfrac{5}{x+2}\geqslant 1\right.\right\}$, 求 $\overline{A}\cap B$.

18. 已知 $\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\tan\alpha}=k\ \left(\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 试用 k 表示 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值.

19. 用一块钢锭浇铸一个厚度均匀, 且全面积为 2 平方米的正四棱锥形有盖容器 (如图), 设容器的高为 h 米, 盖子边长为 a 米.
(1) 求 a 关于 h 的函数解析式;
(2) 设容器的容积为 V 立方米, 则当 h 为何值时, V 最大? 求出 V 的最大值.
注: 求解本题时, 不计容器的厚度.



20. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E、F 分别 BB_1、DD_1 上, 且 $AE\perp A_1B$, $AF\perp A_1D$.
(1) 求证: $A_1C\perp$ 平面 AEF;
(2) 若规定两个平面所成的角是这两个平面所组成的二面角中的锐角 (或直角), 则在空间中有定理: 若两条直线分别垂直于两个平面, 则这两条直线所成的角与这两个平面所成的角相等. 试根据上述定理, 在 $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=5$ 时, 求平面 AEF 与平面 D_1B_1BD 所成的角的大小. (用反三角函数值表示)



21. 已知椭圆 C 的方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$, 点 $P(a,b)$ 的坐标满足 $a^2+\dfrac{b^2}{2}\leqslant 1$. 过点 P 的直线 l 与椭圆交于 A、B 两点, 点 Q 为线段 AB 的中点, 求:
(1) 点 Q 的轨迹方程;
(2) 点 Q 的轨迹与坐标轴的交点的个数.

22. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列, S_n 为它的前 n 项和.
(1) 用 S_n 表示 S_{n+1};
(2) 是否存在自然数 c 和 k, 使得 $\dfrac{S_{k+1}-c}{S_k-c}>2$ 成立.

2001 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

一、选择题

1. 若 $\sin\theta\cos\theta>0$, 则 θ 在 （　）

(A) 第一、二象限　　(B) 第一、三象限

(C) 第一、四象限　　(D) 第二、四象限

2. 过点 $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ 且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程是（　）

(A) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$　　(B) $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

(C) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$　　(D) $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

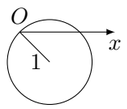
3. 设 $\{a_n\}$ 是递增等差数列, 前三项的和为 12, 前三项的积为 48, 则它的首项是 （　）

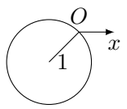
(A) 1　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 6

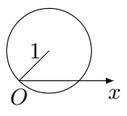
4. 若定义在区间 $(-1,0)$ 内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$, 则 a 的取值范围是 （　）

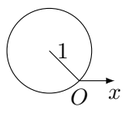
(A) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　(B) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　(C) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　(D) $(0,+\infty)$

5. 极坐标方程 $\rho=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图形是 （　）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

6. 函数 $y=\cos x+1$ $(-\pi\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数是 （　）

(A) $y=-\arccos(x-1)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

(B) $y=\pi-\arccos(x-1)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

(C) $y=\arccos(x-1)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

(D) $y=\pi+\arccos(x-1)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

7. 若椭圆经过原点, 且焦点为 $F_1(1,0), F_2(3,0)$, 则其离心率为 （　）

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{4}$

8. 若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$, $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin\beta+\cos\beta=b$, 则 （　）

(A) $a>b$　　(B) $a<b$　　(C) $ab<1$　　(D) $ab>2$

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=\sqrt{2}BB_1$, 则 AB_1 与 C_1B 所成的角的大小为 （　）

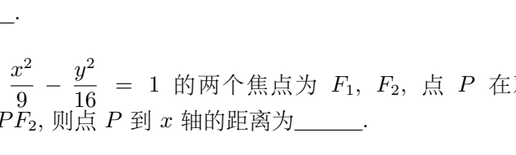
(A) 60°　　(B) 90°　　(C) 45°　　(D) 120°

10. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题中, 正确的命题是 （　）

① 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
② 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
③ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减;
④ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减.

(A) ①③　　(B) ①④　　(C) ②③　　(D) ②④

11. 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ① 单向倾斜; ② 双向倾斜; ③ 四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1, P_2, P_3. 若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α, 则 （　）



(A) $P_3>P_2>P_1$　(B) $P_3>P_2=P_1$　(C) $P_3=P_2>P_1$　(D) $P_3=P_2=P_1$

12. 如图, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相联. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递. 则单位时间内传递的最大信息量为 （　）

(A) 26　　(B) 24　　(C) 20　　(D) 19

二、填空题

13. 若一个椭圆的轴截面是等边三角形, 其面积为 $\sqrt{3}$, 则这个椭圆的侧面积是_____.

14. 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线上, 若 $PF_1\perp PF_2$, 则点 P 到 x 轴的距离为_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q=$_____.

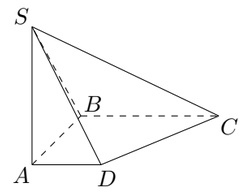
16. 圆周上有 $2n$ 个等分点 $(n>1)$, 以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为_____.

三、解答题

17. 如图, 在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\angle ABC=90°$, $SA\perp$ 面 $ABCD$, $SA=AB=BC=1$, $AD=\frac{1}{2}$.

(1) 求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;

(2) 求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.



18. 已知复数 $z_1=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})^3$.

(1) 求 $\arg z_1$ 及 $|z_1|$;

(2) 当复数 z 满足 $|z|=1$, 求 $|z-z_1|$ 的最大值.

19. 设抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 经过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点. 点 C 在抛物线的准线上, 且 $BC\parallel x$ 轴. 证明直线 AC 经过原点 O.

20. 已知 i, m, n 是正整数, 且 $1 < i \leqslant m < n$.
(1) 证明: $n^i \mathrm{A}_m^i < m^i \mathrm{A}_n^i$;
(2) 证明: $(1+m)^n > (1+n)^m$.

21. 从社会效益和经济效益出发, 某地投入资金进行生态环境建设, 并以此发展旅游产业. 根据规划, 本年度投入 800 万元, 以后每年投入将比上年减少 $\frac{1}{5}$. 本年度当地旅游业收入估计为 400 万元, 由于该项建设对旅游业的促进作用, 预计今后的旅游业收入每年会比上年增加 $\frac{1}{4}$.
(1) 设 n 年内 (本年度为第一年) 总投入为 a_n 万元, 旅游业总收入为 b_n 万元. 写出 a_n, b_n 的表达式;
(2) 至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入?

22. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于直线 $x = 1$ 对称, 对任意 x_1, $x_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, 且 $f(1) = a > 0$.
(1) 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$;
(2) 证明设 $f(x)$ 是周期函数;
(3) 记 $a_n = f\left(2n + \frac{1}{2n}\right)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln a_n)$.

2001 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

一、选择题

1. $\tan 300^\circ + \cot 405^\circ$ 的值为 （ ）

(A) $1+\sqrt{3}$ (B) $1-\sqrt{3}$ (C) $-1-\sqrt{3}$ (D) $-1+\sqrt{3}$

2. 过点 $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ 且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程是( )

(A) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ (B) $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

(C) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ (D) $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

3. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形, 其面积为 $\sqrt{3}$, 则这个圆锥的全面积是 （ ）

(A) 3π (B) $3\sqrt{3}\pi$ (C) 6π (D) 9π

4. 若定义在区间 $(-1,0)$ 内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ (C) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ (D) $(0,+\infty)$

5. 已知复数 $z=\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathrm{i}$, 则 $\arg\frac{1}{z}$ 是

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{5\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{11\pi}{6}$

6. 函数 $y=2^{-x}+1$ $(x>0)$ 的反函数是

(A) $y=\log_2\frac{1}{x-1}$, $x\in(1,2)$ (B) $y=-\log_2\frac{1}{x-1}$, $x\in(1,2)$

(C) $y=\log_2\frac{1}{x-1}$, $x\in(1,2]$ (D) $y=-\log_2\frac{1}{x-1}$, $x\in(1,2]$

7. 若椭圆经过原点, 且焦点为 $F_1(1,0), F_2(3,0)$, 则其离心率为 （ ）

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

8. 若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$, $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin\beta+\cos\beta=b$, 则 （ ）

(A) $a>b$ (B) $a<b$ (C) $ab<1$ (D) $ab>2$

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=\sqrt{2}BB_1$, 则 AB_1 与 C_1B 所成的角的大小为 （ ）

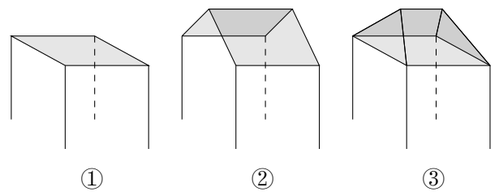
(A) 60° (B) 90° (C) 45° (D) 120°

10. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题中, 正确的命题是 （ ）

① 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
② 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
③ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减;
④ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减.

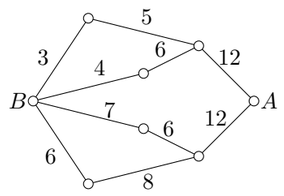
(A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

11. 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ① 单向倾斜; ② 双向倾斜; ③ 四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1, P_2, P_3. 若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α, 则 （ ）



(A) $P_3>P_2>P_1$ (B) $P_3>P_2=P_1$ (C) $P_3=P_2>P_1$ (D) $P_3=P_2=P_1$

12. 如图, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相联. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递. 则单位时间内传递的最大信息量为 （ ）



(A) 26 (B) 24 (C) 20 (D) 19

二、填空题

13. $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^{10}$ 的二项展开式中 x^3 的系数为_____.

14. 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线上, 若 $PF_1\perp PF_2$, 则点 P 到 x 轴的距离为_____.

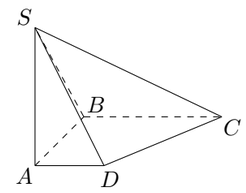
15. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q=$_____.

16. 圆周上有 $2n$ 个等分点 $(n>1)$, 以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为_____.

三、解答题

17. 已知等差数列前三项为 a, 4, $3a$, 前 n 项的和为 S_n, $S_k=2550$.
(1) 求 a 及 k 的值;
(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}\right)$.

18. 如图, 在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $SA\perp$ 面 $ABCD$, $SA=AB=BC=1$, $AD=\frac{1}{2}$.
(1) 求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;
(2) 求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.



19. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB=2$, $BC=6$, $CD=DA=4$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

20. 设抛物线 $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ 的焦点为 F, 经过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点. 点 C 在抛物线的准线上, 且 $BC \parallel x$ 轴. 证明直线 AC 经过原点 O.

21. 设计一幅宣传画, 要求画面面积为 $4840\ \text{cm}^2$, 画面的宽与高的比为 λ $(\lambda < 1)$, 画面的上、下各留 8 cm 空白, 左、右各留 5 cm 空白. 怎样确定画面的高与宽尺寸, 能使宣传画所用纸张面积最小?

22. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于直线 $x = 1$ 对称, 对任意 x_1, $x_2 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.
(1) 求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$;
(2) 证明设 $f(x)$ 是周期函数.

2001 年普通高等学校招生考试（广东卷）

数学试卷

一、选择题

1. 不等式 $\dfrac{x-1}{x-3}>0$ 的解集为 （ ）

(A) $\{x|x<1\}$ (B) $\{x|x>3\}$

(C) $\{x|x<1$ 或 $x>3\}$ (D) $\{x|1<x<3\}$

2. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形, 其面积为 $\sqrt{3}$, 则这个圆锥的全面积是 （ ）

(A) 3π (B) $3\sqrt{3}\pi$ (C) 6π (D) 9π

3. 极坐标方程 $\rho^2\cos 2\theta=1$ 所表示的曲线是 （ ）

(A) 两条相交直线 (B) 圆 (C) 椭圆 (D) 双曲线

4. 若定义在区间 $(-1,1)$ 内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ (C) $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ (D) $(0,+\infty)$

5. 已知复数 $z=\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathrm{i}$, 则 $\arg\dfrac{1}{z}$ 是

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{5\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\dfrac{11\pi}{6}$

6. 函数 $y=2^{-x}+1$ $(x>0)$ 的反函数是

(A) $y=\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2)$ (B) $y=-\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2)$

(C) $y=\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2]$ (D) $y=-\log_2\dfrac{1}{x-1}$, $x\in(1,2]$

7. 若 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{4}$, $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin\beta+\cos\beta=b$, 则 （ ）

(A) $a>b$ (B) $a<b$ (C) $ab<1$ (D) $ab>2$

8. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=\sqrt{2}BB_1$, 则 AB_1 与 C_1B 所成的角的大小为 （ ）

(A) 60° (B) 90° (C) 45° (D) 120°

9. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题中, 正确的命题是 （ ）

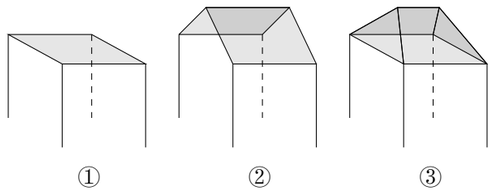
① 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
② 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;
③ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减;
④ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减.

(A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

10. 对于抛物线 $y^2=4x$ 上任意一点 Q, 点 $P(a,0)$ 都满足 $|PQ|\geqslant|a|$, 则 a 的取值范围是 （ ）

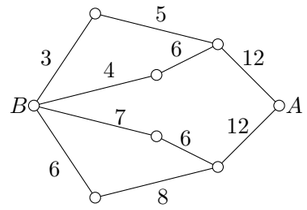
(A) $(-\infty,0)$ (B) $(-\infty,2]$ (C) $[0,2]$ (D) $(0,2)$

11. 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ① 单向倾斜; ② 双向倾斜; ③ 四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1, P_2, P_3. 若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α, 则 （ ）



(A) $P_3>P_2>P_1$ (B) $P_3>P_2=P_1$ (C) $P_3=P_2>P_1$ (D) $P_3=P_2=P_1$

12. 如图, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相联. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递. 则单位时间内传递的最大信息量为 （ ）



(A) 26 (B) 24 (C) 20 (D) 19

二、填空题

13. 已知甲、乙两组各有 8 人, 现从每组抽取 4 人进行计算机知识竞赛, 比赛人员的组成共有_____种可能. (用数字作答)

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线上, 若 $PF_1\perp PF_2$, 则点 P 到 x 轴的距离为_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q=$_____.

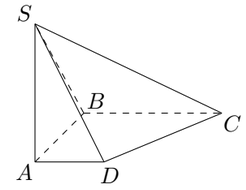
16. 圆周上有 $2n$ 个等分点 $(n>1)$, 以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为_____.

三、解答题

17. 求函数 $y=(\sin x+\cos x)^2+2\cos^2 x$ 的最小正周期.

18. 已知等差数列前三项为 a, 4, $3a$, 前 n 项的和为 S_n, $S_k=2550$.
(1) 求 a 及 k 的值;
(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}\right)$.

19. 如图, 在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $SA\perp$ 面 $ABCD$, $SA=AB=BC=1$, $AD=\dfrac{1}{2}$.
(1) 求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;
(2) 求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.



20. 设计一幅宣传画，要求画面面积为 $4840\ \text{cm}^2$，画面的宽与高的比为 λ ($\lambda < 1$)，画面的上、下各留 8 cm 空白，左、右各留 5 cm 空白. 怎样确定画面的高与宽尺寸，能使宣传画所用纸张面积最小？ 如果要求 $\lambda \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}\right]$，那么 λ 为何值时，能使宣传画所用纸张面积最小？

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右准线 l 与 x 轴相交于点 E，过椭圆右焦点 F 的直线与椭圆相交于 A，B 两点，点 C 在右准线 l 上，且 $BC \parallel x$ 轴，求证：直线 AC 经过线段 EF 的中点.

22. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于直线 $x = 1$ 对称，对任意 x_1，$x_2 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$，且 $f(1) = a > 0$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{4}\right)$；

(2) 证明设 $f(x)$ 是周期函数；

(3) 记 $a_n = f\left(2n + \dfrac{1}{2n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln a_n)$.

2001 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, x\in(-\infty,1]\\ \log_{81}x, x\in(1,+\infty)\end{cases}$，则满足 $f(x)=\dfrac{1}{4}$ 的 x 值为_____.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=2n-7$ $(n\in\mathbf{N})$，则 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=$_____.

3. 设 P 为双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 上一动点，O 为坐标原点，M 为线段 OP 的中点，则点 M 的轨迹方程为_____.

4. 设集合 $A=\{x|2\lg x=\lg(8x-15), x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{x\left|\cos\dfrac{x}{2}>0, x\in\mathbf{R}\right.\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为_____个.

5. 抛物线 $x^2-4y-3=0$ 的焦点坐标为_____.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q>0$ 的等比数列，S_n 是它的前 n 项和. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=7$，则此数列的首项 a_1 的取值范围是_____.

7. 某餐厅供应客饭，每位顾客可以在餐厅提供的菜肴中任选 2 荤 2 素共 4 种不同的品种. 现在餐厅准备了 5 种不同的荤菜，若要保证每位顾客有 200 种以上不同的选择，则餐厅至少还需要准备不同的素菜品种_____种. (结果用数值表示)

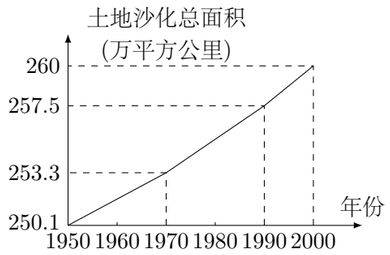
8. 在代数式 $(4x^2-2x-5)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中，常数项为_____.

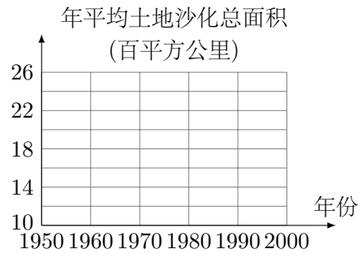
9. 设 $x=\sin\alpha$，$\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，则 $\arccos x$ 的取值范围为_____.

10. 直线 $y=2x-\dfrac{1}{2}$ 与曲线 $\begin{cases}x=\sin\varphi\\ y=\cos 2\varphi\end{cases}$ (φ 为参数) 的交点坐标为_____.

11. 已知两个圆：$x^2+y^2=1$ ①与 $x^2+(y-3)^2=1$ ②，则由①式减去②式可得上述两圆的对称轴方程. 将上述命题在曲线的情况下加以推广，即要求得到一个更一般的命题，而已知命题应成为所推广命题的一个特例，推广的命题为_____.

12. 据报道，我国目前已成为世界上受荒漠化危害最严重的国家之一. 下左图表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况. 由图中的相关信息，可将上述有关年代中，我国年平均土地沙化面积在下右图中图示为:





二、选择题

13. $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的 ( )

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分也非必要条件

14. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 AC 与 BD 的交点，若 $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$、$\overrightarrow{A_1D_1}=\vec{b}$、$\overrightarrow{A_1A}=\vec{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是 ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　(B) $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

(C) $\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　(D) $-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

15. 已知 a、b 为两条不同的直线，α、β 为两个不同的平面，且 $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，则下列命题中的假命题是 ( )

(A) 若 $a\parallel b$，则 $\alpha\parallel\beta$　(B) 若 $\alpha\perp\beta$，则 $a\perp b$

(C) 若 a、b 相交，则 α、β 相交　(D) 若 α、β 相交，则 a、b 相交

16. 用计算器验算函数 $y=\dfrac{\lg x}{x}$ $(x>1)$ 的若干个值，可以猜想下列命题中的真命题只能是 ( )

(A) $y=\dfrac{\lg x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调减函数

(B) $y=\dfrac{\lg x}{x}$，$x\in(1,+\infty)$ 的值域为 $\left(0,\dfrac{\lg 3}{3}\right]$

(C) $y=\dfrac{\lg x}{x}$，$x\in(1,+\infty)$ 有最小值

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n}=0$，$n\in\mathbf{N}$

三、解答题

17. 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，S 是 $\triangle ABC$ 的面积，若 $a=4$，$b=5$，$S=5\sqrt{3}$，求 c 的长度.

18. 设 F_1、F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 为椭圆上的一点. 已知 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个顶点，且 $|PF_1|>|PF_2|$，求 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值.

19. 在棱长为 a 的正方体 $OABC-O'A'B'C'$ 中，E、F 分别是棱 AB、BC 上的动点，且 $AE=BF$.

(1) 求证：$A'F\perp C'E$;

(2) 当三棱锥 $B'-BEF$ 的体积取得最大值时，求二面角 $B'-EF-B$ 的大小. (结果用反三角函数表示)

20. 对任意一个非零复数 z, 定义集合 $M_z=\{\omega|\omega=z^{2n-1},n\in\mathbf{N}\}$.

(1) 设 a 是方程 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{2}$ 的一个根, 试用列举法表示集合 M_a. 若在 M_a 中任取两个数, 求其和为零的概率 P;

(2) 设复数 $\omega\in M_z$, 求证: $M\subseteq M_z$.

21. 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药, 对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定: 用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药用量的 $\dfrac{1}{2}$, 用水越多洗掉的农药量也越多, 但总还有农药残留在蔬菜上. 设用 x 单位量的水清洗一次以后, 蔬菜上残留的农药与本次清洗前残留有农药量之比为函数 $f(x)$.

(1) 试规定 $f(0)$ 的值, 并解释其实际意义;

(2) 试根据假定写出函数 $f(x)$ 应该满足的条件和具有的性质;

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 现有 a $(a>0)$ 单位量的水, 可以清洗一次, 也可以把水平均分成 2 份后清洗两次. 试问用哪种方案清洗后蔬菜上的农药量比较少? 说明理由.

22. 对任意函数 $f(x)$, $x\in D$, 可按图示构造一个数列发生器, 其工作原理如下:

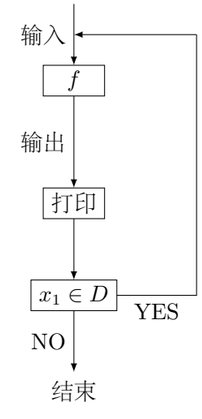
① 输入数据 $x_0\in D$, 经数列发生器输出 $x_1=f(x_0)$;

② 若 $x_1\notin D$, 则数列发生器结束工作; 若 $x_1\in D$, 则将 x_1 反馈回输入断, 再输出 $x_2=f(x_1)$, 并依此规律继续下去. 现定义 $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$.

(1) 若输出 $x_0=\dfrac{49}{65}$, 则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$. 请写出数列 $\{x_n\}$ 的所有项;

(2) 若要数列发生器产生一个无穷的常数数列, 试求输出的初始数据 x_0 的值;

(3) 若输出 x_0 时, 产生的无穷数列 $\{x_n\}$ 满足: 对任意正整数 n 均有 $x_n<x_{n+1}$, 求 x_0 的取值范围.



2001 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 设函数 $f(x)=\log_9 x$, 则满足 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的 x 值为_____.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=-7$, 且满足 $a_{n+1}=a_n+2$ $(n\in\mathbf{N})$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_{17}=$_____.

3. 设 P 为双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 上一动点, O 为坐标原点, M 为线段 OP 的中点, 则点 M 的轨迹方程为_____.

4. 设集合 $A=\{x|2\lg x=\lg(8x-15), x\in\mathbf{R}\}$, $B=\left\{x\left|\cos\dfrac{x}{2}>0, x\in\mathbf{R}\right.\right\}$, 则 $A\cap B$ 的元素个数为_____个.

5. 抛物线 $x^2-4y-3=0$ 的焦点坐标为_____.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q>0$ 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=7$, 则此数列的首项 a_1 的取值范围是_____.

7. 某餐厅供应客饭, 每位顾客可以在餐厅提供的菜肴中任选 2 荤 2 素共 4 种不同的品种. 现在餐厅准备了 5 种不同的荤菜, 若要保证每位顾客有 200 种以上不同的选择, 则餐厅至少还需要准备不同的素菜品种_____种. (结果用数值表示)

8. 在代数式 $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中, 常数项为_____.

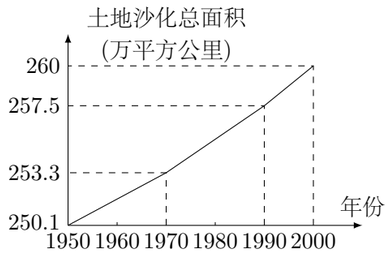
9. 设 $x=\sin\alpha$, $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$, 则 $\arccos x$ 的取值范围为_____.

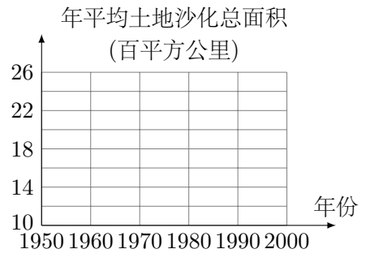
10. 利用下列盈利表中的数据进行决策, 应选择的方案是_____.

自然状况	盈利 (万元) / 概率 \ 方案	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	0.25	50	70	−20	98
S_2	0.30	65	26	52	82
S_3	0.45	26	16	78	−10

11. 已知两个圆: $x^2+y^2=1$ ①与 $x^2+(y-3)^2=1$ ②, 则由①式减去②式可得上述两圆的对称轴方程. 将上述命题在曲线的情况下加以推广, 即要求得到一个更一般的命题, 而已知命题应成为所推广命题的一个特例, 推广的命题为_____.

12. 据报道, 我国目前已成为世界上受荒漠化危害最严重的国家之一. 下左图表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况. 由图中的相关信息, 可将上述有关年代中, 我国年平均土地沙化面积在下右图中图示为:





二、选择题

13. $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的 ( )

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分也非必要条件

14. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 AC 与 BD 的交点, 若 $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$、$\overrightarrow{A_1D_1}=\vec{b}$、$\overrightarrow{A_1A}=\vec{c}$, 则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是 ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　(B) $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

(C) $\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　(D) $-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

15. 已知 a、b 为两条不同的直线, α、β 为两个不同的平面, 且 $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$, 则下列命题中的假命题是 ( )

(A) 若 $a\parallel b$, 则 $\alpha\parallel\beta$　(B) 若 $\alpha\perp\beta$, 则 $a\perp b$

(C) 若 a、b 相交, 则 α、β 相交　(D) 若 α、β 相交, 则 a、b 相交

16. 用计算器验算函数 $y=\dfrac{\lg x}{x}$ $(x>1)$ 的若干个值, 可以猜想下列命题中的真命题只能是 ( )

(A) $y=\dfrac{\lg x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调减函数

(B) $y=\dfrac{\lg x}{x}$, $x\in(1,+\infty)$ 的值域为 $\left(0,\dfrac{\lg 3}{3}\right]$

(C) $y=\dfrac{\lg x}{x}$, $x\in(1,+\infty)$ 有最小值

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n}=0$, $n\in\mathbf{N}$

三、解答题

17. 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边, S 是 $\triangle ABC$ 的面积, 若 $a=4$, $b=5$, $S=5\sqrt{3}$, 求 c 的长度.

18. 设 F_1、F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点, P 为椭圆上的一点. 已知 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个顶点, 且 $|PF_1|>|PF_2|$, 求 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值.

19. 在棱长为 a 的正方体 $OABC-O'A'B'C'$ 中, E、F 分别是棱 AB、BC 上的动点, 且 $AE=BF$.

(1) 求证: $A'F\perp C'E$;

(2) 当三棱锥 $B'-BEF$ 的体积取得最大值时, 求二面角 $B'-EF-B$ 的大小. (结果用反三角函数表示)

20. 对任意一个非零复数 z, 定义集合 $M_z=\{\omega|\omega=z^{2n-1},n\in\mathbf{N}\}$.

(1) 设 a 是方程 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{2}$ 的一个根, 试用列举法表示集合 M_a. 若在 M_a 中任取两个数, 求其和为零的概率 P;

(2) 设集合 M_z 中只有 3 个元素, 试写出满足条件的一个 z 的值, 并说明理由.

21. 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药, 对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定: 用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药用量的 $\dfrac{1}{2}$, 用水越多洗掉的农药量也越多, 但总还有农药残留在蔬菜上. 设用 x 单位量的水清洗一次以后, 蔬菜上残留的农药与本次清洗前残留有农药量之比为函数 $f(x)$.

(1) 试规定 $f(0)$ 的值, 并解释其实际意义;

(2) 试根据假定写出函数 $f(x)$ 应该满足的条件和具有的性质;

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 现有 a $(a>0)$ 单位量的水, 可以清洗一次, 也可以把水平均分成 2 份后清洗两次. 试问用哪种方案清洗后蔬菜上的农药量比较少? 说明理由.

22. 对任意函数 $f(x)$, $x\in D$, 可按图示构造一个数列发生器, 其工作原理如下:

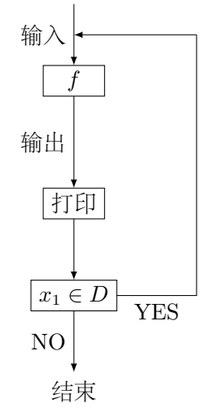
① 输入数据 $x_0\in D$, 经数列发生器输出 $x_1=f(x_0)$;

② 若 $x_1\notin D$, 则数列发生器结束工作; 若 $x_1\in D$, 则将 x_1 反馈回输入断, 再输出 $x_2=f(x_1)$, 并依此规律继续下去. 现定义 $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$.

(1) 若输出 $x_0=\dfrac{49}{65}$, 则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$. 请写出数列 $\{x_n\}$ 的所有项;

(2) 若要数列发生器产生一个无穷的常数数列, 试求输出的初始数据 x_0 的值;

(3) 是否存在 x_0, 在输入数据 x_0 时, 该数列发生器产生一个各项均为负数的无穷数列? 若存在, 求出 x_0 的值; 若不存在, 请说明理由.



2002 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 不等式组 $\begin{cases} x^2-1<0 \\ x^2-3x<0 \end{cases}$ 的解集为 （ ）

(A) $\{x|-1<x<1\}$ (B) $\{x|0<x<3\}$

(C) $\{x|0<x<1\}$ (D) $\{x|-1<x<3\}$

2. 已知三条直线 m, n, l, 三个平面 α, β, γ, 下列四个命题中, 正确的是（ ）

(A) $\begin{cases} \alpha\perp\gamma \\ \beta\perp\gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha/\!/\beta$ (B) $\begin{cases} m/\!/\beta \\ l\perp m \end{cases} \Rightarrow l\perp\beta$

(C) $\begin{cases} m/\!/\gamma \\ n/\!/\gamma \end{cases} \Rightarrow m/\!/n$ (D) $\begin{cases} m\perp\gamma \\ n\perp\gamma \end{cases} \Rightarrow m/\!/n$

3. 已知椭圆的焦点是 F_1, F_2, P 是椭圆上的一个动点, 如果延长 F_1P 到 Q, 使得 $|PQ|=|PF_2|$, 那么动点 Q 的轨迹是. （ ）

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线的一支 (D) 抛物线

4. 如果 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 那么复数 $(1+\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的辐角的主值是 （ ）

(A) $\theta+\frac{9\pi}{4}$ (B) $\theta+\frac{\pi}{4}$ (C) $\theta-\frac{\pi}{4}$ (D) $\theta+\frac{7\pi}{4}$

5. 若角 α 满足条件 $\sin2\alpha<0$, $\cos\alpha-\sin\alpha<0$, 则 α 在 （ ）

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

6. 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译, 导游, 导购, 保洁四项不同工作. 若其中甲、乙两名支援者都不能从事翻译工作, 则选派方案共有. （ ）

(A) 280 种 (B) 240 种 (C) 180 种 (D) 96 种

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $BC=1.5$, $\angle ABC=120^\circ$, 若使三角形绕直线 BC 旋转一周, 则所形成的几何体的体积是 （ ）

(A) $\frac{3}{2}\pi$ (B) $\frac{5}{2}\pi$ (C) $\frac{7}{2}\pi$ (D) $\frac{9}{2}\pi$

8. 圆 $2x^2+2y^2=1$ 与直线 $x\sin\theta+y-1=0$ $\left(\theta\in\mathbf{R},\ \theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right)$ 的位置关系是 （ ）

(A) 相交 (B) 相切 (C) 相离或相切 (D) 不能确定

9. 在极坐标系中, 如果一个圆的方程 $\rho=4\cos\theta+6\sin\theta$, 那么过圆心且与极轴平行的直线方程是 （ ）

(A) $\rho\sin\theta=3$ (B) $\rho\sin\theta=-3$ (C) $\rho\cos\theta=2$ (D) $\rho\cos\theta=-2$

10. 对于二项式 $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n$ 的展开式 ($n\in\mathbf{N}^*$), 四位同学作出了四种判断:

① 存在 $n\in\mathbf{N}^*$, 展开式中有常数项;

② 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 展开式中没有常数项;

③ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 展开式中没有 x 的一次项;

④ 存在 $n\in\mathbf{N}^*$, 展开式中有 x 的一次项.

上述判断中正确的是 （ ）

(A) ①与③ (B) ②与③ (C) ①与④ (D) ②与④

11. 若一个等差数列前 3 项的和为 34, 最后 3 项的和为 146, 且所有项的和为 390, 则这个数列有 （ ）

(A) 13 项 (B) 12 项 (C) 11 项 (D) 10 项

12. 用一张钢板制作一个容积为 $4\mathrm{m}^3$ 的无盖长方体水箱. 可用的长方形钢板有四种不同的规格 (长 × 宽的尺寸如各选项所示, 单位均为 m), 若既要够用, 又要所剩最少, 则应选钢板的规格是. （ ）

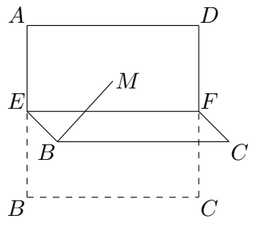
(A) 2×5 (B) 2×5.5 (C) 2×6.1 (D) 3×5

二、填空题

13. 若双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$, 则双曲线的焦点坐标是_____.

14. 如果 $\cos\theta=-\frac{12}{13}$, $\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, 那么 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值等于_____.

15. 正方形 $ABCD$ 的边长是 2, E, F 分别是 AB 和 CD 的中点, 将正方形沿 EF 折成直二面角 (如图所示). M 为矩形 $AEFD$ 内一点, 如果 $\angle MBE=\angle MBC$, MB 和平面 BCF 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$, 那么点 M 到直线 EF 的距离为_____.



16. 对于任意两个复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$, $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$ (x_1, y_1, x_2, y_2 为实数), 定义运算 $\odot$ 为: $z_1\odot z_2=x_1x_2+y_1y_2$. 设非零复数 w_1、w_2 在复平面内对应的点分别为 P_1, P_2, 点为 O 为坐标原点. 如果 $w_1\odot w_2=0$, 那么在 $\triangle P_1OP_2$ 中, $\angle P_1OP_2$ 的大小为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 A, B, C 成等差数列, 求 $\tan\left(\frac{A}{2}\right)+\tan\left(\frac{C}{2}\right)+\sqrt{3}\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$ 的值.

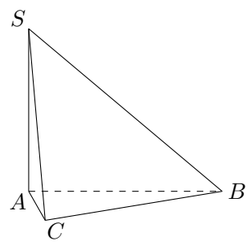
18. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 而且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数, 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数还是减函数, 并证明你的判断.

19. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 如图, $\angle SAB=\angle SAC=\angle ACB=90^\circ$, $AC=2$, $BC=\sqrt{13}$, $SB=\sqrt{29}$.

(1) 证明: $SC\perp BC$;

(2) 求侧面 SBC 与底面 ABC 所成的二面角大小;

(3) 求异面直线 SC 与 AB 所成的角的大小 (用反三角函数表示).



20. 假设 A 型进口车关税税率在 2001 年是 100%, 在 2006 年是 25%, 2001 年 A 型进口车每辆价格为 64 万元 (其中含 32 万元关税税款).
(1) 已知与 A 型车性能相近的 B 型国产车, 2001 年每辆价格为 46 万元, 若 A 型车的价格只受关税降低的影响, 为了保证 2006 年 B 型车的价格不高于 A 型车价格的 90%, B 型车价格要逐年降低, 问平均每年至少下降多少万元?
(2) 某人在 2001 年将 33 万元存入银行, 假设银行扣利息税后的年利率为 1.8% (5 年内不变), 且每年按复利计算 (上一年的利息计入第二年的本金), 那么五年到期时这笔钱连本带息是否一定够买按 (1) 中所述降价后的 B 型车一辆?

21. 已知点的序列 $A_n(x_n, 0)$, $n \in \mathbf{N}$, 其中 $x_1 = 0$, $x_2 = a$ ($a < 0$), A_3 是线段 A_lA_2 的中点, A_4 是线段 A_2A_3 的中点, $\cdots$, A_n 是线段 $A_{n-2}A_{n-1}$ 的中点, $\cdots$.
(1) 写出 x_n 与 x_{n-1}, x_{n-2} 之间的关系式 ($n \geqslant 3$);
(2) 设 $a_n = x_{n+1} - x_n$, 计算 a_1, a_2, a_3, 由此推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并加以证明;
(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

22. 已知某椭圆的焦点是 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, 过点 F_2, 并垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个交点为 B, 且 $|F_1B|+|F_2B| = 10$. 椭圆上不同的两点 $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ 满足条件: $|F_2A|$, $|F_2B|$, $|F_2C|$ 成等差数列.
(1) 求该椭圆的方程;
(2) 求弦 AC 中点的横坐标;
(3) 设弦 AC 的垂直平分线的方程为 $y = kx + m$, 求 m 的取值范围.

2002 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 不等式组 $\begin{cases} x^2-1<0 \\ x^2-3x<0 \end{cases}$ 的解集为 （ ）

(A) $\{x|-1<x<1\}$ (B) $\{x|0<x<3\}$

(C) $\{x|0<x<1\}$ (D) $\{x|-1<x<3\}$

2. 已知三条直线 m, n, l, 三个平面 α, β, γ, 下列四个命题中, 正确的是（ ）

(A) $\begin{cases} \alpha\perp\gamma \\ \beta\perp\gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha /\!\!/ \beta$ (B) $\begin{cases} m /\!\!/ \beta \\ l\perp m \end{cases} \Rightarrow l\perp\beta$

(C) $\begin{cases} m /\!\!/ \gamma \\ n /\!\!/ \gamma \end{cases} \Rightarrow m /\!\!/ n$ (D) $\begin{cases} m\perp\gamma \\ n\perp\gamma \end{cases} \Rightarrow m /\!\!/ n$

3. 已知椭圆的焦点是 F_1, F_2, P 是椭圆上的一个动点, 如果延长 F_1P 到 Q, 使得 $|PQ|=|PF_2|$, 那么动点 Q 的轨迹是. （ ）

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线的一支 (D) 抛物线

4. 如果 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 那么复数 $(1+\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的辐角的主值是 （ ）

(A) $\theta+\frac{9\pi}{4}$ (B) $\theta+\frac{\pi}{4}$ (C) $\theta-\frac{\pi}{4}$ (D) $\theta+\frac{7\pi}{4}$

5. 若角 α 满足条件 $\sin 2\alpha<0$, $\cos\alpha-\sin\alpha<0$, 则 α 在 （ ）

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

6. 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译, 导游, 导购, 保洁四项不同工作. 若其中甲、乙两名支援者都不能从事翻译工作, 则选派方案共有. （ ）

(A) 280 种 (B) 240 种 (C) 180 种 (D) 96 种

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $BC=1.5$, $\angle ABC=120^\circ$, 若使三角形绕直线 BC 旋转一周, 则所形成的几何体的体积是 （ ）

(A) $\frac{3}{2}\pi$ (B) $\frac{5}{2}\pi$ (C) $\frac{7}{2}\pi$ (D) $\frac{9}{2}\pi$

8. 到两坐标轴距离相等的点的轨迹方程是 （ ）

(A) $x-y=0$ (B) $x+y=0$ (C) $|x|-y=0$ (D) $|x|-|y|=0$

9. 函数 $y=2^{\sin x}$ 的单调区间是 （ ）

(A) $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ (B) $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

(C) $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ (D) $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$

10. 在 $\left(\frac{1}{x}+x^2\right)^6$ 的展开式中, x^3 的系数和常数项依次是 （ ）

(A) 20, 20 (B) 15, 20 (C) 20, 15 (D) 15, 15

11. 若一个等差数列前 3 项的和为 34, 最后 3 项的和为 146, 且所有项的和为 390, 则这个数列有 （ ）

(A) 13 项 (B) 12 项 (C) 11 项 (D) 10 项

12. 用一张钢板制作一个容积为 $4\mathrm{m}^3$ 的无盖长方体水箱. 可用的长方形钢板有四种不同的规格 (长 × 宽的尺寸如各选项所示, 单位均为 m), 若既要够用, 又要所剩最少, 则应选钢板的规格是. （ ）

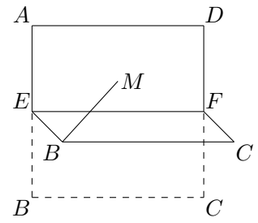
(A) 2×5 (B) 2×5.5 (C) 2×6.1 (D) 3×5

二、填空题

13. 若双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$, 则双曲线的焦点坐标是_____.

14. 如果 $\cos\theta=-\frac{12}{13}$, $\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, 那么 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值等于_____.

15. 正方形 $ABCD$ 的边长是 2, E, F 分别是 AB 和 CD 的中点, 将正方形沿 EF 折成直二面角 (如图所示). M 为矩形 $AEFD$ 内一点, 如果 $\angle MBE=\angle MBC$, MB 和平面 BCF 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$, 那么点 M 到直线 EF 的距离为_____.



16. 对于任意两个复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$, $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$ (x_1, y_1, x_2, y_2 为实数), 定义运算 $\odot$ 为: $z_1\odot z_2=x_1x_2+y_1y_2$. 设非零复数 w_1、w_2 在复平面内对应的点分别为 P_1, P_2, 点为 O 为坐标原点. 如果 $w_1\odot w_2=0$, 那么在 $\triangle P_1OP_2$ 中, $\angle P_1OP_2$ 的大小为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 A, B, C 成等差数列, 求 $\tan\left(\frac{A}{2}\right)+\tan\left(\frac{C}{2}\right)+\sqrt{3}\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$ 的值.

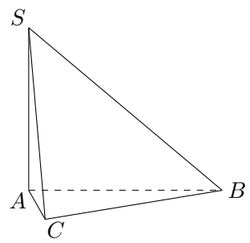
18. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 而且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数, 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数还是减函数, 并证明你的判断.

19. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 如图, $\angle SAB=\angle SAC=\angle ACB=90^\circ$, $AC=2$, $BC=\sqrt{13}$, $SB=\sqrt{29}$.

(1) 证明: $SC\perp BC$;

(2) 求侧面 SBC 与底面 ABC 所成的二面角大小;

(3) 求三棱锥的体积 V_{S-ABC}.



20. 假设 A 型进口车关税税率在 2001 年是 100%, 在 2006 年是 25%, 2001 年 A 型进口车每辆价格为 64 万元 (其中含 32 万元关税税款).
(1) 已知与 A 型车性能相近的 B 型国产车, 2001 年每辆价格为 46 万元, 若 A 型车的价格只受关税降低的影响, 为了保证 2006 年 B 型车的价格不高于 A 型车价格的 90%, B 型车价格要逐年降低, 问平均每年至少下降多少万元?
(2) 某人在 2001 年将 33 万元存入银行, 假设银行扣利息税后的年利率为 1.8% (5 年内不变), 且每年按复利计算 (上一年的利息计入第二年的本金), 那么五年到期时这笔钱连本带息是否一定够买按 (1) 中所述降价后的 B 型车一辆?

21. 已知某椭圆的焦点是 $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, 过点 F_2, 并垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个交点为 B, 且 $|F_1B|+|F_2B|=10$. 椭圆上不同的两点 $A(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$ 满足条件: $|F_2A|$, $|F_2B|$, $|F_2C|$ 成等差数列.
(1) 求该椭圆的方程;
(2) 求弦 AC 中点的横坐标.

22. 已知点的序列 $A_n(x_n,0)$, $n\in\mathbf{N}$, 其中 $x_1=0$, $x_2=a$ ($a<0$), A_3 是线段 A_lA_2 的中点, A_4 是线段 A_2A_3 的中点, $\cdots$, A_n 是线段 $A_{n-2}A_{n-1}$ 的中点, $\cdots$.
(1) 写出 x_n 与 x_{n-1}, x_{n-2} 之间的关系式 ($n\geqslant 3$);
(2) 设 $a_n=x_{n+1}-x_n$, 计算 a_1, a_2, a_3, 由此推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并加以证明;
(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2002 年普通高等学校春季招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 函数 $y=\dfrac{1}{3-2x-x^2}$ 的定义域为_____.

2. 若椭圆的两个焦点坐标为 $F_1(-1,0)$, $F_2(5,0)$, 长轴长为 10, 则椭圆的方程为_____.

3. 若全集 $I=\mathbf{R}$, $f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的二次函数, $P=\{x\,|f(x)<0\}$, $Q=\{x\,|g(x)\geqslant 0\}$, 则不等式组 $\begin{cases}f(x)<0\\ g(x)<0\end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为_____.

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=\log_3(1+x)$, 则 $f(-2)=$_____.

5. 若在 $\left(\sqrt[5]{x}-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中, 第 4 项是常数项, 则 $n=$_____.

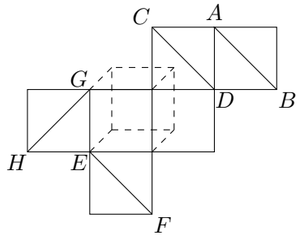
6. 已知 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 若 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 则 $f(\cos\alpha)+f(-\cos\alpha)$ 可化简为_____.

7. 六位身高全不相同的同学拍照留念, 摄影师要求前后两排各三人, 则后排每人均比前排同学高的概率是_____.

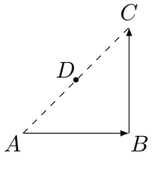
8. 设曲线 C_1 和 C_2 的方程分别为 $F_1(x,y)=0$ 和 $F_2(x,y)=0$, 则点 $P(a,b)\notin C_1\cap C_2$ 的一个充分条件为_____.

9. 若 $f(x)=2\sin\omega x$ $(0<\omega<1)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值是 $\sqrt{2}$, 则 $\omega=$_____.

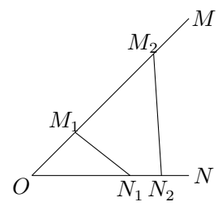
10. 如图表示一个正方体表面的一种展开图, 图中的四条线段 AB、CD、EF 和 GH 在原正方体中相互异面的有_____对.

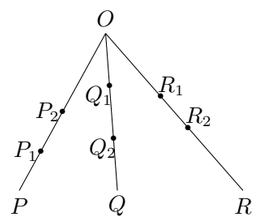


11. 如图所示, 客轮以速度 $2v$ 由 A 至 B 再到 C 匀速航行, 货轮从 AC 的中点 D 出发, 以速度 v 沿直线匀速航行, 将货物送达客轮. 已知 $AB\perp BC$, 且 $AB=BC=50$ 海里. 若两船同时出发, 则两船相遇之处距 C 点_____海里. (结果精确到小数点后 1 位)



12. 如图, 若从点 O 所作的两条射线 OM、ON 上分别有点 M_1、M_2 与点 N_1、N_2, 则三角形面积之比 $\dfrac{S_{\triangle OM_1N_1}}{S_{\triangle OM_2N_2}}=\dfrac{OM_1}{OM_2}\cdot\dfrac{ON_1}{ON_2}$. 若从点 O 所作的不在同一平面内的三条射线 OP、OQ 和 OR 上, 分别有点 P_1、P_2, 点 Q_1、Q_2 和点 R_1、R_2, 则类似的结论为_____.





二、选择题

13. 若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为任意向量, $m\in\mathbf{R}$, 则下列等式不一定成立的是 （ ）

(A) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (B) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

(C) $m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$ (D) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $2\cos B\sin A=\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状一定是 （ ）

(A) 等腰直角三角形 (B) 直角三角形

(C) 等腰三角形 (D) 等边三角形

15. 设 $A>0$, $a\neq 1$, 函数 $y=\log_a x$ 的反函数和 $y=\log_a\dfrac{1}{x}$ 的反函数的图象关于 （ ）

(A) x 轴对称 (B) y 轴对称 (C) $y=x$ 对称 (D) 原点对称

16. 设 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N})$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项的和, 且 $S_5<S_6$, $S_6=S_7>S_8$, 则下列结论错误的是 （ ）

(A) $d<0$ (B) $a_7=0$

(C) $S_9>S_5$ (D) S_6 和 S_7 均为 S_n 的最大值

三、解答题

17. 已知 z、ω 为复数, $(1+3\mathrm{i})z$ 为纯虚数, $\omega=\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}$, 且 $|\omega|=5\sqrt{2}$, 求 ω.

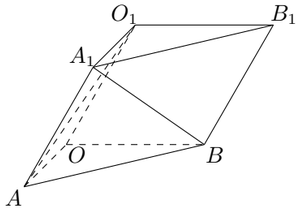
18. 已知 F_1、F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的焦点. 过 F_2 作垂直 x 轴的直线交双曲线于点 P, 且 $\angle PF_1F_2=30^\circ$, 求双曲线的渐近方程.

19. 如图, 三棱柱 OAB–$O_1A_1B_1$, 平面 $OBB_1O_1\perp$ 平面 OAB, $\angle O_1OB=60^\circ$, $\angle AOB=90^\circ$, 且 $OB=OO_1=2$, $OA=\sqrt{3}$. 求:

(1) 二面角 O_1-AB-O 的大小;

(2) 异面直线 A_1B 与 AO_1 所成角的大小.

(上述结果用反三角函数值表示)



20. 已知函数 $f(x)=a^x+\dfrac{x-2}{x+1}$ $(a>1)$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数;

(2) 用反证法证明方程 $f(x)=0$ 没有负数根.

21. 某公司全年的利润为 b 元, 其中一部分作为奖金发给 n 位职工, 奖金分配方案如下: 首先将职工按工作业绩 (工作业绩均不相同) 从大到小, 由 1 到 n 排序, 第 1 位职工得奖金 $\dfrac{b}{n}$ 元, 然后再将余额除以 n 发给第 2 位职工, 按此方法将奖金逐一发给每位职工, 并将最后剩余部分作为公司发展基金.

(1) 设 a_k $(1\leqslant k\leqslant m)$ 为第 k 位职工所得奖金额, 试求 a_2、a_3, 并用 k、n 和 b 表示 a (不必证明);

(2) 证明 $a_k>a_{k+1}$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$, 并解释此不等式关于分配原则的实际意义;

(3) 发展基金与 n 和 b 有关, 记为 $P_n(b)$, 对常数 b, 当 n 变化时, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(b)$.

22. 对于函数 $f(x)$, 若存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使 $f(x_0)=x_0$ 成立, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点. 已知函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)$ $(a\neq0)$.

(1) 当 $a=1$, $b=-2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的不动点;

(2) 若对任意实数 b, 函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点, 求 a 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $y=f(x)$ 图上 A、B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点, 且 A, B 两点关于直线 $y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 对称, 求 b 的最小值.

2002 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 满足条件 $M\cup\{1\}=\{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 在平面直角坐标系中, 已知两点 $A(\cos 80^\circ,\sin 80^\circ)$, $B(\cos 20^\circ,\sin 20^\circ)$, 则 $|AB|$ 的值是 （ ）

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

3. 下列四个函数中, 以 π 为最小正周期, 且在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上为减函数的是 （ ）

(A) $y=\cos^2 x$ (B) $y=2|\sin x|$ (C) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}$ (D) $y=-\cot x$

4. 64 个直径都为 $\frac{a}{4}$ 的球, 记它们的体积之和为 $V_{甲}$, 表面积之和为 $S_{甲}$; 一个直径为 a 的球, 记其体积为 $V_{乙}$, 表面积为 $S_{乙}$, 则 （ ）

(A) $V_{甲}>V_{乙}$, $S_{甲}>S_{乙}$ (B) $V_{甲}<V_{乙}$, $S_{甲}<S_{乙}$

(C) $V_{甲}=V_{乙}$, $S_{甲}>S_{乙}$ (D) $V_{甲}=V_{乙}$, $S_{甲}=S_{乙}$

5. 已知某曲线的参数方程是 $\begin{cases}x=\sec\varphi\\ y=\tan\varphi\end{cases}$ (φ 为参数), 若以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 长度单位不便变, 建立极坐标系, 则该曲线的极坐标方程是 （ ）

(A) $\rho=1$ (B) $\rho\cos 2\theta=1$ (C) $\rho^2\sin 2\theta=1$ (D) $\rho^2\cos 2\theta=1$

6. 给定四条曲线: ① $x^2+y^2=\frac{5}{2}$, ② $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, ③ $x^2+\frac{y^2}{4}=1$, ④ $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 其中与直线 $x+y-\sqrt{5}=0$ 仅有一个交点的曲线是 （ ）

(A) ①②③ (B) ②③④ (C) ①②④ (D) ①③④

7. 已知 z_1, $z_2\in\mathbf{C}$, 且 $|z_1|=1$. 若 $z_1+z_2=2$, 则 $|z_1-z_2|$ 的最大值是( )

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

8. 若 $\frac{\cot\theta-1}{2\cot\theta+1}=1$, 则 $\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$ 的值为 （ ）

(A) 3 (B) -3 (C) -2 (D) $-\frac{1}{2}$

9. 12 名学生分别到三个不同的路口进行车流量的调查, 若每个路口 4 人, 则不同的分配方案共有 （ ）

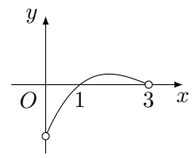
(A) $C_{12}^4C_8^4C_4^4$ 种 (B) $3C_{12}^4C_8^4C_4^4$ 种 (C) $C_{12}^4C_8^4A_3^3$ 种 (D) $\frac{C_{12}^4C_8^4C_4^4}{A_3^3}$ 种

10. 设命题: “直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 ACB_1 与对角面 BB_1D_1D 垂直”; 命题乙: “直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体”, 那么, 甲是乙的 （ ）

(A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件 (D) 即非充分又非必要条件

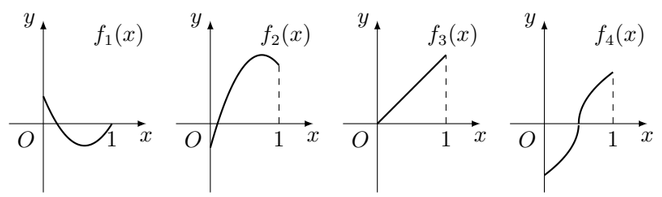
11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-3,3)$ 上的奇函数, 当 $0<x<3$ 时, $f(x)$ 的图象如图所示, 那么不等式 $f(x)\cos x<0$ 的解集是 （ ）



(A) $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ (B) $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)\cup(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$

(C) $(-3,-1)\cup(0,1)\cup(1,3)$ (D) $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)\cup(1,3)$

12. 如图所示, $f_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: “对 $[0,1]$ 中任意的 x_1 和 x_2, 任意 $\lambda\in[0,1]$, $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 恒成立”的只有 （ ）



(A) $f_1(x)$, $f_3(x)$ (B) $f_2(x)$ (C) $f_2(x)$, $f_3(x)$ (D) $f_4(x)$

二、填空题

13. $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$, $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$, $\arctan\left(-\frac{5}{4}\right)$ 从小到大的顺序是_____.

14. 等差数列 $\{a_n\}$, 中, $a_1=2$, 公差不为零, 且 a_1, a_3, a_{11} 恰好是某等比数列的前三项, 那么该等比数列公比的值等于_____.

15. 关于直角 AOB 在平面 α 内的射影有如下判断: ① 可能是 0° 的角; ② 可能是锐角; ③ 可能是直角; ④ 可能是直角; ⑤ 可能是 180° 的角. 其中正确的序号是_____. (注: 把你认为正确判断的序号都填上)

16. 已知 P 是直线 $3x+4y+8=0$ 上的动点, PA, PB 是圆 $x^2+y^2-2x-2y+8=0$ 的两条切线, A, B 是切点, C 是圆心, 那么四边形 $PACB$ 面积的最小值为_____.

三、解答题

17. 解不等式 $\left|\sqrt{2x-1}-x\right|<2$.

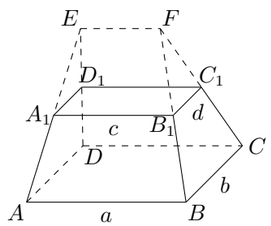
18. 如图, 在多面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 上、下底面平行且均为矩形, 相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等, 侧棱延长后相交与 E, F 两点, 上、下底面矩形的长、宽分别为 c, d 与 a, b, 且 $a>c$, $b>d$, 两底面间的距离为 h.

(1) 求侧面 ABB_1A_1 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小;

(2) 证明: $EF\parallel ABCD$;

(3) 在估侧该多面体的体积时, 经常运用近似公式 $V_{估}=S_{中截面}\cdot h$ 来计算, 已知它的体积公式是 $V=\frac{h}{6}(S_{上底面}+4S_{中截面}+S_{下底面})$, 试判断 $V_{估}$ 与 V 的大小关系, 并加以证明.

注: 与两个底面平行, 且到两个底面距离相等的截面称为该多面体的中截面.



19. 数列 $\{a_n\}$ 由下列条件确定: $x_1=a>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, $n\in\mathbf{N}$.

(1) 证明: 对 $n\geqslant 2$, 总有 $x_n\geqslant\sqrt{a}$;

(2) 证明: 对 $n\geqslant 2$, 总有 $x_n\geqslant x_{n+1}$;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 的极限存在, 且大于零, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值.

20. 在研究并行计算的基本算法时, 有以下简单模型问题: 用计算机求 n 个不同的数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的和 $\sum_{i=1}^{n} v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, 计算开始前, n 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中, 每台机器存一个数. 计算开始后, 在一个单位时间内, 每台机器至多到一台其他机器中读数据, 并与自己原有数据相加得到新的数据, 各台机器可同时完成上述工作. 为了用尽可能少的单位时间, 即可完成计算, 方法可用下表表示:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	v_1+v_2				
2	v_2	1	v_2+v_1				

(1) 当 $n = 4$ 时, 至少需要多少个单位时间可完成计算? 把你设计的方法填入下表:
机器号初始时第一单位时间第二单位时间第三单位时间被读机号结果被读机号结果被读机号结果

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						

(2) 当 $n = 128$ 时, 要使所有机器都得到 $\sum_{i=1}^{n} v_i$, 至少需要多少个单位时间可完成计算? (结论不要求证明)

21. 已知 $O(0,0)$, $B(1,0)$, $C(b,c)$ 是 $\triangle OBC$ 的三个顶点.
(1) 写出 $\triangle OBC$ 的重心 G, 外心 F, 垂心 H 的坐标, 并证明 G, F, H 三点共线;
(2) 当直线 FH 与 OB 平行时, 求顶点 C 的轨迹.

22. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的函数, 且对于任意的 a, $b \in \mathbf{R}$ 都满足: $f(a \cdot b) = af(b) + bf(a)$.
(1) 求 $f(0)$, $f(1)$ 的值;
(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;
(3) 若 $f(2) = 2$, $u_n = \dfrac{f(2^{-n})}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, 求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项的和 S_n.

2002 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 满足条件 $M \cup \{1\} = \{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是 （ ）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

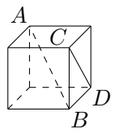
2. 在平面直角坐标系中, 已知两点 $A(\cos 80°, \sin 80°)$, $B(\cos 20°, \sin 20°)$, 则 $|AB|$ 的值是 （ ）

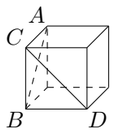
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

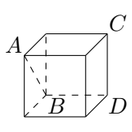
3. 下列四个函数中, 以 π 为最小正周期, 且在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上为减函数的是 （ ）

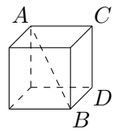
(A) $y = \cos x$ (B) $y = 2|\sin x|$ (C) $y = \cos\frac{x}{2}$ (D) $y = -\cot x$

4. 在下列四个正方体中, 能得出 $AB \perp CD$ 的是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

5. 64 个直径都为 $\frac{a}{4}$ 的球, 记它们的体积之和为 $V_{甲}$, 表面积之和为 $S_{甲}$; 一个直径为 a 的球, 记其体积为 $V_{乙}$, 表面积为 $S_{乙}$, 则 （ ）

(A) $V_{甲} > V_{乙}$, $S_{甲} > S_{乙}$ (B) $V_{甲} < V_{乙}$, $S_{甲} < S_{乙}$

(C) $V_{甲} = V_{乙}$, $S_{甲} > S_{乙}$ (D) $V_{甲} = V_{乙}$, $S_{甲} = S_{乙}$

6. 若直线 $l: y = kx - \sqrt{3}$ 与直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的交点位于第一象限, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 （ ）

(A) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

7. $(1+\mathrm{i})^8$ 等于 （ ）

(A) 16i (B) -16i (C) -16 (D) 16

8. 若 $\frac{\cot\theta - 1}{2\cot\theta + 1} = 1$, 则 $\cos 2\theta$ 的值为 （ ）

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (D) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

9. 5 本不同的书, 全部分给四个学生, 每个学生至少 1 本, 则不同的分法的种数为 （ ）

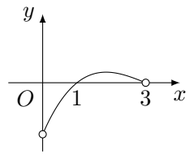
(A) 480 (B) 240 (C) 120 (D) 96

10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{3m^2} + \frac{y^2}{5n^2} = 1$ 和双曲线 $\frac{x^2}{2m^2} - \frac{y^2}{3n^2} = 1$ 有公共的焦点, 那么双曲线的渐近线方程是 （ ）

(A) $x = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}y$ (B) $y = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}x$

(C) $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}y$ (D) $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}x$

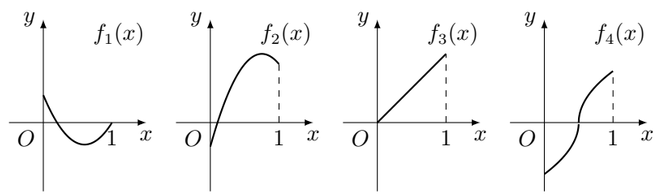
11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,3)$ 上的函数, $f(x)$ 的图象如图所示, 那么不等式 $f(x)\cos x < 0$ 的解集是 （ ）



(A) $(0,1) \cup (2,3)$ (B) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$

(C) $(0,1) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ (D) $(0,1) \cup (1,3)$

12. 如图所示, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: "对 $[0,1]$ 中任意的 x_1 和 x_2, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 恒成立"的只有 （ ）



(A) $f_1(x)$, $f_3(x)$ (B) $f_2(x)$ (C) $f_2(x)$, $f_3(x)$ (D) $f_4(x)$

二、填空题

13. $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5}$, $\tan\frac{7\pi}{5}$ 从小到大的顺序是_____.

14. 等差数列 $\{a_n\}$, 中, $a_1 = 2$, 公差不为零, 且 a_1, a_3, a_{11} 恰好是某等比数列的前三项, 那么该等比数列公比的值等于_____.

15. 关于直角 AOB 在平面 α 内的射影有如下判断: ① 可能是 0° 的角; ② 可能是锐角; ③ 可能是直角; ④ 可能是直角; ⑤ 可能是 180° 的角. 其中正确的序号是_____. (注: 把你认为正确判断的序号都填上)

16. 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 上的动点 Q 到直线 $3x + 4y + 8 = 0$ 距离的最小值为_____.

三、解答题

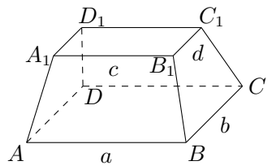
17. 解不等式 $\sqrt{2x-1} + 2 > x$.

18. 如图, 在多面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 上、下底面平行且均为矩形, 相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等, 侧棱延长后相交与 E, F 两点, 上、下底面矩形的长、宽分别为 c, d 与 a, b, 且 $a > c$, $b > d$, 两底面间的距离为 h.

(1) 求侧面 ABB_1A_1 与底面 $ABCD$ 所成二面角的正切值;

(2) 在估侧该多面体的体积时, 经常运用近似公式 $V_{估} = S_{中截面} \cdot h$ 来计算, 已知它的体积公式是 $V = \frac{h}{6}(S_{上底面} + 4S_{中截面} + S_{下底面})$, 试判断 $V_{估}$ 与 V 的大小关系, 并加以证明.

注: 与两个底面平行, 且到两个底面距离相等的截面称为该多面体的中截面.



19. 数列 $\{a_n\}$ 由下列条件确定: $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbf{N}$.

(1) 证明: 对 $n \geqslant 2$, 总有 $x_n \geqslant \sqrt{a}$;

(2) 证明: 对 $n \geqslant 2$, 总有 $x_n \geqslant x_{n+1}$.

20. 在研究并行计算的基本算法时, 有以下简单模型问题: 用计算机求 n 个不同的数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的和 $\sum_{i=1}^{n} v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, 计算开始前, n 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中, 每台机器存一个数. 计算开始后, 在一个单位时间内, 每台机器至多到一台其他机器中读数据, 并与自己原有数据相加得到新的数据, 各台机器可同时完成上述工作. 为了用尽可能少的单位时间, 即可完成计算, 方法可用下表表示:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	v_1+v_2				
2	v_2	1	v_2+v_1				

(1) 当 $n = 4$ 时, 至少需要多少个单位时间可完成计算? 把你设计的方法填入下表:
机器号初始时第一单位时间第二单位时间第三单位时间被读机号结果被读机号结果被读机号结果

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						

(2) 当 $n = 128$ 时, 要使所有机器都得到 $\sum_{i=1}^{n} v_i$, 至少需要多少个单位时间可完成计算? (结论不要求证明)

21. 已知 $O(0,0)$, $B(1,0)$, $C(b,c)$ 是 $\triangle OBC$ 的三个顶点.
(1) 写出 $\triangle OBC$ 的重心 G, 外心 F, 垂心 H 的坐标, 并证明 G, F, H 三点共线;
(2) 当直线 FH 与 OB 平行时, 求顶点 C 的轨迹.

22. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的函数, 且对于任意的 a, $b \in \mathbf{R}$ 都满足: $f(a \cdot b) = af(b) + bf(a)$.
(1) 求 $f(0)$, $f(1)$ 的值;
(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;
(3) 若 $f(2) = 2$, $u_n = f(2^n)$ $(n \in \mathbf{N})$, 求证 $u_{n+1} > u_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

2002 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

理科数学

一、选择题

1. 圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离是 （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) 1　(D) $\sqrt{3}$

2. 复数 $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3$ 的值是 （　）

(A) $-\mathrm{i}$　(B) i　(C) -1　(D) 1

3. 不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是 （　）

(A) $\{x|0\leqslant x<1\}$　(B) $\{x|x<0$ 且 $x\neq -1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　(D) $\{x|x<1$ 且 $x\neq -1\}$

4. 在 $(0,2\pi)$ 内, 使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是 （　）

(A) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$　(B) $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$

(C) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$　(D) $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

5. 设集合 $M=\left\{x\middle|x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$, $N=\left\{x\middle|x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 （　）

(A) $M=N$　(B) $M\subseteq N$　(C) $M\supseteq N$　(D) $M\cap N=\varnothing$

6. 点 $P(1,0)$ 到曲线 $\begin{cases}x=t^2\\y=2t\end{cases}$ (其中参数 $t\in\mathbf{R}$) 上的点的最短距离为（　）

(A) 0　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

7. 一个圆锥和一个半球有公共底面, 如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等, 那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是 （　）

(A) $\dfrac{3}{4}$　(B) $\dfrac{4}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $-\dfrac{3}{5}$

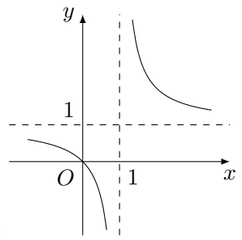
8. 正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 则这个棱柱侧面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角是 （　）

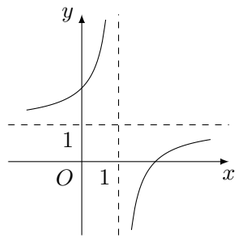
(A) 90°　(B) 60°　(C) 45°　(D) 30°

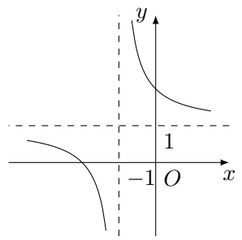
9. 函数 $y=x^2+bx+c$, $x\in[0,+\infty)$ 是单调函数的充要条件是 （　）

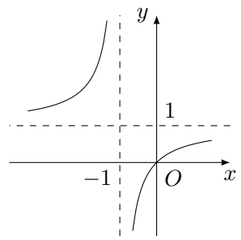
(A) $b\geqslant 0$　(B) $b\leqslant 0$　(C) $b>0$　(D) $b<0$

10. 函数 $y=1-\dfrac{1}{x-1}$ 的图象是 （　）

(A)


(B)


(C)


(D)


11. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有（　）

(A) 8 种　(B) 12 种　(C) 16 种　(D) 20 种

12. 据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》: “2001 年国内生产总值达到 95933 亿元, 比上年增长 7.3%”, 如果“十•五”期间 (2001 年 − 2005 年) 每年的国内生产总值都按此年增长率增长, 那么到“十•五”末我国国内年生产总值约为 （　）

(A) 115000 亿元　(B) 120000 亿元　(C) 127000 亿元　(D) 135000 亿元

二、填空题

13. 函数 $y=a^x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值这和为 3, 则 $a=$_____.

14. 椭圆 $5x^2+ky^2=5$ 的一个焦点是 $(0,2)$, 那么 $k=$_____.

15. $(x^2+1)(x-2)^7$ 展开式中 x^3 的系数是_____.

16. 已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1)+f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$_____.

三、解答题

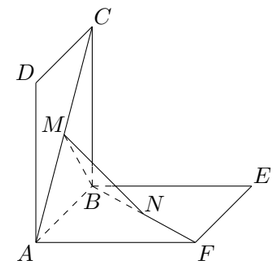
17. 已知 $\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha=1$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求 $\sin\alpha$、$\tan\alpha$ 的值.

18. 如图, 正方形 $ABCD$、$ABEF$ 的边长都是 1, 而且平面 $ABCD$、$ABEF$ 互相垂直. 点 M 在 AC 上移动, 点 N 在 BF 上移动, 若 $CM=BN=a$ $(0<a<\sqrt{2})$.

(1) 求 MN 的长;

(2) a 为何值时, MN 的长最小;

(3) 当 MN 的长最小时, 求面 MNA 与面 MNB 所成二面角 α 的大小.



19. 设点 P 到点 $(-1,0)$、$(1,0)$ 距离之差为 $2m$, 到 x、y 轴的距离之比为 2, 求 m 的取值范围.

20. 某城市 2001 年末汽车保有量为 30 万辆, 预计此后每年报废上一年末汽车保有量的 6%, 并且每年新增汽车数量相同. 为保护城市环境, 要求该城市汽车保有量不超过 60 万辆, 那么每年新增汽车数量不应超过多少辆?

21. 设 a 为实数, 函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性;
(2) 求 $f(x)$ 的最小值.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: ${a_n}_{n+1}={a_n}^2-na_n+1$, $n=1,2,3,\cdots$.
(1) 当 $a_1=2$ 时, 求 a_2, a_3, a_4 并由此猜测 a_n 的一个通项公式;
(2) 当 $a_1\geqslant 3$ 时, 证明对所的 $n\geqslant 1$, 有
① $a_n\geqslant n+2$;
② $\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\dfrac{1}{1+a_3}+\cdots+\dfrac{1}{1+a_n}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

2002 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

文科数学

一、选择题

1. 直线 $(1+a)x+y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相切, 则 a 的值为 (　　)

(A) ±1　　(B) ±2　　(C) 1　　(D) -1

2. 复数 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3$ 的值是 (　　)

(A) $-\mathrm{i}$　　(B) i　　(C) -1　　(D) 1

3. 不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是 (　　)

(A) $\{x|0\leqslant x<1\}$　　(B) $\{x|x<0$ 且 $x\neq-1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　　(D) $\{x|x<1$ 且 $x\neq-1\}$

4. 函数 $y=a^x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值这和为 3, 则 $a=$ (　　)

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) 2　　(C) 4　　(D) $\frac{1}{4}$

5. 在 $(0,2\pi)$ 内, 使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是 (　　)

(A) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$　　(B) $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$

(C) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$　　(D) $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$

6. 设集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$, $N=\left\{x\middle|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 (　　)

(A) $M=N$　　(B) $M\subseteq N$　　(C) $M\supseteq N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

7. 椭圆 $5x^2+ky^2=5$ 的一个焦点是 $(0,2)$, 那么 $k=$ (　　)

(A) -1　　(B) 1　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) $-\sqrt{5}$

8. 一个圆锥和一个半球有公共底面, 如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等, 那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是 (　　)

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{4}{5}$　　(C) $\frac{3}{5}$　　(D) $-\frac{3}{5}$

9. 已知 $0<x<y<a<1$, 则有 (　　)

(A) $\log_a(xy)<0$　　(B) $0<\log_a(xy)<1$

(C) $1<\log_a(xy)<2$　　(D) $\log_a(xy)>2$

10. 函数 $y=x^2+bx+c$, $x\in[0,+\infty)$ 是单调函数的充要条件是 (　　)

(A) $b\geqslant0$　　(B) $b\leqslant0$　　(C) $b>0$　　(D) $b<0$

11. 设 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, 则二次曲线 $x^2\cot\theta-y^2\tan\theta=1$ 的离心率的取值范围为 (　　)

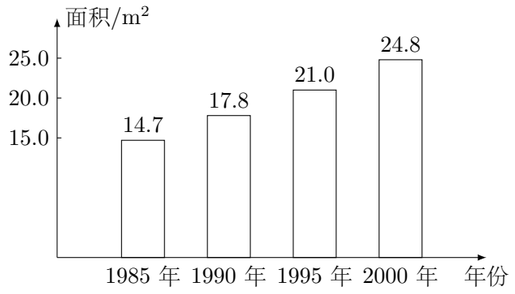
(A) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　(B) $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　(C) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$　　(D) $(\sqrt{2},+\infty)$

12. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有 (　　)

(A) 8 种　　(B) 12 种　　(C) 16 种　　(D) 20 种

二、填空题

13. 据新华社 2002 年 3 月 12 日电, 1985 年到 2000 年间, 我国农村人均居住面积如图所示, 其中, 从_____年_____年的五年间增长最快.



14. 函数 $y=\frac{2x}{1+x}$, $x\in(-1,+\infty)$ 图象与其反函数图象的交点为_____.

15. $(x^2+1)(x-2)^7$ 展开式中 x^3 的系数是_____.

16. 对于顶点在原点的抛物线, 给出下列条件:

① 焦点在 y 轴上;

② 焦点在 x 轴上;

③ 抛物线上横坐标为 1 的点到焦点的距离等于 6;

④ 抛物线的通径的长为 5;

⑤ 由原点向过焦点的某条直线作垂线, 垂足坐标为 $(2,1)$.

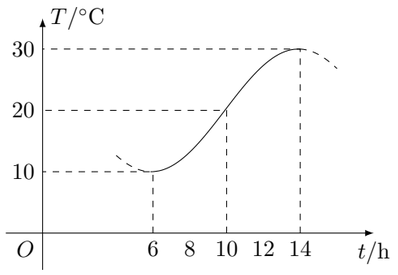
能使这抛物线方程为 $y^2=10x$ 的条件是_____. (要求填写合适条件的序号)

三、解答题

17. 如图, 某地一天从 6 时至 14 时的温度变化曲线近似满足函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$.

(1) 求这段时间的最大温差;

(2) 写出这段时间的函数解析式.



18. 甲、乙物体分别从相距 70 米的两处同时相向运动. 甲第 1 分钟走 2 米, 以后每分钟比前 1 分钟多走 1 米, 乙每分钟走 5 米.

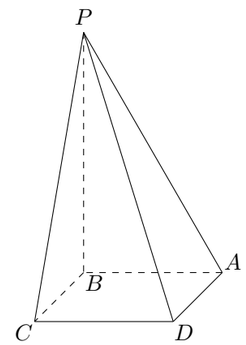
(1) 甲、乙开始运动后几分钟相遇?

(2) 如果甲、乙到达对方起点后立即折返, 甲继续每分钟比前 1 分钟多走 1 米, 乙继续每分钟走 5 米, 那么开始运动几分钟后第二相遇?

19. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的正方形, $PB\perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 若面 PAD 与面 $ABCD$ 所成的二面角为 $60°$, 求这个四棱锥的体积;

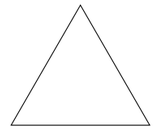
(2) 证明无论四棱锥的高怎样变化, 面 PAD 与面 PCD 所成的二面角恒大于 $90°$.

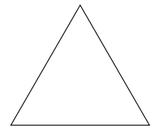


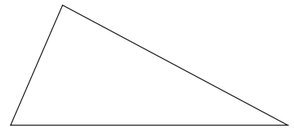
20. 设函数 $f(x)=x^2+|x-2|-1$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;
(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值.

21. 已知点 P 到两定点 $M(-1,0)$、$N(1,0)$ 距离的比为 $\sqrt{2}$, 点 N 到直线 PM 的距离为 1, 求直线 PN 的方程.

22. (1) 给出两块相同的正三角形纸片 (如图 1, 图 2), 要求用其中一块剪拼成一个三棱锥模型, 另一块剪拼成一个正三棱柱模型, 使它们的全面积都与原三角形的面积相等, 请设计一种剪拼方法, 分别用虚线标示在图 1、图 2 中, 并作简要说明;
(2) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小;
(3) 如果给出的是一块任意三角形的纸片 (如图 3), 要求剪栟成一个直三棱柱, 使它的全面积与给出的三角形的面积相等. 请设计一种剪拼方法, 用虚线标示在图 3 中, 并作简要说明.


图 1


图 2


图 3

2002 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 若 $z \in \mathbf{C}$, $(3+z)\mathrm{i}=1$ (i 为虚数单位), 则 $z=$_____.

2. 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 120°, 且 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, 则 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=$_____.

3. 方程 $\log_3(1-2\times 3^x)=2x+1$ 的解 $x=$_____.

4. 若正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{3}$ cm, 体积为 4 cm^3, 则它的侧面与底面所成的二面角的大小是_____.

5. 在二项式 $(1+3x)^n$ 和 $(2x+5)^n$ 的展开式中, 各项系数之和分别记为 a_n、b_n, n 是正整数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-2b_n}{3a_n-4b_n}=$_____.

6. 已知圆 $(x+1)^2+y^2=1$ 和圆外一点 $P(0,2)$, 过点 P 作圆的切线, 则两条切线夹角的正切值是_____.

7. 在某次花样滑冰比赛中, 发生裁判受贿事件, 竞赛委员会决定将裁判由原来的 9 名增至 14 名, 但只任取其中 7 名裁判的评分作为有效分, 若 14 名裁判中有 2 人受贿, 则有效分中没有受贿裁判的评分的概率是_____. (结果用数值表示)

8. 曲线 $\begin{cases}x=t^2-1\\ y=2t+1\end{cases}$ (t 为参数) 的焦点坐标是_____.

9. 若 A、B 两点的极坐标 $A\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$、$B(6,0)$, 则 AB 中点的极坐标是_____.

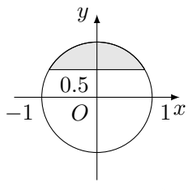
10. 设函数 $f(x)=\sin 2x$, 若 $f(x+t)$ 是偶函数, 则 t 的一个可能值是_____.

11. 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, 且 $a_{n+1}=a_n^2$ (n 是正整数), 则数列的通项 $a_n=$_____.

12. 已知函数 $y=f(x)$ (定义域为 D, 值域为 A) 有反函数 $y=f^{-1}(x)$, 则方程 $f(x)=0$ 有解 $x=a$, 且 $f(x)>x$ ($x\in D$) 的充要条件是 $y=f^{-1}(x)$ 满足_____.

二、选择题

13. 如图, 与复平面中的阴影部分 (含边界) 对应的复数集合是 （ ）



(A) $\left\{z\,\middle|\,|z|=1,\ \dfrac{\pi}{6}\leqslant\arg z\leqslant\dfrac{5\pi}{6},\ z\in\mathbf{C}\right\}$

(B) $\left\{z\,\middle|\,|z|\leqslant 1,\ \dfrac{\pi}{6}\leqslant\arg z\leqslant\dfrac{5\pi}{6},\ z\in\mathbf{C}\right\}$

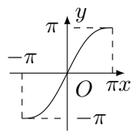
(C) $\left\{z\,\middle|\,|z|=1,\ \mathrm{Im}\ z\geqslant\dfrac{1}{2},\ z\in\mathbf{C}\right\}$

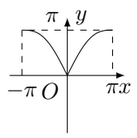
(D) $\left\{z\,\middle|\,|z|\leqslant 1,\ \mathrm{Im}\ z\geqslant\dfrac{1}{2},\ z\in\mathbf{C}\right\}$

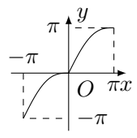
14. 已知直线 l、m, 平面 α、β, 且 $l\perp\alpha$, $m\subset\beta$, 给出下列四个命题.
① 若 $\alpha\parallel\beta$, $l\perp m$; ② $l\perp m$, $\alpha\parallel\beta$; ③ 若 $\alpha\perp\beta$, 则 $l\parallel m$; ④ 若 $l\parallel m$, $\alpha\perp\beta$.
其中正确命题的个数是 （ ）

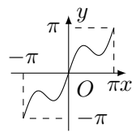
(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

15. 函数 $y=x+\sin|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$ 的大致图象是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

16. 一般地, 家庭用电量 (千瓦时) 与气温 (°C) 有一定的关系. 图 (1) 表示某年 12 个月中每月的平均气温, 图 (2) 表示某家庭在这年 12 个月中每月的用电量, 根据这些信息, 以下关于该家庭用电量与气温间关系的叙述中, 正确是 （ ）

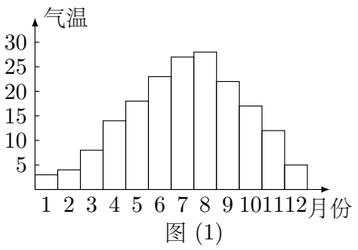


图 (1)

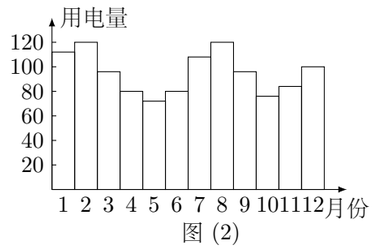


图 (2)

(A) 气温最高时, 用电量最多

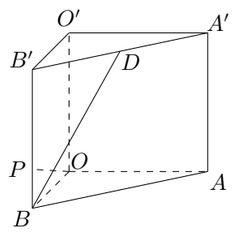
(B) 气温最低时, 用电量最少

(C) 当气温大于某一值时, 用电量随气温增高而增加

(D) 当气温小于某一值时, 用电量随气温降低而增加

三、解答题

17. 如图, 在直三棱柱 $ABO-A'B'O'$ 中, $OO'=4$, $OA=4$, $OB=3$, $\angle AOB=90^\circ$, D 是线段 $A'B'$ 的中点, P 是侧棱 BB' 上的一点, 若 $OP\perp BD$, 求 OP 与底面 AOB 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$, 动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2, 点 C 的轨迹与直线 $y=x-2$ 交于 D、E 两点, 求线段 DE 的长.

19. 已知函数 $f(x)=x^2+2x\cdot\tan\theta-1$, $x\in[-1,\sqrt{3}]$, 其中 $\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.
(1) 当 $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 的最大值与最小值.
(2) 求实数 θ 的取值范围, 使 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,\sqrt{3}]$ 上是单调函数.

20. 某商场在促销期间规定: 商场内所有商品按标价的 80% 出售, 同时, 当顾客在该商场内消费满一定金额后, 按如下方案获得相应金额的奖券:

消费金额的范围	$[200,400)$	$[400,500)$	$[500,700)$	$[700,900)$	$\cdots$
获得奖券的金额	30	60	100	130	$\cdots$

根据上述促销方法, 顾客在该商场购物可以获得双重优惠, 例如, 购买标价为 400 元的商品, 则消费金额为 320 元, 获得的优惠额为: $400\times0.2+30=110$ (元), 设购买商品得到的优惠率 $=\dfrac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$. 试问:

(1) 若购买一件标价为 1000 元的商品, 顾客得到的优惠率是多少?

(2) 对于标价在 $[500,800]$ (元) 内的商品, 顾客购买标价为多少元的商品, 可得到不小于 $\dfrac{1}{3}$ 的优惠率?

21. 已知函数 $f(x)=a\times b^x$ 的图象过点 $A\left(4,\dfrac{1}{4}\right)$ 和 $B(5,1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 记 $a_n=\log_2 f(n)$, n 是正整数, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 解关于 n 的不等式 $a_nS_n\leqslant 0$;

(3) 对于 (2) 中的 a_n 与 S_n, 整数 10^4 是否为数列 $\{a_nS_n\}$ 中的项? 若是, 则求出相应的项数; 若不是, 则说明理由.

22. 规定 $\mathrm{C}_x^m=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$, 其中 $x\in\mathbf{R}$, m 是正整数, 且 $\mathrm{C}_x^0=1$, 这是组合数 C_n^m (n, m 是正整数, 且 $m\leqslant n$) 的一种推广.

(1) 求 C_{-15}^5 的值.

(2) 组合数的两个性质: ① $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$; ② $\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}=\mathrm{C}_{n+1}^m$ 是否都能推广到 C_x^m ($x\in\mathbf{R}$, m 是正整数) 的情形? 若能推广, 则写出推广的形式并给出证明; 若不能, 则说明理由;

(3) 已知组合数 C_n^m 是正整数, 证明: 当 $x\in\mathbf{Z}$, m 是正整数时, $\mathrm{C}_x^m\in\mathbf{Z}$.

2002 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 若 $z \in \mathbf{C}$, $(3+z)\mathrm{i}=1$ (i 为虚数单位), 则 $z=$_____.

2. 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 120°, 且 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, 则 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=$_____.

3. 方程 $\log_3(1-2\times 3^x)=2x+1$ 的解 $x=$_____.

4. 若正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{3}$ cm, 体积为 4 cm^3, 则它的侧面与底面所成的二面角的大小是_____.

5. 在二项式 $(1+3x)^n$ 和 $(2x+5)^n$ 的展开式中, 各项系数之和分别记为 a_n、b_n, n 是正整数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-2b_n}{3a_n-4b_n}=$_____.

6. 已知圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 和圆外一点 $P(-2,0)$, 过点 P 作圆的切线, 则两条切线夹角的正切值是_____.

7. 在某次花样滑冰比赛中, 发生裁判受贿事件, 竞赛委员会决定将裁判由原来的 9 名增至 14 名, 但只任取其中 7 名裁判的评分作为有效分, 若 14 名裁判中有 2 人受贿, 则有效分中没有受贿裁判的评分的概率是_____. (结果用数值表示)

8. 抛物线 $(y-1)^2=4(x-1)$ 的焦点坐标是_____.

9. 某工程由下列工序组成, 则工程总时数为_____天.

工序	a	b	c	d	e	f
紧前工序	–	–	a、b	c	c	d、e
工时数 (天)	2	3	2	5	4	1

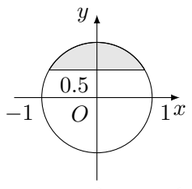
10. 设函数 $f(x)=\sin 2x$, 若 $f(x+t)$ 是偶函数, 则 t 的一个可能值是_____.

11. 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, 且 $a_{n+1}=a_n^2$ (n 是正整数), 则数列的通项 $a_n=$_____.

12. 已知函数 $y=f(x)$ (定义域为 D, 值域为 A) 有反函数 $y=f^{-1}(x)$, 则方程 $f(x)=0$ 有解 $x=a$, 且 $f(x)>x$ ($x\in D$) 的充要条件是 $y=f^{-1}(x)$ 满足_____.

二、选择题

13. 如图, 与复平面中的阴影部分 (含边界) 对应的复数集合是 （ ）

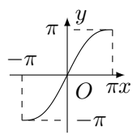


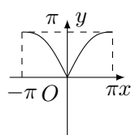
(A) $\left\{z\middle||z|=1,\ \mathrm{Re}\ z\geqslant\dfrac{1}{2},\ z\in\mathbf{C}\right\}$ (B) $\left\{z\middle||z|\leqslant 1,\ \mathrm{Re}\ z\geqslant\dfrac{1}{2},\ z\in\mathbf{C}\right\}$

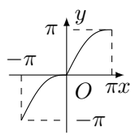
(C) $\left\{z\middle||z|=1,\ \mathrm{Im}\ z\geqslant\dfrac{1}{2},\ z\in\mathbf{C}\right\}$ (D) $\left\{z\middle||z|\leqslant 1,\ \mathrm{Im}\ z\geqslant\dfrac{1}{2},\ z\in\mathbf{C}\right\}$

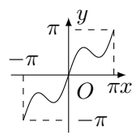
14. 已知直线 l、m, 平面 α、β, 且 $l\perp\alpha$, $m\subset\beta$, 给出下列四个命题.
① 若 $\alpha\parallel\beta$, $l\perp m$; ② $l\perp m$, $\alpha\parallel\beta$; ③ 若 $\alpha\perp\beta$, 则 $l\parallel m$; ④ 若 $l\parallel m$, $\alpha\perp\beta$.
其中正确命题的个数是 （ ）
(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

15. 函数 $y=x+\sin|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$ 的大致图象是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

16. 一般地, 家庭用电量 (千瓦时) 与气温 (°C) 有一定的关系. 图 (1) 表示某年 12 个月中每月的平均气温, 图 (2) 表示某家庭在这年 12 个月中每月的用电量, 根据这些信息, 以下关于该家庭用电量与气温间关系的叙述中, 正确是 （ ）

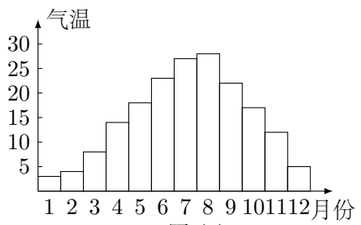


图 (1)

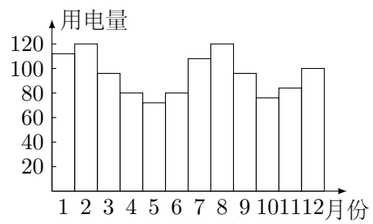
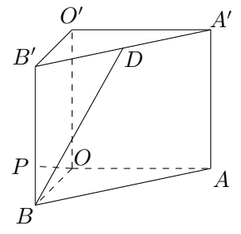


图 (2)

(A) 气温最高时, 用电量最多
(B) 气温最低时, 用电量最少
(C) 当气温大于某一值时, 用电量随气温增高而增加
(D) 当气温小于某一值时, 用电量随气温降低而增加

三、解答题

17. 如图, 在直三棱柱 $ABO-A'B'O'$ 中, $OO'=4$, $OA=4$, $OB=3$, $\angle AOB=90^\circ$, D 是线段 $A'B'$ 的中点, P 是侧棱 BB' 上的一点, 若 $OP\perp BD$, 求 OP 与底面 AOB 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$, 动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2, 点 C 的轨迹与直线 $y=x-2$ 交于 D、E 两点, 求线段 DE 的长.

19. 已知函数 $f(x)=x^2+2ax+2$, $x\in[-5,5]$.
(1) 当 $a=-1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值与最小值.
(2) 求实数 a 的取值范围, 使 $y=f(x)$ 在区间 $[-5,5]$ 上是单调函数.

20. 某商场在促销期间规定: 商场内所有商品按标价的 80% 出售, 同时, 当顾客在该商场内消费满一定金额后, 按如下方案获得相应金额的奖券:

消费金额的范围	$[200,400)$	$[400,500)$	$[500,700)$	$[700,900)$	$\cdots$
获得奖券的金额	30	60	100	130	$\cdots$

根据上述促销方法, 顾客在该商场购物可以获得双重优惠, 例如, 购买标价为 400 元的商品, 则消费金额为 320 元, 获得的优惠额为: $400\times0.2+30=110$ (元), 设购买商品得到的优惠率 $=\dfrac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$. 试问:

(1) 若购买一件标价为 1000 元的商品, 顾客得到的优惠率是多少?

(2) 对于标价在 $[500,800]$ (元) 内的商品, 顾客购买标价为多少元的商品, 可得到不小于 $\dfrac{1}{3}$ 的优惠率?

21. 已知函数 $f(x)=a\times b^x$ 的图象过点 $A\left(4,\dfrac{1}{4}\right)$ 和 $B(5,1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 记 $a_n=\log_2 f(n)$, n 是正整数, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 解关于 n 的不等式 $a_nS_n\leqslant 0$;

(3) 对于 (2) 中的 a_n 与 S_n, 整数 96 是否为数列 $\{a_nS_n\}$ 中的项? 若是, 则求出相应的项数; 若不是, 则说明理由.

22. 规定 $\mathrm{C}_x^m=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$, 其中 $x\in\mathbf{R}$, m 是正整数, 且 $\mathrm{C}_x^0=1$, 这是组合数 C_n^m (n, m 是正整数, 且 $m\leqslant n$) 的一种推广.

(1) 求 C_{-15}^3 的值.

(2) 设 $x>0$, 当 x 为何值时, $\dfrac{\mathrm{C}_x^3}{(\mathrm{C}_x^1)^2}$ 取得最小值?

(3) 组合数的两个性质: ① $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$; ② $\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}=\mathrm{C}_{n+1}^m$ 是否都能推广到 C_x^m ($x\in\mathbf{R}$, m 是正整数) 的情形? 若能推广, 则写出推广的形式并给出证明; 若不能, 则说明理由.

2002 年普通高等学校招生考试（苏豫粤）

数学试卷

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) π　(C) 2π　(D) 4π

2. 圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) 1　(D) $\sqrt{3}$

3. 不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是 （ ）

(A) $\{x|0\leqslant x<1\}$　(B) $\{x|x<0$ 且 $x\neq -1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　(D) $\{x|x<1$ 且 $x\neq -1\}$

4. 在 $(0,2\pi)$ 内, 使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$　(B) $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$

(C) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$　(D) $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

5. 设集合 $M=\left\{x\left|x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$, $N=\left\{x\left|x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$, 则 （ ）

(A) $M=N$　(B) $M\subseteq N$　(C) $M\supseteq N$　(D) $M\cap N=\varnothing$

6. 一个圆锥和一个半球有公共底面, 如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等, 那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是 （ ）

(A) $\dfrac{3}{4}$　(B) $\dfrac{4}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $-\dfrac{3}{5}$

7. 函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是 （ ）

(A) $ab=0$　(B) $a+b=0$　(C) $a=b$　(D) $a^2+b^2=0$

8. 已知 $0<x<y<a<1$, 则有 （ ）

(A) $\log_a(xy)<0$　(B) $0<\log_a(xy)<1$

(C) $1<\log_a(xy)<2$　(D) $\log_a(xy)>2$

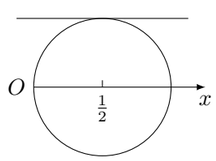
9. 函数 $y=1-\dfrac{1}{x-1}$ （ ）

(A) 在 $(-1,+\infty)$ 内单调递增　(B) 在 $(-1,+\infty)$ 内单调递减

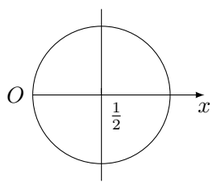
(C) 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增　(D) 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减

10. 极坐标方程 $\rho=\cos\theta$ 与 $\rho\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 的图形是 （ ）

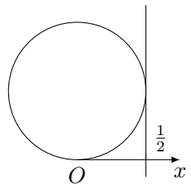
(A)



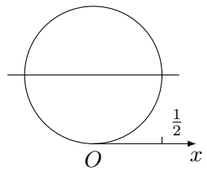
(B)



(C)



(D)



11. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有 （ ）

(A) 8 种　(B) 12 种　(C) 16 种　(D) 20 种

12. 据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》: “2001 年国内生产总值达到 95933 亿元, 比上年增长 7.3%”, 如果“十 • 五”期间 (2001 年 – 2005 年) 每年的国内生产总值都按此年增长率增长, 那么到“十 • 五”末我国国内年生产总值约为 （ ）

(A) 115000 亿元　(B) 120000 亿元　(C) 127000 亿元　(D) 135000 亿元

二、填空题

13. 椭圆 $5x^2+ky^2=5$ 的一个焦点是 $(0,2)$, 那么 $k=$_____.

14. $(x^2+1)(x-2)^7$ 展开式中 x^3 的系数是_____.

15. 已知 $\sin\alpha=\cos 2\alpha$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 则 $\tan\alpha=$_____.

16. 已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1)+f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$_____.

三、解答题

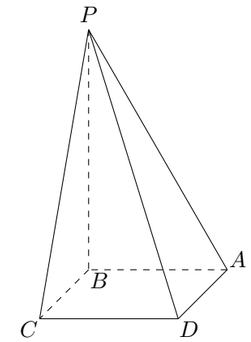
17. 已知复数 $z=1+\mathrm{i}$, 求实数 a, b 使 $az+2b\bar{z}=(a+2z)^2$.

18. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1=b_1=1$, $a_2+a_4=b_3$, $b_2b_4=a_3$, 分别求出 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 的前 10 项的和 S_{10} 及 T_{10}.

19. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的正方形, $PB\perp$ 平面 $ABCD$.

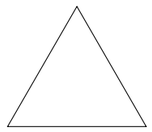
(1) 若面 PAD 与面 $ABCD$ 所成的二面角为 60°, 求这个四棱锥的体积;

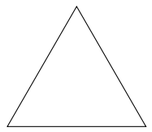
(2) 证明无论四棱锥的高怎样变化, 面 PAD 与面 PCD 所成的二面角恒大于 90°.

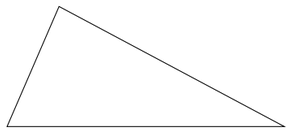


20. 设 A、B 是双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上的两点, 点 $N(1,2)$ 是线段 AB 的中点.
(1) 求直线 AB 的方程;
(2) 如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线相交于 C, D 两点, 那么 A, B, C, D 四点是否共圆? 为什么?

21. (1) 给出两块相同的正三角形纸片 (如图 1, 图 2), 要求用其中一块剪拼成一个三棱锥模型, 另一块剪拼成一个正三棱柱模型, 使它们的全面积都与原三角形的面积相等, 请设计一种剪拼方法, 分别用虚线标示在图 1、图 2 中, 并作简要说明;
(2) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小;
(3) 如果给出的是一块任意三角形的纸片 (如图 3), 要求剪栟成一个直三棱柱, 使它的全面积与给出的三角形的面积相等. 请设计一种剪拼方法, 用虚线标示在图 3 中, 并作简要说明.


图 1


图 2


图 3

22. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=ax-bx^2$.
(1) 当 $b>0$ 时, 若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leqslant 1$, 证明: $a\leqslant 2\sqrt{b}$;
(2) 当 $b>1$ 时, 证明: 对任意 $x\in[0,1]$, $|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$;
(3) 当 $0<b\leqslant 1$ 时, 讨论: 对任意 $x\in[0,1]$, $|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件.

2002 年普通高等学校招生考试（新课标）

理科数学

一、选择题

1. 曲线 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 上的点到两坐标轴的距离之和的最大值是 （ ）

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) 1　(D) $\sqrt{2}$

2. 复数 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3$ 的值是 （ ）

(A) $-\mathrm{i}$　(B) i　(C) -1　(D) 1

3. 已知 m, n 为异面直线, $m\subset$ 平面 α, $n\subset$ 平面 β, $\alpha\cap\beta=l$, 则 l （ ）

(A) 与 m, n 都相交　(B) 与 m, n 中至少一条相交

(C) 与 m, n 都不相交　(D) 至多与 m, n 中的一条相交

4. 不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是 （ ）

(A) $\{x|0\leqslant x<1\}$　(B) $\{x|x<0$ 且 $x\neq -1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　(D) $\{x|x<1$ 且 $x\neq -1\}$

5. 在 $(0,2\pi)$ 内, 使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$　(B) $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$

(C) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$　(D) $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$

6. 设集合 $M=\left\{x\left|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$, $N=\left\{x\left|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$, 则 （ ）

(A) $M=N$　(B) $M\subseteq N$　(C) $M\supseteq N$　(D) $M\cap N=\varnothing$

7. 正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 则这个棱柱侧面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角是 （ ）

(A) 90°　(B) 60°　(C) 45°　(D) 30°

8. 函数 $y=x^2+bx+c$, $x\in[0,+\infty)$ 是单调函数的充要条件是 （ ）

(A) $b\geqslant 0$　(B) $b\leqslant 0$　(C) $b>0$　(D) $b<0$

9. 已知 $0<x<y<a<1$, 则有 （ ）

(A) $\log_a(xy)<0$　(B) $0<\log_a(xy)<1$

(C) $1<\log_a(xy)<2$　(D) $\log_a(xy)>2$

10. 平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 已知两点 $A(3,1)$、$B(-1,3)$, 若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$, 其中 α、$\beta\in\mathbf{R}$, 且 $\alpha+\beta=1$, 则点 C 的轨迹方程为 （ ）

(A) $3x+2y-11=0$　(B) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

(C) $2x-y=0$　(D) $x+2y-5=0$

11. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有（ ）

(A) 8 种　(B) 12 种　(C) 16 种　(D) 20 种

12. 据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》: “2001 年国内生产总值达到 95933 亿元, 比上年增长 7.3%”, 如果“十•五”期间 (2001 年－2005 年) 每年的国内生产总值都按此年增长率增长, 那么到“十•五”末我国国内年生产总值约为 （ ）

(A) 115000 亿元　(B) 120000 亿元　(C) 127000 亿元　(D) 135000 亿元

二、填空题

13. 函数 $y=\frac{2x}{1+x}$, $x\in(-1,+\infty)$ 图象与其反函数图象的交点为_____.

14. 椭圆 $5x^2+ky^2=5$ 的一个焦点是 $(0,2)$, 那么 $k=$_____.

15. 直线 $x=0$, $y=0$, $x=2$ 与曲线 $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积等于_____.

16. 已知 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1)+f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)=$_____.

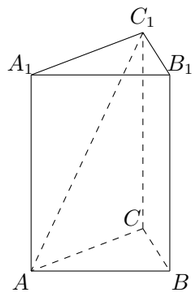
三、解答题

17. 已知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\frac{3\pi}{2}$, 求 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

18. 【甲】如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a, 侧棱长为 $\sqrt{2}a$.

(1) 建立适当的坐标系, 并写出点 A, B, A_1, C_1 的坐标;

(2) 求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

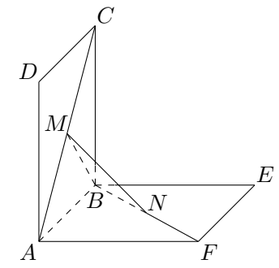


【乙】如图, 正方形 $ABCD$、$ABEF$ 的边长都是 1, 而且平面 $ABCD$、$ABEF$ 互相垂直. 点 M 在 AC 上移动, 点 N 在 BF 上移动, 若 $CM=BN=a$ $(0<a<\sqrt{2})$.

(1) 求 MN 的长;

(2) a 为何值时, MN 的长最小;

(3) 当 MN 的长最小时, 求面 MNA 与面 MNB 所成二面角 α 的大小.



19. 某单位 6 个员工借助互联网开展工作, 每个员工上网的概率都是 0.5 (相互独立).

(1) 求至少 3 人同时上网的概率;

(2) 至少几人同时上网的概率小于 0.3?

20. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\dfrac{1-ax}{x}$, $x\in(0,+\infty)$. 设 $0<x_1<\dfrac{2}{a}$, 记曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 l.

(1) 求 l 的方程;

(2) 设 l 与 x 轴交点为 $(x_2,0)$. 证明:

① $0<x_2\leqslant\dfrac{1}{a}$;

② 若 $x_1<\dfrac{1}{a}$, 则 $x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

21. 已知两点 $M(-1,0),N(1,0)$, 且点 P 使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$ 成公差小于零的等差数列.

(1) 点 P 的轨迹是什么曲线?

(2) 若点 P 坐标为 (x_0,y_0), 记 θ 为 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角, 求 $\tan\theta$.

22. 已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的数列, 满足 $a_1=0$, $a_2=3$, $a_{n+1}a_n=(a_{n-1}+2)(a_{n-2}+2)$, $n=3,4,5,\cdots$.

(1) 求 a_3;

(2) 证明 $a_n=a_{n-2}+2$, $n=3,4,5,\cdots$;

(3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 S_n.

2002 年普通高等学校招生考试（新课标）

文科数学

一、选择题

1. 直线 $(1+a)x+y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相切, 则 a 的值为 (　　)

(A) ±1　　(B) ±2　　(C) 1　　(D) -1

2. 已知 m, n 为异面直线, $m\subset$ 平面 α, $n\subset$ 平面 β, $\alpha\cap\beta=l$, 则 l　　(　　)

(A) 与 m, n 都相交　　(B) 与 m, n 中至少一条相交

(C) 与 m, n 都不相交　　(D) 至多与 m, n 中的一条相交

3. 函数 $y=a^x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值这和为 3, 则 $a=$　　(　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 2　　(C) 4　　(D) $\dfrac{1}{4}$

4. 不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是　　(　　)

(A) $\{x|0\leqslant x<1\}$　　(B) $\{x|x<0$ 且 $x\neq-1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　　(D) $\{x|x<1$ 且 $x\neq-1\}$

5. 在 $(0,2\pi)$ 内, 使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是　　(　　)

(A) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$　　(B) $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$

(C) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

6. 设集合 $M=\left\{x\left|x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$, $N=\left\{x\left|x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$, 则　　(　　)

(A) $M=N$　　(B) $M\subseteq N$　　(C) $M\supseteq N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

7. 椭圆 $5x^2+ky^2=5$ 的一个焦点是 $(0,2)$, 那么 $k=$　　(　　)

(A) -1　　(B) 1　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) $-\sqrt{5}$

8. 正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 则这个棱柱侧面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角是　　(　　)

(A) 90°　　(B) 60°　　(C) 45°　　(D) 30°

9. 函数 $y=x^2+bx+c$, $x\in[0,+\infty)$ 是单调函数的充要条件是　　(　　)

(A) $b\geqslant0$　　(B) $b\leqslant0$　　(C) $b>0$　　(D) $b<0$

10. 已知 $0<x<y<a<1$, 则有　　(　　)

(A) $\log_a(xy)<0$　　(B) $0<\log_a(xy)<1$

(C) $1<\log_a(xy)<2$　　(D) $\log_a(xy)>2$

11. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有 (　　)

(A) 8 种　　(B) 12 种　　(C) 16 种　　(D) 20 种

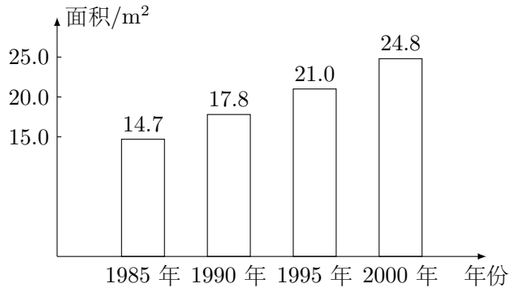
12. 平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 已知两点 $A(3,1)$、$B(-1,3)$, 若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$, 其中 α、$\beta\in\mathbf{R}$, 且 $\alpha+\beta=1$, 则点 C 的轨迹方程为　　(　　)

(A) $3x+2y-11=0$　　(B) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

(C) $2x-y=0$　　(D) $x+2y-5=0$

二、填空题

13. 据新华社 2002 年 3 月 12 日电, 1985 年到 2000 年间, 我国农村人均居住面积如图所示, 其中, 从_____年_____年的五年间增长最快.



14. 已知 $\sin2\alpha=-\sin\alpha$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 则 $\cot\alpha=$_____.

15. 甲、乙两种冬小麦试验品种连续 5 年的平均单位面积产量如下 (单位: t/km²):

品种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
甲	9.8	9.9	10.1	10	10.2
乙	9.4	10.3	10.8	9.7	9.8

其中产量比较稳定的小麦品种是_____.

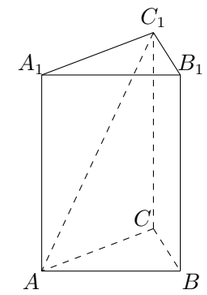
16. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 下列函数
① $y=-|f(x)|$; ② $y=xf(x^2)$; ③ $y=-f(-x)$; ④ $y=f(x)-f(-x)$.
其中必为奇函数的有_____. (要求填写正确答案的序号)

三、解答题

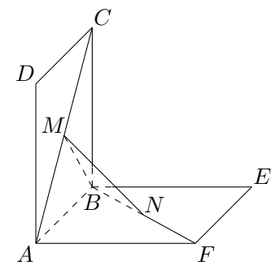
17. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_6-a_4=24$, $a_3a_5=64$, 求 $\{a_n\}$ 前 8 项的和 S_8.

18. 已知 $\sin^22\alpha+\sin2\alpha\cos\alpha-\cos2\alpha=1$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求 $\sin\alpha$、$\tan\alpha$ 的值.

19. 【甲】如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a, 侧棱长为 $\sqrt{2}a$.
(1) 建立适当的坐标系, 并写出点 A, B, A_1, C_1 的坐标;
(2) 求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.



【乙】如图, 正方形 $ABCD$、$ABEF$ 的边长都是 1, 而且平面 $ABCD$、$ABEF$ 互相垂直. 点 M 在 AC 上移动, 点 N 在 BF 上移动, 若 $CM=BN=a$ $(0<a<\sqrt{2})$.
(1) 求 MN 的长;
(2) a 为何值时, MN 的长最小;
(3) 当 MN 的长最小时, 求面 MNA 与面 MNB 所成二面角 α 的大小.



20. 某单位 6 个员工借助互联网开展工作, 每个员工上网的概率都是 0.5 (相互独立).
(1) 求至少 3 人同时上网的概率;
(2) 至少几人同时上网的概率小于 0.3?

21. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=x^3-a$, $x\in(0,+\infty)$. 设 $x_1>0$, 记曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 l.
(1) 求 l 的方程;
(2) 设 l 与 x 轴交点为 $(x_2,0)$. 证明:
① $x_2\geqslant a^{\frac{1}{3}}$;
② 若 $x_2>a^{\frac{1}{3}}$, 则 $a^{\frac{1}{3}}<x_2<x_1$.

22. 已知两点 $M(-1,0),N(1,0)$, 且点 P 使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$ 成公差小于零的等差数列.
(1) 点 P 的轨迹是什么曲线?
(2) 若点 P 坐标为 (x_0,y_0), 记 θ 为 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角, 求 $\tan\theta$.

2003 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 若集合 $M=\{y|y=2^{-x}\}$, $P=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$, 则 $M\cap P=$ （ ）

(A) $\{y|y>1\}$　(B) $\{y|y\geqslant 1\}$　(C) $\{y|y>0\}$　(D) $\{y|y\geqslant 0\}$

2. 若 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$, 则方程 $f(4x)=x$ 的根是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) 2　(D) -2

3. 设复数 $z_1=-1+\mathrm{i}$, $z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 则 $\arg\dfrac{z_1}{z_2}=$ （ ）

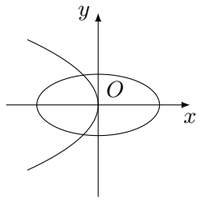
(A) $\dfrac{13}{12}\pi$　(B) $\dfrac{7}{12}\pi$　(C) $\dfrac{5}{12}\pi$　(D) $-\dfrac{5}{12}\pi$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值是 （ ）

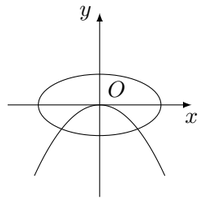
(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $\dfrac{5}{4}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{4}{3}$

5. 在同一坐标系中, 方程 $a^2x^2+b^2y^2=1$ 与 $ax+by^2=0$ $(a>b>0)$ 的曲线大致是 （ ）

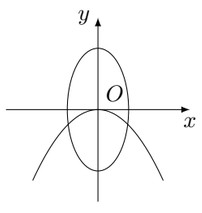
(A)



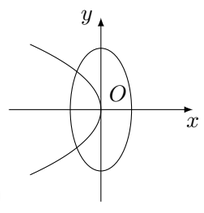
(B)



(C)



(D)



6. 若 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 且 $A<B<C$ $\left(C\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则下列结论中正确的是 （ ）

(A) $\sin A<\sin C$　(B) $\cos A<\cos C$

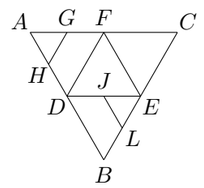
(C) $\tan A<\tan C$　(D) $\cot A<\cot C$

7. 椭圆 $\begin{cases}x=4+5\cos\varphi\\ y=3\sin\varphi\end{cases}$ (φ 为参数) 的焦点坐标为 （ ）

(A) $(0,0)$, $(0,-8)$　(B) $(0,0)$, $(-8,0)$

(C) $(0,0)$, $(0,8)$　(D) $(0,0)$, $(8,0)$

8. 如图, 在正三角形 ABC 中, D, E, F 分别为各边的中点, G, H, I, J 分别为 AF, AD, BE, DE 的中点. 将 $\triangle ABC$ 沿 DE, EF, DF 折成三棱锥以后, GH 与 IJ 所成角的度数为 （ ）



(A) 90°　(B) 60°　(C) 45°　(D) 0°

9. 某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单, 开演前又增加了两个新节目. 如果将这两个节目插入原节目单中, 那么不同插法的种数为 （ ）

(A) 42　(B) 30　(C) 20　(D) 12

10. 已知直线 $ax+by+c=0$ $(abc\neq 0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切, 则三条边长分别为 $|a|$, $|b|$, $|c|$ 的三角形 （ ）

(A) 是锐角三角形　(B) 是直角三角形

(C) 是钝角三角形　(D) 不存在

11. 若不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为 $(-1,2)$, 则实数 a 等于 （ ）

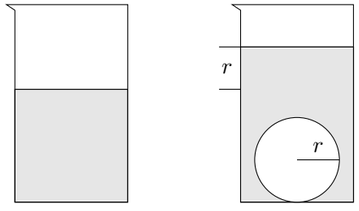
(A) 8　(B) 2　(C) -4　(D) -8

12. 在直角坐标系 xOy 中, 已知 $\triangle AOB$ 三边所在直线的方程分别为 $x=0$, $y=0$, $2x+3y=30$, 则 $\triangle AOB$ 内部和边上整点 (即横、纵坐标均为整数的点) 的总数是 （ ）

(A) 95　(B) 91　(C) 88　(D) 75

二、填空题

13. 如图, 一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水. 若放入一个半径为 r 的实心铁球, 水面高度恰好升高 r, 则 $\dfrac{R}{r}=$_____.



14. 在某报《自测健康状况》的报道中, 自测血压结果与相应年龄的统计数据如下表. 观察表中数据的特点, 用适当的数填入表中空白内.

年龄 (岁)	30	35	40	45	50	55	60	65
收缩压 (水银柱/毫米)	110	115	120	125	130	135		145
舒张压 (水银柱/毫米)	70	73	75	78	80	83		88

15. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点, 点 P 在椭圆上, $\triangle POF_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 则 b^2 的值是_____.

16. 若存在常数 $p>0$, 使得函数 $f(x)$ 满足 $f(px)=f\left(px-\dfrac{p}{2}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$, 则 $f(x)$ 的一个正周期为_____.

三、解答题

17. 解不等式: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)>\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1$.

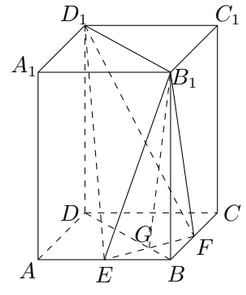
18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{6\cos^4x+5\sin^2x-4}{\cos 2x}$, 求 $f(x)$ 的定义域, 判断它的奇偶性, 并求其值域.

19. 如图, 正四棱柱 $ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面边长为 $2\sqrt{2}$, 侧棱长为 4. E, F 分别为棱 AB, BC 的中点, $EF\cap BD=G$.

(1) 求证: 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1B_1;

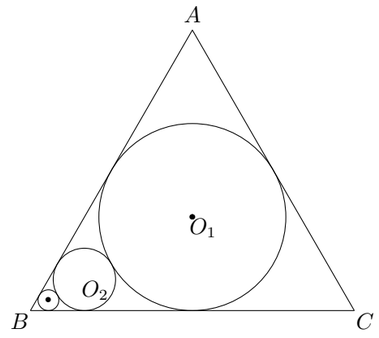
(2) 求点 D_1 到平面 B_1EF 的距离 d;

(3) 求三棱锥 B_1—EFD_1 的体积 V.



20. 某租赁公司拥有汽车 100 辆. 当每辆车的月租金为 3000 元时, 可全部租出. 当每辆车的月租金每增加 50 元时, 未租出的车将会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 150 元, 未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.
(1) 当每辆车的月租金定为 3600 元时, 能租出多少辆车?
(2) 当每辆车的月租金定为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少?

21. 如图, 在边长为 l 的等边 $\triangle ABC$ 中, 圆 O_1 为 $\triangle ABC$ 的内切圆, 圆 O_2 与圆 O_1 外切, 且与 AB, BC 相切, $\cdots$, 圆 O_{n+1} 与圆 O_n 外切, 且与 AB, BC 相切, 如此无限继续下去. 记圆 O_n 的面积为 a_n ($n \in \mathbf{N}$).
(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列;
(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 的值.



22. 已知动圆过定点 $P(1,0)$, 且与定直线 $l: x = -1$ 相切, 点 C 在 l 上.
(1) 求动圆圆心的轨迹 M 的方程;
(2) 设过点 P, 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与曲线 M 相交于 A, B 两点.
① 问: $\triangle ABC$ 能否为正三角形? 若能, 求点 C 的坐标; 若不能, 说明理由;
② 当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时, 求这种点 C 的纵坐标的取值范围.

2003 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ 且 $a>b$, $c>d$, 且下列结论中正确的是 （ ）

(A) $a+c>b+d$　　(B) $a-c>b-d$

(C) $ac>bd$　　(D) $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$

2. 设 M 和 m 分别表示函数 $y=\dfrac{1}{3}\cos x-1$ 的最大值和最小值, 则 $M+m$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) $-\dfrac{2}{3}$　　(C) $-\dfrac{4}{3}$　　(D) -2

3. 若 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$, 则方程 $f(4x)=x$ 的根是 （ ）

(A) -2　　(B) 2　　(C) $-\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

4. 若集合 $M=\{y|y=2^{-x}\}$, $P=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$, 则 $M\cap P=$ （ ）

(A) $\{y|y>1\}$　　(B) $\{y|y\geqslant 1\}$　　(C) $\{y|y>0\}$　　(D) $\{y|y\geqslant 0\}$

5. 若 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 且 $A<B<C$ $\left(C\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则下列结论中正确的是 （ ）

(A) $\tan A<\tan C$　　(B) $\cot A<\cot C$

(C) $\sin A<\sin C$　　(D) $\cos A<\cos C$

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=20$, 那么 a_3 等于（ ）

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

7. 设复数 $z_1=-1+\mathrm{i}$, $z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 则 $\arg\dfrac{z_1}{z_2}=$ （ ）

(A) $-\dfrac{5}{12}\pi$　　(B) $\dfrac{5}{12}\pi$　　(C) $\dfrac{7}{12}\pi$　　(D) $\dfrac{13}{12}\pi$

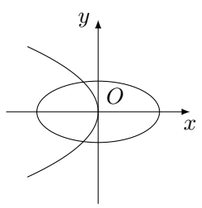
8. 函数 $f(x)=|x|$ 和 $g(x)=x(2-x)$ 的递增区间依次是 （ ）

(A) $(-\infty,0]$, $(-\infty,1]$　　(B) $(-\infty,0]$, $[1,+\infty)$

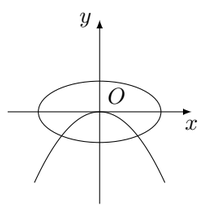
(C) $[0,+\infty)$, $(-\infty,1]$　　(D) $[0,+\infty)$, $[1,+\infty)$

9. 在同一坐标系中, 方程 $a^2x^2+b^2y^2=1$ 与 $ax+by^2=0$ $(a>b>0)$ 的曲线大致是 （ ）

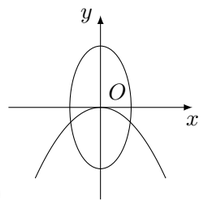
(A)



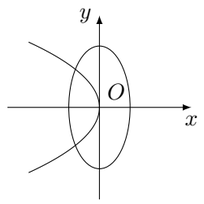
(B)



(C)



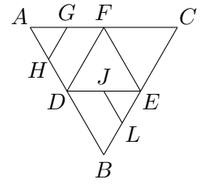
(D)



10. 某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单, 开演前又增加了两个新节目. 如果将这两个节目插入原节目单中, 且两个新节目不相邻, 那么不同插法的种数为 （ ）

(A) 6　　(B) 12　　(C) 15　　(D) 30

11. 如图, 在正三角形 ABC 中, D, E, F 分别为各边的中点, G, H, I, J 分别为 AF, AD, BE, DE 的中点. 将 $\triangle ABC$ 沿 DE, EF, DF 折成三棱锥以后, GH 与 IJ 所成角的度数为 （ ）



(A) 90°　　(B) 60°　　(C) 45°　　(D) 0°

12. 已知直线 $ax+by+c=0$ $(abc\neq 0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切, 则三条边长分别为 $|a|$, $|b|$, $|c|$ 的三角形 （ ）

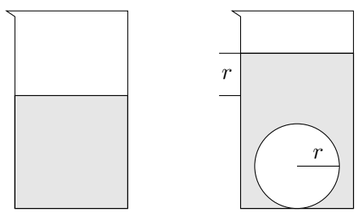
(A) 是锐角三角形　　(B) 是直角三角形

(C) 是钝角三角形　　(D) 不存在

二、填空题

13. 函数 $y=\sin 2x+1$ 的最小正周期为_____.

14. 如图, 一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水. 若放入一个半径为 r 的实心铁球, 水面高度恰好升高 r, 则 $\dfrac{R}{r}=$_____.



15. 在某报《自测健康状况》的报道中, 自测血压结果与相应年龄的统计数据如下表. 观察表中数据的特点, 用适当的数填入表中空白内.

年龄 (岁)	30	35	40	45	50	55	60	65
收缩压 (水银柱/毫米)	110	115	120	125	130	135		145
舒张压 (水银柱/毫米)	70	73	75	78	80	83		88

16. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点, 点 P 在椭圆上, $\triangle POF_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 则 b^2 的值是_____.

三、解答题

17. 解不等式: $\log_2(x^2-x-2)>\log_2(2x-2)$.

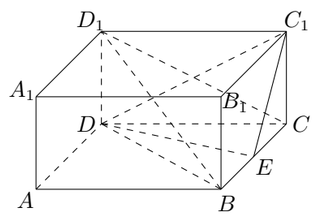
18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{6\cos^4x-5\cos^2x+1}{\cos 2x}$, 求 $f(x)$ 的定义域, 判断它的奇偶性, 并求其值域.

19. 如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱, 侧棱长为 1, 底面边长为 2, E 是棱 BC 的中点.

(1) 求三棱锥 D_1-DBC 的体积;

(2) 证明 $BD_1\parallel$ 平面 C_1DE;

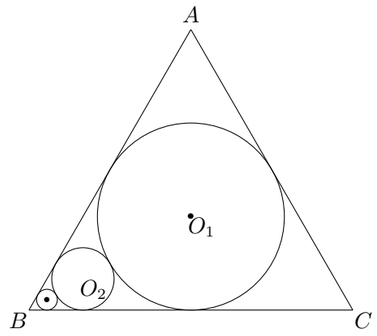
(3) 求面 C_1DE 与面 CDE 所成二面角的正切值.



20. 设 $A(-c,0)$, $B(c,0)$ $(c>0)$ 为两定点, 动点 P 到 A 点的距离与到 B 点的距离的比为定值 a $(a>0)$, 求 P 点的轨迹.

21. 某租赁公司拥有汽车 100 辆. 当每辆车的月租金为 3000 元时, 可全部租出. 当每辆车的月租金每增加 50 元时, 未租出的车将会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 150 元, 未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.
(1) 当每辆车的月租金定为 3600 元时, 能租出多少辆车?
(2) 当每辆车的月租金定为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少?

22. 如图, 在边长为 l 的等边 $\triangle ABC$ 中, 圆 O_1 为 $\triangle ABC$ 的内切圆, 圆 O_2 与圆 O_1 外切, 且与 AB, BC 相切, $\cdots$, 圆 O_{n+1} 与圆 O_n 外切, 且与 AB, BC 相切, 如此无限继续下去. 记圆 O_n 的面积为 a_n $(n\in\mathbf{N})$.
(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列;
(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的值.



2003 年普通高等学校春季招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}+1$, 则 $f^{-1}(3)=$_____.

2. 直线 $y=1$ 与直线 $y=\sqrt{3}x+3$ 的夹角为_____.

3. 已知点 $P(\tan\alpha,\cos\alpha)$ 在第三象限, 则角 α 的终边在第_____象限.

4. 直线 $y=x-1$ 被抛物线 $y^2=4x$ 截得线段的中点坐标是_____.

5. 已知集合 $A=\{x||x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x|x\geqslant a\}$, 且 $A\subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

6. 已知 z 为复数, 则 $z+\overline{z}>2$ 的一个充要条件是 z 满足_____.

7. 若过两点 $A(-1,0)$、$B(0,2)$ 的直线 l 与圆 $(x-1)^2+(y-a)^2=1$ 相切, 则 $a=$_____.

8. 不等式 $(\lg 20)^{2\cos x}>1$ $(x\in(0,\pi))$ 的解为_____.

9. 8 名世界网球顶级选手在上海大师赛上分成两组, 每组各 4 人, 分别进行单循环赛, 每组决出前两名, 再由每组的第一名与另一组的第二名进行淘汰赛, 获胜者角逐冠、亚军, 败者角逐第三、四名, 则该大师赛共有_____场比赛.

10. 若正三棱锥底面边长为 4, 体积为 1, 则侧面和底面所成二面角的大小等于_____. (结果用反三角函数值表示)

11. 若函数 $y=x^2+(a+2)x+3$, $x\in[a,b]$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $b=$_____.

12. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+\sqrt{2}}$, 利用课本中推导等差数列前 n 项和的公式的方法, 可求得 $f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)$ 的值为_____.

二、选择题

13. 关于直线 a、b、l 以及平面 M、N, 下列命题中正确的是 （ ）

(A) 若 $a\parallel M$, $b\parallel M$, 则 $a\parallel b$

(B) 若 $a\parallel M$, $b\perp a$, 则 $b\perp M$

(C) 若 $a\subset M$, $b\subset M$, 且 $l\perp a$, $l\perp b$, 则 $l\perp M$

(D) 若 $a\perp M$, $a\parallel N$, 则 $M\perp N$

14. 复数 $z=\dfrac{m-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ $(m\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位) 在复平面上对应的点不可能位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

15. 把曲线 $y\cos x+2y-1=0$ 先沿 x 轴向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位, 再沿 y 轴向下平移一个单位, 得到的曲线方程是 （ ）

(A) $(1-y)\sin x+2y-3=0$　(B) $(y-1)\sin x+2y-3=0$

(C) $(y+1)\sin x+2y+1=0$　(D) $-(y+1)\sin x+2y+1=0$

16. 关于函数 $f(x)=(\sin x)^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{|x|}+\dfrac{1}{2}$, 有下面四个结论:

① $f(x)$ 是奇函数;

② 当 $x>2003$ 时, $f(x)>\dfrac{1}{2}$ 恒成立;

③ $f(x)$ 的最大值是 $\dfrac{3}{2}$;

④ $f(x)$ 的最小值是 $-\dfrac{1}{2}$.

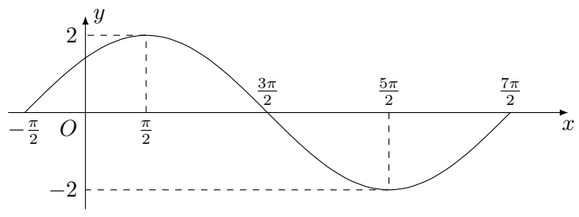
其中正确结论的个数为 （ ）

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

三、解答题

17. 解不等式组: $\begin{cases}x^2-6x+8>0\\ \dfrac{x+3}{x-1}>2\end{cases}$.

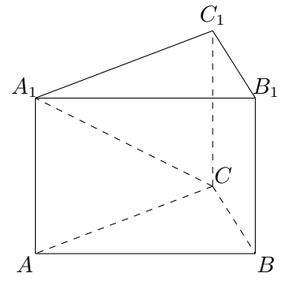
18. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$, $(A>0,\ \omega>0,\ x\in\mathbf{R})$ 在一个周期内的图象如图所示, 求直线 $y=\sqrt{3}$ 与函数 $f(x)$ 图象的所有交点的坐标.



19. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 在某个空间直角坐标系中, $\overrightarrow{AB}=\left\{\dfrac{m}{2},-\dfrac{\sqrt{3}m}{2},0\right\}$, $\overrightarrow{AC}=\{m,0,0\}$, $\overrightarrow{AA_1}=\{0,0,n\}$, 其中 m、$n>0$.

(1) 证明: 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱;

(2) 若 $m=\sqrt{2}n$, 求直线 CA_1 与平面 A_1ABB_1 所成角的大小.



20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}$, $g(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.
(1) 证明 $f(x)$ 是奇函数, 并求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 分别计算 $f(4)-5f(2)g(2)$ 和 $f(9)-5f(3)g(3)$ 的值, 由此概括出涉及函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式, 并加以证明.

21. 设 F_1、F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右两个焦点.
(1) 若椭圆 C 上的点 $A\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 到 F_1、F_2 两点的距离之和等于 4, 写出椭圆 C 的方程;
(2) 设 K 是 (1) 中所得椭圆上的动点, 求线段 F_1K 的中点的轨迹方程;
(3) 已知椭圆具有性质: 若 M、N 是椭圆 C 上关于原点对称的两个点, 点 P 是椭圆上任意一点, 当直线 PM、PN 的斜率都存在, 并记为 k_{PM}、k_{PN} 时, 那么 k_{PM} 与 k_{PN} 之积是与点 P 位置无关的定值. 试对双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 写出具有类似特性的性质, 并加以证明.

22. 在一次人才招聘会上, 有 A、B 两家公司分别开出了它们的工资标准: A 公司允诺第一个月工资为 1500 元, 以后每年月工资比上一年月工资增加 230 元; B 公司允诺第一年月工资数为 2000 元, 以后每年月工资在上一年的月工资基础上递增 5%, 设某人年初被 A、B 两家公司同时录取. 试问:
(1) 若该人分别在 A 公司或 B 公司连续工作 n 年, 则他在第 n 年的月工资收入分别是多少?
(2) 该人打算连续在一家公司工作 10 年, 仅从工资收入总量较多作为应聘的标准 (不记其它因素), 该人应该选择哪家公司, 为什么?
(3) 在 A 公司工作比在 B 公司工作的月工资收入最多可以多多少元? (精确到 1 元), 并说明理由.

2003 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|x^2-1>0\}$, $B=\{x|\log_2 x>0|\}$, $A\cap B$ 等于 （ ）

(A) $\{x|x>1\}$ (B) $\{x|x>0\}$

(C) $\{x|x<-1\}$ (D) $\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$

2. 设 $y_1=4^{0.9}$, $y_2=8^{0.44}$, $y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$, 则 （ ）

(A) $y_3>y_1>y_2$ (B) $y_2>y_1>y_3$ (C) $y_1>y_2>y_3$ (D) $y_1>y_3>y_2$

3. “$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12}$, $k\in\mathbf{Z}$”的 （ ）

(A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

4. 已知 α, β 是平面, m, n 是直线. 下列命题中不正确的是 （ ）

(A) 若 $m\parallel n$, $m\perp\alpha$, 则 $n\perp\alpha$ (B) 若 $m\parallel\alpha$, $\alpha\cap\beta=n$, 则 $m\parallel n$

(C) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$ (D) 若 $m\perp\alpha$, $m\subset\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

5. 极坐标方程 $\rho^2\cos 2\theta-2\rho\cos\theta=1$ 表示的曲线是 （ ）

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 抛物线 (D) 双曲线

6. 若 $z\in\mathbf{C}$ 且 $|z+2-2\mathrm{i}|=1$, 则 $|z-2-2\mathrm{i}|$ 的最小值是 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

7. 如果圆台的母线与底面成 60° 角, 那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为 （ ）

(A) 2π (B) $\frac{3}{2}\pi$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (D) $\frac{1}{2}\pi$

8. 从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种, 分别种在不同土质的三块土地上, 其中黄瓜必须种植, 不同的种植方法共有 （ ）

(A) 24 种 (B) 18 种 (C) 12 种 (D) 6 种

9. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{3^{-n}+2^{-n}+(-1)^n(3^{-n}-2^{-n})}{2}$, $n=1,2,\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 等于 （ ）

(A) $\frac{11}{24}$ (B) $\frac{17}{24}$ (C) $\frac{19}{24}$ (D) $\frac{25}{24}$

10. 某班试用电子投票系统选举班干部候选人. 全班 k 名同学都有选举权和被选举权, 他们的编号分别为 $1,2,\cdots,k$, 规定: 同意按“1”, 不同意 (含弃权) 按“0”, 令 $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 号同学同意第 } j \text{ 号同学当选}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 号同学不同意第 } j \text{ 号同学当选}\end{cases}$, 其中 $i=1,2,\cdots,k$, 且 $j=1,2,\cdots,k$, 则同时同意第 1, 2 号同学当选的人数为 （ ）

(A) $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1k}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2k}$

(B) $a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{1k}+a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{k2}$

(C) $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\cdots+a_{k1}a_{k2}$

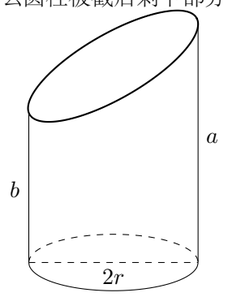
(D) $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\cdots+a_{1k}a_{2k}$

二、填空题

11. 函数 $f(x)=\lg(1+x^2)$, $g(x)=\begin{cases}x+2, & x<-1\\ 0, & |x|\leqslant 1\\ -x+2, & x>1\end{cases}$, $h(x)=\tan 2x$ 中, _____是偶函数.

12. 以双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 右顶点为顶点, 左焦点为焦点的抛物线的方程是_____.

13. 如图, 已知底面半径为 r 的圆柱被一个平面所截, 剩下部分母线长的最大值为 a, 最小值为 b, 那么圆柱被截后剩下部分的体积是_____.



14. 将长度为 1 的铁丝分成两段, 分别围成一个正方形和一个圆形, 要使正方形与圆的面积之和最小, 正方形的周长应为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\cos^4 x-2\sin x\cos x-\sin^4 x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 的最大值、最小值.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=2$, $a_1+a_2+a_3=12$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

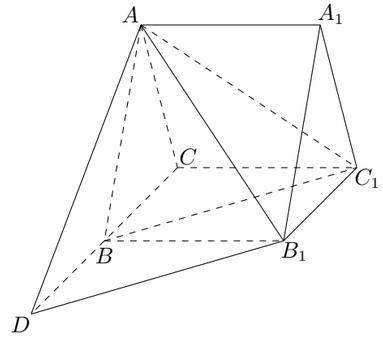
(2) 令 $b_n=a_nx^n$ $(x\in\mathbf{R})$. 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

17. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长的 3, 侧棱 $AA_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, D 是 CB 延长线上一点, 且 $BD=BC$.

(1) 求证: 直线 $BC_1\parallel$ 平面 AB_1D;

(2) 求二面角 B_1-AD-B 的大小;

(3) 求三棱锥 C_1-ABB_1 的体积.

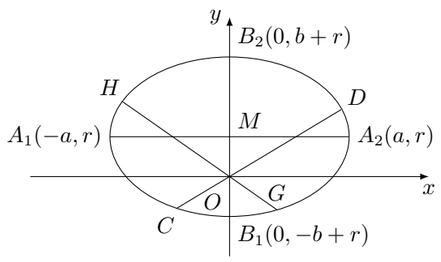


18. 如图, 椭圆的长轴 A_1A_2 与 x 轴平行, 短轴 B_1B_2 在 y 轴上, 中心为 $M(0,r)$ $(b>r>0)$.

(1) 写出椭圆的方程, 求椭圆的焦点坐标及离心率;

(2) 直线 $y=k_1x$ 交椭圆于两点 $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$ $(y_2>0)$; 直线 $y=k_2x$ 交椭圆于两点 $G(x_3,y_3)$, $H(x_4,y_4)$ $(y_4>0)$. 求证: $\dfrac{k_1x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{k_2x_3x_4}{x_3+x_4}$;

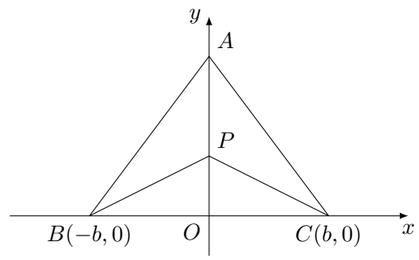
(3) 对于 (2) 中的 C, D, G, H, 设 CH 交 x 轴于点 P, GD 交 x 轴于点 Q. 求证: $|OP|=|OQ|$. (证明过程不考虑 CH 或 GD 垂直于 x 轴的情形)



19. 有三个新兴城镇, 分别位于 A, B, C 三点处, 且 $AB=AC=a$, $BC=2b$. 今计划合建一个中心医院, 为同时方便三镇, 准备建在 BC 的垂直平分线上的 P 点处. (建立坐标系如图)

(1) 若希望点 P 到三镇距离的平方和为最小, 点 P 应位于何处?

(2) 若希望点 P 到三镇的最远距离为最小, 点 P 应位于何处?



20. 设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数, 且满足条件:

① $f(-1)=f(1)=0$;

② 对任意的 u, $v\in[-1,1]$, 都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$.

(1) 证明: 对任意的 $x\in[-1,1]$, $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$;

(2) 证明: 对任意的 u, $v\in[-1,1]$, $|f(u)-f(v)|\leqslant 1$;

(3) 在区间 $[-1,1]$ 上是否存在满足题设条件的奇函数 $y=f(x)$, 且使得 $\begin{cases}|f(u)-f(v)|<|u-v|, u,v\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ |f(u)-f(v)|=|u-v|, u,v\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$, 若存在, 请举一例; 若不存在, 请说明理由.

2003 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|x^2-1>0\}$, $B=\{x|\log_2 x>0|\}$, $A\cap B$ 等于 （　）

(A) $\{x|x>1\}$　(B) $\{x|x>0\}$

(C) $\{x|x<-1\}$　(D) $\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$

2. 设 $y_1=4^{0.9}$, $y_2=8^{0.44}$, $y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$, 则 （　）

(A) $y_3>y_1>y_2$　(B) $y_2>y_1>y_3$　(C) $y_1>y_2>y_3$　(D) $y_1>y_3>y_2$

3. “$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12}$, $k\in\mathbf{Z}$”的 （　）

(A) 必要非充分条件　(B) 充分非必要条件

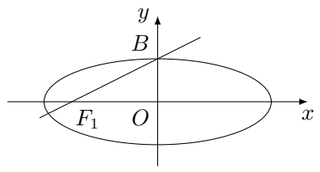
(C) 充分必要条件　(D) 既非充分又非必要条件

4. 已知 α, β 是平面, m, n 是直线. 下列命题中不正确的是 （　）

(A) 若 $m\parallel n$, $m\perp\alpha$, 则 $n\perp\alpha$　(B) 若 $m\parallel\alpha$, $\alpha\cap\beta=n$, 则 $m\parallel n$

(C) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$　(D) 若 $m\perp\alpha$, $m\subset\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

5. 如图, 直线 $l: x-2y+2=0$ 过椭圆的左焦点 F_1 和一个顶点 B, 该椭圆的离心率是 （　）



(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　(D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 若 $z\in\mathbf{C}$ 且 $|z+2-2\mathrm{i}|=1$, 则 $|z-2-2\mathrm{i}|$ 的最小值是 （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

7. 如果圆台的母线与底面成 60° 角, 那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为 （　）

(A) 2π　(B) $\frac{3}{2}\pi$　(C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　(D) $\frac{1}{2}\pi$

8. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{3^{-n}+(-1)^n 3^{-n}}{2}$, $n=1, 2, \cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 等于 （　）

(A) $\frac{1}{24}$　(B) $\frac{1}{8}$　(C) $\frac{1}{6}$　(D) $\frac{1}{2}$

9. 从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种, 分别种在不同土质的三块土地上, 其中黄瓜必须种植, 不同的种植方法共有 （　）

(A) 24 种　(B) 18 种　(C) 12 种　(D) 6 种

10. 某班试用电子投票系统选举班干部候选人. 全班 k 名同学都有选举权和被选举权, 他们的编号分别为 1, 2, $\cdots$, k, 规定: 同意按“1”, 不同意 (含弃权) 按“0”, 令 $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 号同学同意第 } j \text{ 号同学当选}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 号同学不同意第 } j \text{ 号同学当选}\end{cases}$, 其中 $i=1, 2, \cdots, k$, 且 $j=1, 2, \cdots, k$, 则同时同意第 1, 2 号同学当选的人数为 （　）

(A) $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1k}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2k}$

(B) $a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{1k}+a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{k2}$

(C) $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\cdots+a_{k1}a_{k2}$

(D) $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\cdots+a_{1k}a_{2k}$

二、填空题

11. 已知某球体的体积与其表面积的数值相等, 则此球体的半径为_____.

12. 函数 $f(x)=\lg(1+x^2)$, $g(x)=2-|x|$, $h(x)=\tan 2x$ 中, _____是偶函数.

13. 以双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 右顶点为顶点, 左焦点为焦点的抛物线的方程是_____.

14. 将长度为 1 的铁丝分成两段, 分别围成一个正方形和一个圆形, 要使正方形与圆的面积之和最小, 正方形的周长应为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\cos^4 x-2\sin x\cos x-\sin^4 x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值、最小值.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=2$, $a_1+a_2+a_3=12$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

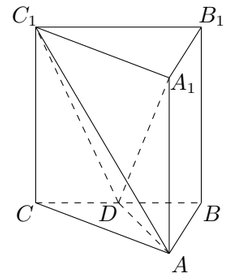
(2) 令 $b_n=a_n\cdot 3^n$. 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

17. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是 BC 的中点, $AB=a$.

(1) 求证: 直线 $A_1D\perp B_1C_1$;

(2) 求点 D 到平面 ACC_1 的距离;

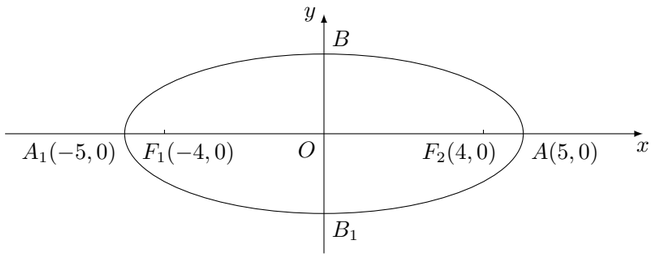
(3) 判断 A_1B 与平面 ADC 的位置关系, 并证明你的结论.



18. 如图, A_1, A_2 为椭圆的两个顶点, F_1, F_2 为椭圆的两个焦点.

(1) 写出椭圆的方程及准线方程;

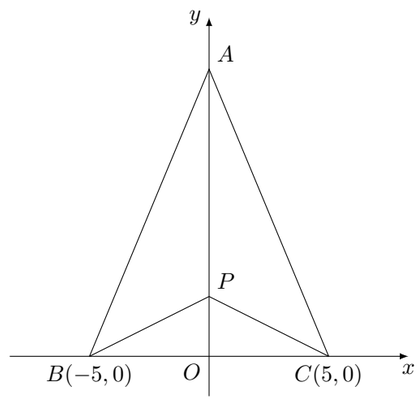
(2) 过线段 OA 上异于 O, A 的任一点 K 作 OA 的垂线, 交椭圆于 P, P_1 两点, 直线 A_1P 与 AP_1 交于点 M. 求证: 点 M 在双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上.



19. 有三个新兴城镇, 分别位于 A, B, C 三点处, 且 $AB=AC=13$ km, $BC=10$ km. 今计划合建一个中心医院, 为同时方便三镇, 准备建在 BC 的垂直平分线上的 P 点处. (建立坐标系如图)

(1) 若希望点 P 到三镇距离的平方和为最小, 点 P 应位于何处?

(2) 若希望点 P 到三镇的最远距离为最小, 点 P 应位于何处?



20. 设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数, 且满足条件:

① $f(-1)=f(1)=0$;

② 对任意的 u, $v\in[-1,1]$, 都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$.

(1) 证明: 对任意的 $x\in[-1,1]$, $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$;

(2) 判断函数 $g(x)=\begin{cases}1+x, & x\in[-1,0)\\ 1-x, & x\in[0,1]\end{cases}$ 是否满足题设条件;

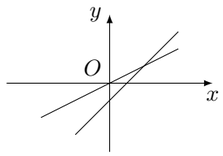
(3) 在区间 $[-1,1]$ 上是否存在满足题设条件的函数 $y=f(x)$, 且使得对任意的 u, $v\in[-1,1]$, 都有 $|f(u)-f(v)|=u-v$, 若存在, 请举一例; 若不存在, 请说明理由.

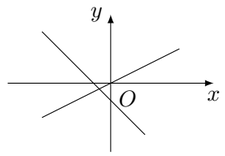
2003 年普通高等学校招生考试（广东卷）

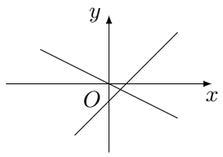
数学试卷

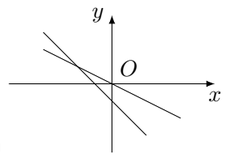
一、选择题

1. 在同一坐标系中, 表示直线 $y=ax$ 与 $y=x+a$ 正确的是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

2. 已知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ （ ）

(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

3. 圆锥曲线 $\rho=\frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 的准线方程是 （ ）

(A) $\rho\cos\theta=-2$ (B) $\rho\cos\theta=2$ (C) $\rho\sin\theta=-2$ (D) $\rho\sin\theta=2$

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2+a_5=4$, $a_n=33$, 则 n 为 （ ）

(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51

5. 双曲线虚轴的一个端点为 M, 两个焦点为 F_1, F_2, $\angle F_1MF_2=120^\circ$, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0\end{cases}$, 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是( )

(A) $(-1,1)$ (B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

7. 函数 $y=2\sin x(\sin x+\cos x)$ 的最大值为 （ ）

(A) $1+\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}-1$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

8. 已知圆 $C:(x-a)^2+(y-2)^2=4$ $(a>0)$ 及直线 $l:x-y+3=0$, 当直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时, a 的值等于 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{2}+1$

9. 已知圆锥的底面半径为 R, 高为 $3R$, 在它的所有内接圆柱中, 全面积的最大值是 （ ）

(A) $2\pi R^2$ (B) $\frac{9}{4}\pi R^2$ (C) $\frac{8}{3}\pi R^2$ (D) $\frac{3}{2}\pi R^2$

10. 函数 $f(x)=\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ （ ）

(A) $-\arcsin x$, $x\in[-1,1]$ (B) $-\pi-\arcsin x$, $x\in[-1,1]$

(C) $\pi+\arcsin x$, $x\in[-1,1]$ (D) $-\pi-\arcsin x$, $x\in[-1,1]$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4,0)$, 若 $1<x_4<2$, 则 $\tan\theta$ 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\frac{1}{3},1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right)$

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 （ ）

(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

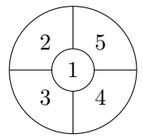
二、填空题

13. 不等式 $\sqrt{4x-x^2}<x$ 的解集是_____.

14. $\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

15. 在平面几何里, 有勾股定理: “设 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 互相垂直, 则 $AB^2+AC^2=BC^2$. ”拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是: “设三棱锥 $A-BCD$ 的三个侧面 ABC、ACD、ADB 两两互相垂直, 则_____. ”

16. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种_____. (以数字作答)

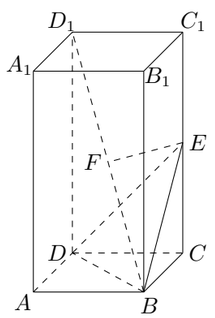


三、解答题

17. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=1$, $AA_1=2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.

(1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;

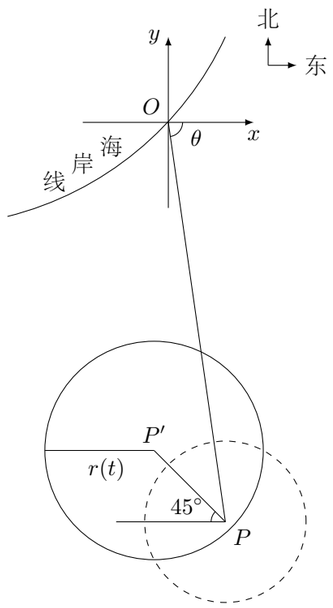
(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



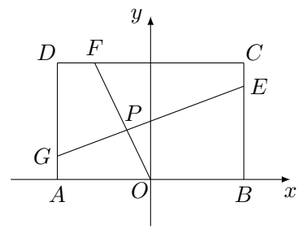
18. 已知复数 z 的辐角为 60°, 且 $|z-1|$ 是 $|z|$ 和 $|z-2|$ 的等比中项, 求 $|z|$.

19. 已知 $c>0$, 设 P: 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; Q: 不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.

20. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图) 的东偏南 θ $\left(\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)$ 方向 300 km 的海面 P 处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



21. 已知常数 $a>0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=4a$, O 为 AB 的中点, 点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动, 且 $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



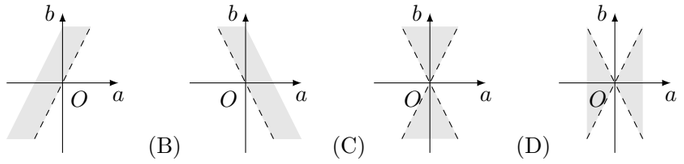
22. 设 a_0 为常数, 且 $a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 证明对任意 $n\geqslant 1$, $a_n=\dfrac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^n]+(-1)^n\cdot 2^n a_0$;
(2) 假设对任意 $n\geqslant 1$ 有 $a_n>a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.

2003 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、选择题

1. 如果函数 $y=ax^2+bx+a$ 的图象与 x 轴有两个交点, 则点 (a,b) 在 aOb 平面上的区域 (不包含边界) 为 （ ）



(A) (B) (C) (D)

2. 抛物线 $y=ax^2$ 的准线方程是 $y=2$, 则 a 的值为 （ ）

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{8}$ (C) 8 (D) -8

3. 已知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ （ ）

(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0\end{cases}$, 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是( )

(A) $(-1,1)$ (B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

5. O 是平面上一定点, A、B、C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$, $\lambda\in[0,+\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的

(A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心

6. 函数 $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$ 的反函数为 （ ）

(A) $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$, $x\in(0,+\infty)$ (B) $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x\in(0,+\infty)$

(C) $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$, $x\in(-\infty,0)$ (D) $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x\in(-\infty,0)$

7. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 （ ）

(A) $\frac{a^3}{3}$ (B) $\frac{a^3}{4}$ (C) $\frac{a^3}{6}$ (D) $\frac{a^3}{12}$

8. 设 $a>0$, $f(x)=ax^2+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y=f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 （ ）

(A) $\left[0,\frac{1}{a}\right]$ (B) $\left[0,\frac{1}{2a}\right]$ (C) $\left[0,\left|\frac{b}{2a}\right|\right]$ (D) $\left[0,\left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$

9. 已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的的等差数列, 则 $|m-n|=$ （ ）

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$

10. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7},0)$, 直线 $y=x-1$ 与其相交于 M、N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 （ ）

(A) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ (B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ (C) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$ (D) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4,0)$, 若 $1<x_4<2$, 则 $\tan\theta$ 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\frac{1}{3},1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right)$

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 （ ）

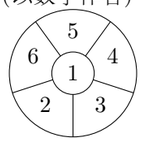
(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

二、填空题

13. $\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____辆.

15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有_____种. (以数字作答)



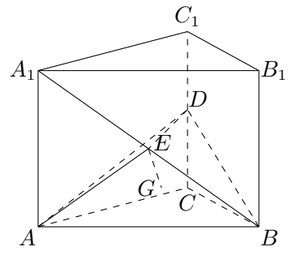
16. 对于四面体 $ABCD$, 给出下列四个命题: ① 若 $AB=AC$, $BD=CD$, 则 $BC\perp AD$; ② 若 $AB=CD$, $AC=BD$, 则 $BC\perp AD$; ③ 若 $AB\perp AC$, $BD\perp CD$, 则 $BC\perp AD$; ④ 若 $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, 则 $BC\perp AD$. 其中真命题的序号是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 有三种产品, 合格率分别为 0.90, 0.95 和 0.95, 各抽取一件进行检验.
(1) 求恰有一件不合格的概率;
(2) 求至少有两件不合格的概率. (精确到 0.001)

18. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.

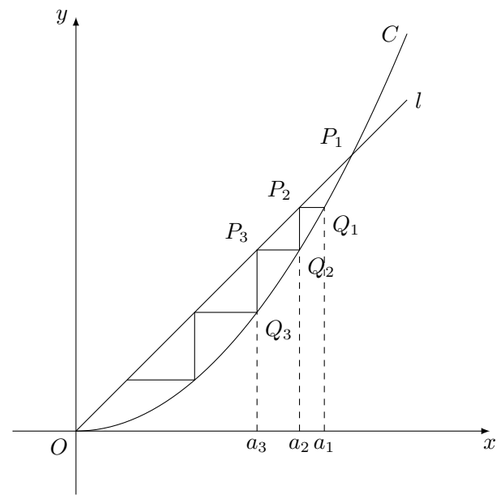
19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB=90^\circ$, 侧棱 $AA_1=2$, D、E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G.
(1) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)
(2) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.



20. 已知常数 $a>0$, 向量 $\vec{c}=(0,a)$, $\vec{i}=(1,0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c}+\lambda\vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0,a)$ 以 $\vec{i}-2\lambda\vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P, 其中 $\lambda\in\mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E、F, 使得 $|PE|+|PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E、F 的坐标; 若不存在, 说明理由.

21. 已知 $a>0$, n 为正整数.
(1) 设 $y=(x-a)^n$, 证明: $y'=n(x-a)^{n-1}$;
(2) 设 $f_n(x)=x^n-(x-a)^n$, 对任意 $n\geqslant a$, 证明: $f'_{n+1}(n+1)>(n+1)f'_n(n)$.

22. 设 $a>0$, 如图, 已知直线 $l:y=ax$ 及曲线 $C:y=x^2$, C 上的点 Q_1 的横坐标为 a_1 $(0<a_1<a)$. 从 C 上的点 Q_n $(n\geqslant 1)$ 作直线平行于 x 轴, 交直线 l 于点 P_{n+1}, 再从点 P_{n+1} 作直线平行于 y 轴, 交曲线 C 于点 Q_{n+1}. Q_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 的横坐标构成数列 $\{a_n\}$.
(1) 试求 a_{n+1} 与 a_n 的关系, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 当 $a=1$, $a_1\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 证明: $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\dfrac{1}{32}$;
(3) 当 $a=1$ 时, 证明: $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\dfrac{1}{3}$.



2003 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

数学试卷

一、选择题

1. 与曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 关于原点对称的曲线为 （ ）

(A) $y=\dfrac{1}{1+x}$　(B) $y=-\dfrac{1}{1+x}$　(C) $y=\dfrac{1}{1-x}$　(D) $y=-\dfrac{1}{1-x}$

2. 已知 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\dfrac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ （ ）

(A) $\dfrac{7}{24}$　(B) $-\dfrac{7}{24}$　(C) $\dfrac{24}{7}$　(D) $-\dfrac{24}{7}$

3. $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$　(B) $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$　(C) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　(D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

4. 已知四边形 $ABCD$ 是菱形, 点 P 在对角线 AC 上 (不包括端点 A、C), 则 $\overrightarrow{AP}=$ （ ）

(A) $\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$, $\lambda\in(0,1)$　(B) $\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$, $\lambda\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(C) $\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$, $\lambda\in(0,1)$　(D) $\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$, $\lambda\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0\end{cases}$, 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是( )

(A) $(-1,1)$　(B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_2+a_5=4$, $a_n=33$, 则 n 为 （ ）

(A) 48　(B) 49　(C) 50　(D) 51

7. 函数 $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$ 的反函数为 （ ）

(A) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(0,+\infty)$　(B) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(0,+\infty)$

(C) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(-\infty,0)$　(D) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(-\infty,0)$

8. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{a^3}{3}$　(B) $\dfrac{a^3}{4}$　(C) $\dfrac{a^3}{6}$　(D) $\dfrac{a^3}{12}$

9. 设 $a>0$, $f(x)=ax^2+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y=f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 （ ）

(A) $\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$　(B) $\left[0,\dfrac{1}{2a}\right]$　(C) $\left[0,\left|\dfrac{b}{2a}\right|\right]$　(D) $\left[0,\left|\dfrac{b-1}{2a}\right|\right]$

10. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7},0)$, 直线 $y=x-1$ 与其相交于 M、N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\dfrac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{2}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{5}=1$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4,0)$, 若 $1<x_4<2$, 则 $\tan\theta$ 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$　(B) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　(C) $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$　(D) $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{2}{3}\right)$

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 （ ）

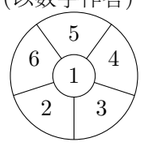
(A) 3π　(B) 4π　(C) $3\sqrt{3}\pi$　(D) 6π

二、填空题

13. $\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____辆.

15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有_____种. (以数字作答)



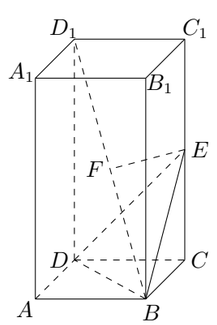
16. 对于四面体 $ABCD$, 给出下列四个命题: ① 若 $AB=AC$, $BD=CD$, 则 $BC\perp AD$; ② 若 $AB=CD$, $AC=BD$, 则 $BC\perp AD$; ③ 若 $AB\perp AC$, $BD\perp CD$, 则 $BC\perp AD$; ④ 若 $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, 则 $BC\perp AD$. 其中真命题的序号是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=1$, $AA_1=2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.

(1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;

(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



18. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.

19. 设 $a>0$, 求函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x+a)$, $x\in(0,+\infty)$ 的单调区间.

20. A、B 两个代表队进行乒乓球对抗赛, 每队三名队员, A 队队员是 A_1, A_2, A_3, B 队队员是 B_1, B_2, B_3, 按以往多次比赛的统计, 对阵队员之间胜负概率如下:

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率
A_1 对 B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2 对 B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3 对 B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场, 每场胜队得 1 分, 负队得 0 分, 设 A 队、B 队最后所得总分分别为 ξ、η.
(1) 求 ξ、η 的概率分布;
(2) 求 $E\xi$, E_η.

21. 设 a_0 为常数, 且 $a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.
(1) 证明对任意 $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^n] + (-1)^n \cdot 2^n a_0$;
(2) 假设对任意 $n \geqslant 1$ 有 $a_n > a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.

22. 已知常数 $a > 0$, 向量 $\vec{c} = (0, a)$, $\vec{i} = (1, 0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c} + \lambda\vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0, a)$ 以 $\vec{i} - 2\lambda\vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P, 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E、F, 使得 $|PE| + |PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E、F 的坐标; 若不存在, 说明理由.

2003 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ （　）

(A) $\frac{7}{24}$　(B) $-\frac{7}{24}$　(C) $\frac{24}{7}$　(D) $-\frac{24}{7}$

2. 圆锥曲线 $\rho=\frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 的准线方程是 （　）

(A) $\rho\cos\theta=-2$　(B) $\rho\cos\theta=2$　(C) $\rho\sin\theta=2$　(D) $\rho\sin\theta=-2$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0\end{cases}$, 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是（　）

(A) $(-1,1)$　(B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

4. 函数 $y=2\sin x(\sin x+\cos x)$ 的最大值为 （　）

(A) $1+\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{2}-1$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

5. 已知圆 $C:(x-a)^2+(y-2)^2=4$ $(a>0)$ 及直线 $l:x-y+3=0$, 当直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时, a 的值等于 （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $2-\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{2}-1$　(D) $\sqrt{2}+1$

6. 已知圆锥的底面半径为 R, 高为 $3R$, 在它的所有内接圆柱中, 全面积的最大值是 （　）

(A) $2\pi R^2$　(B) $\frac{9}{4}\pi R^2$　(C) $\frac{8}{3}\pi R^2$　(D) $\frac{3}{2}\pi R^2$

7. 已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的的等差数列, 则 $|m-n|=$ （　）

(A) 1　(B) $\frac{3}{4}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{3}{8}$

8. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7},0)$, 直线 $y=x-1$ 与其相交于 M、N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 （　）

(A) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　(B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$　(C) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$　(D) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

9. 函数 $f(x)=\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ （　）

(A) $-\arcsin x$, $x\in[-1,1]$　(B) $-\pi-\arcsin x$, $x\in[-1,1]$

(C) $\pi+\arcsin x$, $x\in[-1,1]$　(D) $\pi-\arcsin x$, $x\in[-1,1]$

10. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4,0)$, 若 $1<x_4<2$, 则 $\tan\theta$ 的取值范围是 （　）

(A) $\left(\frac{1}{3},1\right)$　(B) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　(C) $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$　(D) $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right)$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_n^2}{n(C_2^1+C_3^1+C_4^1+\cdots+C_n^1)}=$ （　）

(A) 3　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{6}$　(D) 6

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 （　）

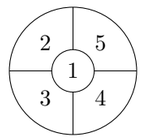
(A) 3π　(B) 4π　(C) $3\sqrt{3}\pi$　(D) 6π

二、填空题

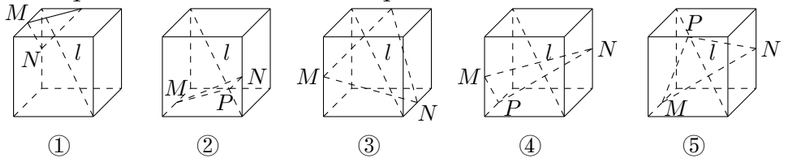
13. $\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

14. 使 $\log_2(-x)<x+1$ 成立的 x 的取值范围是_____.

15. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种_____. (以数字作答)



16. 下列 5 个正方体图形中, l 是正方体的一条对角线, 点 M、N、P 分别为其所在棱的中点, 能得出 $l\perp$ 面 MNP 的图形的序号是_____. (写出所有符合要求的图形序号)



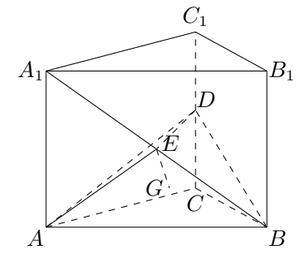
三、解答题

17. 已知复数 z 的辐角为 60°, 且 $|z-1|$ 是 $|z|$ 和 $|z-2|$ 的等比中项, 求 $|z|$.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB=90^\circ$, 侧棱 $AA_1=2$, D、E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G.

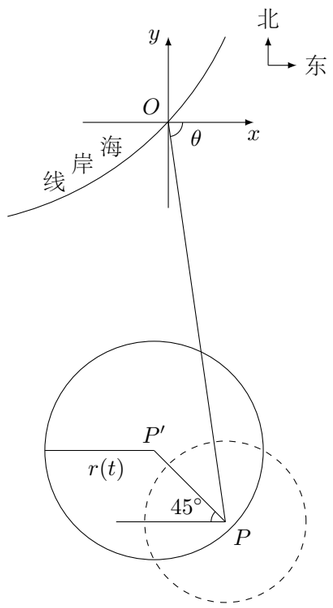
(1) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)

(2) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.

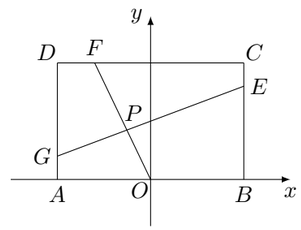


19. 已知 $c>0$, 设 P: 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; Q: 不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.

20. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图) 的东偏南 θ $\left(\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)$ 方向 300 km 的海面 P 处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



21. 已知常数 $a>0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=4a$, O 为 AB 的中点, 点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动, 且 $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



22. 【甲】设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s+2^t|0\leqslant s<t$ 且 $s,t\in\mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 即 $a_1=3$, $a_2=5$, $a_3=6$, $a_4=9$, $a_5=10$, $a_6=12$, $\cdots$. 将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大, 左小右大的原则写成如下的三角形数表:

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & \\ & 5 & & 6 \\ 9 & & 10 & & 12 \\ - & & - & & - & - \\ & & \cdots\cdots & \end{array}$$

(1) 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数;

(2) 求 a_{100}.

【乙】设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^r+2^s+2^t|0\leqslant r<s<t$ 且 $r,s,t\in\mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 已知 $b_k=1160$, 求 k.

2003 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

一、选择题

1. 直线 $y=2x$ 关于 x 轴对称的直线方程为 （ ）

(A) $y=-\frac{1}{2}x$　(B) $y=\frac{1}{2}x$　(C) $y=-2x$　(D) $y=2x$

2. 已知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ （ ）

(A) $\frac{7}{24}$　(B) $-\frac{7}{24}$　(C) $\frac{24}{7}$　(D) $-\frac{24}{7}$

3. 抛物线 $y=ax^2$ 的准线方程是 $y=2$, 则 a 的值为 （ ）

(A) $\frac{1}{8}$　(B) $-\frac{1}{8}$　(C) 8　(D) -8

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2+a_5=4$, $a_n=33$, 则 n 为 （ ）

(A) 48　(B) 49　(C) 50　(D) 51

5. 双曲线虚轴的一个端点为 M, 两个焦点为 F_1, F_2, $\angle F_1MF_2=120^\circ$, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0\end{cases}$, 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是（ ）

(A) $(-1,1)$　(B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

7. 已知 $f(x^5)=\lg x$, 则 $f(2)=$ （ ）

(A) $\lg 2$　(B) $\lg 32$　(C) $\lg\frac{1}{32}$　(D) $\frac{1}{5}\lg 2$

8. 函数 $y=\sin(x+\varphi)$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 则 $\varphi=$ （ ）

(A) 0　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{2}$　(D) π

9. 已知点 $(a,2)$ $(a>0)$ 到直线 $l:x-y+3=0$ 的距离为 1, 则 $a=$ （ ）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $2-\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{2}-1$　(D) $\sqrt{2}+1$

10. 已知圆锥的底面半径为 R, 高为 $3R$, 它的内接圆柱的底面半径为 $\frac{3}{4}R$, 该圆柱的全面积为 （ ）

(A) $2\pi R^2$　(B) $\frac{9}{4}\pi R^2$　(C) $\frac{8}{3}\pi R^2$　(D) $\frac{5}{2}\pi R^2$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角). 若 P_1 与 P_4 重合, 则 $\tan\theta=$ （ ）

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 （ ）

(A) 3π　(B) 4π　(C) $3\sqrt{3}\pi$　(D) 6π

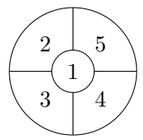
二、填空题

13. 不等式 $\sqrt{4x-x^2}<x$ 的解集是_____.

14. $\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

15. 在平面几何里, 有勾股定理: “设 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 互相垂直, 则 $AB^2+AC^2=BC^2$. ”拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是: “设三棱锥 $A-BCD$ 的三个侧面 ABC、ACD、ADB 两两互相垂直, 则_____. ”

16. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种_____. (以数字作答)

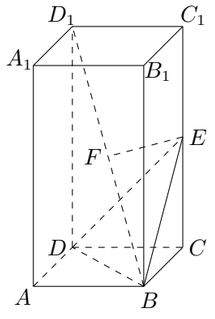


三、解答题

17. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=1$, $AA_1=2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.

(1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;

(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



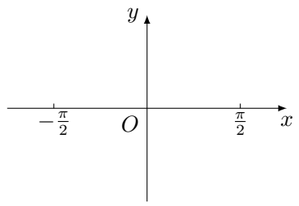
18. 已知复数 z 的辐角为 60°, 且 $|z-1|$ 是 $|z|$ 和 $|z-2|$ 的等比中项, 求 $|z|$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n=3^{n-1}+a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$.

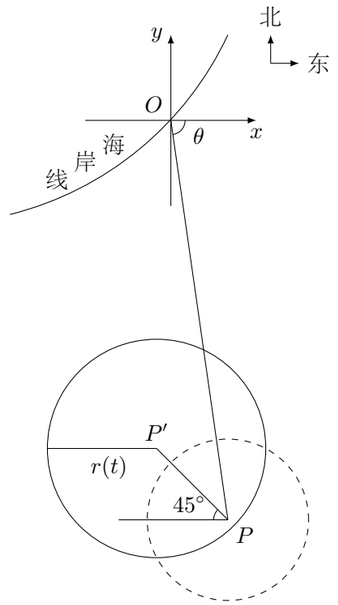
(1) 求 a_2, a_3;

(2) 证明: $a_n=\frac{3^n-1}{2}$.

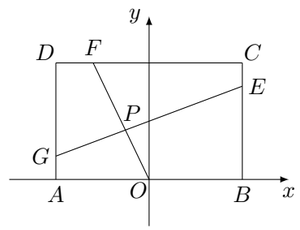
20. 已知函数 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;
(2) 在给出的直角坐标系中, 画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的图象.



21. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图) 的东偏南 $\theta\left(\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)$ 方向 300 km 的海面 P 处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



22. 已知常数 $a>0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=4a$, O 为 AB 的中点, 点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动, 且 $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



2003 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 函数 $y=\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T=$_____.

2. 若 $x=\frac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x+\alpha)=1$ 的解, 其中 $\alpha\in(0,2\pi)$, 则 $\alpha=$_____.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5=3$, $a_6=-2$, 则 $a_4+a_5+\cdots+a_{10}=$_____.

4. 在极坐标系中, 定点 $A\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$, 点 B 在直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=0$ 上运动, 当线段 AB 最短时, 点 B 的极坐标是_____.

5. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, 若侧面与底面所成二面角的大小为 $60°$, 则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于_____. (结果用反三角函数值表示)

6. 设集合 $A=\{x||x|<4\}$, $B=\{x|x^2-4x+3>0\}$, 则集合 $\{x|x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}=$_____.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$, 则 $\angle ABC=$_____. (结果用反三角函数值表示)

8. 若首项为 a_1, 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和, 则首项 a_1, 公比 q 的一组取值可以是 $(a_1,q)=$_____.

9. 某国际科研合作项目成员由 11 个美国人、4 个法国人和 5 个中国人组成. 现从中随机选出两位作为成果发布人, 则此两人不属于同一个国家的概率为_____. (结果用分数表示)

10. 方程 $x^3+\lg x=18$ 的根 $x\approx$_____. (结果精确到 0.1)

11. 已知点 $A\left(0,\frac{2}{n}\right)$, $B\left(0,-\frac{2}{n}\right)$, $C\left(4+\frac{2}{n},0\right)$, 其中 n 为正整数. 设 S_n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$_____.

12. 给出问题: F_1、F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$ 的焦点, 点 P 在双曲线上. 若点 P 到焦点 F_1 的距离等于 9, 求点 P 到焦点 F_2 的距离. 某学生的解答如下: 双曲线的实轴长为 8, 由 $||PF_1|-|PF_2||=8$, 即 $|9-|PF_2||=8$, 得 $|PF_2|=1$ 或 17. 该学生的解答是否正确? 若正确, 请将他的解题依据填在下面空格内, 若不正确, 将正确的结果填在下面空格内_____.

二、选择题

13. 下列函数中, 既为偶函数又在 $(0,\pi)$ 上单调递增的是 (　)

(A) $y=\tan|x|$　　(B) $y=\cos(-x)$

(C) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$　　(D) $y=\left|\cot\frac{x}{2}\right|$

14. 在下列条件中, 可判断平面 α 与 β 平行的是 (　)

(A) α、β 都垂直于平面 γ

(B) α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等

(C) l, m 是 α 内两条直线, 且 $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$

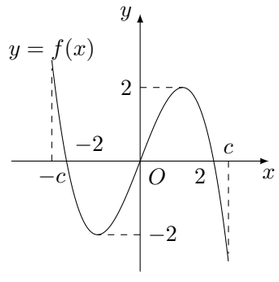
(D) l, m 是两条异面直线, 且 $l\parallel\alpha$, $m\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$

15. a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集分别为集合 M 和 N, 那么"$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$"是"$M=N$"的 (　)

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

16. $f(x)$ 是定义在区间 $[-c,c]$ 上的奇函数, 其图象如图所示: 令 $g(x)=af(x)+b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是 (　)



(A) 若 $a<0$, 则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称

(B) 若 $a=-1$, $-2<b<0$, 则方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的实根

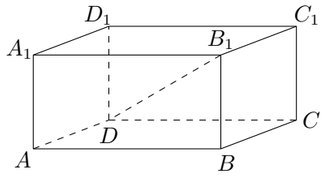
(C) 若 $a\neq0$, $b=2$, 则方程 $g(x)=0$ 有两个实根

(D) 若 $a\geqslant1$, $b<2$, 则方程 $g(x)=0$ 有三个实根

三、解答题

17. 已知复数 $z_1=\cos\theta-\mathrm{i}$, $z_2=\sin\theta+\mathrm{i}$, 求 $|z_1\cdot z_2|$ 的最大值和最小值.

18. 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=4$, $AD=2$. 若 $B_1D\perp BC$, 直线 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 $30°$, 求平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积.

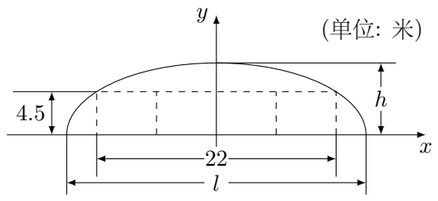


19. 已知数列 $\{a_n\}$ (n 为正整数) 是首项是 a_1, 公比为 q 的等比数列.

(1) 求和: $a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2$, $a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3$;

(2) 由 (1) 的结果归纳概括出关于正整数 n 的一个结论, 并加以证明.

20. 如图, 某隧道设计为双向四车道, 车道总宽 22 米, 要求通行车辆限高 4.5 米, 隧道全长 2.5 千米, 隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.
(1) 若最大拱高 h 为 6 米, 则隧道设计的拱宽 l 是多少?
(2) 若最大拱高 h 不小于 6 米, 则应如何设计拱高 h 和拱宽 l, 才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最最小?
注: 半个椭圆的面积公式为 $S=\dfrac{\pi}{4}lh$, 柱体体积为: 底面积乘以高. 本题结果精确到 0.1 米



21. 在以 O 为原点的直角坐标系中, 点 $A(4,-3)$ 为 $\triangle OAB$ 的直角顶点. 已知 $|AB|=2|OA|$, 且点 B 的纵坐标大于零.
(1) 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标;
(2) 求圆 $x^2-6x+y^2+2y=0$ 关于直线 OB 对称的圆的方程;
(3) 是否存在实数 a, 使抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点? 若不存在, 说明理由: 若存在, 求 a 的取值范围.

22. 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体: 存在非零常数 T, 对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立.
(1) 函数 $f(x)=x$ 是否属于集合 M? 说明理由;
(2) 设函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的图象与 $y=x$ 的图象有公共点, 证明: $f(x)=a^x\in M$;
(3) 若函数 $f(x)=\sin kx\in M$, 求实数 k 的取值范围.

2003 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 函数 $y=\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T=$_____.

2. 若 $x=\frac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x+\alpha)=1$ 的解, 其中 $\alpha\in(0,2\pi)$, 则 $\alpha=$_____.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5=3$, $a_6=-2$, 则 $a_4+a_5+\cdots+a_{10}=$_____.

4. 已知定点 $A(0,1)$, 点 B 在直线 $x+y=0$ 上运动, 当线段 AB 最短时, 点 B 的坐标是_____.

5. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, 若侧面与底面所成二面角的大小为 $60°$, 则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于_____. (结果用反三角函数值表示)

6. 设集合 $A=\{x||x|<4\}$, $B=\{x|x^2-4x+3>0\}$, 则集合 $\{x|x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}=$_____.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$, 则 $\angle ABC=$_____. (结果用反三角函数值表示)

8. 若首项为 a_1, 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和, 则首项 a_1, 公比 q 的一组取值可以是 $(a_1,q)=$_____.

9. 某国际科研合作项目成员由 11 个美国人、4 个法国人和 5 个中国人组成. 现从中随机选出两位作为成果发布人, 则此两人不属于同一个国家的概率为_____. (结果用分数表示)

10. 方程 $x^3+\lg x=18$ 的根 $x\approx$_____. (结果精确到 0.1)

11. 已知点 $A\left(0,\frac{2}{n}\right)$, $B\left(0,-\frac{2}{n}\right)$, $C\left(4+\frac{2}{n},0\right)$, 其中 n 为正整数. 设 S_n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$_____.

12. 给出问题: F_1、F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$ 的焦点, 点 P 在双曲线上. 若点 P 到焦点 F_1 的距离等于 9, 求点 P 到焦点 F_2 的距离. 某学生的解答如下: 双曲线的实轴长为 8, 由 $||PF_1|-|PF_2||=8$, 即 $|9-|PF_2||=8$, 得 $|PF_2|=1$ 或 17. 该学生的解答是否正确? 若正确, 请将他的解题依据填在下面空格内, 若不正确, 将正确的结果填在下面空格内_____.

二、选择题

13. 下列函数中, 既为偶函数又在 $(0,\pi)$ 上单调递增的是 (　　)

(A) $y=\tan|x|$　　(B) $y=\cos(-x)$

(C) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$　　(D) $y=\left|\cot\frac{x}{2}\right|$

14. 在下列条件中, 可判断平面 α 与 β 平行的是 (　　)

(A) α、β 都垂直于平面 γ

(B) α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等

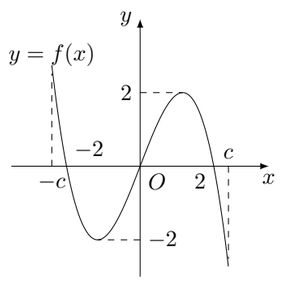
(C) l, m 是 α 内两条直线, 且 $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$

(D) l, m 是两条异面直线, 且 $l\parallel\alpha$, $m\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$

15. 在 $P(1,1)$、$Q(1,2)$、$M(2,3)$ 和 $N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 四点中, 函数 $y=a^x$ 的图象与其反函数的图象的公共点只可能是点 (　　)

(A) P　　(B) Q　　(C) M　　(D) N

16. $f(x)$ 是定义在区间 $[-c,c]$ 上的奇函数, 其图象如图所示: 令 $g(x)=af(x)+b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是 (　　)



(A) 若 $a<0$, 则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称

(B) 若 $a=-1$, $-2<b<0$, 则方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的实根

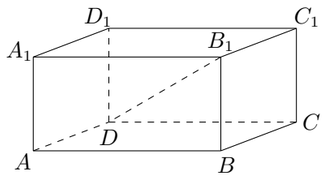
(C) 若 $a\neq0$, $b=2$, 则方程 $g(x)=0$ 有两个实根

(D) 若 $a\geqslant1$, $b<2$, 则方程 $g(x)=0$ 有三个实根

三、解答题

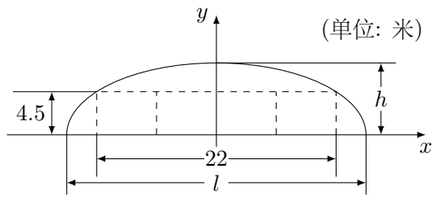
17. 已知复数 $z_1=\cos\theta-\mathrm{i}$, $z_2=\sin\theta+\mathrm{i}$, 求 $|z_1\cdot z_2|$ 的最大值和最小值.

18. 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=4$, $AD=2$. 若 $B_1D\perp BC$, 直线 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 $30°$, 求平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积.



19. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\log_2\frac{1+x}{1-x}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域, 并讨论它的奇偶性和单调性.

20. 如图, 某隧道设计为双向四车道, 车道总宽 22 米, 要求通行车辆限高 4.5 米, 隧道全长 2.5 千米, 隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.
(1) 若最大拱高 h 为 6 米, 则隧道设计的拱宽 l 是多少?
(2) 若最大拱高 h 不小于 6 米, 则应如何设计拱高 h 和拱宽 l, 才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最最小?
注: 半个椭圆的面积公式为 $S=\dfrac{\pi}{4}lh$, 柱体体积为: 底面积乘以高. 本题结果精确到 0.1 米



21. 在以 O 为原点的直角坐标系中, 点 $A(4,-3)$ 为 $\triangle OAB$ 的直角顶点. 已知 $|AB|=2|OA|$, 且点 B 的纵坐标大于零.
(1) 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标;
(2) 求圆 $x^2-6x+y^2+2y=0$ 关于直线 OB 对称的圆的方程;
(3) 是否存在实数 a, 使抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点? 若不存在, 说明理由: 若存在, 求 a 的取值范围.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ (n 为正整数) 是首项是 a_1, 公比为 q 的等比数列.
(1) 求和: $a_1\mathrm{C}_2^0-a_2\mathrm{C}_2^1+a_3\mathrm{C}_2^2$, $a_1\mathrm{C}_3^0-a_2\mathrm{C}_3^1+a_3\mathrm{C}_3^2-a_4\mathrm{C}_3^3$;
(2) 由 (1) 的结果归纳概括出关于正整数 n 的一个结论, 并加以证明;
(3) 设 $q\neq 1$, S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求: $S_1\mathrm{C}_n^0-S_2\mathrm{C}_n^1+S_3\mathrm{C}_n^2-S_4\mathrm{C}_n^3+\cdots+(-1)^nS_{n+1}\mathrm{C}_n^n$.

2003 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$　(B) $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$　(C) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　(D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2. 已知 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\dfrac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ （　）

(A) $\dfrac{7}{24}$　(B) $-\dfrac{7}{24}$　(C) $\dfrac{24}{7}$　(D) $-\dfrac{24}{7}$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0\end{cases}$, 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是（　）

(A) $(-1,1)$　(B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

4. O 是平面上一定点, A、B、C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$, $\lambda\in[0,+\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的

(A) 外心　(B) 内心　(C) 重心　(D) 垂心

5. 函数 $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$ 的反函数为 （　）

(A) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(0,+\infty)$　(B) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(0,+\infty)$

(C) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(-\infty,0)$　(D) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(-\infty,0)$

6. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 （　）

(A) $\dfrac{a^3}{3}$　(B) $\dfrac{a^3}{4}$　(C) $\dfrac{a^3}{6}$　(D) $\dfrac{a^3}{12}$

7. 设 $a>0$, $f(x)=ax^2+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y=f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 （　）

(A) $\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$　(B) $\left[0,\dfrac{1}{2a}\right]$　(C) $\left[0,\left|\dfrac{b}{2a}\right|\right]$　(D) $\left[0,\left|\dfrac{b-1}{2a}\right|\right]$

8. 已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\dfrac{1}{4}$ 的的等差数列, 则 $|m-n|=$ （　）

(A) 1　(B) $\dfrac{3}{4}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{3}{8}$

9. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7},0)$, 直线 $y=x-1$ 与其相交于 M、N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\dfrac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{2}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{5}=1$

10. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4,0)$, 若 $1<x_4<2$, 则 $\tan\theta$ 的取值范围是 （　）

(A) $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$　(B) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　(C) $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$　(D) $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{2}{3}\right)$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{C}_2^2+\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_4^2+\cdots+\mathrm{C}_n^2}{n(\mathrm{C}_2^1+\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_4^1+\cdots+\mathrm{C}_n^1)}=$ （　）

(A) 3　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{6}$　(D) 6

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 （　）

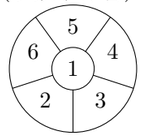
(A) 3π　(B) 4π　(C) $3\sqrt{3}\pi$　(D) 6π

二、填空题

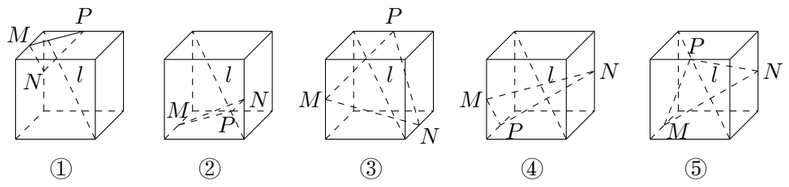
13. $\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____辆.

15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有_____种. (以数字作答)



16. 下列 5 个正方体图形中, l 是正方体的一条对角线, 点 M、N、P 分别为其所在棱的中点, 能得出 $l\perp$ 面 MNP 的图形的序号是_____. (写出所有符合要求的图形序号)

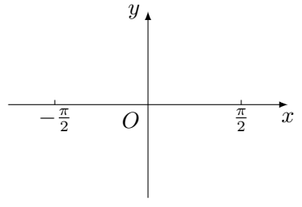


三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;

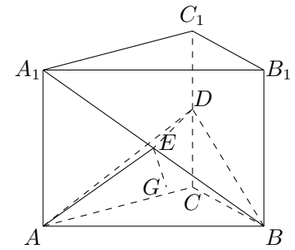
(2) 在给出的直角坐标系中, 画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的图象.



18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB=90°$, 侧棱 $AA_1=2$, D、E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G.

(1) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)

(2) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.



19. 设 $a>0$, 求函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x+a)$, $x\in(0,+\infty)$ 的单调区间.

20. A、B 两个代表队进行乒乓球对抗赛, 每队三名队员, A 队队员是 A_1, A_2, A_3, B 队队员是 B_1, B_2, B_3, 按以往多次比赛的统计, 对阵队员之间胜负概率如下:

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率
A_1 对 B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2 对 B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3 对 B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场, 每场胜队得 1 分, 负队得 0 分, 设 A 队、B 队最后所得总分分别为 ξ、η.
(1) 求 ξ、η 的概率分布;
(2) 求 $E\xi$, E_η.

21. 已知常数 $a>0$, 向量 $\vec{c}=(0,a)$, $\vec{i}=(1,0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c}+\lambda\vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0,a)$ 以 $\vec{i}-2\lambda\vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P, 其中 $\lambda\in\mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E、F, 使得 $|PE|+|PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E、F 的坐标; 若不存在, 说明理由.

22. 设 a_0 为常数, 且 $a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 证明对任意 $n\geqslant 1$, $a_n=\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^n]+(-1)^n\cdot 2^n a_0$;
(2) 假设对任意 $n\geqslant 1$ 有 $a_n>a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.

2003 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 不等式 $\sqrt{4x-x^2}<x$ 的解集是 （ ）

(A) $(0,2)$ (B) $(2,+\infty)$

(C) $(2,4)$ (D) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

2. 已知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ （ ）

(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

3. $\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}=$ （ ）

(A) $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ (B) $-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ (C) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (D) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

4. 已知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ （ ）

(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2+a_5=4$, $a_n=33$, 则 n 为 （ ）

(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51

6. 双曲线虚轴的一个端点为 M, 两个焦点为 F_1, F_2, $\angle F_1MF_2=120^\circ$, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0\end{cases}$, 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是( )

(A) $(-1,1)$ (B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

8. O 是平面上一定点, A、B、C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$, $\lambda\in[0,+\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的

(A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心

9. 函数 $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$ 的反函数为 （ ）

(A) $y=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(0,+\infty)$ (B) $y=\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(0,+\infty)$

(C) $y=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(-\infty,0)$ (D) $y=\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(-\infty,0)$

10. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 （ ）

(A) $\frac{a^3}{3}$ (B) $\frac{a^3}{4}$ (C) $\frac{a^3}{6}$ (D) $\frac{a^3}{12}$

11. 设 $a>0$, $f(x)=ax^2+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y=f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 （ ）

(A) $\left[0,\frac{1}{a}\right]$ (B) $\left[0,\frac{1}{2a}\right]$ (C) $\left[0,\left|\frac{b}{2a}\right|\right]$ (D) $\left[0,\left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$

12. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4,0)$, 若 $1<x_4<2$, 则 $\tan\theta$ 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\frac{1}{3},1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right)$

13. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 （ ）

(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

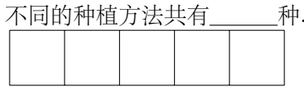
二、填空题

14. $\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

15. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____辆.

16. 在平面几何里, 有勾股定理: “设 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 互相垂直, 则 $AB^2+AC^2=BC^2$. ”拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是: “设三棱锥 $A-BCD$ 的三个侧面 ABC、ACD、ADB 两两互相垂直, 则_____. ”

17. 将 3 种作物种植在如图 5 块试验田里, 每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物, 不同的种植方法共有_____种. (以数字作答)

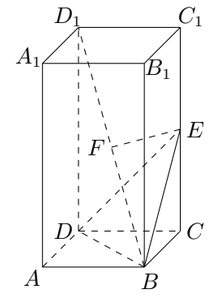


三、解答题

18. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=1$, $AA_1=2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.

(1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;

(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



19. 已知抛物线 $C_1: y=x^2+2x$ 和 $C_2: y=-x^2+a$, 如果直线 l 同时是 C_1 和 C_2 的切线, 称 l 是 C_1 和 C_2 的公切线, 公切线上两个切点之间的线段, 称为公切线段.

(1) a 取什么值时, C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线? 写出此公切线的方程;

(2) 若 C_1 和 C_2 有两条公切线, 证明相应的两条公切线段互相平分.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n=3^{n-1}+a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$.

(1) 求 a_2, a_3;

(2) 证明: $a_n=\frac{3^n-1}{2}$.

21. 有三种产品, 合格率分别为 0.90, 0.95 和 0.95, 各抽取一件进行检验.
(1) 求恰有一件不合格的概率;
(2) 求至少有两件不合格的概率. (精确到 0.001)

22. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.

23. 已知常数 $a>0$, 向量 $\vec{c}=(0,a)$, $\vec{i}=(1,0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c}+\lambda\vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0,a)$ 以 $\vec{i}-2\lambda\vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P, 其中 $\lambda\in\mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E、F, 使得 $|PE|+|PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E、F 的坐标; 若不存在, 说明理由.

2004 年普通高等学校春季招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

1. $\dfrac{5(4+\mathrm{i})^2}{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}=$ （　）

(A) $5(1-38\mathrm{i})$　(B) $5(1+38\mathrm{i})$　(C) $1+38\mathrm{i}$　(D) $1-38\mathrm{i}$

2. 不等式 $|2x^2-1|\leqslant 1$ 的解集为 （　）

(A) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$　(B) $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$

(C) $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$　(D) $\{x|-2\leqslant x\leqslant 0\}$

3. 已知 F_1、F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦点, M 为椭圆上一点, MF_1 垂直于 x 轴, 且 $\angle F_1MF_2=60^\circ$, 则椭圆的离心率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)^2(2+3n)^3}{(1-n)^5}=$ （　）

(A) 0　(B) 32　(C) -27　(D) 27

5. 等边三角形 ABC 的边长为 4, M、N 分别为 AB、AC 的中点, 沿 MN 将 $\triangle AMN$ 折起, 使得面 AMN 与面 $MNCB$ 所处的二面角为 30°, 则四棱锥 $A-MNCB$ 的体积为 （　）

(A) $\dfrac{3}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 3

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1$, $a_n=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$ $(n\geqslant 1)$, 则当 $n\geqslant 1$ 时, $a_n=$ （　）

(A) 2^n　(B) $\dfrac{n(n+1)}{2}$　(C) 2^{n-1}　(D) 2^n-1

7. 若二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 120°, 直线 $m\perp\alpha$, 则 β 所在平面内的直线与 m 所成角的取值范围是 （　）

(A) $(0^\circ,90^\circ]$　(B) $[30^\circ,60^\circ]$　(C) $[60^\circ,90^\circ]$　(D) $[30^\circ,90^\circ]$

8. 若 $f(\sin x)=2-\cos 2x$, 则 $f(\cos x)=$ （　）

(A) $2-\sin 2x$　(B) $2+\sin 2x$　(C) $2-\cos 2x$　(D) $2+\cos 2x$

9. 直角坐标 xOy 平面上, 平行直线 $x=n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 与平行直线 $y=n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 组成的图形中, 矩形共有 （　）

(A) 25 个　(B) 36 个　(C) 100 个　(D) 225 个

10. 已知直线 $l: x-y-1=0$, $l_1: 2x-y-2=0$. 若直线 l_2 与 l_1 关于 l 对称, 则 l_2 的方程是 （　）

(A) $x-2y+1=0$　(B) $x-2y-1=0$

(C) $x+y-1=0$　(D) $x+2y-1=0$

11. 已知向量集合 $M=\{\vec{a}|\vec{a}=(1,2)+\lambda(3,4),\ \lambda\in\mathbf{R}\}$, $N=\{\vec{a}|\vec{a}=(-2,-2)+\lambda(4,5),\ \lambda\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N=$

(A) $\{(1,1)\}$　(B) $\{(1,1),(-2,-2)\}$

(C) $\{(-2,-2)\}$　(D) $\varnothing$

12. 函数 $y=\sin^4x+\cos^4x$ 的最小正周期为 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　(C) π　(D) 2π

二、填空题

13. 抛物线 $y^2=6x$ 的准线方程为_____.

14. 在 5 名学生 (3 名男生, 2 名女生) 中安排 2 名学生值日, 其中至少有 1 名女生的概率是_____.

15. 函数 $y=\sqrt{x}-x$ $(x\geqslant 0)$ 的最大值为_____.

16. 若 $\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)^n$ 的展开式中常数项为 -20, 则自然数 $n=$_____.

三、解答题

17. 解关于 x 的不等式: $\log_a^3x<3\log_ax$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

18. 已知正项数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $B_n=\dfrac{1}{4}(b_n+1)^2$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

19. 已知 $k>0$, 直线 $l_1: y=kx$, $l_2: y=-kx$.

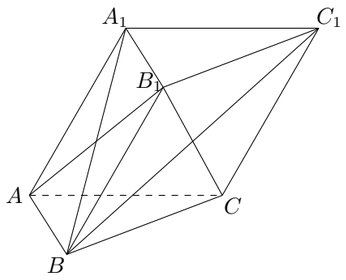
(1) 证明: 到 l_1、l_2 的距离的平方和为定值 a $(a>0)$ 的点的轨迹是圆或椭圆;

(2) 求到 l_1、l_2 的距离之和为定值 c $(c>0)$ 的点的轨迹.

20. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面边长和侧棱长均为 a, 侧面 $A_1ACC_1\perp$ 底面 ABC, $A_1B=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.

(1) 求异面直线 AC 与 BC_1 所成角的余弦值;

(2) 求证: $A_1B\perp$ 面 AB_1C.



21. 已知盒中有 10 个灯泡, 其中 8 个正品, 2 个次品. 现需要从中取出 2 个正品, 每次取出 1 个, 取出后不放回, 直到取出 2 个正品为止. 设 ξ 为取出的次数, 求 ξ 的分布列及 $E\xi$.

22. 已知抛物线 $C: y=x^2+4x+\dfrac{2}{7}$, 过 C 上一点 M, 且与 M 处的切线垂直的直线称为 C 在点 M 的法线.

(1) 若 C 在点 M 的法线的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$, 求点 M 的坐标 (x_0,y_0);

(2) 设 $P(-2,a)$ 为 C 对称轴上的一点, 在 C 上是否存在点, 使得 C 在该点的法线通过点 P? 若有, 求出这些点, 以及 C 在这些点的法线方程; 若没有, 请说明理由.

2004 年普通高等学校春季招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $M=\{-1,0,1,2\}$, $N=\{x|x(x-1)=0\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{-1,0,1,2\}$ (B) $\{0,1,2\}$ (C) $\{-1,0,1\}$ (D) $\{0,1\}$

2. 不等式 $|2x^2-1|\leqslant 1$ 的解集为 （ ）

(A) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$ (B) $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$

(C) $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$ (D) $\{x|-2\leqslant x\leqslant 0\}$

3. 已知 F_1、F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦点, M 为椭圆上一点, MF_1 垂直于 x 轴, 且 $\angle F_1MF_2=60^\circ$, 则椭圆的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(2,3)$, $\vec{c}=(3,4)$, 且 $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$, 则 λ_1,λ_2 的值分别是 （ ）

(A) -2, 1 (B) 1, -2 (C) 2, -1 (D) -1, 2

5. 等边三角形 ABC 的边长为 4, M、N 分别为 AB、AC 的中点, 沿 MN 将 $\triangle AMN$ 折起, 使得面 AMN 与面 $MNCB$ 所处的二面角为 30°, 则四棱锥 $A-MNCB$ 的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 3

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1$, $a_n=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$ $(n\geqslant 1)$, 则当 $n\geqslant 1$ 时, $a_n=$ （ ）

(A) 2^n (B) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (C) 2^{n-1} (D) 2^n-1

7. 若二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 120°, 直线 $m\perp\alpha$, 则 β 所在平面内的直线与 m 所成角的取值范围是 （ ）

(A) $(0^\circ,90^\circ]$ (B) $[30^\circ,60^\circ]$ (C) $[60^\circ,90^\circ]$ (D) $[30^\circ,90^\circ]$

8. 若 $\sin 2\alpha=\dfrac{24}{25}$, 则 $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$ 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{7}{5}$ (C) $\pm\dfrac{1}{5}$ (D) $\pm\dfrac{7}{5}$

9. 直角坐标 xOy 平面上, 平行直线 $x=n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 与平行直线 $y=n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 组成的图形中, 矩形共有 （ ）

(A) 25 个 (B) 36 个 (C) 100 个 (D) 225 个

10. 若直线 $ax+y=1$ 与圆 $(x-\sqrt{3})^2+(y-2)^2=1$ 有两个不同的交点, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(1,\sqrt{3})$ (B) $(-\sqrt{3},0)$ (C) $(\sqrt{3},+\infty)$ (D) $(-\infty,-\sqrt{3})$

11. 若 $f(\sin x)=2-\cos 2x$, 则 $f(\cos x)=$ （ ）

(A) $2-\sin 2x$ (B) $2+\sin 2x$ (C) $2-\cos 2x$ (D) $2+\cos 2x$

12. 已知直线 $l: x-y-1=0$, $l_1: 2x-y-2=0$. 若直线 l_2 与 l_1 关于 l 对称, 则 l_2 的方程是 （ ）

(A) $x-2y+1=0$ (B) $x-2y-1=0$

(C) $x+y-1=0$ (D) $x+2y-1=0$

二、填空题

13. 抛物线 $y^2=6x$ 的准线方程为_____.

14. 在 5 名学生 (3 名男生, 2 名女生) 中安排 2 名学生值日, 其中至少有 1 名女生的概率是_____.

15. 函数 $y=x-x^2$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最大值为_____.

16. 若 $\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)^n$ 的展开式中常数项为 -20, 则自然数 $n=$_____.

三、解答题

17. 解关于 x 的不等式: $\log_a^2 x<2\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

18. 已知数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1=1$. 其前 n 项和 $B_n=\dfrac{1}{4}(b_n+1)^2$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

19. 已知 $k>0$, 直线 $l_1: y=kx$, $l_2: y=-kx$.

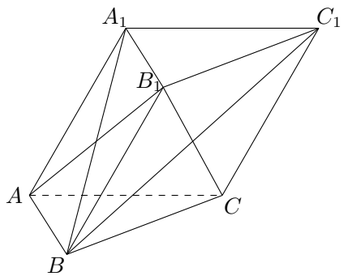
(1) 证明: 到 l_1、l_2 的距离的平方和为定值 a $(a>0)$ 的点的轨迹是圆或椭圆;

(2) 求到 l_1、l_2 的距离之和为定值 c $(c>0)$ 的点的轨迹.

20. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面边长和侧棱长均为 a, 侧面 $A_1ACC_1 \perp$ 底面 ABC, $A_1B = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.

(1) 求异面直线 AC 与 BC_1 所成角的余弦值;

(2) 求证: $A_1B \perp$ 面 AB_1C.



21. 某商场从生产厂家以每件 20 元购进一批商品, 若该商品零售价定为 p 元, 则销售量 Q (单位: 件) 与零售价 p (单位: 元) 有如下关系 $Q = 8300 - 170p - p^2$. 问该商品零售价定为多少时毛利润 L 最大, 并求出最大毛利润. (毛利润 = 销售收入 − 进货支出).

22. 已知抛物线 $C : y = x^2 + 4x + \dfrac{2}{7}$, 过 C 上一点 M, 且与 M 处的切线垂直的直线称为 C 在点 M 的法线.

(1) 若 C 在点 M 的法线的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$, 求点 M 的坐标 (x_0, y_0);

(2) 设 $P(-2, a)$ 为 C 对称轴上的一点, 在 C 上是否存在点, 使得 C 在该点的法线通过点 P? 若有, 求出这些点, 以及 C 在这些点的法线方程; 若没有, 请说明理由.

2004 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 在函数 $y=\sin 2x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan\dfrac{x}{2}$ 中, 最小正周期为 π 的函数是 （ ）

(A) $y=\sin 2x$　(B) $y=\sin x$　(C) $y=\cos x$　(D) $y=\tan\dfrac{x}{2}$

2. 当 $\dfrac{2}{3}<m<1$ 时, 复数 $z=(3m-2)+(m-1)\mathrm{i}$ 在复平面上对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程是 （ ）

(A) $y=\pm\dfrac{3}{2}x$　(B) $y=\pm\dfrac{2}{3}x$　(C) $y=\pm\dfrac{9}{4}x$　(D) $y=\pm\dfrac{4}{9}x$

4. 一个圆锥的侧面积是其底面积的 2 倍, 则该圆锥的母线与底面所成的角为 （ ）

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 75°

5. 在极坐标系中, 圆心在 $(\sqrt{2},\pi)$ 且过极点的圆的方程为 （ ）

(A) $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$　(B) $\rho=-2\sqrt{2}\cos\theta$

(C) $\rho=2\sqrt{2}\sin\theta$　(D) $\rho=-2\sqrt{2}\sin\theta$

6. 已知 $\sin(\theta+\pi)<0$, $\cos(\theta-\pi)>0$, 则下列不等关系中必定成立的是（ ）

(A) $\tan\dfrac{\theta}{2}<\cot\dfrac{\theta}{2}$　(B) $\tan\dfrac{\theta}{2}>\cot\dfrac{\theta}{2}$

(C) $\sin\dfrac{\theta}{2}<\cos\dfrac{\theta}{2}$　(D) $\sin\dfrac{\theta}{2}>\cos\dfrac{\theta}{2}$

7. 已知三个不等式: $ab>0$, $bc-ad>0$, $\dfrac{c}{a}-\dfrac{d}{b}>0$ (其中 a, b, c, d 均为实数), 用其中两个不等式作为条件, 余下的一个不等式作为结论组成一个命题, 可组成的正确命题的个数是 （ ）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

8. 两个完全相同的长方体的长、宽、高分别为 5 cm, 4 cm, 3 cm, 把它们重叠在一起组成一个新长方体, 在这些新长方体中, 最长的对角线的长度是（ ）

(A) $\sqrt{77}$ cm　(B) $7\sqrt{2}$ cm　(C) $5\sqrt{5}$ cm　(D) $10\sqrt{2}$ cm

9. 在 100 件产品中有 6 件次品, 现从中任取 3 件产品, 至少有 1 件次品的不同取法的种数是 （ ）

(A) $\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_{94}^2$　(B) $\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_{99}^2$　(C) $\mathrm{C}_{100}^3-\mathrm{C}_{94}^3$　(D) $\mathrm{A}_{100}^3-\mathrm{A}_{94}^3$

10. 期中考试以后, 班长算出了全班 40 个人数学成绩的平均分为 M, 如果把 M 当成一个同学的分数, 与原来的 40 个分数一起, 算出这 41 个分数的平均值为 N, 那么 $M:N$ 为 （ ）

(A) $\dfrac{40}{41}$　(B) 1　(C) $\dfrac{41}{40}$　(D) 2

二、填空题

11. 若 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x)=\lg(x+1)$ 的反函数, 则 $f^{-1}(x)$ 的值域是_____.

12. $\dfrac{\sin(\alpha+30^\circ)-\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos\alpha}$ 的值为_____.

13. 据某校环保小组调查, 某区垃圾量的年增长率为 b, 2003 年产生的垃圾量为 a 吨. 由此预测, 该区下一年的垃圾量为_____吨, 2008 年的垃圾量为_____吨.

14. 若直线 $mx+ny-3=0$ 与圆 $x^2+y^2=3$ 没有公共点, 则 m, n 满足的关系式为_____; 以 (m,n) 为点 P 的坐标, 过点 P 的一条直线与椭圆 $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的公共点有_____个.

三、解答题

15. 当 $0<a<1$ 时, 解关于 x 的不等式: $a^{\sqrt{2x-1}}<a^{x-2}$.

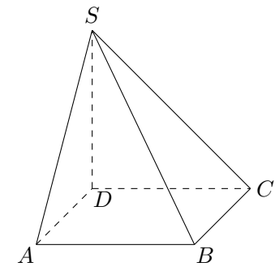
16. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边长, 已知 a, b, c 成等比数列, 且 $a^2-c^2=ac-bc$, 求 $\angle A$ 的大小及 $\dfrac{b\sin B}{c}$ 的值.

17. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, SD 垂直于底面 $ABCD$, $SB=\sqrt{3}$.

(1) 求证: $BC\perp SC$;

(2) 求面 ASD 与面 BSC 所成二面角的大小;

(3) 设棱 SA 的中点为 M, 求异面直线 DM 与 SB 所成的角的大小.

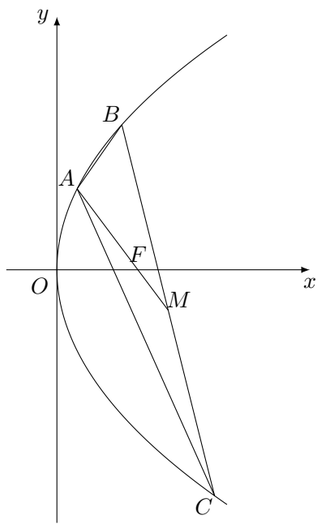


18. 已知点 $A(2,8)$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上, $\triangle ABC$ 的重心与此抛物线的焦点 F 重合 (如图).

(1) 写出该抛物线的方程和焦点 F 的坐标;

(2) 求线段 BC 中点 M 的坐标;

(3) 求 BC 所在直线的方程.



19. 某厂生产某种零件, 每个零件的成本为 40 元, 出厂单价定为 60 元, 该厂为鼓励销售商订购, 决定当一次订购量超过 100 个时, 每多订购一个, 订购的全部零件的出厂单价就降低 0.02 元, 但实际出厂单价不能低于 51 元.

(1) 当一次订购量为多少个时, 零件的实际出厂单价恰降为 51 元?

(2) 设一次订购量为 x 个, 零件的实际出厂单价为 P 元, 写出函数 $P=f(x)$ 的表达式;

(3) 当销售商一次订购 500 个零件时, 该厂获得的利润是多少元? 如果订购 1000 个, 利润又是多少元? (工厂售出一个零件的利润 = 实际出厂单价 − 成本)

20. 下表给出一个“等差数阵”:

4	7	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$
7	12	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$
( )	( )	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{3j}	$\cdots$
( )	( )	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{4j}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

其中每行、每列都是等差数列, a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的数.

(1) 写出 a_{45} 的值;

(2) 写出 a_{ij} 的计算公式;

(3) 证明: 正整数 N 在该等差数列阵中的充要条件是 $2N+1$ 可以分解成两个不是 1 的正整数之积.

2004 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 在函数 $y=\sin 2x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan\dfrac{x}{2}$ 中, 最小正周期为 π 的函数是 （ ）

(A) $y=\sin 2x$　(B) $y=\sin x$　(C) $y=\cos x$　(D) $y=\tan\dfrac{x}{2}$

2. 当 $m<1$ 时, 复数 $z=2+(m-1)\mathrm{i}$ 在复平面上对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程是 （ ）

(A) $y=\pm\dfrac{3}{2}x$　(B) $y=\pm\dfrac{2}{3}x$　(C) $y=\pm\dfrac{9}{4}x$　(D) $y=\pm\dfrac{4}{9}x$

4. 一个圆锥的侧面积是其底面积的 2 倍, 则该圆锥的母线与底面所成的角为 （ ）

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 75°

5. 已知 $\sin(\theta+\pi)<0$, $\cos(\theta-\pi)>0$, 则下列不等关系中必定成立的是（ ）

(A) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$　(B) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

(C) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$　(D) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

6. 在抛物线 $y^2=2px$ 上, 横坐标为 4 的点到焦点的距离为 5, 则 p 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) 2　(D) 4

7. 已知 a, b, c, d 均为实数, 有下列命题:

① 若 $ab>0$, $bc-ad>0$, 则 $\dfrac{c}{a}-\dfrac{d}{b}>0$;

② 若 $ab>0$, $\dfrac{c}{a}-\dfrac{d}{b}>0$, 则 $bc-ad>0$;

③ 若 $bc-ad>0$, $\dfrac{c}{a}-\dfrac{d}{b}>0$, 则 $ab>0$.

其中正确命题的个数是 （ ）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

8. 两个完全相同的长方体的长、宽、高分别为 5 cm, 4 cm, 3 cm, 把它们重叠在一起组成一个新长方体, 在这些新长方体中, 最长的对角线的长度是（ ）

(A) $\sqrt{77}$ cm　(B) $7\sqrt{2}$ cm　(C) $5\sqrt{5}$ cm　(D) $10\sqrt{2}$ cm

9. 在 100 件产品中有 6 件次品, 现从中任取 3 件产品, 至少有 1 件次品的不同取法的种数是 （ ）

(A) $\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_{94}^2$　(B) $\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_{99}^2$　(C) $\mathrm{A}_{100}^3-\mathrm{A}_{94}^3$　(D) $\mathrm{C}_{100}^3-\mathrm{C}_{94}^3$

10. 期中考试以后, 班长算出了全班 40 个人数学成绩的平均分为 M, 如果把 M 当成一个同学的分数, 与原来的 40 个分数一起, 算出这 41 个分数的平均值为 N, 那么 $M:N$ 为 （ ）

(A) $\dfrac{40}{41}$　(B) 1　(C) $\dfrac{41}{40}$　(D) 2

二、填空题

11. 直线 $x-\sqrt{3}y+a=0$ (a 为常实数) 的倾斜角的大小是_____.

12. $\dfrac{\sin(\alpha+30^\circ)-\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos\alpha}$ 的值为_____.

13. 若 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x)=\lg(x-1)$ 的反函数, 则 $f^{-1}(x)$ 的值域是_____.

14. 若直线 $mx+ny-3=0$ 与圆 $x^2+y^2=3$ 没有公共点, 则 m, n 满足的关系式为_____; 以 (m,n) 为点 P 的坐标, 过点 P 的一条直线与椭圆 $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的公共点有_____个.

三、解答题

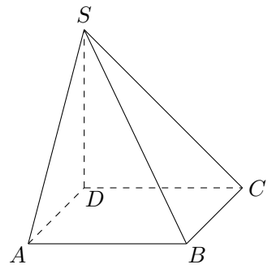
15. 解不等式: $\sqrt{2x-1}>x-2$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边长, 已知 a, b, c 成等比数列, 且 $a^2-c^2=ac-bc$, 求 $\angle A$ 的大小及 $\dfrac{b\sin B}{c}$ 的值.

17. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, SD 垂直于底面 $ABCD$, $SB=\sqrt{3}$.

(1) 求证: $BC\perp SC$;

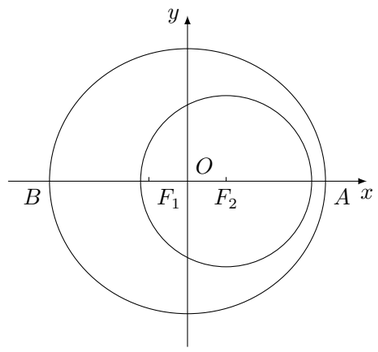
(2) 求面 ASD 与面 BSC 所成二面角的大小.



18. 2003 年 10 月 15 日 9 时, “神舟”五号载人飞船发射升空, 于 9 时 9 分 50 秒准确进入预定轨道, 开始巡天飞行. 该轨道是以地球的中心 F_2 为一个焦点的椭圆. 选取坐标系如图所示, 椭圆中心在原点. 近地点 A 距地面 200 km, 远地点 B 距地面 350 km. 已知地球半径 $R = 6371$ km.

(1) 求飞船飞行的椭圆轨道的方程;

(2) 飞船绕地球飞行了十四圈后, 于 16 日 5 时 59 分返回舱与推进舱分离, 结束巡天飞行, 飞船共巡天飞行了约 6×10^5 km, 问飞船巡天飞行的平均速度是多少 km/s? (结果精确到 1 km/s)



19. 某服装厂生产一种服装, 每件服装的成本为 40 元, 出厂单价定为 60 元, 该厂为鼓励销售商订购, 决定当一次订购量超过 100 件时, 每多订购一件, 订购的全部服装的出厂单价就降低 0.02 元. 根据市场调查, 经销商一次订购量不会超过 500 件.

(1) 设一次订购量为 x 件, 服装的实际出厂单价为 P 元, 写出函数 $P = f(x)$ 的表达式;

(2) 当销售商一次订购 400 件服装时, 该服装厂获得的利润是多少元? (服装厂售出一件服装的利润 = 实际出厂单价 − 成本)

20. 下表给出一个“等差数阵”:

4	7	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$
7	12	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$
( )	( )	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{3j}	$\cdots$
( )	( )	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{4j}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

其中每行、每列都是等差数列, a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的数.

(1) 写出 a_{45} 的值;

(2) 写出 a_{ij} 的计算公以及 2008 这个数在等差数阵中所在的位置.

2004 年普通高等学校春季招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=2$, 则 z 的实部是_____.

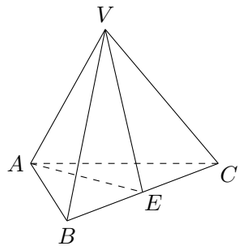
2. 方程 $\lg x+\lg(x+3)=1$ 的解 $x=$_____.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边. 若 $\angle A=105^\circ$, $\angle B=45^\circ$, $b=2\sqrt{2}$, 则 $c=$_____.

4. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作垂直于 x 轴的直线, 交抛物线于 A、B 两点, 则以 F 为圆心、AB 为直径的圆方程是_____.

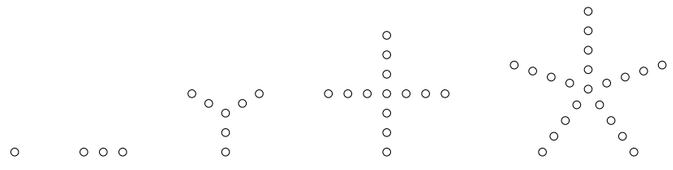
5. 已知函数 $f(x)=\log_3\left(\dfrac{4}{x}+2\right)$, 则方程 $f^{-1}(x)=4$ 的解 $x=$_____.

6. 如图, 在底面边长为 2 的正三棱锥 $V-ABC$ 中, E 是 BC 的中点, 若 $\triangle VAE$ 的面积是 $\dfrac{1}{4}$, 则侧棱 VA 与底面所成角的大小为_____. (结果用反三角函数值表示)



7. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, 且对任意大于 1 的正整数 n, 点 $(\sqrt{a_n},\sqrt{a_{n-1}})$ 在直线 $x-y-\sqrt{3}=0$ 上, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{(n+1)^2}=$_____.

8. 根据下列 5 个图形及相应点的个数的变化规律, 试猜测第 n 个图中有_____个点.



9. 一次二期课改经验交流会打算交流试点学校的论文 5 篇和非试点学校的论文 3 篇. 若任意排列交流次序, 则最先和最后交流的论文都为试点学校的概率是_____. (结果用分数表示)

10. 若平移椭圆 $4(x+3)^2+9y^2=36$, 使平移后的椭圆中心在第一象限, 且它与 x 轴、y 轴分别只有一个交点, 则平移后的椭圆方程是_____.

11. 如图, 在由二项式系数所构成的杨辉三角形中, 第_____行中从左至右第 14 与第 15 个数的比为 $2:3$.

第 0 行　　1
第 1 行　　1　　1
第 2 行　　1　　2　　1
第 3 行　　1　　3　　3　　1
第 4 行　　1　　4　　6　　4　　1
第 5 行　　1　　5　　10　　10　　5　　1
……　　……

12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 当 $a_r=a_s$ $(r\neq s)$ 时, $\{a_n\}$ 必定是常数数列. 然而在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 对某些正整数 r、s $(r\neq s)$, 当 $a_r=a_s$ 时, 非常数数列 $\{a_n\}$ 的一个例子是_____.

二、选择题

13. 下列函数中, 周期为 1 的奇函数是 (　　)

(A) $y=1-2\sin^2\pi x$　　(B) $y=\sin\left(2\pi x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(C) $y=\tan\dfrac{\pi}{2}x$　　(D) $y=\sin\pi x\cos\pi x$

14. 若非空集合 $M\subseteq N$, 则"$a\in M$ 或 $a\in N$"是"$a\in M\cap N$"的 (　　)

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 有命题① $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$; ② $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$; ③ 若 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形; ④ 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}>0$, 则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 上述命题正确的是 (　　)

(A) ①②　　(B) ①④　　(C) ②③　　(D) ②③④

16. 若 $p=a+\dfrac{1}{a}+2$ $(a>0)$, $q=\arccos t$ $(-1\leqslant t\leqslant 1)$, 则下列不等式恒成立的是 (　　)

(A) $p\geqslant\pi>q$　　(B) $p>q\geqslant 0$　　(C) $4>p\geqslant q$　　(D) $p\geqslant q>0$

三、解答题

17. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $P(2\cos x+1, 2\cos 2x+2)$ 和点 $Q(\cos x,-1)$, 其中 $x\in[0,\pi]$. 若向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 垂直, 求 x 的值.

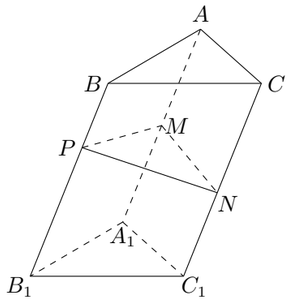
18. 已知实数 p 满足不等式 $\dfrac{2x+1}{x+2}<0$, 试判断方程 $z^2-2z+5-p^2=0$ 有无实根, 并给出证明.

19. 某市 2003 年共有 1 万辆燃油型公交车. 有关部门计划于 2004 年投入 128 辆电力型公交车, 随后电力型公交车每年的投入比上一年增加 50%, 试问:
(1) 该市在 2010 年应该投入多少辆电力型公交车?
(2) 到哪一年底, 电力型公交车的数量开始超过该市公交车总量的 $\dfrac{1}{3}$?

20. 如图, 点 P 为斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 BB_1 上一点, $PM\perp BB_1$ 交 AA_1 于点 M, $PN\perp BB_1$ 交 CC_1 于点 N.

(1) 求证: $CC_1\perp MN$;

(2) 在任意 $\triangle DEF$ 中有余弦定理: $DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\angle DFE$. 拓展到空间, 类比三角形的余弦定理, 写出斜三棱柱的三个侧面面积与其中两个侧面所成的二面角之间的关系式, 并予以证明.



21. 已知函数 $f(x)=|x-a|$, $g(x)=x^2+2ax+1$ (a 为正常数), 且函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 y 轴上的截距相等.

(1) 求 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)+g(x)$ 的单调递增区间;

(3) 若 n 为正整数, 证明: $10^{f(n)}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{g(n)}<4$.

22. 已知倾斜角为 45° 的直线 l 过点 $A(1,-2)$ 和点 B, B 在第一象限, $|AB|=3\sqrt{2}$.

(1) 求点 B 的坐标;

(2) 若直线 l 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ ($a>0$) 相交于 E、F 两点, 且线段 EF 的中点坐标为 $(4,1)$, 求 a 的值;

(3) 对于平面上任一点 P, 当点 Q 在线段 AB 上运动时, 称 $|PQ|$ 的最小值为 P 与线段 AB 的距离. 已知点 P 在 x 轴上运动, 写出点 $P(t,0)$ 到线段 AB 的距离 h 关于 t 的函数关系式.

2004 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 设全集是实数集 $\mathbf{R}$, $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$, $N=\{x|x<1\}$, 那么 $\overline{M}\cap N$ 等于 （ ）

(A) $\{x|x<-2\}$ (B) $\{x|-2<x<1\}$

(C) $\{x|x<1\}$ (D) $\{x|-2\leqslant x<1\}$

2. 满足条件 $|z-\mathrm{i}|=|3+4\mathrm{i}|$ 的复数 z 在复平面上对应点的轨迹是 （ ）

(A) 一条直线 (B) 两条直线 (C) 圆 (D) 椭圆

3. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 给出下列四个命题:

① 若 $m\perp\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\perp n$;

② 若 $\alpha\parallel\beta$, $\beta\parallel\gamma$, $m\perp\alpha$, 则 $m\perp\gamma$;

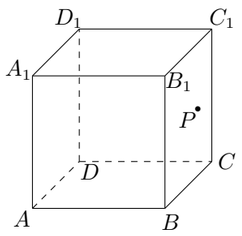
③ 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$;

④ 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha\parallel\beta$.

其中正确命题的序号是 （ ）

(A) ①和② (B) ②和③ (C) ③和④ (D) ①和④

4. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是侧面 BB_1C_1C 内一动点, 若 P 到直线 BC 与直线 C_1D_1 的距离相等, 则动点 P 的轨迹所在的曲线是 （ ）



(A) 直线 (B) 圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线

5. 函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1,2]$ 上存在反函数的充分必要条件是( )

(A) $a\in(-\infty,1]$ (B) $a\in[2,+\infty)$

(C) $a\in[1,2]$ (D) $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

6. 已知 a、b、c 满足 $c<b<a$ 且 $ac<0$, 那么下列选项中一定成立的是( )

(A) $ab>ac$ (B) $c(b-a)<0$ (C) $cb^2<ab^2$ (D) $ac(a-c)>0$

7. 从长度分别为 1, 2, 3, 4, 5 的五条线段中, 任取三条的不同取法共有 n 种. 在这些取法中, 以取出的三条线段为边可组成的钝角三角形的个数为 m, 则 $\dfrac{m}{n}$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{10}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{3}{10}$ (D) $\dfrac{2}{5}$

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in P\\ -x, & x\in M\end{cases}$, 其中 P, M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 又规定 $f(P)=\{y|y=f(x),x\in P\}$, $f(M)=\{y|y=f(x),x\in M\}$, 给出下列四个判断:

① 若 $P\cap M\neq\varnothing$, 则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$;

② 若 $P\cup M=\mathbf{R}$, 则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$;

③ 若 $P\cup M=\mathbf{R}$, 则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$;

④ 若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$, 则 $f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$.

其中正确判断有 （ ）

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

二、填空题

9. 函数 $y=\cos 2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$ 的最小正周期是_____.

10. 方程 $\lg(4^x+2)=\lg 2^x+\lg 3$ 的解是_____.

11. 某地球仪上北纬 30° 纬线的长度为 12πcm, 该地球仪的半径是_____cm, 表面积是_____cm^2.

12. 曲线 $C:\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=-1+\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 的普通方程是_____, 如果曲线 C 与直线 $x+y+a=0$ 有公共点, 那么实数 a 的取值范围是_____.

13. 在函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中, 若 a, b, c 成等比数列且 $f(0)=-4$, 则 $f(x)$ 有最_____值 (填“大”或“小”), 且该值为_____.

14. 定义“等和数列”: 在一个数列中, 如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数, 那么这个数列叫做等和数列, 这个常数叫做该数列的公和. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等和数列, 且 $a_1=2$, 公和为 5, 那么 a_{18} 的值为_____, 且这个数列的前 21 项和 S_{21} 的计算公式为_____.

三、解答题

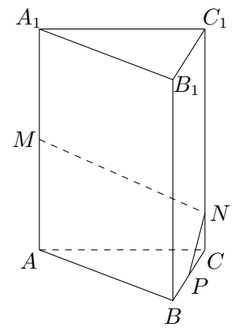
15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A+\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $AC=2$, $AB=3$, 求 $\tan A$ 的值和 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=3$, $AA_1=4$, M 为 AA_1 的中点, P 是 BC 上一点, 且由 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到 M 的最短路线长为 $\sqrt{29}$, 设这条最短路线与 CC_1 的交点为 N, 求:

(1) 该三棱柱的侧面展开图的对角线长;

(2) PC 和 NC 的长;

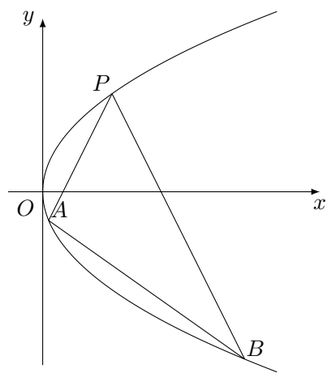
(3) 平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角 (锐角) 的大小. (用反三角函数表示)



17. 如图, 过抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 上一定点 $P(x_0,y_0)$ ($y_0>0$), 作两条直线分别交抛物线于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

(1) 求该抛物线上纵坐标为 $\dfrac{p}{2}$ 的点到其焦点 F 的距离;

(2) 当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时, 求 $\dfrac{y_1+y_2}{y_0}$ 的值, 并证明直线 AB 的斜率是非零常数.



18. 函数 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的增函数, 满足 $f(x)=2f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 且 $f(1)=1$, 在每个区间 $\left(\dfrac{1}{2^i},\dfrac{1}{2^{i-1}}\right]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 上, $y=f(x)$ 的图象都是斜率为同一常数 k 的直线的一部分.

(1) 求 $f(0)$ 及 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 的值, 并归纳出 $f\left(\dfrac{1}{2^i}\right)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 的表达式;

(2) 设直线 $x=\dfrac{1}{2^i}$, $x=\dfrac{1}{2^{i-1}}$, x 轴及 $y=f(x)$ 的图象围成的矩形的面积为 a_i $(i=1,\ 2,\ \cdots)$, 记 $S(k)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$, 求 $S(k)$ 的表达式, 并写出其定义域和最小值.

19. 某段城铁线路上依次有 A, B, C 三站, $AB=15$ km, $BC=3$ km, 在列车运行时刻表上, 规定列车 8 时整从 A 站发车, 8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟, 8 时 12 分到达 C 站, 在实际运行中, 假设列车从 A 站正点发车, 在 B 站停留 1 分钟, 并在行驶时以同一速度 v km/h 匀速行驶, 列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

(1) 分别写出列车在 B、C 两站的运行误差;

(2) 若要求列车在 B、C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟, 求 v 的取值范围.

20. 给定有限个正数满足条件 T: 每个数都不大于 50 且总和 $L=1275$. 现将这些数按下列要求进行分组, 每组数之和不大于 150 且分组的步骤是:

首先, 从这些数中选择这样一些数构成第一组, 使得 150 与这组数之和的差 r_1 与所有可能的其他选择相比是最小的, r_1 称为第一组余差;

然后, 在去掉已选入第一组的数后, 对余下的数按第一组的选择方式构成第二组, 这时的余差为 r_2; 如此继续构成第三组 (余差为 r_3)、第四组 (余差为 r_4)、$\cdots$, 直至第 N 组 (余差为 r_N) 把这些数全部分完为止.

(1) 判断 r_1, r_2, $\cdots$, r_N 的大小关系, 并指出除第 N 组外的每组至少含有几个数;

(2) 当构成第 n $(n<N)$ 组后, 指出余下的每个数与 r_n 的大小关系, 并证明 $r_{n-1}>\dfrac{150n-L}{n-1}$;

(3) 对任何满足条件 T 的有限个正数, 证明: $N\leqslant 11$.

2004 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$, $N=\{x|x<1\}$, 则 $M\cap N$ 等于 （ ）

(A) $\{x|1<x<2\}$ (B) $\{x|-2<x<1\}$

(C) $\{x|1<x\leqslant 2\}$ (D) $\{x|-2\leqslant x<1\}$

2. 满足条件 $|z|=|3+4\mathrm{i}|$ 的复数 z 在复平面上对应点的轨迹是 （ ）

(A) 一条直线 (B) 两条直线 (C) 圆 (D) 椭圆

3. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 给出下列四个命题:

① 若 $m\perp\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\perp n$;

② 若 $\alpha\parallel\beta$, $\beta\parallel\gamma$, $m\perp\alpha$, 则 $m\perp\gamma$;

③ 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$;

④ 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha\parallel\beta$.

其中正确命题的序号是 （ ）

(A) ①和② (B) ②和③ (C) ③和④ (D) ①和④

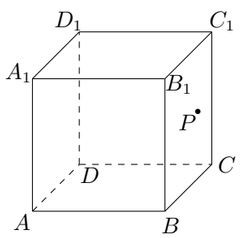
4. 已知 a、b、c 满足 $c<b<a$ 且 $ac<0$, 那么下列选项中一定成立的是( )

(A) $ab>ac$ (B) $c(b-a)<0$ (C) $cb^2<ab^2$ (D) $ac(a-c)>0$

5. 从长度分别为 1, 2, 3, 4, 5 的五条线段中, 任取三条的不同取法共有 n 种. 在这些取法中, 以取出的三条线段为边可组成的钝角三角形的个数为 m, 则 $\dfrac{m}{n}$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{10}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{3}{10}$ (D) $\dfrac{2}{5}$

6. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是侧面 BB_1C_1C 内一动点, 若 P 到直线 BC 与直线 C_1D_1 的距离相等, 则动点 P 的轨迹所在的曲线是 （ ）



(A) 直线 (B) 圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线

7. 函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1,2]$ 上存在反函数的充分必要条件是( )

(A) $a\in(-\infty,1]$ (B) $a\in[2,+\infty)$

(C) $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$ (D) $a\in[1,2]$

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in P\\ -x, & x\in M\end{cases}$, 其中 P, M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 又规定 $f(P)=\{y|y=f(x),x\in P\}$, $f(M)=\{y|y=f(x),x\in M\}$, 给出下列四个判断:

① 若 $P\cap M=\varnothing$, 则 $f(P)\cup f(M)=\varnothing$;

② 若 $P\cap M\neq\varnothing$, 则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$;

③ 若 $P\cup M=\mathbf{R}$, 则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$;

④ 若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$, 则 $f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$.

其中正确判断有 （ ）

(A) 3 个 (B) 2 个 (C) 1 个 (D) 0 个

二、填空题

9. 函数 $y=\sin x\cos x$ 的最小正周期是_____.

10. 方程 $\lg(x^2+2)=\lg x+\lg 3$ 的解是_____.

11. 某地球仪上北纬 30° 纬线的长度为 12πcm, 该地球仪的半径是_____cm, 表面积是_____cm^2.

12. 圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 的圆心坐标是_____, 如果直线 $x+y+a=0$ 与该圆有公共点, 那么实数 a 的取值范围是_____.

13. 在函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中, 若 a, b, c 成等比数列且 $f(0)=-4$, 则 $f(x)$ 有最_____值 (填“大”或“小”), 且该值为_____.

14. 定义“等和数列”: 在一个数列中, 如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数, 那么这个数列叫做等和数列, 这个常数叫做该数列的公和. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等和数列, 且 $a_1=2$, 公和为 5, 那么 a_{18} 的值为_____, 且这个数列的前 21 项和 S_{21} 的计算公式为_____.

三、解答题

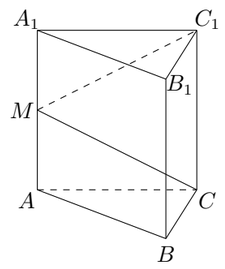
15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A+\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $AC=2$, $AB=3$, 求 $\tan A$ 的值和 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=2$, $AA_1=2$, 由顶点 B 沿棱柱侧面经过棱 AA_1 到顶点 C 的最短路线与 AA_1 的交点为 M, 求:

(1) 该三棱柱的侧面展开图的对角线长;

(2) 该最短路线的长与 $\dfrac{A_1M}{AM}$ 的值;

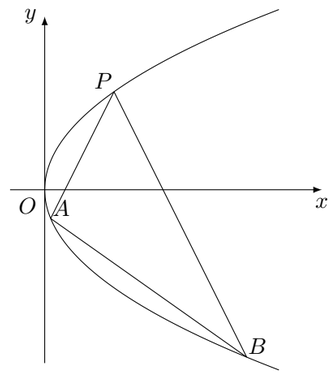
(3) 平面 C_1MB 与平面 ABC 所成二面角 (锐角) 的大小.



17. 如图, 抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点在坐标原点, 点 $P(1,2)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 均在抛物线上.

(1) 写出该抛物线的方程及其准线方程;

(2) 当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时, 求 y_1+y_2 的值及直线 AB 的斜率.



18. 函数 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的增函数, 满足 $f(x)=2f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 且 $f(1)=1$, 在每个区间 $\left(\dfrac{1}{2^i},\dfrac{1}{2^{i-1}}\right]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 上, $y=f(x)$ 的图象都是斜率为同一常数 k 的直线的一部分.

(1) 求 $f(0)$ 及 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 的值, 并归纳出 $f\left(\dfrac{1}{2^i}\right)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 的表达式;

(2) 设直线 $x=\dfrac{1}{2^i}$, $x=\dfrac{1}{2^{i-1}}$, x 轴及 $y=f(x)$ 的图象围成的矩形的面积为 a_i $(i=1,\ 2,\ \cdots)$, 求 a_1, a_2 及 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的值.

19. 某段城铁线路上依次有 A, B, C 三站, $AB=15$ km, $BC=3$ km, 在列车运行时刻表上, 规定列车 8 时整从 A 站发车, 8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟, 8 时 12 分到达 C 站, 在实际运行中, 假设列车从 A 站正点发车, 在 B 站停留 1 分钟, 并在行驶时以同一速度 v km/h 匀速行驶, 列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

(1) 分别写出列车在 B、C 两站的运行误差;

(2) 若要求列车在 B、C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟, 求 v 的取值范围.

20. 给定有限个正数满足条件 T: 每个数都不大于 50 且总和 $L=1275$. 现将这些数按下列要求进行分组, 每组数之和不大于 150 且分组的步骤是:

首先, 从这些数中选择这样一些数构成第一组, 使得 150 与这组数之和的差 r_1 与所有可能的其他选择相比是最小的, r_1 称为第一组余差;

然后, 在去掉已选入第一组的数后, 对余下的数按第一组的选择方式构成第二组, 这时的余差为 r_2; 如此继续构成第三组 (余差为 r_3)、第四组 (余差为 r_4)、$\cdots$, 直至第 N 组 (余差为 r_N) 把这些数全部分完为止.

(1) 判断 r_1, r_2, $\cdots$, r_N 的大小关系, 并指出除第 N 组外的每组至少含有几个数;

(2) 当构成第 n $(n<N)$ 组后, 指出余下的每个数与 r_n 的大小关系, 并证明 $r_{n-1}>\dfrac{150n-L}{n-1}$;

(3) 对任何满足条件 T 的有限个正数, 证明: $N\leqslant 11$.

2004 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是 （ ）

(A) $[1,+\infty)$ (B) $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ (C) $\left[\frac{2}{3},1\right]$ (D) $\left(\frac{2}{3},1\right]$

2. 设复数 $Z=1+\sqrt{2}\mathrm{i}$, 则 $Z^2-2Z=$ （ ）

(A) -3 (B) 3 (C) $-3\mathrm{i}$ (D) $3\mathrm{i}$

3. 圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心到直线 $x-y=1$ 的距离为 （ ）

(A) 2 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$

4. 不等式 $x+\frac{2}{x+1}>2$ 的解集是 （ ）

(A) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ (B) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
(C) $(-1,0)\cup(0,1)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

5. $\sin 163^\circ\sin 223^\circ+\sin 253^\circ\sin 313^\circ=$ （ ）

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°, $\left|\vec{b}\right|=4$, $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=-72$, 则向量 $\vec{a}$ 的模为 （ ）

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 12

7. 一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ $(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是 （ ）

(A) $a<0$ (B) $a>0$ (C) $a<-1$ (D) $a>1$

8. 设 P 是 60° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 内一点, $PA\perp$ 平面 α, $PB\perp$ 平面 β, A, B 为垂足, $PA=4$, $PB=2$, 则 AB 的长为 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $4\sqrt{2}$

9. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 首项 $a_1>0$, $a_{2003}+a_{2004}>0$, $a_{2003}\cdot a_{2004}<0$, 则使前 n 项和 $S_n>0$ 成立的最大自然数 n 是 （ ）

(A) 4005 (B) 4006 (C) 4007 (D) 4008

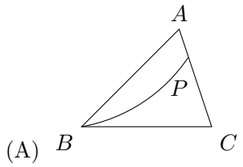
10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线的右支上, 且 $|PF_1|=4|PF_2|$, 则此双曲线的离心率 e 的最大值为 （ ）

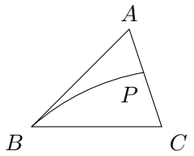
(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{7}{3}$

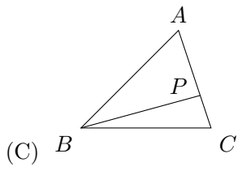
11. 某校高三年级举行一次演讲赛共有 10 位同学参赛, 其中一班有 3 位, 二班有 2 位, 其它班有 5 位, 若采用抽签的方式确定他们的演讲顺序, 则一班有 3 位同学恰好被排在一起 (指演讲序号相连), 而二班的 2 位同学没有被排在一起的概率为 （ ）

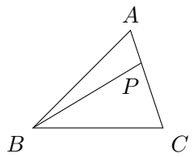
(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{40}$ (D) $\frac{1}{120}$

12. 若三棱锥 $A-BCD$ 的侧面 ABC 内一动点 P 到底面 BCD 的距离与到棱 AB 的距离相等, 则动点 P 的轨迹与 $\triangle ABC$ 组成图形可能是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

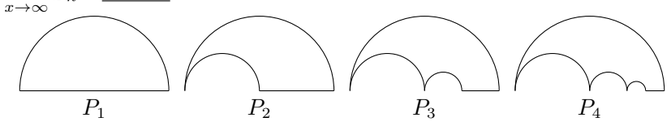
(D) 

二、填空题

13. 若在 $(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 -80, 则 $a=$_____.

14. 曲线 $y=2-\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=\frac{1}{4}x^3-2$ 在交点处切线的夹角是_____. (用弧度数作答)

15. 如图 P_1 是一块半径为 1 的半圆形纸板, 在 P_1 的左下端剪去一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的半圆后得到图形 P_2, 然后依次剪去一个更小半圆 (其直径为前一个被剪掉半圆的半径) 得圆形 P_3、P_4、$\cdots$、P_n、$\cdots$, 记纸板 P_n 的面积为 S_n, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}S_n=$_____.



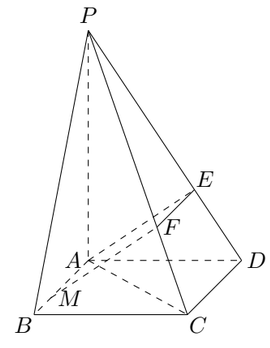
16. 对任意实数 k, 直线 $y=kx+b$ 与椭圆 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\theta\\ y=1+4\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 恰有一个公共点, 则 b 取值范围是_____.

三、解答题

17. 求函数 $y=\sin^4x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^4x$ 的取小正周期和取小值; 并写出该函数在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间.

18. 设一汽车在前进途中要经过 4 个路口, 汽车在每个路口遇到绿灯的概率为 $\frac{3}{4}$, 遇到红灯 (禁止通行) 的概率为 $\frac{1}{4}$. 假定汽车只在遇到红灯或到达目的地才停止前进, ξ 表示停车时已经通过的路口数, 求:
(1) ξ 的概率的分布列及期望 $E\xi$;
(2) 停车时最多已通过 3 个路口的概率.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AE\perp PD$, $EF/\!/CD$, $AM=EF$.
(1) 证明: MF 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线;
(2) 若 $PA=3AB$, 求直线 AC 与平面 EAM 所成角的正弦值.



20. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-a)$ $(a>1)$.

(1) 求导数 $f'(x)$; 并证明 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2;

(2) 若不等式 $f(x_1)+f(x_2)\leqslant 0$ 成立, 求 a 的取值范围.

21. 设 $p>0$ 是一常数, 过点 $Q(2p,0)$ 的直线与抛物线 $y^2=2px$ 交于相异两点 A、B, 以线段 AB 为直经作圆 H (H 为圆心). 试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上; 并求圆 H 的面积最小时直线 AB 的方程.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

(1) 证明 $a_n>\sqrt{2n+1}$ 对一切正整数 n 成立;

(2) 令 $b_n=\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$, 判断 b_n 与 b_{n+1} 的大小, 并说明理由.

2004 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是 （ ）

(A) $[1,+\infty)$ (B) $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ (C) $\left[\frac{2}{3},1\right]$ (D) $\left(\frac{2}{3},1\right]$

2. 函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, 则 $\frac{f(2)}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=$ （ ）

(A) 1 (B) -1 (C) $\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{3}{5}$

3. 圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心到直线 $x-y=1$ 的距离为 （ ）

(A) 2 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$

4. 不等式 $x+\frac{2}{x+1}>2$ 的解集是 （ ）

(A) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ (B) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

(C) $(-1,0)\cup(0,1)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

5. $\sin 163^\circ\sin 223^\circ+\sin 253^\circ\sin 313^\circ=$ （ ）

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°, $\left|\vec{b}\right|=4$, $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=-72$, 则向量 $\vec{a}$ 的模为 （ ）

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 12

7. 已知 p 是 r 的充分不必要条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件. 那么 p 是 q 成立的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 不同直线 m, n 和不同平面 α, β, 给出下列命题:

① $\begin{cases}\alpha\parallel\beta\\ m\subset\alpha\end{cases}\Rightarrow m\parallel\beta$; ② $\begin{cases}m\parallel n\\ m\parallel\beta\end{cases}\Rightarrow n\parallel\beta$;

③ $\begin{cases}m\subset\alpha\\ n\subset\beta\end{cases}\Rightarrow m,n$ 异面; ④ $\begin{cases}\alpha\perp\beta\\ m\parallel\alpha\end{cases}\Rightarrow m\perp\beta$.

其中假命题有 （ ）

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

9. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 首项 $a_1>0$, $a_{2003}+a_{2004}>0$, $a_{2003}\cdot a_{2004}<0$, 则使前 n 项和 $S_n>0$ 成立的最大自然数 n 是 （ ）

(A) 4005 (B) 4006 (C) 4007 (D) 4008

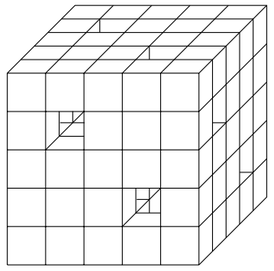
10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线的右支上, 且 $|PF_1|=4|PF_2|$, 则此双曲线的离心率 e 的最大值为 （ ）

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{7}{3}$

11. 已知盒中装有 3 只螺口与 7 只卡口灯炮, 这些灯炮的外形与功率都相同且灯口向下放着, 现需要一只卡口灯炮使用, 电工师傅每次从中任取一只并不放回, 则他直到第 3 次才取得卡口灯炮的概率为 （ ）

(A) $\frac{21}{40}$ (B) $\frac{17}{40}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{7}{120}$

12. 如图, 棱长为 5 的正方体无论从哪一个面看, 都有两个直通的边长为 1 的正方形孔, 则这个有孔正方体的表面积 (含孔内各面) 是 （ ）



(A) 258 (B) 234 (C) 222 (D) 210

二、填空题

13. 若在 $(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 -80, 则 $a=$_____.

14. 已知 $\frac{5}{x}+\frac{3}{y}=2$ $(x>0,\ y>0)$, 则 xy 的最小值是_____.

15. 已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$, 则过点 $P(2,4)$ 的切线方程是_____.

16. 毛泽东在《送瘟神》中写到: “坐地日行八万里”. 又知地球的体积大约是火星的 8 倍, 则火星的大圆周长约_____万里.

三、解答题

17. 求函数 $y=\sin^4x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^4x$ 的取小正周期和取小值; 并写出该函数在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间.

18. 设甲、已、丙三人每次射击命中目标的概率分别为 0.7、0.6 和 0.5.

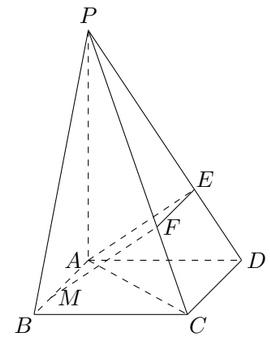
(1) 三人各向目标射击一次, 求至少有一人命中目标的概率及恰有两人命中目标的概率;

(2) 若甲单独向目标射击三次, 求他恰好命中两次的概率.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AE\perp PD$, $EF\parallel CD$, $AM=EF$.

(1) 证明: MF 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线;

(2) 若 $PA=3AB$, 求直线 AC 与平面 EAM 所成角的正弦值.



20. 某工厂生产某种产品, 已知该产品的月生产量 x (吨) 与每吨产品的价格 p (元/吨) 之间的关系式为: $p = 24200 - \frac{1}{5}x^2$, 且生产 x 吨的成本为 $R = 50000 + 200x$ (元). 问该产每月生产多少吨产品才能使利润达到最大? 最大利润是多少? (利润 = 收入 − 成本)

21. 设 $p > 0$ 是一常数, 过点 $Q(2p, 0)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 2px$ 交于相异两点 A、B, 以线段 AB 为直经作圆 H (H 为圆心). 试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上; 并求圆 H 的面积最小时直线 AB 的方程.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{5}{3}$, $a_{n+2} = \frac{5}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$.
(1) 令 $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

2004 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{10}$ 的值是 （ ）

(A) -1　(B) 1　(C) -32　(D) 32

2. $\tan 15^\circ+\cot 15^\circ$ 的值是 （ ）

(A) 2　(B) $2+\sqrt{3}$　(C) 4　(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

3. 命题 p: 若 a、$b\in\mathbf{R}$, 则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充要条件. 命题 q: 函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. 则 （ ）

(A) "p 或 q"为假　(B) "p 且 q"为真　(C) p 真 q 假　(D) p 假 q 真

4. 已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点, 过 F_1 且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于 A、B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 是正三角形, 则这个椭圆的离心率是 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

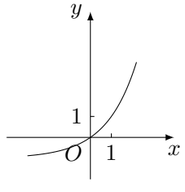
5. 已知 m、n 是不重合的直线, α、β 是不重合的平面, 有下列命题:
① 若 $m\subset\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$;
② 若 $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$;
③ 若 $\alpha\cap\beta=n$, $m\parallel n$, 则 $m\parallel\alpha$ 且 $m\parallel\beta$;
④ 若 $m\perp\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$.
其中真命题的个数是 （ ）

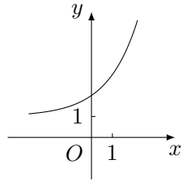
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

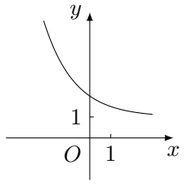
6. 某校高二年级共有六个班级, 现从外地转入 4 名学生, 要安排到该年级的两个班级且每班安排 2 名, 则不同的安排方案种数为 （ ）

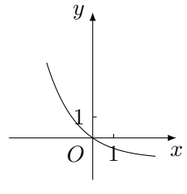
(A) $\mathrm{A}_6^2\mathrm{C}_4^2$　(B) $\dfrac{1}{2}\mathrm{A}_6^2\mathrm{C}_4^2$　(C) $\mathrm{A}_6^2\mathrm{A}_4^2$　(D) $2\mathrm{A}_6^2$

7. 已知函数 $y=\log_2 x$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$, 则函数 $y=f^{-1}(1-x)$ 的图象是 （ ）

(A)


(B)


(C)


(D)


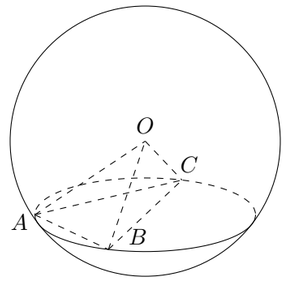
8. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是非零向量且满足 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　(D) $\dfrac{5\pi}{6}$

9. 若 $(1-2^x)^9$ 展开式的第 3 项为 288, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\cdots\dfrac{1}{x^n}\right)$ 的值是 （ ）

(A) 2　(B) 1　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{2}{5}$

10. 如图, A、B、C 是表面积为 48π 的球面上三点, $AB=2$, $BC=4$, $\angle ABC=60^\circ$, O 为球心, 则直线 OA 与截面 ABC 所成的角是 （ ）



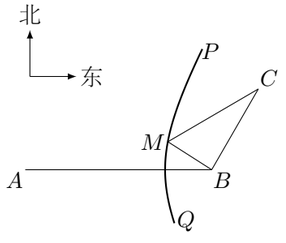
(A) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　(B) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　(C) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+2)$, 当 $x\in[3,5]$ 时, $f(x)=2-|x-4|$, 则 （ ）

(A) $f\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)<f\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$　(B) $f(\sin 1)>f(\cos 1)$

(C) $f\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)<f\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$　(D) $f(\cos 2)>f(\sin 2)$

12. 如图, B 地在 A 地的正东方向 4 km 处, C 地在 B 地的北偏东 30° 方向 2 km 处, 河流的沿岸 PQ (曲线) 上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远 2 km. 现要在曲线 PQ 上选一处 M 建一座码头, 向 B、C 两地转运货物. 经测算, 从 M 到 B、C 两地修建公路的费用分别是 a 万元/km、$2a$ 万元/km, 那么修建这两条公路的总费用最低是 （ ）



(A) $(2\sqrt{7}-2)a$ 万元　(B) $5a$ 万元

(C) $(2\sqrt{7}+1)a$ 万元　(D) $(2\sqrt{7}+3)a$ 万元

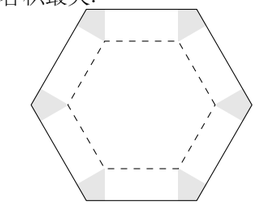
二、填空题

13. 直线 $x+2y=0$ 被曲线 $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ 所截得的弦长等于_____.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则实数 a 的值为_____.

15. 某射手射击 1 次, 击中目标的概率是 0.9. 他连续射击 4 次, 且各次射击是否击中目标相互之间没有影响. 有下列结论:
① 他第 3 次击中目标的概率是 0.9;
② 他恰好击中目标 3 次的概率是 $0.9^3\times 0.1$;
③ 他至少击中目标 1 次的概率是 $1-0.1^4$.
其中正确结论的序号是_____. (写出所有正确结论的序号)

16. 如图, 将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形, 再沿虚线折起, 做成一个无盖的正六棱柱容器. 当这个正六棱柱容器的底面边长为_____时, 其容积最大.



三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 其中向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos x,1)$, $\boldsymbol{b}=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 若 $f(x)=1-\sqrt{3}$ 且 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$, 求 x;
(2) 若函数 $y=2\sin 2x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{c}=(m,n)$ $\left(|m|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 平移后得到函数 $y=f(x)$ 的图象, 求实数 m、n 的值.

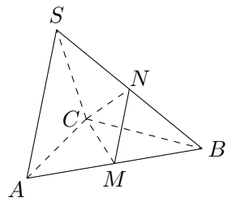
18. 甲、乙两人参加一次英语口语考试, 已知在备选的 10 道试题中, 甲能答对其中的 6 题, 乙能答对其中的 8 题. 规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 题进行测试, 至少答对 2 题才算合格.
(1) 求甲答对试题数 ξ 的概率分布及数学期望;
(2) 求甲、乙两人至少有一人考试合格的概率.

19. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形, 平面 $SAC\perp$ 平面 ABC, $SA=SC=2\sqrt{3}$, M、N 分别为 AB、SB 的中点.

(1) 证明: $AC\perp SB$;

(2) 求二面角 $N-CM-B$ 的大小;

(3) 求点 B 到平面 CMN 的距离.



20. 某企业 2003 年的纯利润为 500 万元, 因设备老化等原因, 企业的生产能力将逐年下降. 若不能进行技术改造, 预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元, 今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造, 预测在未扣除技术改造资金的情况下, 第 n 年 (今年为第一年) 的利润为 $500\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$ 万元 (n 为正整数).

(1) 设从今年起的前 n 年, 若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元, 进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元 (须扣除技术改造资金), 求 A_n、B_n 的表达式;

(2) 依上述预测, 从今年起该企业至少经过多少年, 进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润?

21. 已知 $f(x)=\dfrac{2x-a}{x^2+2}$ ($x\in\mathbf{R}$) 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

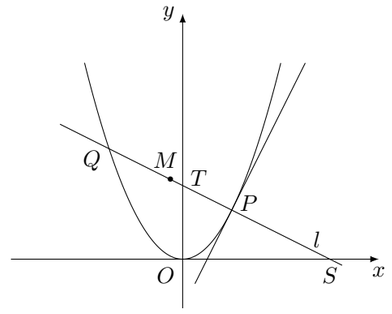
(1) 求实数 a 的值组成的集合 A;

(2) 设关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的两个非零实根为 x_1、x_2. 试问: 是否存在实数 m, 使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立? 若存在, 求 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. 如图, P 是抛物线 $C:y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上一点, 直线 l 过点 P 且与抛物线 C 交于另一点 Q.

(1) 若直线 l 与过点 P 的切线垂直, 求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程;

(2) 若直线 l 不过原点且与 x 轴交于点 S, 与 y 轴交于点 T, 试求 $\dfrac{|ST|}{|SP|}+\dfrac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围.



2004 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,3,5\}$, 则 $\complement_U(A\cap B)$ 等于 （ ）

(A) $\{1,2,4\}$　(B) $\{4\}$　(C) $\{3,5\}$　(D) $\varnothing$

2. $\tan 15^\circ+\cot 15^\circ$ 的值是 （ ）

(A) 2　(B) $2+\sqrt{3}$　(C) 4　(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

3. 命题 p: 若 a、$b\in\mathbf{R}$, 则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充要条件. 命题 q: 函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. 则 （ ）

(A) "p 或 q"为假　(B) "p 且 q"为真　(C) p 真 q 假　(D) p 假 q 真

4. 已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点, 过 F_1 且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于 A、B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 是正三角形, 则这个椭圆的离心率是 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

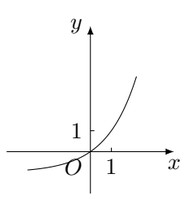
5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\dfrac{a_5}{a_3}=\dfrac{5}{9}$, 则 $\dfrac{S_9}{S_5}=$ （ ）

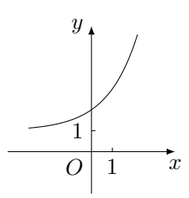
(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) $\dfrac{1}{2}$

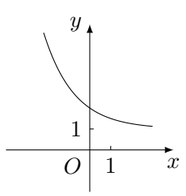
6. 已知 m、n 是不重合的直线, α、β 是不重合的平面, 有下列命题:
① 若 $m\subset\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$;
② 若 $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$;
③ 若 $\alpha\cap\beta=n$, $m\parallel n$, 则 $m\parallel\alpha$ 且 $m\parallel\beta$;
④ 若 $m\perp\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$.
其中真命题的个数是 （ ）

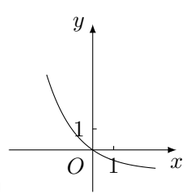
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

7. 已知函数 $y=\log_2 x$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$, 则函数 $y=f^{-1}(1-x)$ 的图象是 （ ）

(A)


(B)


(C)


(D)


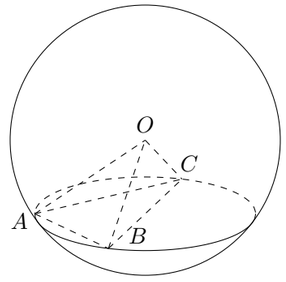
8. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是非零向量且满足 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　(D) $\dfrac{5\pi}{6}$

9. 已知 $\left(x-\dfrac{a}{x}\right)^8$ 展开式中常数项为 1120, 其中实数 a 是常数, 则展开式中各项系数的和是 （ ）

(A) 2^8　(B) 3^8　(C) 1 或 3^8　(D) 1 或 2^8

10. 如图, A、B、C 是表面积为 48π 的球面上三点, $AB=2$, $BC=4$, $\angle ABC=60^\circ$, O 为球心, 则直线 OA 与截面 ABC 所成的角是 （ ）



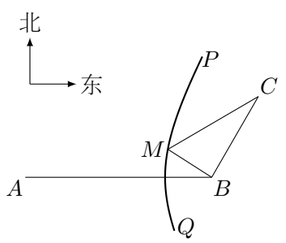
(A) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　(B) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　(C) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+2)$, 当 $x\in[3,4]$ 时, $f(x)=x-2$, 则 （ ）

(A) $f\left(\sin\dfrac{1}{2}\right)<f\left(\cos\dfrac{1}{2}\right)$　(B) $f\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)>f\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$

(C) $f(\sin 1)<f(\cos 1)$　(D) $f\left(\sin\dfrac{3}{2}\right)>f\left(\cos\dfrac{3}{2}\right)$

12. 如图, B 地在 A 地的正东方向 4 km 处, C 地在 B 地的北偏东 30° 方向 2 km 处, 河流的没岸 PQ (曲线) 上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远 2 km. 现要在曲线 PQ 上选一处 M 建一座码头, 向 B、C 两地转运货物. 经测算, 从 M 到 B、C 两地修建公路的费用分别是 a 万元/km、$2a$ 万元/km, 那么修建这两条公路的总费用最低是 （ ）



(A) $(\sqrt{7}+1)a$ 万元　(B) $(2\sqrt{7}-2)a$ 万元

(C) $2\sqrt{7}a$ 万元　(D) $(\sqrt{7}-1)a$ 万元

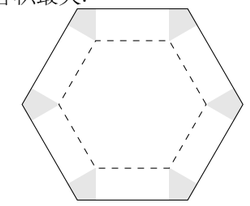
二、填空题

13. 直线 $x+2y=0$ 被曲线 $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ 所截得的弦长等于_____.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-1 & (x\geqslant 0)\\ \dfrac{1}{x} & (x<0)\end{cases}$. 若 $f(a)>a$, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 一个总体中有 100 个个体, 随机编号 0, 1, 2, ⋯, 99, 依编号顺序平均分成 10 个小组, 组号依次为 1, 2, 3, ⋯, 10. 现用系统抽样方法抽取一个容量为 10 的样本, 规定如果在第 1 组随机抽取的号码为 m, 那么在第 k 组中抽取的号码个位数字与 $m+k$ 的个位数字相同, 若 $m=6$, 则在第 7 组中抽取的号码是_____.

16. 如图, 将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形, 再沿虚线折起, 做成一个无盖的正六棱柱容器. 当这个正六棱柱容器的底面边长为_____时, 其容积最大.



三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 其中向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos x,1)$, $\boldsymbol{b}=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 若 $f(x)=1-\sqrt{3}$ 且 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$, 求 x;
(2) 若函数 $y=2\sin 2x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{c}=(m,n)$ $\left(|m|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 平移后得到函数 $y=f(x)$ 的图象, 求实数 m、n 的值.

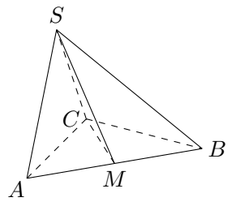
18. 甲、乙两人参加一次英语口语考试, 已知在备选的 10 道试题中, 甲能答对其中的 6 题, 乙能答对其中的 8 题. 规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 题进行测试, 至少答对 2 题才算合格.
(1) 分别求甲、乙两人考试合格的概率;
(2) 求甲、乙两人至少有一人考试合格的概率.

19. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形, 平面 $SAC\perp$ 平面 ABC, $SA=SC=2\sqrt{2}$, M 为 AB 的中点.

(1) 证明: $AC\perp SB$;

(2) 求二面角 $S-CM-B$ 的大小;

(3) 求点 B 到平面 SCM 的距离.



20. 某企业 2003 年的纯利润为 500 万元, 因设备老化等原因, 企业的生产能力将逐年下降. 若不能进行技术改造, 预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元, 今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造, 预测在未扣除技术改造资金的情况下, 第 n 年 (今年为第一年) 的利润为 $500\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$ 万元 (n 为正整数).

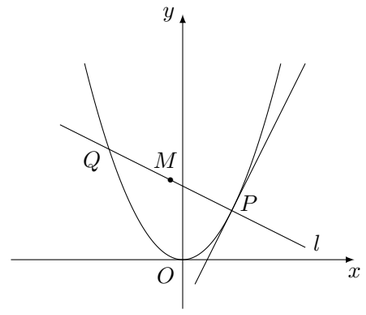
(1) 设从今年起的前 n 年, 若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元, 进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元 (须扣除技术改造资金), 求 A_n、B_n 的表达式;

(2) 依上述预测, 从今年起该企业至少经过多少年, 进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润?

21. 如图, P 是抛物线 $C:y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上一点, 直线 l 过点 P 并与抛物线 C 在点 P 的切线垂直, l 与抛物线 C 相交于另一点 Q.

(1) 当点 P 的横坐标为 2 时, 求直线 l 的方程;

(2) 当点 P 在抛物线 C 上移动时, 求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程, 并求点 M 到 x 轴的最短距离.



22. 已知 $f(x)=4x+ax^2-\dfrac{2}{3}x^3$ ($x\in\mathbf{R}$) 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

(1) 求实数 a 的值组成的集合 A;

(2) 设关于 x 的方程 $f(x)=2x+\dfrac{1}{3}x^3$ 的两个非零实根为 x_1、x_2. 试问: 是否存在实数 m, 使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立? 若存在, 求 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

2004 年普通高等学校招生考试（广东卷）

数学试卷

一、选择题

1. 已知平面向量 $\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(x,-3)$, 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$, 则 $x=$ （ ）

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

2. 已知 $A=\{x||2x+1|>3\}$, $B=\{x|x^2+x\leqslant 6\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $[-3,-2)\cup(1,2]$ (B) $[-3,-2)\cup(1,+\infty)$

(C) $(-3,-2]\cup[1,2)$ (D) $(-\infty,-3]\cup(1,2]$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+2}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}, & x>2\\ a, & x\leqslant 2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续, 则 $a=$（ ）

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{3}{n+1}-\cdots+\dfrac{2n-1}{n+1}-\dfrac{2n}{n+1}\right)$ 的值为 （ ）

(A) -1 (B) 0 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

5. 函数 $f(x)=\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 是 （ ）

(A) 周期为 π 的偶函数 (B) 周期为 π 的奇函数

(C) 周期为 2π 的偶函数 (D) 周期为 2π 的奇函数

6. 一台 X 型号自动机床在一小时内不需要工人照看的概率为 0.8000, 有四台这种型号的自动机床各自独立工作, 则在一小时内至多 2 台机床需要工人照看的概率是 （ ）

(A) 0.1536 (B) 0.1808 (C) 0.5632 (D) 0.9728

7. 在棱长为 1 的正方体上, 分别用过共顶点的三条棱中点的平面截该正方体, 则截去 8 个三棱锥后, 剩下的凸多面体的体积是 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{7}{6}$ (C) $\dfrac{4}{5}$ (D) $\dfrac{5}{6}$

8. 若双曲线 $2x^2-y^2=k$ $(k>0)$ 的焦点到它相对应的准线的距离是 2, 则 $k=$ （ ）

(A) 6 (B) 8 (C) 1 (D) 4

9. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时, 函数 $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x-\sin^2 x}$ 的最小值是 （ ）

(A) 4 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\dfrac{1}{4}$

10. 变量 x、y 满足下列条件: $\begin{cases}2x+y\geqslant 12\\ 2x+9y\geqslant 36\\ 2x+3y=24\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则使 $z=3x+2y$ 的值最小的 (x,y) 是 （ ）

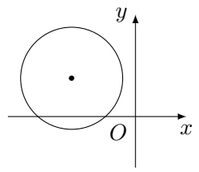
(A) $(4.5,3)$ (B) $(3,6)$ (C) $(9,2)$ (D) $(6,4)$

11. 若 $f(x)=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, 则 （ ）

(A) $f(-1)>f(0)>f(1)$ (B) $f(0)>f(1)>f(-1)$

(C) $f(1)>f(0)>f(-1)$ (D) $f(0)>f(-1)>f(1)$

12. 如图, 定圆半径为 a, 圆心为 (b,c), 则直线 $ax+by+c=0$ 与直线 $x-y+1=0$ 的交点在 （ ）



(A) 第四象限 (B) 第三象限 (C) 第二象限 (D) 第一象限

二、填空题

13. 某班委会由 4 名男生与 3 名女生组成, 现从中选出 2 人担任正副班长, 其中至少有 1 名女生当选的概率是_____. (用分数作答)

14. 已知复数 z 与 $(z+2)^2-8\mathrm{i}$ 均是纯虚数, 则 $z=$_____.

15. 由图 (1) 有面积关系: $\dfrac{S_{\triangle PA'B'}}{S_{\triangle PAB}}=\dfrac{PA'\cdot PB'}{PA\cdot PB}$, 则由图 (2) 有体积关系: $\dfrac{V_{P-A'B'C'}}{V_{P-ABC}}=$_____.

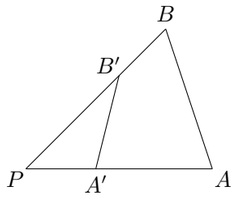


图 (1)

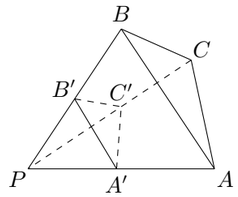


图 (2)

16. 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x+1}-1)$ $(x>0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

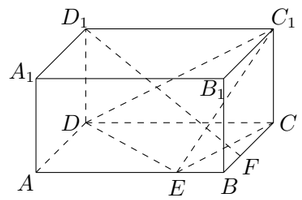
三、解答题

17. 已知 α, β, γ 成公比为 2 的等比数列 $(\alpha\in[0,2\pi])$, 且 $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ 也成等比数列. 求 α, β, γ 的值.

18. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=2$. E、F 分别是线段 AB、BC 上的点, 且 $EB=FB=1$.

(1) 求二面角 $C-DE-C_1$ 的正切值;

(2) 求直线 EC_1 与 FD_1 所成的余弦值.



19. 设函数 $f(x)=\left|1-\dfrac{1}{x}\right|$ $(x>0)$.

(1) 证明: 当 $0<a<b$, 且 $f(a)=f(b)$ 时, $ab>1$;

(2) 点 $P(x_0,y_0)$ $(0<x_0<1)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上, 求曲线在点 P 处的切线与 x 轴和 y 轴的正向所围成的三角形面积表达式 (用 x_0 表达).

20. 某中心接到其正东、正西、正北方向三个观测点的报告: 正西、正北两个观测点同时听到了一声巨响, 正东观测点听到的时间比其他两观测点晚 4 s. 已知各观测点到该中心的距离都是 1020 m. 试确定该巨响发生的位置. (假定当时声音传播的速度为 340 m/s, 相关各点均在同一平面上)

21. 设函数 $f(x)=x-\ln(x+m)$, 其中常数 m 为整数.
(1) 当 m 为何值时, $f(x)\geqslant 0$;
(2) 定理: 若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(a)$ 与 $g(b)$ 异号, 则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$, 使 $g(x_0)=0$. 试用上述定理证明: 当整数 $m>1$ 时, 方程 $f(x)=0$ 在 $[\mathrm{e}^{-m}-m,\mathrm{e}^{2m}-m]$ 内有两个实根.

22. 设直线 l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 相交于 A, B 两点, l 又与双曲线 $x^2-y^2=1$ 相交于 C、D 两点, C、D 三等分线段 AB. 求直线 l 的方程.

2004 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 与直线 $2x-y+4=0$ 平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线方程是 （ ）

(A) $2x-y+3=0$ (B) $2x-y-3=0$

(C) $2x-y+1=0$ (D) $2x-y-1=0$

2. 复数 $\dfrac{(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$ 的值是 （ ）

(A) -16 (B) 16 (C) $-\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

3. 已知 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 的解析式可取为 （ ）

(A) $\dfrac{x}{1+x^2}$ (B) $-\dfrac{2x}{1+x^2}$ (C) $\dfrac{2x}{1+x^2}$ (D) $-\dfrac{x}{1+x^2}$

4. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为非零的平面向量. 甲: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, 乙: $\vec{b}=\vec{c}$, 则( )

(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

5. 若 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$, 则下列不等式① $a+b<ab$; ② $|a|>|b|$; ③ $a<b$; ④ $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2$ 中, 正确的不等式有 （ ）

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

6. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 点 P 在椭圆上, 若 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个顶点, 则点 P 到 x 轴的距离为 （ ）

(A) $\dfrac{9}{5}$ (B) 3 (C) $\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$ (D) $\dfrac{9}{4}$

7. 函数 $f(x)=a^x+\log_a(x+1)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值之和为 a, 则 a 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 2 (D) 4

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a\left[2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]-b\left[2-(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$ ($n=1,\ 2,\ \cdots$), 其中 a、b 是非零常数. 则存在数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 使得( )

(A) $a_n=x_n+y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 为等差数列, $\{y_n\}$ 为等比数列

(B) $a_n=x_n+y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等差数列

(C) $a_n=x_n\cdot y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 为等差数是列, $\{y_n\}$ 为等比数列

(D) $a_n=x_n\cdot y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等比数列

9. 函数 $f(x)=ax^3+x+1$ 有极值的充要条件是 （ ）

(A) $a>0$ (B) $a\geqslant 0$ (C) $a<0$ (D) $a\leqslant 0$

10. 设集合 $P=\{m|-1<m<0\}$, $Q=\{m\in\mathbf{R}|mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立 $\}$, 则下列关系中成立的是 （ ）

(A) $P\subsetneqq Q$ (B) $Q\subsetneqq P$ (C) $P=Q$ (D) $P\cap Q=\varnothing$

11. 已知平面 α 与 β 所成的二面角为 $80°$, P 为 α, β 外一定点, 过点 P 的一条直线与 α, β 所成的角都是 $30°$, 则这样的直线有且仅有 （ ）

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

12. 设 $y=f(t)$ 是某港口水的深度 y (米) 关于时间 t (时) 的函数, 其中 $0\leqslant t\leqslant 24$, 下表是该港口某一天从 0 时至 24 时记录的时间 t 与水深 y 的关系:

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	12	15.1	12.1	9.1	11.9	14.9	11.9	8.9	12.1

经长期观察, 函数 $y=f(t)$ 的图象可以近似地看成函数 $y=k+A\sin(\omega t+\varphi)$ 的图象. 下面的函数中, 最能近似表示表中数据间对应关系的函数是 （ ）

(A) $y=12+3\sin\dfrac{\pi}{6}t$, $t\in[0,24]$

(B) $y=12+3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t+\pi\right)$, $t\in[0,24]$

(C) $y=12+3\sin\dfrac{\pi}{12}t$, $t\in[0,24]$

(D) $y=12+3\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $t\in[0,24]$

二、填空题

13. 设随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi=k)=\dfrac{a}{5^k}$, a 为常数, $k=1,\ 2,\ \cdots$, 则 $a=$_____.

14. 将标号为 $1,\ 2,\ \cdots,\ 10$ 的 10 个球放入标号为 $1,\ 2,\ \cdots,\ 10$ 的 10 个盒子内, 每个盒内放一个球, 则恰好有 3 个球的标号与其所在盒子的标号不一致的放入方法共有_____种. (以数字作答)

15. 设 A、B 为两个集合. 下列四个命题:

① $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$, 有 $x\notin B$;

② $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$;

③ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$;

④ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$, 使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是_____. (把符合要求的命题序号都填上)

16. 某日中午 12 时整, 甲船自 A 处以 16 km/h 的速度向正东行驶, 乙船自 A 的正北 18 km 处以 24 km/h 的速度向正南行驶, 则当日 12 时 30 分时两船之距离对时间的变化率是_____km/h.

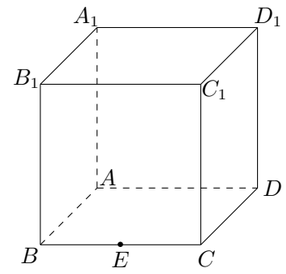
三、解答题

17. 已知 $6\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$, $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, 求 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

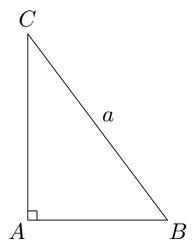
18. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是棱 BC 的中点, 点 F 是棱 CD 上的动点.

(1) 试确定点 F 的位置, 使得 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F;

(2) 当 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F 时, 求二面角 C_1-EF-A 的大小. (结果用反三角函数值表示)



19. 如图, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, 已知 $BC=a$, 若长为 $2a$ 的线段 PQ 以点 A 为中点, 问 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 取何值时 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 的值最大? 并求出这个最大值.



20. 直线 $l: y=kx+1$ 与双曲线 $C: 2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点 A、B.

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 是否存在实数 k, 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F? 若存在, 求出 k 的值. 若不存在, 说明理由.

21. 某突发事件, 在不采取任何预防措施的情况下发生的概率为 0.3; 一旦发生, 将造成 400 万元的损失. 现有甲、乙两种相互独立的预防措施可供采用. 单独采用甲、乙预防措施所需的费用分别为 45 万元和 30 万元, 采用相应预防措施后此突发事件不发生的概率分别是 0.9 和 0.85. 若预防方案允许甲、乙两种预防措施单独采用、联合采用或不采用, 请确定预防方案使总费用最少.

注: 总费用 = 采取预防措施的费用 + 发生突发事件损失的期望值.

22. 已知 $a>0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$, $a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}$, $n=1, 2, \cdots$.

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零, 求 $A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (将 A 用 a 表示);

(2) 设 $b_n=a_n-A$, $n=1, 2, \cdots$, 证明: $b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{A(b_n+A)}$;

(3) 若 $|b_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ 对 $n=1, 2, \cdots$ 都成立, 求 a 的取值范围.

2004 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 $A=\{x|x=\sqrt{5k+1},k\in\mathbf{N}\}$, $B\{x|x\leqslant 6,x\in\mathbf{Q}\}$, 则 $A\cap B$ 等于(　　)

(A) $\{1,4\}$　　(B) $\{1,6\}$　　(C) $\{4,6\}$　　(D) $\{1,4,6\}$

2. 已知点 $M_1(6,2)$ 和 $M_2(1,7)$. 直线 $y=mx-7$ 与线段 M_1M_2 的交点 M 分有向线段 M_1M_2 的比为 $3:2$, 则 m 的值为　　(　　)

(A) $-\dfrac{3}{2}$　　(B) $-\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) 4

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数为 3, 则 $f(x)$ 的解析式可能为　　(　　)

(A) $f(x)=(x-1)^2+3(x-1)$　　(B) $f(x)=2(x-1)$

(C) $f(x)=2(x-1)^2$　　(D) $f(x)=x-1$

4. 两个圆 $C_1:x^2+y^2+2x+2y-2=0$ 与 $C_2:x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 的公切线有且仅有　　(　　)

(A) 1 条　　(B) 2 条　　(C) 3 条　　(D) 4 条

5. 若函数 $f(x)=a^x+b-1$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象经过第二、三、四象限, 则一定有　　(　　)

(A) $0<a<1$, 且 $b>0$　　(B) $a>1$, 且 $b>0$

(C) $0<a<1$, 且 $b<0$　　(D) $a>1$, 且 $b<0$

6. 四面体 $ABCD$ 四个面的重心分别为 E、F、G、H, 则四面体 $EFGH$ 的表面积与四面体 $ABCD$ 的表面积的比值是　　(　　)

(A) $\dfrac{1}{27}$　　(B) $\dfrac{1}{16}$　　(C) $\dfrac{1}{9}$　　(D) $\dfrac{1}{8}$

7. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为非零的平面向量. 甲: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, 乙: $\vec{b}=\vec{c}$, 则(　　)

(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 已知 $x\geqslant\dfrac{5}{2}$, 则 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{2x-4}$ 有　　(　　)

(A) 最大值 $\dfrac{5}{4}$　　(B) 最小值 $\dfrac{5}{4}$　　(C) 最大值 1　　(D) 最小值 1

9. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a\left[2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]-b\left[2-(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 其中 a、b 是非零常数. 则存在数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 使得(　　)

(A) $a_n=x_n+y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 为等差数列, $\{y_n\}$ 为等比数列

(B) $a_n=x_n+y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等差数列

(C) $a_n=x_n\cdot y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 为等差数是列, $\{y_n\}$ 为等比数列

(D) $a_n=x_n\cdot y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等比数列

10. 若 $1<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$, 则下列结论中不正确的是　　(　　)

(A) $\log_a b>\log_b a$

(B) $|\log_a b+\log_b a|>2$

(C) $(\log_b a)^2<1$

(D) $|\log_a b|+|\log_b a|>|\log_a b+\log_b a|$

11. 将标号为 1, 2, $\cdots$, 10 的 10 个球放入标号为 1, 2, $\cdots$, 10 的 10 个盒子里, 每个盒内放一个球, 恰好 3 个球的标号与其在盒子的标号不一致的放入方法种数为　　(　　)

(A) 120　　(B) 240　　(C) 360　　(D) 720

12. 设 $y=f(t)$ 是某港口水的深度 y (米) 关于时间 t (时) 的函数, 其中 $0\leqslant t\leqslant 24$, 下表是该港口某一天从 0 时至 24 时记录的时间 t 与水深 y 的关系:

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	12	15.1	12.1	9.1	11.9	14.9	11.9	8.9	12.1

经长期观察, 函数 $y=f(t)$ 的图象可以近似地看成函数 $y=k+A\sin(\omega t+\varphi)$ 的图象. 下面的函数中, 最能近似表示表中数据间对应关系的函数是　　(　　)

(A) $y=12+3\sin\dfrac{\pi}{6}t$, $t\in[0,24]$

(B) $y=12+3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t+\pi\right)$, $t\in[0,24]$

(C) $y=12+3\sin\dfrac{\pi}{12}t$, $t\in[0,24]$

(D) $y=12+3\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $t\in[0,24]$

二、填空题

13. $\tan 2010^\circ$ 的值为_____.

14. 已知 $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$ 的展开式中各项系数的和是 128, 则展开式中 x^5 的系数是_____. (以数字作答)

15. 某校有老师 200 人, 男学生 1200 人, 女学生 1000 人. 现用分层抽样的方法从所有师生中抽取一个容量为 n 的样本; 已知从女学生中抽取的人数为 80 人, 则 $n=$_____.

16. 设 A、B 为两个集合. 下列四个命题:

① $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$, 有 $x\notin B$;

② $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$;

③ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$;

④ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$, 使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是_____. (把符合要求的命题序号都填上)

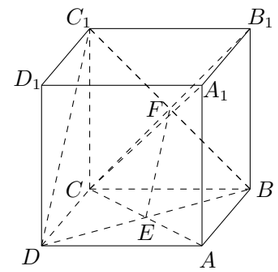
三、解答题

17. 已知 $6\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$, $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, 求 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

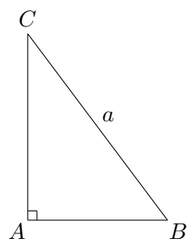
18. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, AC 与 BD 交于点 E, C_1B 与 CB_1 交于点 F.

(1) 求证: $A_1C\perp$ 平面 BDC_1;

(2) 求二面角 $B-EF-C$ 的大小. (结果用反三角函数值表示)



19. 如图, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, 已知 $BC=a$, 若长为 $2a$ 的线段 PQ 以点 A 为中点, 问 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 取何值时 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 的值最大? 并求出这个最大值.



20. 直线 $l: y=kx+1$ 与双曲线 $C: 2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点 A、B.

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 是否存在实数 k, 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F? 若存在, 求出 k 的值. 若不存在, 说明理由.

21. 为防止某突发事件发生, 有甲、乙、丙、丁四种相互独立的预防措施可供采用, 单独采用甲、乙、丙、丁预防措施后此突发事件不发生的概率 (记为 P) 和所需费用如下表:

预防措施	甲	乙	丙	丁
P	0.9	0.8	0.7	0.6
费用 (万元)	90	60	30	10

预防方案可单独采用一种预防措施或联合采用几种预防措施, 在总费用不超过 120 万元的前提下, 请确定一个预防方案, 使得此突发事件不发生的概率最大.

22. 已知 $b>-1$, $c>0$, 函数 $f(x)=x+b$ 的图象与函数 $g(x)=x^2+bx+c$ 的图象相切.

(1) 求 b 与 c 的关系式 (用 c 表示 b);

(2) 设函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有极值点, 求 c 的取值范围.

2004 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^4$ 的值是 （ ）

(A) 4i (B) -4i (C) 4 (D) -4

2. 如果双曲线 $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{12}=1$ 上一点 P 到右焦点的距离等于 $\sqrt{13}$, 那么点 P 到右准线的距离是 （ ）

(A) $\frac{13}{5}$ (B) 13 (C) 5 (D) $\frac{5}{13}$

3. 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\log_2(x+1)$ 的反函数, 若 $[1+f^{-1}(a)][1+f^{-1}(b)]=8$, 则 $f(a-b)$ 的值为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\log_2 3$

4. 把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起, 当以 A、B、C、D 四点为顶点的三棱锥体积最大时, 直线 BD 和平面 ABC 所成的角的大小为 （ ）

(A) 90 (B) 60 (C) 45 (D) 30

5. 某公司在甲、乙、丙、丁四个地区分别有 150 个、120 个、180 个、150 个销售点. 公司为了调查产品销售的情况, 需从这 600 个销售点中抽取一个容量为 100 的样本, 记这项调查为①; 在丙地区中有 20 个特大型销售点, 要从中抽取 7 个调查其销售收入和售后服务情况, 记这项调查为②. 则完成①、②这两项调查宜采用的抽样方法依次是 （ ）

(A) 分层抽样, 系统抽样法 (B) 分层抽样法, 简单随机抽样法

(C) 系统抽样法, 分层抽样法 (D) 简随机抽样法, 分层抽样法

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c, & x\leqslant 0\\ 2, & x>0\end{cases}$, 若 $f(-4)=f(0)$, $f(-2)=-2$, 则关于 x 的方程 $f(x)=x$ 的解的个数为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. 设 $a>0$, $b>0$, 则以下不等式中不恒成立的是 （ ）

(A) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$ (B) $a^3+b^3\geqslant 2ab^2$

(C) $a^2+b^2+2\geqslant 2a+2b$ (D) $\sqrt{|a-b|}\geqslant\sqrt{a}-\sqrt{b}$

8. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\frac{1}{5}$, $a_n+a_{n+1}=\frac{6}{5^{n+1}}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$ （ ）

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{4}{25}$

9. 设集合 $U=\{(x,y)\,|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$, $A=\{(x,y)\,|2x-y+m>0\}$, $B=\{(x,y)\,|x+y-n\leqslant 0\}$, 那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是 （ ）

(A) $m>-1$, $n<5$ (B) $m<-1$, $n<5$

(C) $m>-1$, $n>5$ (D) $m<-1$, $n>5$

10. 从正方体的八个顶点中任取三个点为顶点作三角形, 其中直角三角形的个数为 （ ）

(A) 56 (B) 52 (C) 48 (D) 40

11. 农民收入由工资性收入和其它收入两部分构成. 2003 年某地区农民人均收入为 3150 元 (其中工资性收入为 1800 元, 其它收入为 1350 元), 预计该地区自 2004 年起的 5 年内, 农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长, 其它收入每年增加 160 元. 根据以上数据, 2008 年该地区农民人均收入介于 （ ）

(A) 4200 元 $\sim$ 4400 元 (B) 4400 元 $\sim$ 4600 元

(C) 4600 元 $\sim$ 4800 元 (D) 4800 元 $\sim$ 5000 元

12. 设 $f(x)$、$g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数, 当 $x<0$ 时, $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$. 且 $g(-3)=0$, 则不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是 （ ）

(A) $(-3,0)\cup(3,+\infty)$ (B) $(-3,0)\cup(0,3)$

(C) $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ (D) $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 向量 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$, 则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值是_____.

14. 同时抛掷两枚相同的均匀硬币, 随机变量 $\xi=1$ 表示结果中有正面向上, $\xi=0$ 表示结果中没有正面向上, 则 $E\xi=$_____.

15. 若 $\left(x^3+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中的常数项为 84, 则 $n=$_____.

16. 设 F 是椭圆 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{6}=1$ 的右焦点, 且椭圆上至少有 21 个不同的点 P_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$, 使 $|FP_1|$, $|FP_2|$, $|FP_3|$, $\cdots$ 组成公差为 d 的等差数列, 则 d 的取值范围为_____.

三、解答题

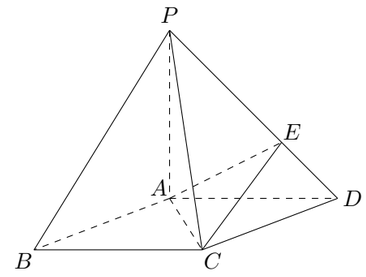
17. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, 求 $2\sin^2\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha-1$ 的值.

18. 如图, 在底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC=60^\circ$, $PA=AC=a$, $PB=PD=\sqrt{2}a$, 点 E 在 PD 上, 且 $PE:ED=2:1$.

(1) 证明: $PA\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求以 AC 为棱, EAC 与 DAC 为面的二面角 θ 的大小:

(3) 在棱 PC 上是否存在一点 F, 使 $BF\,/\!/$ 平面 AEC? 证明你的结论.



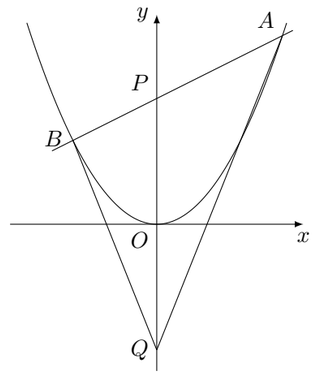
19. 甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件, 已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\frac{1}{4}$, 乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\frac{1}{12}$, 甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为 $\frac{2}{9}$.

(1) 分别求甲、乙、丙三台机床各自加工零件是一等品的概率;

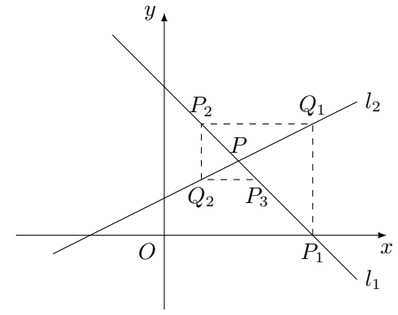
(2) 从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验, 求至少有一个一等品的概率.

20. 已知函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{ax}$, 其中 $a\leqslant 0$, e 为自然对数的底数.
(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值.

21. 如图, 过抛物线 $x^2=4y$ 的对称轴上任一点 $P(0,m)$ $(m>0)$ 作直线与抛物线交于 A、B 两点, 点 Q 是点 P 关于原点的对称点.
(1) 设点 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ, 证明: $\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$;
(2) 设直线 AB 的方程是 $x-2y+12=0$, 过 A、B 两点的圆 C 与抛物线在点 A 处有共同的切线, 求圆 C 的方程.



22. 如图, 直线 $l_1: y=kx+1-k$ $\left(k\neq 0,\ k\neq\pm\dfrac{1}{2}\right)$ 与 $l_2: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ 相交于点 P. 直线 l_1 与 x 轴交于点 P_1, 过点 P_1 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_1, 过点 Q_1 作 y 轴的垂线交直线 l_1 于点 P_2, 过点 P_2 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_2, $\cdots$, 这样一直作下去, 可得到一系列点 P_1, Q_1, P_2, Q_2, $\cdots$. 点 P_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 的横坐标构成数列 $\{x_n\}$.
(1) 证明: $x_{n+1}-1=\dfrac{1}{2k}(x_n-1)$, $n\in\mathbf{N}^*$;
(2) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;
(3) 比较 $2|PP_n|^2$ 与 $4k^2|PP_1|^2+5$ 的大小.



2004 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 函数 $y=\lg\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为 （ ）

(A) $\{x|x<0\}$　(B) $\{x|x>1\}$

(C) $\{x|0<x<1\}$　(D) $\{x|x<0$ 或 $x>1\}$

2. 设直线 $ax+by+c=0$ 的倾斜角为 α, 且 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$, 则 a, b 满足 （ ）

(A) $a+b=1$　(B) $a-b=1$　(C) $a+b=0$　(D) $a-b=0$

3. 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数, 则下列不等式中恒成立的是（ ）

(A) $f^{-1}(x)\leqslant 2x-1$　(B) $f^{-1}(x)\leqslant 2x+1$

(C) $f^{-1}(x)\geqslant 2x-1$　(D) $f^{-1}(x)\geqslant 2x+1$

4. 如果双曲线 $\dfrac{x^2}{13}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上一点 P 到右焦点的距离等于 $\sqrt{13}$, 那么点 P 到右准线的距离是 （ ）

(A) $\dfrac{13}{5}$　(B) 13　(C) 5　(D) $\dfrac{5}{13}$

5. 把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起, 当以 A、B、C、D 四点为顶点的三棱锥体积最大时, 直线 BD 和平面 ABC 所成的角的大小为 （ ）

(A) 90　(B) 60　(C) 45　(D) 30

6. 某公司在甲、乙、丙、丁四个地区分别有 150 个、120 个、180 个、150 个销售点. 公司为了调查产品销售的情况, 需从这 600 个销售点中抽取一个容量为 100 的样本, 记这项调查为①; 在丙地区中有 20 个特大型销售点, 要从中抽取 7 个调查其销售收入和售后服务情况, 记这项调查为②. 则完成①、②这两项调查宜采用的抽样方法依次是 （ ）

(A) 分层抽样, 系统抽样法　(B) 分层抽样法, 简单随机抽样法

(C) 系统抽样法, 分层抽样法　(D) 简随机抽样法, 分层抽样法

7. 若 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=\dfrac{a}{x+1}$ 在区间 $[1,2]$ 上都是减函数, 则 a 的值范围是 （ ）

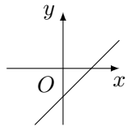
(A) $(-1,0)\cup(0,1)$　(B) $(-1,0)\cup(0,1]$

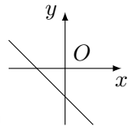
(C) $(0,1)$　(D) $(0,1]$

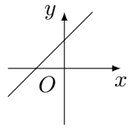
8. 已知向量 $\vec{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 向量 $\vec{b}=(\sqrt{3},-1)$, 则 $|2\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值, 最小值分别是 （ ）

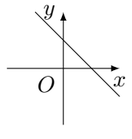
(A) $4\sqrt{2}$, 0　(B) 4, $4\sqrt{2}$　(C) 16, 0　(D) 4, 0

9. 若函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 的图象的顶点在第四象限, 则函数 $f'(x)$ 的图象是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

10. 从正方体的八个顶点中任取三个点为顶点作三角形, 其中直角三角形的个数为 （ ）

(A) 56　(B) 52　(C) 48　(D) 40

11. 农民收入由工资性收入和其它收入两部分构成. 2003 年某地区农民人均收入为 3150 元 (其中工资性收入为 1800 元, 其它收入为 1350 元), 预计该地区自 2004 年起的 5 年内, 农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长, 其它收入每年增加 160 元. 根据以上数据, 2008 年该地区农民人均收入介于 （ ）

(A) 4200 元 ~ 4400 元　(B) 4400 元 ~ 4600 元

(C) 4600 元 ~ 4800 元　(D) 4800 元 ~ 5000 元

12. 设集合 $U=\{(x,y)\,|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$, $A=\{(x,y)\,|2x-y+m>0\}$, $B=\{(x,y)\,|x+y-n\leqslant 0\}$, 那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是 （ ）

(A) $m>-1$, $n<5$　(B) $m<-1$, $n<5$

(C) $m>-1$, $n>5$　(D) $m<-1$, $n>5$

二、填空题

13. 过点 $P(-1,2)$ 且与曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线平行的直线方程是_____.

14. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中的常数项为_____. (用数字作答)

15. F_1, F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^2}{4}=1$ 的焦点, 在 C 上满足 $PF_1\perp PF_2$ 的点 P 的个数为_____.

16. 若直线 $y=2a$ 与函数 $y=|a^x-1|$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的图象有两个公共点, 则 a 的取值范围是_____.

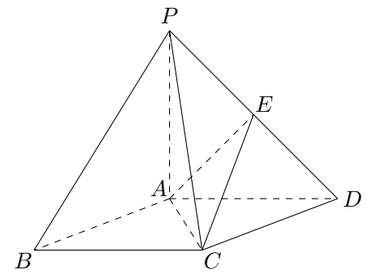
三、解答题

17. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=2$, 求 $\dfrac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$ 的值.

18. 如图, 在底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC=60°$, $PA=AC=a$, $PB=PD=\sqrt{2}a$, 点 E 是 PD 的中点.

(1) 证明: $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $PB\parallel$ 平面 EAC;

(2) 求以 AC 为棱, EAC 与 DAC 为面的二面角 θ 的正切值.



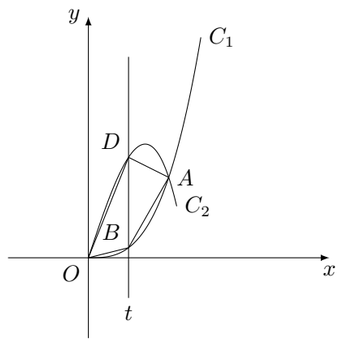
19. 甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件, 已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\dfrac{1}{4}$, 乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\dfrac{1}{12}$, 甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为 $\dfrac{2}{9}$.

(1) 分别求甲、乙、丙三台机床各自加工零件是一等品的概率;

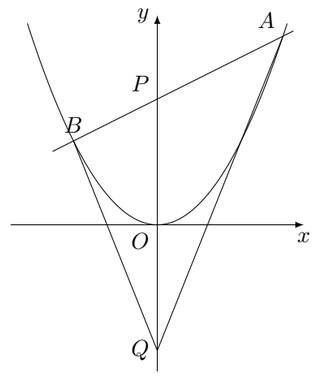
(2) 从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验, 求至少有一个一等品的概率.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a 且公比 q 不等于 1 的等比数列, S_n 是其前 n 项的和, a_1, $2a_7$, $3a_4$ 成等差数列.
(1) 证明: $12S_3$, S_6, $S_{12}-S_6$ 成等比数列;
(2) 求和 $T_n=a_1+2a_4+3a_7+\cdots+na_{3n-2}$.

21. 如图, 已知曲线 $C_1: y=x^3$ $(x\geqslant 0)$ 与曲线 $C_2: y=-2x^3+3x$ $(x\geqslant 0)$ 交于 O, A, 直线 $x=t$ $(0<t<1)$ 与曲线 C_1, C_2 分别交于 B, D.
(1) 写出四边形 $ABOD$ 的面积 S 与 t 的函数关系式 $S=f(t)$;
(2) 讨论 $f(t)$ 的单调性, 并求 $f(t)$ 的最大值.



22. 如图, 过抛物线 $x^2=4y$ 的对称轴上任一点 $P(0,m)$ $(m>0)$ 作直线与抛物线交于 A、B 两点, 点 Q 是点 P 关于原点的对称点.
(1) 设点 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ, 证明: $\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$;
(2) 设直线 AB 的方程是 $x-2y+12=0$, 过 A、B 两点的圆 C 与抛物线在点 A 处有共同的切线, 求圆 C 的方程.



2004 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、选择题

1. 设集合 $P=\{1,2,3,4\}$, $Q=\{x\,||x|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $P\cap Q$ 等于 （ ）

(A) $\{1,2\}$ (B) $\{3,4\}$

(C) $\{1\}$ (D) $\{-2,-1,0,1,2\}$

2. 函数 $y=2\cos^2 x+1$ ($x\in\mathbf{R}$) 的最小正周期为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

3. 从 4 名男生和 3 名女生中选出 4 人参加某个座谈会, 若这 4 人中必须既有男生又有女生, 则不同的选法共有 （ ）

(A) 140 种 (B) 120 种 (C) 35 种 (D) 34 种

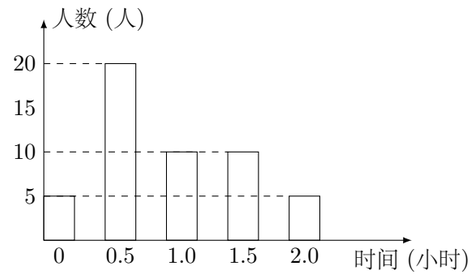
4. 一平面截一球得到直径是 6 cm 的圆面, 球心到这个平面的距离是 4 cm, 则该球的体积是 （ ）

(A) $\dfrac{100\pi}{3}$ cm^3 (B) $\dfrac{208\pi}{3}$ cm^3 (C) $\dfrac{500\pi}{3}$ cm^3 (D) $\dfrac{416\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3

5. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条准线与抛物线 $y^2=8x$ 的准线重合, 则双曲线离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$

6. 某校为了了解学生的课外阅读情况, 随机调查了 50 名学生, 得到他们在某一天各自课外阅读所用时间的数据, 结果用下面的条形图表示. 根据条形图可得这 50 名学生这一天平均每人的课外阅读时间为 （ ）



(A) 0.6 小时 (B) 0.9 小时 (C) 1.0 小时 (D) 1.5 小时

7. $(2x+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3 的系数是 （ ）

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 48

8. 若函数 $y=\log_a(x+b)$ ($a>0$, $a\neq 1$) 的图象过两点 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$, 则 （ ）

(A) $a=2, b=2$ (B) $a=\sqrt{2}, b=2$

(C) $a=2, b=1$ (D) $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{2}$

9. 将一颗质地均匀的骰子 (它是一种各面上分别标有点数 1, 2, 3, 4, 5, 6 的正方体玩具) 先后抛掷 3 次, 至少出现的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{5}{216}$ (B) $\dfrac{25}{216}$ (C) $\dfrac{31}{216}$ (D) $\dfrac{91}{216}$

10. 函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 在闭区间 $[-3,0]$ 上的最大值、最小值分别是( )

(A) 1, -1 (B) 1, -17 (C) 3, -17 (D) 9, -19

11. 设 $k>1$, $f(x)=k(x-1)$ ($x\in\mathbf{R}$). 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A 点, 它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于 B 点, 并且这两个函数的图象交于 P 点. 已知四边形 $OAPB$ 的面积是 3, 则 k 等于 （ ）

(A) 3 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $\dfrac{6}{5}$

12. 设函数 $f(x)=-\dfrac{x}{1+|x|}$ ($x\in\mathbf{R}$), 区间 $M=[a,b]$ ($a<b$), 集合 $N=\{y\,|y=f(x), x\in M\}$, 则使 $M=N$ 成立的实数对 (a,b) 有 （ ）

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 无数多个

二、填空题

13. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($x\in\mathbf{R}$) 的部分对应值如下表:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是_____.

14. 以点 $(1,2)$ 为圆心, 与直线 $4x+3y-35=0$ 相切的圆的方程是_____.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $S_n=\dfrac{a_1(3^n-1)}{2}$ (对于所有 $n\geqslant 1$), 且 $a_4=54$, 则 a_1 的数值是_____.

16. 平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 中, 已知 $\vec{a}=(4,-3)$, $\left|\vec{b}\right|=1$, 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$, 则向量 $\vec{b}=$_____.

三、解答题

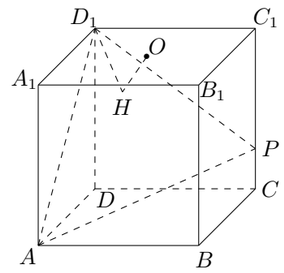
17. 已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\tan\dfrac{\alpha}{2}+\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{5}{2}$, 求 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

18. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 点 P 在棱 CC_1 上, 且 $CC_1=4CP$.

(1) 求直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角的大小 (结果用反三角函数值表示);

(2) 设 O 点在平面 D_1AP 上的射影是 H, 求证: $D_1H\perp AP$;

(3) 求点 P 到平面 ABD_1 的距离.



19. 制定投资计划时, 不仅要考虑可能获得的盈利, 而且要考虑可能出现的亏损. 某投资人打算投资甲、乙两个项目. 根据预测, 甲、乙项目可能的最大盈利率分别为 100% 和 50%, 可能的最大亏损分别为 30% 和 10%. 投资人计划投资金额不超过 10 万元, 要求确保可能的资金亏损不超过 1.8 万元. 问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元, 才能使可能的盈利最大?

20. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1) 若首项 $a_1=\dfrac{3}{2}$, 公差 $d=1$, 求满足 $S_{k^2}=(S_k)^2$ 的正整数 k;

(2) 求所有的无穷等差数列 $\{a_n\}$, 使得对于一切正整数 k 都有 $S_{k^2}=(S_k)^2$ 成立.

21. 已知椭圆的中心在原点, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 一个焦点是 $F(-m,0)$ (m 是大于 0 的常数).

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 Q 是椭圆上的一点, 且过点 F、Q 的直线 l 与 y 轴交于点 M. 若 $\left|\overrightarrow{MQ}\right|=2\left|\overrightarrow{QF}\right|$, 求直线 l 的斜率.

22. 已知函数 $f(x)$ ($x\in\mathbf{R}$) 满足下列条件: 对任意的实数 x_1, x_2 都有 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ 和 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$, 其中 λ 是大于 0 的常数. 设实数 a_0, a, b 满足 $f(a_0)=0$ 和 $b=a-\lambda f(a)$.

(1) 证明: $\lambda\leqslant 1$, 并且不存在 $b_0\neq a_0$, 使得 $f(b_0)=0$;

(2) 证明: $(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$;

(3) 证明: $[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

2004 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

数学试卷

一、选择题

1. 若 $\cos\theta>0$, $\sin 2\theta<0$, 则角 θ 的终边所在象限是 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 对于 $0<a<1$, 给出下列四个不等式: ① $\log_a(1+a)<\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$; ② $\log_a(1+a)>\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$; ③ $a^{1+a}<a^{1+\frac{1}{a}}$; ④ $a^{1+a}>a^{1+\frac{1}{a}}$. 其中成立的是 （ ）

(A) ①与③　(B) ①与④　(C) ②与③　(D) ②与④

3. 已知 α、β 是不同的两个平面, 直线 $a\subset\alpha$, 直线 $b\subset\beta$, 命题 p: a 与 b 无公共点; 命题 q: $\alpha\parallel\beta$. 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分而不必要的条件　(B) 必要而不充分的条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要的条件

4. 设复数 z 满足 $\frac{1-z}{1+z}=\mathrm{i}$, 则 $|1+z|=$ （ ）

(A) 0　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

5. 甲、乙两人独立地解同一问题, 甲解决这个问题的概率是 p_1, 乙解决这个问题的概率是 p_2, 那么恰好有 1 人解决这个问题的概率是 （ ）

(A) p_1p_2　(B) $p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$

(C) $1-p_1p_2$　(D) $1-(1-p_1)(1-p_2)$

6. 已知点 $A(-2,0)$、$B(3,0)$, 动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2$, 则点 P 的轨迹是 （ ）

(A) 圆　(B) 椭圆　(C) 双曲线　(D) 抛物线

7. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)-1$, 则下列命题正确的是 （ ）

(A) $f(x)$ 是周期为 1 的奇函数

(B) $f(x)$ 是周期为 2 的偶函数

(C) $f(x)$ 是周期为 1 的非奇非偶函数

(D) $f(x)$ 是周期为 2 的非奇非偶函数

8. 已知随机变量 ξ 的概率分布如下:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2}{3^4}$	$\frac{2}{3^5}$	$\frac{2}{3^6}$	$\frac{2}{3^7}$	$\frac{2}{3^8}$	$\frac{2}{3^9}$	m

则 $P(\xi=10)=$ （ ）

(A) $\frac{2}{3^9}$　(B) $\frac{2}{3^{10}}$　(C) $\frac{1}{3^9}$　(D) $\frac{1}{3^{10}}$

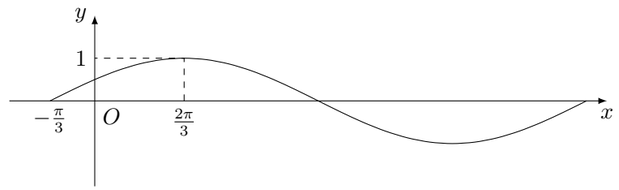
9. 已知点 $F_1(-\sqrt{2},0)$、$F_2(\sqrt{2},0)$, 动点 P 满足 $|PF_2|-|PF_1|=2$. 当点 P 的纵坐标是 $\frac{1}{2}$ 时, 点 P 到坐标原点的距离是 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　(B) $\frac{3}{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

10. 设 A、B、C、D 是球面上的四个点, 且在同一平面内, $AB=BC=CD=DA=3$, 球心到该平面的距离是球半径的一半, 则球的体积是 （ ）

(A) $8\sqrt{6}\pi$　(B) $64\sqrt{6}\pi$　(C) $24\sqrt{2}\pi$　(D) $72\sqrt{2}\pi$

11. 若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象 (部分) 如图所示, 则 ω 和 φ 的取值是 （ ）



(A) $\omega=1$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$　(B) $\omega=1$, $\varphi=-\frac{\pi}{3}$

(C) $\omega=\frac{1}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$　(D) $\omega=\frac{1}{2}$, $\varphi=-\frac{\pi}{6}$

12. 有两排座位, 前排 11 个座位, 后排 12 个座位, 现安排 2 人就座, 规定前排中间的 3 个座位不能坐, 并且这 2 人不左右相邻, 那么不同排法的种数是 （ ）

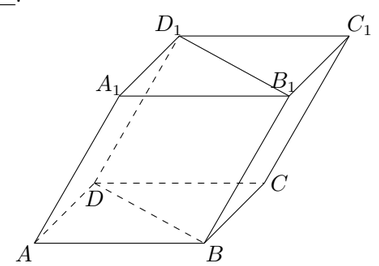
(A) 234　(B) 346　(C) 350　(D) 363

二、填空题

13. 若经过点 $P(-1,0)$ 的直线与圆 $x^2+y^2+4x-2y+3=0$ 相切, 则此直线在 y 轴上的截距是_____.

14. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)\cos x}{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}=$_____.

15. 如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱与底面边长均为 $2a$, 且 $\angle A_1AD=\angle A_1AB=60^\circ$, 则侧棱 AA_1 和截面 B_1D_1DB 的距离是_____.



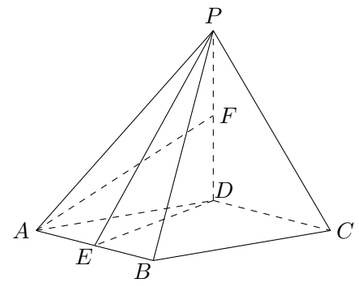
16. 口袋内装有 10 个相同的球, 其中 5 个球标有数字 0, 5 个球标有数字 1, 若从袋中摸出 5 个球, 那么摸出的 5 个球所标数字之和小于 2 或大于 3 的概率是_____. (以数值作答)

三、解答题

17. 已知四棱锥 $P-ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle DAB=60^\circ$, $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $PD=AD$, 点 E 为 AB 中点, 点 F 为 PD 中点.

(1) 证明: 平面 $PED\perp$ 平面 PAB;

(2) 求二面角 $P-AB-F$ 的平面角的余弦值.



18. 设全集 $U=\mathbf{R}$.

(1) 解关于 x 的不等式 $|x-1|+a-1>0$ $(a\in\mathbf{R})$;

(2) 记 A 为 (1) 中不等式的解集, 集合 $B=\left\{x\left|\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=0\right.\right\}$, 若 $(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素, 求 a 的取值范围.

19. 设椭圆方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$, 过点 $M(0,1)$ 的直线 l 交椭圆于点 A、B, O 是坐标原点, 点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, 点 N 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 当 l 绕点 M 旋转时, 求:
(1) 动点 P 的轨迹方程;
(2) $|\overrightarrow{NP}|$ 的最小值与最大值.

20. 甲方是一农场, 乙方是一工厂. 由于乙方生产须占用甲方的资源, 因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定净收入, 在乙方不赔付甲方的情况下, 乙方的年利润 x (元) 与年产量 t (吨) 满足函数关系 $x=2000\sqrt{t}$. 若乙方每生产一吨产品必须赔付甲方 s 元 (以下称 s 为赔付价格).
(1) 将乙方的年利润 w (元) 表示为年产量 t (吨) 的函数, 并求出乙方获得最大利润的年产量;
(2) 甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额 $y=0.002t^2$ (元), 在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下, 甲方要在索赔中获得最大净收入, 应向乙方要求的赔付价格 s 是多少?

21. 已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{3}{2}x^2$ 的最大值不大于 $\dfrac{1}{6}$, 又当 $x\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$ 时, $f(x)\geqslant\dfrac{1}{8}$.
(1) 求 a 的值;
(2) 设 $0<a_1<\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbf{N}^*$. 证明 $a_n<\dfrac{1}{n+1}$.

22. 已知函数 $f(x)=\ln(\mathrm{e}^x+a)$ $(a>0)$.
(1) 求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$;
(2) 假设对任意 $x\in[\ln(3a),\ln(4a)]$, 不等式 $|m-f^{-1}(x)|+\ln(f'(x))<0$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. $(1-\mathrm{i})^2\cdot\mathrm{i}=$ （ ）

(A) $2-2\mathrm{i}$　(B) $2+2\mathrm{i}$　(C) -2　(D) 2

2. 已知函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$, 若 $f(a)=b$, 则 $f(-a)=$ （ ）

(A) b　(B) $-b$　(C) $\dfrac{1}{b}$　(D) $-\dfrac{1}{b}$

3. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均为单位向量, 它们的夹角为 $60°$, 那么 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=$ （ ）

(A) $\sqrt{7}$　(B) $\sqrt{10}$　(C) $\sqrt{13}$　(D) 4

4. 函数 $y=\sqrt{x-1}+1\ (x\geqslant 1)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=x^2-2x+2\ (x<1)$　(B) $y=x^2-2x+2\ (x\geqslant 1)$

(C) $y=x^2-2x\ (x<1)$　(D) $y=x^2-2x\ (x\geqslant 1)$

5. $\left(2x^3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项是 （ ）

(A) 14　(B) -14　(C) 42　(D) -42

6. 设 A、B、I 均为非空集合, 且满足 $A\subseteq B\subseteq I$, 则下列各式中错误的是（ ）

(A) $(\complement_I A)\cup B=I$　(B) $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

(C) $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$　(D) $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

7. 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个焦点为 F_1、F_2, 过 F_1 作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交, 一个交点为 P, 则 $|\overrightarrow{PF_2}|=$ （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{7}{2}$　(D) 4

8. 设抛物线 $y^2=8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q, 若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围是 （ ）

(A) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　(B) $[-2,2]$　(C) $[-1,1]$　(D) $[-4,4]$

9. 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 可以将函数 $y=\cos 2x$ 的图象 （ ）

(A) 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度　(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度　(D) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

10. 已知正四面体 $ABCD$ 的表面积为 S, 其四个面的中心分别为 E、F、G、H. 设四面体 $EFGH$ 的表面积为 T, 则 $\dfrac{T}{S}$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{9}$　(B) $\dfrac{4}{9}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{3}$

11. 从数字 1, 2, 3, 4, 5, 中, 随机抽取 3 个数字 (允许重复) 组成一个三位数, 其各位数字之和等于 9 的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{13}{125}$　(B) $\dfrac{16}{125}$　(C) $\dfrac{18}{125}$　(D) $\dfrac{19}{125}$

12. $a^2+b^2=1$, $b^2+c^2=2$, $c^2+a^2=2$, $ab+bc+ca$ 的最小值为 （ ）

(A) $\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$　(C) $-\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$　(D) $\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$

二、填空题

13. 不等式 $|x+2|\geqslant|x|$ 的解集是_____.

14. 由动点 P 向圆 $x^2+y^2=1$ 引两条切线 PA、PB, 切点分别为 A、B, $\angle APB=60°$, 则动点 P 的轨迹方程为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_1=1$, $a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}\ (n\geqslant 2)$, 则 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\begin{cases}1, & n=1\\ _____, & n\geqslant 2\end{cases}$.

16. 已知 a、b 为不垂直的异面直线, α 是一个平面, 则 a、b 在 α 上的射影有可能是:

① 两条平行直线;

② 两条互相垂直的直线;

③ 同一条直线;

④ 一条直线及其外一点.

在上面结论中, 正确结论的编号是_____. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x}{2-\sin 2x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.

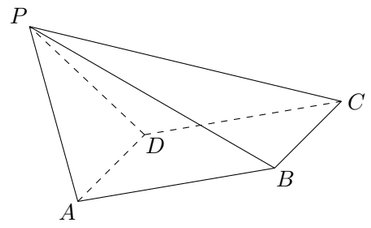
18. 一接待中心有 A、B、C、D 四部热线电话, 已知某一时刻电话 A、B 占线的概率均为 0.5, 电话 C、D 占线的概率均为 0.4, 各部电话是否占线相互之间没有影响. 假设该时刻有 ξ 部电话占线. 试求随机变量 ξ 的概率分布和它的期望.

19. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 求函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{ax}$ 的单调区间.

20. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, $PB \perp AD$, 侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形, 底面 $ABCD$ 为菱形, 侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 $120°$.

(1) 求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离;

(2) 求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.



21. 设双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ $(a>0)$ 与直线 $l: x+y=1$ 相交于两个不同的点 A、B.

(1) 求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围;

(2) 设直线 l 与 y 轴的交点为 P, 且 $\overrightarrow{PA}=\dfrac{5}{12}\overrightarrow{PB}$. 求 a 的值.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 且 $a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$, $a_{2k+1}=a_{2k}+3^k$, 其中 $k=1, 2, 3, \cdots$.

(1) 求 a_3, a_5;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,5\}$, 则 $A\cap(\complement_U B)=$（　）

(A) $\{2\}$　(B) $\{2,3\}$　(C) $\{3\}$　(D) $\{1,3\}$

2. 已知函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$, 若 $f(a)=\dfrac{1}{2}$, 则 $f(-a)=$（　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) 2　(D) -2

3. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均为单位向量, 它们的夹角为 $60°$, 那么 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=$（　）

(A) $\sqrt{7}$　(B) $\sqrt{10}$　(C) $\sqrt{13}$　(D) 4

4. 函数 $y=\sqrt{x-1}+1$ $(x\geqslant 1)$ 的反函数是（　）

(A) $y=x^2-2x+2$ $(x<1)$　(B) $y=x^2-2x+2$ $(x\geqslant 1)$

(C) $y=x^2-2x$ $(x<1)$　(D) $y=x^2-2x$ $(x\geqslant 1)$

5. $\left(2x^3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项是（　）

(A) 14　(B) -14　(C) 42　(D) -42

6. 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 若 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, 则 $\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$（　）

(A) $\dfrac{7}{5}$　(B) $\dfrac{1}{5}$　(C) $-\dfrac{7}{5}$　(D) $-\dfrac{1}{5}$

7. 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个焦点为 F_1、F_2, 过 F_1 作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交, 一个交点为 P, 则 $|\overrightarrow{PF_2}|=$（　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{7}{2}$　(D) 4

8. 设抛物线 $y^2=8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q, 若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围是（　）

(A) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　(B) $[-2,2]$　(C) $[-1,1]$　(D) $[-4,4]$

9. 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 可以将函数 $y=\cos 2x$ 的图象（　）

(A) 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度　(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度　(D) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

10. 已知正四面体 $ABCD$ 的表面积为 S, 其四个面的中心分别为 E、F、G、H. 设四面体 $EFGH$ 的表面积为 T, 则 $\dfrac{T}{S}$ 等于（　）

(A) $\dfrac{1}{9}$　(B) $\dfrac{4}{9}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{3}$

11. 从数字 1, 2, $\cdots$, 9, 中, 随机抽取 3 个不同的数, 则这 3 个数的和为偶数的概率为（　）

(A) $\dfrac{5}{9}$　(B) $\dfrac{4}{9}$　(C) $\dfrac{11}{21}$　(D) $\dfrac{10}{21}$

12. $a^2+b^2=1$, $b^2+c^2=2$, $c^2+a^2=2$, $ab+bc+ca$ 的最小值为（　）

(A) $\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$　(C) $-\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$　(D) $\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$

二、填空题

13. 不等式 $x+x^3\geqslant 0$ 的解集是_____.

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3=3$, $a_{10}=384$, 则该数列的通项 $a_n=$_____.

15. 由动点 P 向圆 $x^2+y^2=1$ 引两条切线 PA、PB, 切点分别为 A、B, $\angle APB=60°$, 则动点 P 的轨迹方程为_____.

16. 已知 a、b 为不垂直的异面直线, α 是一个平面, 则 a、b 在 α 上的射影有可能是:

① 两条平行直线;

② 两条互相垂直的直线;

③ 同一条直线;

④ 一条直线及其外一点.

在上面结论中, 正确结论的编号是_____. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n. 已知 $a_{10}=30$, $a_{20}=50$.

(1) 求通项 a_n;

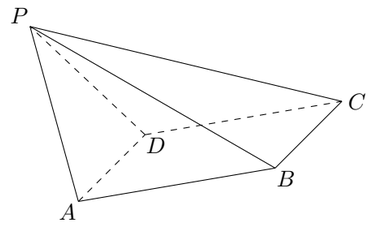
(2) 若 $S_n=242$, 求 n.

18. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x}{2-\sin 2x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.

19. 已知 $f(x)=ax^3+3x^2-x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 求 a 的取值范围.

20. 从 10 位同学 (其中 6 女, 4 男) 中随机选出 3 位参加测验. 每位女同学能通过测验的概率均为 $\frac{4}{5}$, 每位男同学能通过测验的概率均为 $\frac{3}{5}$. 试求:
(1) 选出的 3 位同学中, 至少有一位男同学的概率;
(2) 10 位同学中的女同学甲和男同学乙同时被选中且通过测验的概率.

21. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, $PB \perp AD$, 侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形, 底面 $ABCD$ 为菱形, 侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 120°.
(1) 求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离;
(2) 求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.



22. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ $(a > 0)$ 与直线 $l: x + y = 1$ 相交于两个不同的点 A、B.
(1) 求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围;
(2) 设直线 l 与 y 轴的交点为 P, 且 $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$. 求 a 的值.

2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|x^2<4\}$, $N=\{x|x^2-2x-3<0\}$, 则集合 $M\cap N=$（　）

(A) $\{x|x<-2\}$　　(B) $\{x|x>3\}$

(C) $\{x|-1<x<2\}$　　(D) $\{x|2<x<3\}$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x-5}=$（　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{2}{5}$　　(D) $\dfrac{1}{4}$

3. 设复数 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 则 $1+\omega=$（　）

(A) $-\omega$　　(B) ω^2　　(C) $-\dfrac{1}{\omega}$　　(D) $\dfrac{1}{\omega^2}$

4. 已知圆 C 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 关于直线 $y=-x$ 对称, 则圆 C 的方程为（　）

(A) $(x+1)^2+y^2=1$　　(B) $x^2+y^2=1$

(C) $x^2+(y+1)^2=1$　　(D) $x^2+(y-1)^2=1$

5. 已知函数 $y=\tan(2x+\varphi)$ 的图象过点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$, 则 φ 可以是（　）

(A) $-\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　　(C) $-\dfrac{\pi}{12}$　　(D) $\dfrac{\pi}{12}$

6. 函数 $y=-\mathrm{e}^x$ 的图象（　）

(A) 与 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象关于 y 轴对称

(B) 与 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象关于坐标原点对称

(C) 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称

(D) 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 的图象关于坐标原点对称

7. 已知球 O 的半径为 1, A、B、C 三点都在球面上, 且每两点间的球面距离为 $\dfrac{\pi}{2}$, 则球心 O 到平面 ABC 的距离为（　）

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

8. 在坐标平面内, 与点 $A(1,2)$ 距离为 1, 且与点 $B(3,1)$ 距离为 2 的直线共有（　）

(A) 1 条　　(B) 2 条　　(C) 3 条　　(D) 4 条

9. 已知平面上直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{e}=\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$, 点 $O(0,0)$ 和 $A(1,-2)$ 在 L 上的射影分别是 O_1 和 A_1, 则 $\overrightarrow{O_1A_1}=\lambda\boldsymbol{e}$, 其中 $\lambda=$（　）

(A) $\dfrac{11}{5}$　　(B) $-\dfrac{11}{5}$　　(C) 2　　(D) -2

10. 函数 $y=x\cos x-\sin x$ 在下面哪个区间内是增函数（　）

(A) $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$　　(B) $(\pi,2\pi)$　　(C) $\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right)$　　(D) $(2\pi,3\pi)$

11. 函数 $y=\sin^4x+\cos^2x$ 的最小正周期为（　）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　(C) π　　(D) 2π

12. 在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中, 大于 23145 且小于 43521 的数共有（　）

(A) 56 个　　(B) 57 个　　(C) 58 个　　(D) 60 个

二、填空题

13. 从装有 3 个红球, 2 个白球的袋中随机取出 2 个球, 设其中有 ξ 个红球, 则随机变量 ξ 的概率分布为:

ξ	0	1	2
P			

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant0\\x\geqslant y\\2x-y\leqslant1\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值是_____.

15. 设中心在原点的椭圆与双曲线 $2x^2-2y^2=1$ 有公共的焦点, 且它们的离心率互为倒数, 则该椭圆的方程是_____.

16. 下面是关于四棱柱的四个命题:

① 若有两个侧面垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;

② 若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;

③ 若四个侧面两两全等, 则该四棱柱为直四棱柱;

④ 若四棱柱的四条对角线两两相等, 则该四棱柱为直四棱柱.

其中, 真命题的编号是_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 已知锐角三角形 ABC 中, $\sin(A+B)=\dfrac{3}{5}$, $\sin(A-B)=\dfrac{1}{5}$.

(1) 求证: $\tan A=2\tan B$;

(2) 设 $AB=3$, 求 AB 边上的高.

18. 已知 8 支球队中有 3 支弱队, 以抽签方式将这 8 支球队分为 A、B 两组, 每组 4 支. 求:

(1) A、B 两组中有一组恰有两支弱队的概率;

(2) A 组中至少有两支弱队的概率.

19. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n, 已知 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 证明:

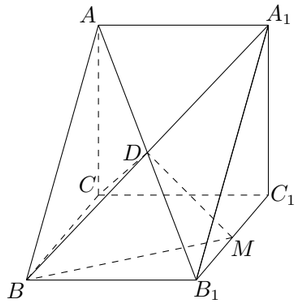
(1) 数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等比数列;

(2) $S_{n+1}=4a_n$.

20. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=1$, $CB=\sqrt{2}$, 侧棱 $AA_1=1$, 侧面 AA_1B_1B 的两条对角线交点为 D, B_1C_1 的中点为 M.

(1) 求证: $CD\perp$ 平面 BDM;

(2) 求面 B_1BD 与面 CBD 所成二面角的大小.



21. 给定抛物线 $C:y^2=4x$, F 是 C 的焦点, 过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点.

(1) 设 l 的斜率为 1, 求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小;

(2) 设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$, 若 $\lambda\in[4,9]$, 求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

22. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$, $g(x)=x\ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 设 $0<a<b$, 证明: $0<g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|x^2<4\}$, $N=\{x|x^2-2x-3<0\}$, 则集合 $M\cap N=$(　　)

(A) $\{x|x<-2\}$　　(B) $\{x|x>3\}$

(C) $\{x|-1<x<2\}$　　(D) $\{x|2<x<3\}$

2. 函数 $y=\dfrac{1}{x+5}$ $(x\neq -5)$ 的反函数是　　(　　)

(A) $y=\dfrac{1}{x}-5$ $(x\neq 0)$　　(B) $y=x+5$ $(x\in\mathbf{R})$

(C) $y=\dfrac{1}{x}+5$ $(x\neq 0)$　　(D) $y=x-5$ $(x\in\mathbf{R})$

3. 曲线 $y=x^3-3x^2+1$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线方程为　　(　　)

(A) $y=3x-4$　(B) $y=-3x+2$　(C) $y=-4x+3$　(D) $y=4x-5$

4. 已知圆 C 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 关于直线 $y=-x$ 对称, 则圆 C 的方程为　　(　　)

(A) $(x+1)^2+y^2=1$　　(B) $x^2+y^2=1$

(C) $x^2+(y+1)^2=1$　　(D) $x^2+(y-1)^2=1$

5. 已知函数 $y=\tan(2x+\varphi)$ 的图象过点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$, 则 φ 可以是　　(　　)

(A) $-\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　　(C) $-\dfrac{\pi}{12}$　　(D) $\dfrac{\pi}{12}$

6. 正四棱锥的侧棱长与底面边长都是 1, 则侧棱与底面所成的角为　　(　　)

(A) 75°　　(B) 60°　　(C) 45°　　(D) 30°

7. 函数 $y=-\mathrm{e}^x$ 的图象　　(　　)

(A) 与 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象关于 y 轴对称

(B) 与 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象关于坐标原点对称

(C) 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称

(D) 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 的图象关于坐标原点对称

8. 已知点 $A(1,2)$, $B(3,1)$, 则线段 AB 的垂直平分线的方程为　　(　　)

(A) $4x+2y=5$　(B) $4x-2y=5$　(C) $x+2y=5$　(D) $x-2y=5$

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足: $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$, 则 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=$　　(　　)

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) $\sqrt{6}$

10. 已知球 O 的半径为 1, A、B、C 三点都在球面上, 且每两点间的球面距离为 $\dfrac{\pi}{2}$, 则球心 O 到平面 ABC 的距离为　　(　　)

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

11. 函数 $y=\sin^4 x+\cos^2 x$ 的最小正周期为　　(　　)

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　(C) π　　(D) 2π

12. 在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中, 大于 23145 且小于 43521 的数共有　　(　　)

(A) 56 个　　(B) 57 个　　(C) 58 个　　(D) 60 个

二、填空题

13. 已知 a 为实数, $(x+a)^{10}$ 展开式中 x^7 的系数是 -15, 则 $a=$_____.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x\geqslant y\\ 2x-y\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值是_____.

15. 设中心在原点的椭圆与双曲线 $2x^2-2y^2=1$ 有公共的焦点, 且它们的离心率互为倒数, 则该椭圆的方程是_____.

16. 下面是关于四棱柱的四个命题:

① 若有两个侧面垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;

② 若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;

③ 若四个侧面两两全等, 则该四棱柱为直四棱柱;

④ 若四棱柱的四条对角线两两相等, 则该四棱柱为直四棱柱.

其中, 真命题的编号是_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$, $a_2=9$, $a_5=21$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n=2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 已知锐角三角形 ABC 中, $\sin(A+B)=\dfrac{3}{5}$, $\sin(A-B)=\dfrac{1}{5}$.

(1) 求证: $\tan A=2\tan B$;

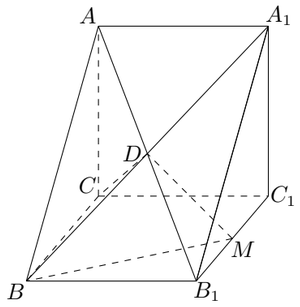
(2) 设 $AB=3$, 求 AB 边上的高.

19. 已知 8 支球队中有 3 支弱队, 以抽签方式将这 8 支球队分为 A、B 两组, 每组 4 支. 求:

(1) A、B 两组中有一组恰有两支弱队的概率;

(2) A 组中至少有两支弱队的概率.

20. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=1$, $CB=\sqrt{2}$, 侧棱 $AA_1=1$, 侧面 AA_1B_1B 的两条对角线交点为 D, B_1C_1 的中点为 M.
(1) 求证: $CD\perp$ 平面 BDM;
(2) 求面 B_1BD 与面 CBD 所成二面角的大小.



21. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间 $(1,4)$ 内为减函数, 在区间 $(6,+\infty)$ 上为增函数, 试求实数 a 的取值范围.

22. 给定抛物线 $C:y^2=4x$, F 是 C 的焦点, 过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点.
(1) 设 l 的斜率为 1, 求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小;
(2) 设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$, 若 $\lambda\in[4,9]$, 求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{(x,y)\,|x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$, $N=\{(x,y)\,|x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$, 则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 函数 $y=\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

3. 设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_2=-6$, $a_8=6$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 （ ）

(A) $S_4<S_5$ (B) $S_4=S_5$ (C) $S_6<S_5$ (D) $S_6=S_5$

4. 圆 $x^2+y^2-4x=0$ 在点 $P(1,\sqrt{3})$ 处的切线方程为 （ ）

(A) $x+\sqrt{3}y-2=0$ (B) $x+\sqrt{3}y-4=0$

(C) $x-\sqrt{3}y+4=0$ (D) $x-\sqrt{3}y+2=0$

5. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$ 的定义域为 （ ）

(A) $\left[-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right]$ (B) $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$

(C) $[-2,-1)\cup(1,2]$ (D) $(-2,-1)\cup(1,2)$

6. 设复数 z 的辐角的主值为 $\dfrac{2\pi}{3}$, 虚部为 $\sqrt{3}$, 则 $z^2=$ （ ）

(A) $-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (B) $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ (C) $2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (D) $2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

7. 设双曲线的焦点在 x 轴上, 两条渐近线为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$, 则该双曲线的离心率 $e=$ （ ）

(A) 5 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\dfrac{5}{4}$

8. 不等式 $1<|x+1|<3$ 的解集为 （ ）

(A) $(0,2)$ (B) $(-2,0)\cup(2,4)$

(C) $(-4,0)$ (D) $(-4,-2)\cup(0,2)$

9. 正三棱锥的底面边长为 2, 侧面均为直角三角形, 则此三棱锥的体积为( )

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $BC=\sqrt{13}$, $AC=4$, 则边 AC 上的高为 （ ）

(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $3\sqrt{3}$

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x<1\\ 4-\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$, 则使得 $f(x)\geqslant 1$ 的自变量 x 的取值范围为 （ ）

(A) $(-\infty,-2]\cup[0,10]$ (B) $(-\infty,-2]\cup[0,1]$

(C) $(-\infty,-2]\cup[1,10]$ (D) $[-2,0]\cup[1,10]$

12. 将 4 名教师分配到 3 所中学任教, 每所中学至少 1 名, 则不同的分配方案共有 （ ）

(A) 12 种 (B) 24 种 (C) 36 种 (D) 48 种

二、填空题

13. 用平面 α 截半径为 R 的球, 如果球心到平面 α 的距离为 $\dfrac{R}{2}$, 那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为_____.

14. 函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为_____.

15. 已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=3^x-1$, 设 $f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$, 则 $g(-8)=$_____.

16. 设 P 是曲线 $y^2=4(x-1)$ 上的一个动点, 则点 P 到点 $(0,1)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为_____.

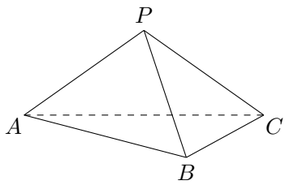
三、解答题

17. 已知 α 为锐角, 且 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, 求 $\dfrac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}$ 的值.

18. 解方程: $4^x+|1-2^x|=11$.

19. 某村计划建造一个室内面积为 800 m^2 的矩形蔬菜温室. 在温室内, 沿左、右两侧与后侧内墙各保留 1 m 宽的通道, 沿前侧内墙保留 3 m 宽的空地. 当矩形温室的边长各为多少时? 蔬菜的种植面积最大, 最大种植面积是多少?

20. 三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧面 PAC 与底面 ABC 垂直, $PA=PB=PC=3$.
(1) 求证: $AB\perp BC$;
(2) 设 $AB=BC=2\sqrt{3}$, 求 AC 与平面 PBC 所成角的大小.



21. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{m+1}+y^2=1$ 的两个焦点是 $F_1(-c,0)$ 与 $F_2(c,0)$, $(c>0)$, 且椭圆上存在一点 P, 使得直线 PF_1 与 PF_2 垂直.
(1) 求实数 m 的取值范围;
(2) 设 L 是相应于焦点 F_2 的准线, 直线 PF_2 与 L 相交于点 Q, 若 $\left|\dfrac{QF_2}{PF_2}\right|=2-\sqrt{3}$, 求直线 PF_2 的方程.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n+(-1)^n, n\geqslant 1$.
(1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的前三项 a_1,a_2,a_3;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(3) 证明: 对任意的整数 $m>4$, 有 $\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}+\cdots+\dfrac{1}{a_m}<\dfrac{7}{8}$.

2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{(x,y)\,|x^2+y^2=1, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$, $N=\{(x,y)\,|x^2-y=0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$, 则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 函数 $y=\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

3. 记函数 $y=1+3^{-x}$ 的反函数为 $y=g(x)$, 则 $g(10)=$ （ ）

(A) 2 (B) -2 (C) 3 (D) -1

4. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=9$, $a_5=243$, 则 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 （ ）

(A) 81 (B) 120 (C) 168 (D) 192

5. 圆 $x^2+y^2-4x=0$ 在点 $P(1,\sqrt{3})$ 处的切线方程为 （ ）

(A) $x+\sqrt{3}y-2=0$ (B) $x+\sqrt{3}y-4=0$

(C) $x-\sqrt{3}y+4=0$ (D) $x-\sqrt{3}y+2=0$

6. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项为 （ ）

(A) 15 (B) -15 (C) 20 (D) -20

7. 设复数 z 的辐角的主值为 $\dfrac{2\pi}{3}$, 虚部为 $\sqrt{3}$, 则 $z^2=$ （ ）

(A) $-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (B) $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ (C) $2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (D) $2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

8. 设双曲线的焦点在 x 轴上, 两条渐近线为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$, 则该双曲线的离心率 $e=$ （ ）

(A) 5 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\dfrac{5}{4}$

9. 不等式 $1<|x+1|<3$ 的解集为 （ ）

(A) $(0,2)$ (B) $(-2,0)\cup(2,4)$

(C) $(-4,0)$ (D) $(-4,-2)\cup(0,2)$

10. 正三棱锥的底面边长为 2, 侧面均为直角三角形, 则此三棱锥的体积为( )

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $BC=\sqrt{13}$, $AC=4$, 则边 AC 上的高为 （ ）

(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $3\sqrt{3}$

12. 将 4 名教师分配到 3 所中学任教, 每所中学至少 1 名, 则不同的分配方案共有 （ ）

(A) 12 种 (B) 24 种 (C) 36 种 (D) 48 种

二、填空题

13. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ 的定义域是_____.

14. 用平面 α 截半径为 R 的球, 如果球心到平面 α 的距离为 $\dfrac{R}{2}$, 那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为_____.

15. 函数 $y=\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最大值为_____.

16. 设 P 为圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点, 则点 P 到直线 $3x-4y-10=0$ 的距离的最小值为_____.

三、解答题

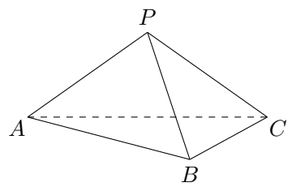
17. 解方程: $4^x-2^{x+2}-12=0$.

18. 已知 α 为锐角, 且 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, 求 $\dfrac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}$ 的值.

19. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_1^2=9S_2$, $S_4=4S_2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 某村计划建造一个室内面积为 800 m^2 的矩形蔬菜温室. 在温室内, 沿左、右两侧与后侧内墙各保留 1 m 宽的通道, 沿前侧内墙保留 3 m 宽的空地. 当矩形温室的边长各为多少时? 蔬菜的种植面积最大, 最大种植面积是多少?

21. 三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧面 PAC 与底面 ABC 垂直, $PA=PB=PC=3$.
(1) 求证: $AB \perp BC$;
(2) 设 $AB=BC=2\sqrt{3}$, 求 AC 与平面 PBC 所成角的大小.



22. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{m+1}+y^2=1$ 的两个焦点是 $F_1(-c,0)$ 与 $F_2(c,0)$, $(c>0)$, 且椭圆上存在一点 P, 使得直线 PF_1 与 PF_2 垂直.
(1) 求实数 m 的取值范围;
(2) 设 L 是相应于焦点 F_2 的准线, 直线 PF_2 与 L 相交于点 Q, 若 $\left|\dfrac{QF_2}{PF_2}\right|=2-\sqrt{3}$, 求直线 PF_2 的方程.

2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 IV）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{0,1,2\}$, $N=\{x|x=2a, a\in M\}$, 则集合 $M\cap N=$（　）

(A) $\{0\}$　　(B) $\{0,1\}$　　(C) $\{1,2\}$　　(D) $\{0,2\}$

2. 函数 $y=\mathrm{e}^{2x}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数为（　）

(A) $y=2\ln x$ $(x>0)$　　(B) $y=\ln(2x)$ $(x>0)$

(C) $y=\dfrac{1}{2}\ln x$ $(x>0)$　　(D) $y=\dfrac{1}{2}\ln 2x$ $(x>0)$

3. 过点 $(-1,3)$ 且垂直于直线 $x-2y+3=0$ 的直线方程为（　）

(A) $2x+y-1=0$　　(B) $2x+y-5=0$

(C) $x+2y-5=0$　　(D) $x-2y+7=0$

4. $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2=$（　）

(A) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$　　(B) $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$　　(C) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$　　(D) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$

5. 不等式 $\dfrac{x(x+2)}{x-3}<0$ 的解集为（　）

(A) $\{x|x<-2$ 或 $0<x<3\}$　　(B) $\{x|-2<x<2$ 或 $x>3\}$

(C) $\{x|x<-2$ 或 $x>0\}$　　(D) $\{x|x<0$ 或 $x<3\}$

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_2+a_3=-24$, $a_{18}+a_{19}+a_{20}=78$, 则此数列前 20 项和等于（　）

(A) 160　　(B) 180　　(C) 200　　(D) 220

7. 对于直线 m、n 和平面 α, 下面命题中的真命题是（　）

(A) 如果 $m\subset\alpha$, $n\not\subset\alpha$, m、n 是异面直线, 那么 $n\parallel\alpha$

(B) 如果 $m\subset\alpha$, $n\not\subset\alpha$, m、n 是异面直线, 那么 n 与 α 相交

(C) 如果 $m\subset\alpha$, $n\parallel\alpha$, m、n 共面, 那么 $m\parallel n$

(D) 如果 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, m、n 共面, 那么 $m\parallel n$

8. 已知椭圆的中心在原点, 离心率 $e=\dfrac{1}{2}$, 且它的一个焦点与抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点重合, 则此椭圆方程为（　）

(A) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　(B) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1$

(C) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　(D) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

9. 从 5 位男教师和 4 位女教师中选出 3 位教师, 派到 3 个班担任班主任 (每班 1 位班主任), 要求这 3 位班主任中男、女教师都要有, 则不同的选派方案共有（　）

(A) 210 种　　(B) 420 种　　(C) 630 种　　(D) 840 种

10. 已知球的表面积为 20π, 球面上有 A、B、C 三点. 如果 $AB=AC=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 则球心到平面 ABC 的距离为（　）

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 2

11. $\triangle ABC$ 中, a、b、c 分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边. 如果 a、b、c 成等差数列, $\angle B=30^\circ$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3}{2}$, 那么 $b=$（　）

(A) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　　(B) $1+\sqrt{3}$　　(C) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$　　(D) $2+\sqrt{3}$

12. 设函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 为奇函数, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(x+2)=f(x)+f(2)$, 则 $f(5)=$（　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\dfrac{5}{2}$　　(D) 5

二、填空题

13. $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式中 x^5 的系数为_____.

14. 向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=-4$, 且 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值等于_____.

15. 函数 $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最大值等于_____.

16. 设 x, y 满足约束条件: $\begin{cases}x+y\leqslant 1\\ y\leqslant x\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值是_____.

三、解答题

17. 已知 α 为第二象限角, 且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, 求 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1}$ 的值.

18. 求函数 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{1}{4}x^2$ 在 $[0,2]$ 上的最大值和最小值.

19. 某同学参加科普知识竞赛, 需回答三个问题. 竞赛规则规定: 每题回答正确得 100 分, 回答不正确得 -100 . 假设这名同学每题回答正确的概率均为 0.8, 且各题回答正确与否相互之间没有影响.

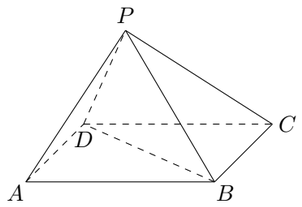
(1) 求这名同学回答这三个问题的总得分 ξ 的概率分布和数学期望;

(2) 求这名同学总得分不为负分 (即 $\xi\geqslant 0$) 的概率.

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $AB=8$, $AD=4\sqrt{3}$, 侧面 PAD 为等边三角形, 并且与底面所成二面角为 $60°$.

(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;

(2) 证明: $PA\perp BD$.



21. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>1,\ b>0)$ 的焦点距为 $2c$, 直线 l 过点 $(a,0)$ 和 $(0,b)$, 且点 $(1,0)$ 到直线 l 的距离与点 $(-1,0)$ 到直线 l 的距离之和 $s\geqslant\dfrac{4}{5}c$. 求双曲线的离心率 e 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$, 将满足 $f'(x)=0$ 的所有正数 x 从小到大排成数列 $\{x_n\}$.

(1) 证明数列 $\{f(x_n)\}$ 为等比数列;

(2) 记 S_n 是数列 $\{x_nf(x_n)\}$ 的前 n 项和, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}$.

2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 IV）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$, 集合 $M=\{0,3,5\}$, $N=\{1,4,5\}$, 则 $M\cap(\complement_U N)=$ （ ）

(A) $\{5\}$ (B) $\{0,3\}$ (C) $\{0,2,3,5\}$ (D) $\{0,1,3,4,5\}$

2. 函数 $y=\mathrm{e}^{2x}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数为 （ ）

(A) $y=2\ln x$ $(x>0)$ (B) $y=\ln(2x)$ $(x>0)$

(C) $y=\dfrac{1}{2}\ln x$ $(x>0)$ (D) $y=\dfrac{1}{2}\ln 2x$ $(x>0)$

3. 正三棱柱侧面的一条对角线长为 2, 且与底面成 45° 角, 则此三棱柱的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4. 函数 $y=(x+1)^2(x-1)$ 在 $x=1$ 处的导数等于 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 为了得到函数 $y=3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 的图象, 可以把函数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 的图象(　)

(A) 向左平移 3 个单位长度 (B) 向右平移 3 个单位长度

(C) 向左平移 1 个单位长度 (D) 向右平移 1 个单位长度

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_2+a_3=-24$, $a_{18}+a_{19}+a_{20}=78$, 则此数列前 20 项和等于 （ ）

(A) 160 (B) 180 (C) 200 (D) 220

7. 已知函数 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 与 $y=kx$ 的图象有公共点 A, 且点 A 的横坐标为 2, 则 $k=$ （ ）

(A) $-\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

8. 已知圆 C 的半径为 2, 圆心在 x 轴的正半轴上, 直线 $3x+4y+4=0$ 与圆 C 相切, 则圆 C 的方程为 （ ）

(A) $x^2+y^2-2x-3=0$ (B) $x^2+y^2+4x=0$

(C) $x^2+y^2+2x-3=0$ (D) $x^2+y^2-4x=0$

9. 从 5 位男教师和 4 位女教师中选出 3 位教师, 派到 3 个班担任班主任 (每班 1 位班主任), 要求这 3 位班主任中男、女教师都要有, 则不同的选派方案共有 （ ）

(A) 210 种 (B) 420 种 (C) 630 种 (D) 840 种

10. 函数 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最小值等于 （ ）

(A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) $-\sqrt{5}$

11. 已知球的表面积为 20π, 球面上有 A、B、C 三点. 如果 $AB=AC=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 则球心到平面 ABC 的距离为 （ ）

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

12. $\triangle ABC$ 中, a、b、c 分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边. 如果 a、b、c 成等差数列, $\angle B=30^\circ$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3}{2}$, 那么 $b=$ （ ）

(A) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ (B) $1+\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ (D) $2+\sqrt{3}$

13. 设函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 为奇函数, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(x+2)=f(x)+f(2)$, 则 $f(5)=$ （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{5}{2}$ (D) 5

二、填空题

14. $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式中 x^5 的系数为_____.

15. 已知函数 $y=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x+\pi}{A}$ $(A>0)$ 的最小正周期为 3π, 则 $A=$_____.

16. 向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=-4$, 且 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值等于_____.

17. 设 x, y 满足约束条件: $\begin{cases}x+y\leqslant 1\\ y\leqslant x\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值是_____.

三、解答题

18. 已知 α 为第二象限角, 且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, 求 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1}$ 的值.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_2=6$, $a_5=162$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明 $\dfrac{S_n\cdot S_{n+2}}{S_{n+1}^2}\leqslant 1$.

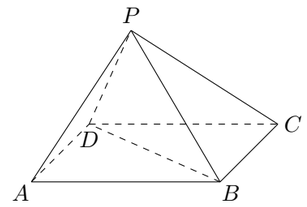
20. 已知直线 l_1 为曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线, l_2 为该曲线的另一条切线, 且 $l_1\perp l_2$.

(1) 求直线 l_2 的方程;

(2) 求由直线 l_1、l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

21. 某同学参加科普知识竞赛, 需回答 3 个问题. 竞赛规则规定: 答对第一、二、三问题分别得 100 分、100 分、200 分, 答错得零分. 假设这名同学答对第一、二、三个问题的概率分别为 0.8、0.7、0.6, 且各题答对与否相互之间没有影响.
(1) 求这名同学得 300 分的概率;
(2) 求这名同学至少得 300 分的概率.

22. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $AB=8$, $AD=4\sqrt{3}$, 侧面 PAD 为等边三角形, 并且与底面所成二面角为 $60°$.
(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;
(2) 证明: $PA \perp BD$.



23. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>1,\ b>0)$ 的焦点距为 $2c$, 直线 l 过点 $(a,0)$ 和 $(0,b)$, 且点 $(1,0)$ 到直线 l 的距离与点 $(-1,0)$ 到直线 l 的距离之和 $s \geqslant \dfrac{4}{5}c$. 求双曲线的离心率 e 的取值范围.

2004 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

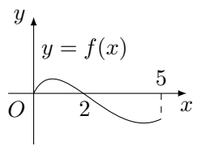
1. 若 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, 则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$_____.

2. 设抛物线的顶点坐标为 $(2,0)$, 准线方程为 $x=-1$, 则它的焦点坐标为_____.

3. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$, 集合 $B=\{a,b\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$, 则 $A\cup B=$_____.

4. 设等比数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N})$ 的公比 $q=-\dfrac{1}{2}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})=\dfrac{8}{3}$, 则 $a_1=$_____.

5. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$. 若当 $x\in[0,5]$ 时, $f(x)$ 的图象如右图, 则不等式 $f(x)<0$ 的解是_____.



6. 已知点 $A(1,-2)$, 若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}=(2,3)$ 同向, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{13}$, 则点 B 的坐标为_____.

7. 在极坐标系中, 点 $M\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 到直线 $l:\rho(2\cos\theta+\sin\theta)=4$ 的距离 $d=$_____.

8. 圆心在直线 $2x-y-7=0$ 上的圆 C 与 y 轴交于两点 $A(0,-4)$, $B(0,-2)$, 则圆 C 的方程为_____.

9. 若在二项式 $(x+1)^{10}$ 的展开式中任取一项, 则该项的系数为奇数的概率是_____. (结果用分数表示)

10. 若函数 $f(x)=a|x-b|+2$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数, 则实数 a、b 的取值范围是_____.

11. 教材中“坐标平面上的直线”与“圆锥曲线”两章内容体现出解析几何的本质是_____.

12. 若干个能唯一确定一个数列的量称为该数列的“基本量”. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列, 下列 $\{a_n\}$ 的四组量中, 一定能成为该数列“基本量”的是第_____组. (写出所有符合要求的组号)
① S_1 与 S_2; ② a_2 与 S_3; ③ a_1 与 a_n; ④ q 与 a_n.
其中 n 为大于 1 的整数, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

二、选择题

13. 在下列关于直线 l、m 与平面 α、β 的命题中, 真命题是 （ ）

(A) 若 $l\subset\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $l\perp\alpha$　　(B) 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\perp\alpha$

(C) 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $l\parallel\alpha$　　(D) 若 $\alpha\cap\beta=m$ 且 $l\parallel m$, 则 $l\parallel\alpha$

14. 三角方程 $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=1$ 的解集为 （ ）

(A) $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$　　(B) $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\dfrac{5\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(C) $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$　　(D) $\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+(-1)^k,k\in\mathbf{Z}\right\}$

15. 若函数 $y=f(x)$ 的图象可由函数 $y=\lg(x+1)$ 的图象绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得到, 则 $f(x)=$ （ ）

(A) $10^{-x}-1$　　(B) 10^x-1　　(C) $1-10^{-x}$　　(D) $1-10^x$

16. 某地 2004 年第一季度应聘和招聘人数排行榜前 5 个行业的情况列表如下

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215830	200250	154676	74570	65280

行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
招聘人数	124620	102935	89115	76516	70436

若用同一行业中应聘人数与招聘人数比值的大小来衡量该行业的就业情况, 则根据表中数据, 就业形势一定是 （ ）

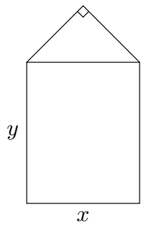
(A) 计算机行业好于化工行业　　(B) 建筑行业好于物流行业

(C) 机械行业最紧张　　(D) 营销行业比贸易行业紧张

三、解答题

17. 已知复数 z_1 满足 $(1+\mathrm{i})z_1=-1+5\mathrm{i}$, $z_2=a-2-\mathrm{i}$, 其中 i 为虚数单位, $a\in\mathbf{R}$, 若 $|z_1-\overline{z_2}|<|z_1|$, 求 a 的取值范围.

18. 某单位用木料制作如图所示的框架, 框架的下部是边长分别为 x、y (单位: m) 的矩形. 上部是等腰直角三角形. 要求框架围成的总面积 8 cm^2. 问 x、y 分别为多少 (精确到 0.001 m) 时用料最省?



19. 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\dfrac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A, $g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$ $(a<1)$ 的定义域为 D.
(1) 求 A;
(2) 若 $B\subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

20. 已知二次函数 $y = f_1(x)$ 的图象以原点为顶点且过点 $(1,1)$, 反比例函数 $y = f_2(x)$ 的图象与直线 $y = x$ 的两个交点间距离为 8, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

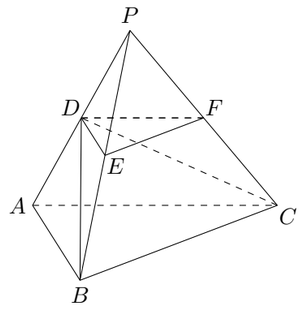
(2) 证明: 当 $a > 3$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) = f(a)$ 有三个实数解.

21. 如图, $P-ABC$ 是底面边长为 1 的正三棱锥, D、E、F 分别为棱长 PA、PB、PC 上的点, 截面 $DEF \parallel$ 底面 ABC, 且棱台 $DEF-ABC$ 与棱锥 $P-ABC$ 的棱长和相等. (棱长和是指多面体中所有棱的长度之和)

(1) 证明: $P-ABC$ 为正四面体;

(2) 若 $PD = \dfrac{1}{2}PA$, 求二面角 $D-BC-A$ 的大小; (结果用反三角函数值表示)

(3) 设棱台 $DEF-ABC$ 的体积为 V, 是否存在体积为 V 且各棱长均相等的直平行六面体, 使得它与棱台 $DEF-ABC$ 有相同的棱长和? 若存在, 请具体构造出这样的一个直平行六面体, 并给出证明; 若不存在, 请说明理由.



22. 设 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $\cdots$, $P_n(x_n, y_n)$ $(n \geqslant 3,\ n \in \mathbf{N})$ 是二次曲线 C 上的点, 且 $a_1 = |OP_1|^2$, $a_2 = |OP_2|^2$, $\cdots$, $a_n = |OP_n|^2$ 构成了一个公差为 d $(d \neq 0)$ 的等差数列, 其中 O 是坐标原点. 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(1) 若 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, $n = 3$. 点 $P_1(3,0)$ 及 $S_3 = 255$, 求点 P_3 的坐标; (只需写出一个)

(2) 若 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. 点 $P_1(a,0)$, 对于给定的自然数 n, 当公差 d 变化时, 求 S_n 的最小值;

(3) 请选定一条除椭圆外的二次曲线 C 及 C 上的一点 P_1, 对于给定的自然数 n, 写出符合条件的点 P_1, P_2, $\cdots$, P_n 存在的充要条件, 并说明理由.

2004 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

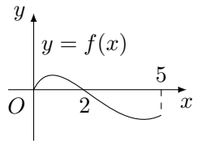
1. 若 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, 则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$_____.

2. 设抛物线的顶点坐标为 $(2,0)$, 准线方程为 $x=-1$, 则它的焦点坐标为_____.

3. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$, 集合 $B=\{a,b\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$, 则 $A\cup B=$_____.

4. 设等比数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N})$ 的公比 $q=-\frac{1}{2}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})=\frac{8}{3}$, 则 $a_1=$_____.

5. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$. 若当 $x\in[0,5]$ 时, $f(x)$ 的图象如右图, 则不等式 $f(x)<0$ 的解是_____.



6. 已知点 $A(-1,5)$ 和向量 $\vec{a}=(2,3)$, 若 $\overrightarrow{AB}=3\vec{a}$, 则点 B 的坐标为_____.

7. 当 x, y 满足不等式 $\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4\\ y\geqslant 3\\ x+y\leqslant 8\end{cases}$ 时, 目标函数 $k=3x-2y$ 的最大值为_____.

8. 圆心在直线 $x=2$ 上的圆 C 与 y 轴交于两点 $A(0,-4)$, $B(0,-2)$, 则圆 C 的方程为_____.

9. 若在二项式 $(x+1)^{10}$ 的展开式中任取一项, 则该项的系数为奇数的概率是_____. (结果用分数表示)

10. 若函数 $f(x)=a|x-b|+2$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数, 则实数 a、b 的取值范围是_____.

11. 教材中“坐标平面上的直线”与“圆锥曲线”两章内容体现出解析几何的本质是_____.

12. 若干个能唯一确定一个数列的量称为该数列的“基本量”. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列, 下列 $\{a_n\}$ 的四组量中, 一定能成为该数列“基本量”的是第_____组. (写出所有符合要求的组号)
① S_1 与 S_2; ② a_2 与 S_3; ③ a_1 与 a_n; ④ q 与 a_n.
其中 n 为大于 1 的整数, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

二、选择题

13. 在下列关于直线 l、m 与平面 α、β 的命题中, 真命题是 ( )

(A) 若 $l\subset\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $l\perp\alpha$ (B) 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\perp\alpha$

(C) 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $l\parallel\alpha$ (D) 若 $\alpha\cap\beta=m$ 且 $l\parallel m$, 则 $l\parallel\alpha$

14. 三角方程 $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$ 的解集为 ( )

(A) $\left\{x\left|x=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ (B) $\left\{x\left|x=2k\pi+\frac{5\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

(C) $\left\{x\left|x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ (D) $\{x\,|x=k\pi+(-1)^k,k\in\mathbf{Z}\}$

15. 若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\lg(x+1)$ 的图象关于直线 $x-y=0$ 对称, 则 $f(x)=$ ( )

(A) 10^x-1 (B) $1-10^x$ (C) $1-10^{-x}$ (D) $10^{-x}-1$

16. 某地 2004 年第一季度应聘和招聘人数排行榜前 5 个行业的情况列表如下

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215830	200250	154676	74570	65280

行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
招聘人数	124620	102935	89115	76516	70436

若用同一行业中应聘人数与招聘人数比值的大小来衡量该行业的就业情况, 则根据表中数据, 就业形势一定是 ( )

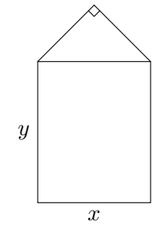
(A) 计算机行业好于化工行业 (B) 建筑行业好于物流行业

(C) 机械行业最紧张 (D) 营销行业比贸易行业紧张

三、解答题

17. 已知复数 z_1 满足 $(1+\mathrm{i})z_1=-1+5\mathrm{i}$, $z_2=a-2-\mathrm{i}$, 其中 i 为虚数单位, $a\in\mathbf{R}$, 若 $|z_1-\overline{z_2}|<|z_1|$, 求 a 的取值范围.

18. 某单位用木料制作如图所示的框架, 框架的下部是边长分别为 x、y (单位: m) 的矩形. 上部是等腰直角三角形. 要求框架围成的总面积 8 cm^2. 问 x、y 分别为多少 (精确到 0.001 m) 时用料最省?

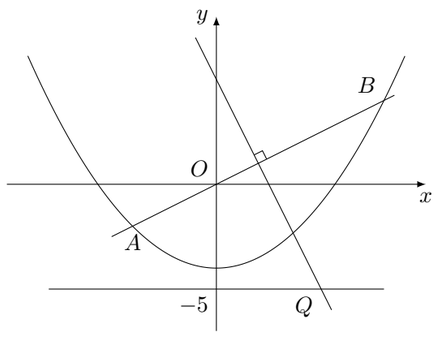


19. 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A, $g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$ $(a<1)$ 的定义域为 D.
(1) 求 A;
(2) 若 $B\subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

20. 如图, 直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 与抛物线 $y=\dfrac{1}{8}x^2-4$ 交于 A、B 两点, 线段 AB 的垂直平分线与直线 $y=-5$ 交于 Q 点.

(1) 求点 Q 的坐标;

(2) 当 P 为抛物线上位于线段 AB 下方 (含 A、B) 的动点时, 求 $\triangle OPQ$ 面积的最大值.

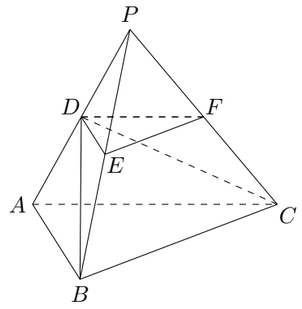


21. 如图, $P-ABC$ 是底面边长为 1 的正三棱锥, D、E、F 分别为棱长 PA、PB、PC 上的点, 截面 $DEF\parallel$ 底面 ABC, 且棱台 $DEF-ABC$ 与棱锥 $P-ABC$ 的棱长和相等. (棱长和是指多面体中所有棱的长度之和)

(1) 证明: $P-ABC$ 为正四面体;

(2) 若 $PD=\dfrac{1}{2}PA$, 求二面角 $D-BC-A$ 的大小; (结果用反三角函数值表示)

(3) 设棱台 $DEF-ABC$ 的体积为 V, 是否存在体积为 V 且各棱长均相等的直平行六面体, 使得它与棱台 $DEF-ABC$ 有相同的棱长和? 若存在, 请具体构造出这样的一个直平行六面体, 并给出证明; 若不存在, 请说明理由.



22. 设 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $\cdots$, $P_n(x_n,y_n)$ ($n\geqslant 3$, $n\in\mathbf{N}$) 是二次曲线 C 上的点, 且 $a_1=|OP_1|^2$, $a_2=|OP_2|^2$, $\cdots$, $a_n=|OP_n|^2$ 构成了一个公差为 d ($d\neq 0$) 的等差数列, 其中 O 是坐标原点. 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(1) 若 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}-y^2=1$, $n=3$. 点 $P_1(3,0)$ 及 $S_3=162$, 求点 P_3 的坐标; (只需写出一个)

(2) 若 C 的方程为 $y^2=2px$ ($p\neq 0$). 点 $P_1(0,0)$, 对于给定的自然数 n, 证明: $(x_1+p)^2$, $(x_2+p)^2$, $\cdots$, $(x_n+p)^2$ 成等差数列;

(3) 若 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$). 点 $P_1(a,0)$, 对于给定的自然数 n, 当公差 d 变化时, 求 S_n 的最小值.

2004 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{\mathrm{i}^3}=$ （　）

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $-1-\mathrm{i}$　(C) $1+3\mathrm{i}$　(D) $-1-3\mathrm{i}$

2. 不等式 $\dfrac{x-1}{x}\geqslant 2$ 的解集为 （　）

(A) $[-1,0)$　(B) $[-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-1]$　(D) $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

3. 若平面向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}=(1,-2)$ 的夹角是 180°, 且 $\left|\vec{b}\right|=3\sqrt{5}$, 则 $\vec{b}=$

(A) $(-3,6)$　(B) $(3,-6)$　(C) $(6,-3)$　(D) $(-6,3)$

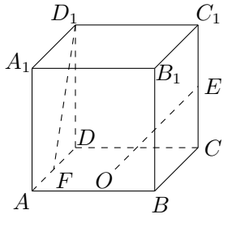
4. 设 P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点, 双曲线的一条渐近线方程为 $3x-2y=0$, F_1、F_2 分别是双曲线的左、右焦点, 若 $|PF_1|=3$, 则 $|PF_2|=$ （　）

(A) 1 或 5　(B) 6　(C) 7　(D) 9

5. 若函数 $f(x)=\log_a x\ (0<a<1)$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值是最小值的 3 倍, 则 $a=$ （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

6. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是底面 $ABCD$ 的中心, E、F 分别是 CC_1、AD 的中点, 那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于 （　）



(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　(B) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　(C) $\dfrac{4}{5}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

7. 若 $P(2,-1)$ 为圆 $(x-1)^2+y^2=25$ 的弦 AB 的中点, 则直线 AB 的方程是 （　）

(A) $x-y-3=0$　(B) $2x+y-3=0$

(C) $x+y-1=0$　(D) $2x-y-5=0$

8. 已知数列 $\{a_n\}$, 那么“对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 点 $P_n(n,a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上”是“$\{a_n\}$ 为等差数列”的 （　）

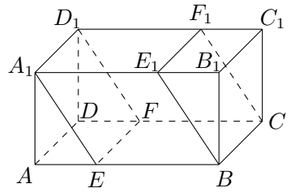
(A) 必要而不充分条件　(B) 充分而不必要条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

9. 函数 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)\ (x\in[0,\pi])$ 为增函数的区间是 （　）

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$　(B) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$　(C) $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$　(D) $\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$

10. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=6$, $AD=4$, $AA_1=3$. 分别过 BC、A_1D_1 的两个平行截面将长方体分成三部分, 其体积分别记为 $V_1=V_{AEA_1-DFD_1}$, $V_2=V_{EBE_1A_1-FCF_1D_1}$, $V_3=V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$. 若 $V_1:V_2:V_3=1:4:1$, 则截面 A_1EFD_1 的面积为 （　）



(A) $4\sqrt{10}$　(B) $8\sqrt{3}$　(C) $4\sqrt{13}$　(D) 16

11. 函数 $y=3^{x^2-1}\ (-1\leqslant x<0)$ 的反函数是 （　）

(A) $y=\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$　(B) $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$

(C) $y=\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(\dfrac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$　(D) $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(\dfrac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数, 若 $f(x)$ 的最小正周期是 π, 且当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)=\sin x$, 则 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ 的值为 （　）

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 某工厂生产 A、B、C 三种不同型号的产品, 产品数量之比依次为 $2:3:5$, 现用分层抽样方法抽出一个容量为 n 的样本, 样本中 A 种型号产品有 16 件. 那么此样本的容量 $n=$_____.

14. 如果过两点 $A(a,0)$ 和 $B(0,a)$ 的直线与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 没有交点, 那么实数 a 的取值范围是_____.

15. 若 $(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2004}x^{2004}\ (x\in\mathbf{R})$, 则 $(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\cdots+(a_0+a_{2004})=$_____. (用数字作答)

16. 从 1, 3, 5, 7 中任取 2 个数字, 从 0, 2, 4, 6, 8 中任取 2 个数字, 组成没有重复数字的四位数, 其中能被 5 整除的四位数共有_____个. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 $\tan\alpha$ 的值;

(2) 求 $\dfrac{\sin 2a-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值.

18. 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛, 设随机变量 ξ 表示所选 3 人中女生的人数.

(1) 求 ξ 的分布列;

(2) 求 ξ 的数学期望;

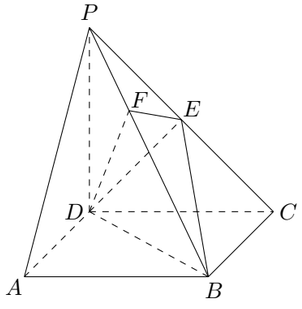
(3) 求“所选 3 人中女生人数 $\xi\leqslant 1$”的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $PD=DC$, E 是 PC 的中点, 作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F.

(1) 证明: $PA\parallel$ 平面 EDB;

(2) 证明: $PB\perp$ 平面 EFD;

(3) 求二面角 $C-PB-D$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x$ 在 $x=\pm1$ 处取得极值.
(1) 讨论 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值;
(2) 过点 $A(0,16)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线, 求此切线方程.

21. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件: $a_1=a$, $a_n=f(a_{n-1})$ $(n=2,3,4,\cdots)$, $a_2\neq a_1$, $f(a_n)-f(a_{n-1})=k(a_n-a_{n-1})$ $(n=2,3,4,\cdots)$, 其中 a 为常数, k 为非零常数.
(1) 令 $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(3) 当 $|k|<1$ 时, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

22. 椭圆的中心是原点 O, 它的短轴长为 $2\sqrt{2}$, 相应于焦点 $F(c,0)$ $(c>0)$ 的准线 l 与 x 轴相交于点 A, $|OF|=2|FA|$, 过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点.
(1) 求椭圆的方程及离心率;
(2) 若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$, 求直线 PQ 的方程;
(3) 设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}$ $(\lambda>1)$, 过点 P 且平行于准线 l 的直线与椭圆相交于另一点 M, 证明 $\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$.

2004 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $P=\{1,2,3,4,5,6\}$, $Q=\{x\in\mathbf{R}|2\leqslant x\leqslant 6\}$, 那么下列结论正确的是（　）

(A) $P\cap Q=P$　(B) $P\cap Q\supseteq Q$　(C) $P\cup Q=Q$　(D) $P\cap Q\supsetneqq P$

2. 不等式 $\dfrac{x-1}{x}\geqslant 2$ 的解集为（　）

(A) $[-1,0)$　(B) $[-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-1]$　(D) $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

3. 对任意实数 a, b, c 在下列命题中, 真命题是（　）

(A) “$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件　(B) “$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件

(C) “$ac>bc$”是“$a>b$”的充分条件　(D) “$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件

4. 若平面向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}=(1,-2)$ 的夹角是 180°, 且 $|\vec{b}|=3\sqrt{5}$, 则 $\vec{b}=$

(A) $(-3,6)$　(B) $(3,-6)$　(C) $(6,-3)$　(D) $(-6,3)$

5. 设 P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点, 双曲线的一条渐近线方程为 $3x-2y=0$, F_1、F_2 分别是双曲线的左、右焦点, 若 $|PF_1|=3$, 则 $|PF_2|=$（　）

(A) 1 或 5　(B) 6　(C) 7　(D) 9

6. 若函数 $f(x)=\log_a x$ $(0<a<1)$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值是最小值的 3 倍, 则 $a=$（　）

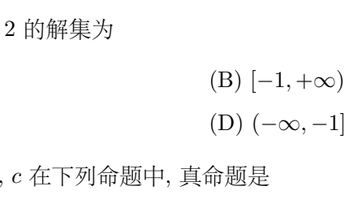
(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

7. 若过定点 $M(-1,0)$ 且斜率为 k 的直线与圆 $x^2+4x+y^2-5=0$ 在第一象限内的部分有交点, 则 k 的取值范围是（　）

(A) $0<k<\sqrt{5}$　(B) $-\sqrt{5}<k<0$

(C) $0<k<\sqrt{13}$　(D) $0<k<5$

8. 如图, 定点 A 和 B 都在平面 α 内, 定点 $P\notin\alpha$, $PB\perp\alpha$, C 是 α 内异于 A 和 B 的动点, 且 $PC\perp AC$. 那么, 动点 C 在平面 α 内的轨迹是（　）



(A) 一条线段, 但要去掉两个点　(B) 一个圆, 但要去掉两个点

(C) 一个椭圆, 但要去掉两个点　(D) 半圆, 但要去掉两个点

9. 函数 $y=3^{x^2-1}$ $(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是（　）

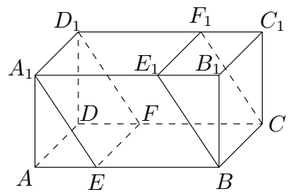
(A) $y=\sqrt{1+\log_3 x}$ $\left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$　(B) $y=-\sqrt{1+\log_3 x}$ $\left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$

(C) $y=\sqrt{1+\log_3 x}$ $\left(\dfrac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$　(D) $y=-\sqrt{1+\log_3 x}$ $\left(\dfrac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$

10. 函数 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)$ $(x\in[0,\pi])$ 为增函数的区间是（　）

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$　(B) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$　(C) $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$　(D) $\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$

11. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=6$, $AD=4$, $AA_1=3$. 分别过 BC、A_1D_1 的两个平行截面将长方体分成三部分, 其体积分别记为 $V_1=V_{AEA_1-DFD_1}$, $V_2=V_{EBE_1A_1-FCF_1D_1}$, $V_3=V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$. 若 $V_1:V_2:V_3=1:4:1$, 则截面 A_1EFD_1 的面积为（　）



(A) $4\sqrt{10}$　(B) $8\sqrt{3}$　(C) $4\sqrt{13}$　(D) 16

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数, 若 $f(x)$ 的最小正周期是 π, 且当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)=\sin x$, 则 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ 的值为（　）

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 某工厂生产 A、B、C 三种不同型号的产品, 产品数量之比依次为 $2:3:5$, 现用分层抽样方法抽出一个容量为 n 的样本, 样本中 A 种型号产品有 16 件. 那么此样本的容量 $n=$_____.

14. 已知向量 $\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(2,-3)$, 若 $k\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直, 则实数 k 等于_____.

15. 如果过两点 $A(a,0)$ 和 $B(0,a)$ 的直线与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 没有交点, 那么实数 a 的取值范围是_____.

16. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5 中任取 3 个数字, 组成没有重复数字的三位数, 其中能被 5 整除的三位数共有_____个. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 $\tan\alpha$ 的值;

(2) 求 $\dfrac{\sin 2a-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值.

18. 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛.

(1) 求所选 3 人都是男生的概率;

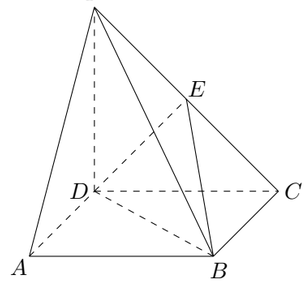
(2) 求所选 3 人中恰有 1 名女生的概率;

(3) 求所选 3 人中至少有 1 名女生的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $PD=DC$, E 是 PC 的中点.

(1) 证明: $PA\parallel$ 平面 EDB;

(2) 求 EB 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值.



20. 设 $\{a_n\}$ 是一个公差为 d $(d \neq 0)$ 的等差数列, 它的前 10 项和 $S_{10} = 110$ 且 a_1, a_2, a_4 成等比数列.
(1) 证明 $a_1 = d$;
(2) 求公差 d 的值和数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21. 已知函数 $f(x) = ax^3 + cx + d$ $(a \neq 0)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x = 1$ 时 $f(x)$ 取得极值 -2.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极大值;
(2) 证明对任意 x_1, $x_2 \in (-1, 1)$, 不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| < 4$ 恒成立.

22. 椭圆的中心是原点 O, 它的短轴长为 $2\sqrt{2}$, 相应于焦点 $F(c, 0)$ $(c > 0)$ 的准线 l 与 x 轴相交于点 A, $|OF| = 2|FA|$, 过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点.
(1) 求椭圆的方程及离心率;
(2) 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, 求直线 PQ 的方程.

2004 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

1. 若 $U=\{1,2,3,4\}$, $M=\{1,2\}$, $N=\{2,3\}$, 则 $\complement_U(M\cup N)=$ （ ）

(A) $\{1,2,3\}$　(B) $\{2\}$　(C) $\{1,3,4\}$　(D) $\{4\}$

2. 点 P 从 $(1,0)$ 出发, 沿单位圆 $x^2+y^2=1$ 逆时针方向运动 $\dfrac{2\pi}{3}$ 弧长到达 Q 点, 则 Q 的坐标为 （ ）

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(B) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$　(C) $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(D) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 若 a_1, a_3, a_4 成等比数列, 则 $a_2=$ （ ）

(A) -4　(B) -6　(C) -8　(D) -10

4. 曲线 $y^2=4x$ 关于直线 $x=2$ 对称的曲线方程是 （ ）

(A) $y^2=8-4x$　(B) $y^2=4x-8$　(C) $y^2=16-4x$　(D) $y^2=4x-16$

5. 设 $z=x-y$, 式中变量 x 和 y 满足条件 $\begin{cases}x+y-3\geqslant 0\\ x-2y\geqslant 0\end{cases}$, 则 z 的最小值为 （ ）

(A) 1　(B) -1　(C) 3　(D) -3

6. 已知复数 $z_1=3+4\mathrm{i}$, $z_2=t+\mathrm{i}$, 且 $z_1\cdot\overline{z_2}$ 是实数, 则实数 $t=$ （ ）

(A) $\dfrac{3}{4}$　(B) $\dfrac{4}{3}$　(C) $-\dfrac{4}{3}$　(D) $-\dfrac{3}{4}$

7. 若 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式中存在常数项, 则 n 的值可以是 （ ）

(A) 8　(B) 9　(C) 10　(D) 12

8. 在 $\triangle ABC$ 中, “$A>30^\circ$”是“$\sin A>\dfrac{1}{2}$”的 （ ）

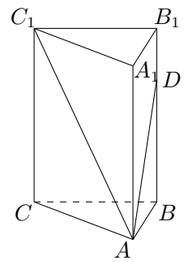
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也必要条件

9. 若椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 线段 F_1F_2 被抛物线 $y^2=2bx$ 的焦点分成 5 : 3 两段, 则此椭圆的离心率为 （ ）

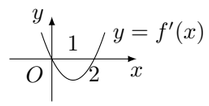
(A) $\dfrac{16}{17}$　(B) $\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$　(C) $\dfrac{4}{5}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

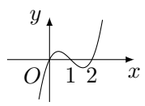
10. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中已知 $AB=1$, D 在棱 $BB1$ 上, 且 $BD=1$, 若 AD 与平面 AA_1C_1C 所成的角为 α, 则 $\alpha=$ （ ）

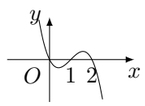


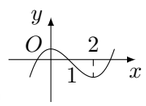
(A) $\dfrac{\pi}{3}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　(D) $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

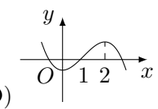
11. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 则 $y=f(x)$ 的图象最有可能的是 （ ）



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

12. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解, 则 $g[f(x)]$ 不可能是 （ ）

(A) $x^2+x-\dfrac{1}{5}$　(B) $x^2+x+\dfrac{1}{5}$　(C) $x^2-\dfrac{1}{5}$　(D) $x^2+\dfrac{1}{5}$

二、填空题

13. 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$, 则不等式 $x+(x+2)\cdot f(x+2)\leqslant 5$ 的解集是_____.

14. 已知平面上三点 A、B、C 满足 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=4$, $\left|\overrightarrow{CA}\right|=5$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值等于_____.

15. 设坐标平面内有一个质点从原点出发, 沿 x 轴跳动, 每次向正方向或负方向跳 1 个单位, 经过 5 次跳动质点落在点 $(3,0)$ (允许重复过此点) 处, 则质点不同的运动方法共有_____种. (用数字作答)

16. 已知平面 α 和平面交于直线 l, P 是空间一点, $PA\perp\alpha$, 垂足为 A, $PB\perp\beta$, 垂足为 B, 且 $PA=1$, $PB=2$, 若点 A 在 β 内的射影与点 B 在 α 内的射影重合, 则点 P 到 l 的距离为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 且 $\cos A=\dfrac{1}{3}$.

(1) 求 $\sin^2\dfrac{B+C}{2}+\cos 2A$ 的值;

(2) 若 $a=\sqrt{3}$, 求 bc 的最大值.

18. 盒子中有大小相同的球 10 个, 其中标号为 1 的球 3 个, 标号为 2 的球 4 个, 标号为 5 的球 3 个, 第一次从盒子中任取 1 个球, 放回后第二次再任取 1 个球 (假设取到每个球的可能性都相同). 记第一次与第二次取到球的标号之和为 ε.

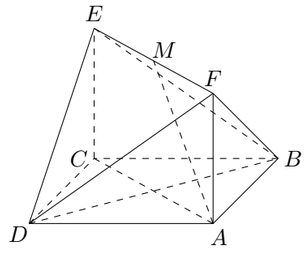
(1) 求随机变量 ε 的分布列;

(2) 求随机变量 ε 的期望 $E\varepsilon$.

19. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $AB=\sqrt{2}$, $AF=1$, M 是线段 EF 的中点.

(1) 求证: $AM\parallel$ 平面 BDE;

(2) 求二面角 $A-DF-B$ 的大小.



20. 设曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$ $(x\geqslant 0)$ 在点 $M\left(t,\mathrm{e}^{-t}\right)$ 处的切线 l 与 x 轴 y 轴所围成的三角形面积为 $S(t)$.

(1) 求切线 l 的方程;

(2) 求 $S(t)$ 的最大值.

21. 已知双曲线的中心在原点, 右顶点为 $A(1,0)$ 点 P、Q. 在双曲线的右支上, 点 $M(m,0)$ 到直线 AP 的距离为 1.

(1) 若直线 AP 的斜率为 k, 且 $|k|\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$, 求实数 m 的取值范围;

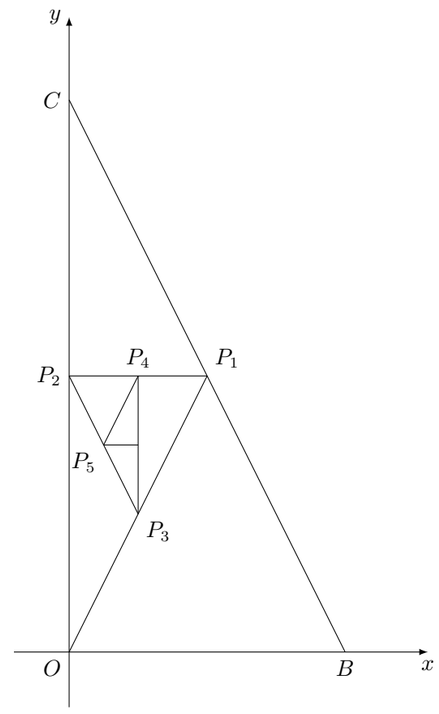
(2) 当 $m=\sqrt{2}+1$ 时, $\triangle APQ$ 的内心恰好是点 M, 求此双曲线的方程.

22. 如图, $\triangle OBC$ 的在个顶点坐标分别为 $(0,0)$、$(1,0)$、$(0,2)$, 设 P 为线段 BC 的中点, P_2 为线段 CO 的中点, P_3 为线段 OP_1 的中点, 对于每一个正整数 n, P_{n+3} 为线段 P_nP_{n+1} 的中点, 令 P_n 的坐标为 (x_n,y_n), $a_n=\dfrac{1}{2}y_n+y_{n+1}+y_{n+2}$.

(1) 求 a_1, a_2, a_3 及 a_n;

(2) 证明 $y_{n+4}=1-\dfrac{y_n}{4}$, $n\in\mathbf{N}^*$;

(3) 若记 $b_n=y_{4n+4}-y_{4n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列.



2004 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

1. 若 $U=\{1,2,3,4\}$, $M=\{1,2\}$, $N=\{2,3\}$, 则 $\complement_U(M\cup N)=$ （ ）

(A) $\{1,2,3\}$ (B) $\{4\}$ (C) $\{1,3,4\}$ (D) $\{2\}$

2. 直线 $y=2$ 与直线 $x+y-2=0$ 的夹角是 （ ）

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 若 a_1, a_3, a_4 成等比数列, 则 $a_2=$ （ ）

(A) -4 (B) -6 (C) -8 (D) -10

4. 已知向量 $\vec{a}=(3,4)$, $\vec{b}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$, 且 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 则 $\tan\alpha=$ （ ）

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{4}{3}$

5. 点 P 从 $(1,0)$ 出发, 沿单位圆 $x^2+y^2=1$ 逆时针方向运动 $\frac{2\pi}{3}$ 弧长到达 Q 点, 则 Q 的坐标为 （ ）

(A) $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (B) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (D) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

6. 曲线 $y^2=4x$ 关于直线 $x=2$ 对称的曲线方程是 （ ）

(A) $y^2=8-4x$ (B) $y^2=4x-8$ (C) $y^2=16-4x$ (D) $y^2=4x-16$

7. 若 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式中存在常数项, 则 n 的值可以是 （ ）

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12

8. 在 $\triangle ABC$ 中, “$A>30^\circ$”是“$\sin A>\frac{1}{2}$”的 （ ）

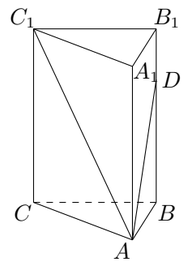
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也必要条件

9. 若函数 $f(x)=\log_a(x+1)$ $(a>0,\ a\neq1)$ 的定义域和值域都是 $[0,1]$, 则 $a=$ （ ）

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 2

10. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中已知 $AB=1$, D 在棱 $BB1$ 上, 且 $BD=1$, 若 AD 与平面 AA_1C_1C 所成的角为 α, 则 $\alpha=$ （ ）



(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{4}$ (D) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$

11. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 线段 F_1F_2 被点 $\left(\frac{b}{2},0\right)$ 分成 5 : 3 两段, 则此椭圆的离心率为 （ ）

(A) $\frac{16}{17}$ (B) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解, 则 $g[f(x)]$ 不可能是 （ ）

(A) $x^2+x-\frac{1}{5}$ (B) $x^2+x+\frac{1}{5}$ (C) $x^2-\frac{1}{5}$ (D) $x^2+\frac{1}{5}$

二、填空题

13. 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0\\ -1, & x<0\end{cases}$, 则不等式 $x+(x+2)\cdot f(x+2)\leqslant5$ 的解集是_____.

14. 已知平面上三点 A、B、C 满足 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=4$, $\left|\overrightarrow{CA}\right|=5$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值等于_____.

15. 已知平面 $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, P 是空间一点, 且 P 到 α、β 的距离分别是 1、2, 则点 P 到 l 的距离为_____.

16. 设坐标平面内有一个质点从原点出发, 沿 x 轴跳动, 每次向正方向或负方向跳 1 个单位, 经过 5 次跳动质点落在点 $(3,0)$ (允许重复过此点) 处, 则质点不同的运动方法共有_____种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $S_n=\frac{1}{3}(a_n-1)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a_1, a_2;

(2) 求证数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 且 $\cos A=\frac{1}{3}$.

(1) 求 $\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos2A$ 的值;

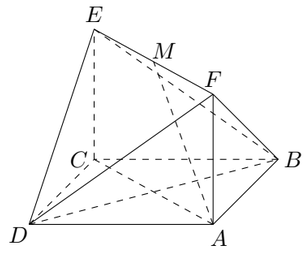
(2) 若 $a=\sqrt{3}$, 求 bc 的最大值.

19. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $AB=\sqrt{2}$, $AF=1$, M 是线段 EF 的中点.

(1) 求证: $AM\parallel$ 平面 BDE;

(2) 求证: $AM\perp$ 平面 BDF;

(3) 求二面角 $A-DF-B$ 的大小.



20. 某地区有 5 个工厂, 由于用电紧缺, 规定每个工厂在一周内必须选择某一天停电 (选哪一天是等可能的). 假定工厂之间的选择互不影响.
(1) 求 5 个工厂均选择星期日停电的概率;
(2) 求至少有两个工厂选择同一天停电的概率.

21. 已知 a 为实数, $f(x)=(x^2-4)(x-a)$.
(1) 求导数 $f'(x)$;
(2) 若 $f'(-1)=0$, 求 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值和最小值;
(3) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 和 $[2,+\infty)$ 上都是递增的, 求 a 的取值范围.

22. 已知双曲线的中心在原点, 右顶点为 $A(1,0)$ 点 P、Q. 在双曲线的右支上, 点 $M(m,0)$ 到直线 AP 的距离为 1.
(1) 若直线 AP 的斜率为 k, 且 $|k|\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$, 求实数 m 的取值范围;
(2) 当 $m=\sqrt{2}+1$ 时, $\triangle APQ$ 的内心恰好是点 M, 求此双曲线的方程.

2005 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）

理科数学

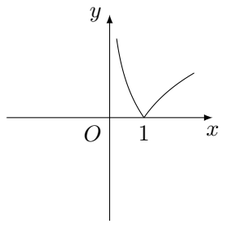
一、选择题

1. $\mathrm{i}-2$ 的共轭复数是 （ ）

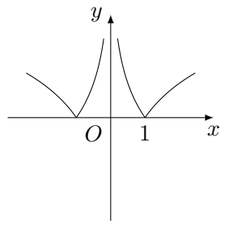
(A) $2+\mathrm{i}$　(B) $2-\mathrm{i}$　(C) $-2+\mathrm{i}$　(D) $-2-\mathrm{i}$

2. 函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象是 （ ）

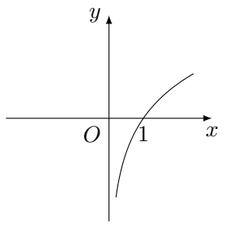
(A)



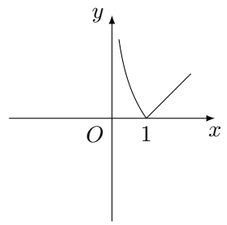
(B)



(C)



(D)



3. 有如下三个命题:
① 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线;
② 垂直于同一个平面的两条直线是平行直线;
③ 过平面 α 的一条斜线有一个平面与平面 α 垂直.
其中正确命题的个数为 （ ）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

4. 如果函数 $f(x)=\sin(\pi x+\theta)$ $(0<\theta<2\pi)$ 的最小正周期是 T, 且当 $x=2$ 时取得最大值, 那么 （ ）

(A) $T=2,\ \theta=\dfrac{\pi}{2}$　(B) $T=1,\ \theta=\pi$

(C) $T=2,\ \theta=\pi$　(D) $T=1,\ \theta=\dfrac{\pi}{2}$

5. 设 $abc\neq 0$, “$ac>0$”是“曲线 $ax^2+by^2=c$ 为椭圆”的 （ ）

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既非充分又非必要条件

6. 已知双曲线的两个焦点为 $F_1(-\sqrt{5},0)$, $F_2(\sqrt{5},0)$, P 是此双曲线上的一点, 且 $PF_1\perp PF_2$, $|PF_1|\cdot|PF_2|=2$, 则该双曲线的方程是 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$　(D) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\sin A\cos B=\sin C$, 那么 $\triangle ABC$ 一定是 （ ）

(A) 直角三角形　(B) 等腰三角形

(C) 等腰直角三角形　(D) 正三角形

8. 若不等式 $(-1)^n a<2+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 对于任意正整数 n 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 （ ）

(A) $\left[-2,\dfrac{3}{2}\right)$　(B) $\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)$　(C) $\left[-3,\dfrac{3}{2}\right)$　(D) $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$

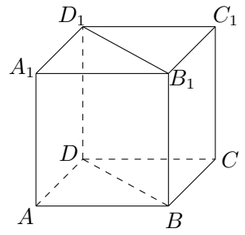
二、填空题

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n}{2n^2-3}=$_____.

10. 已知 $\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 那么 $\sin\theta$ 的值为_____, $\cos 2\theta$ 的值为_____.

11. 若圆 $x^2+y^2+mx-\dfrac{1}{4}=0$ 与直线 $y=-1$ 相切, 且其圆心在 y 轴的左侧, 则 m 的值为_____.

12. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a, 将该正方体沿对角面 BB_1D_1D 切成两块, 再将这两块拼接成一个不是正方体的四棱柱, 那么所得四棱柱的全面积为_____.



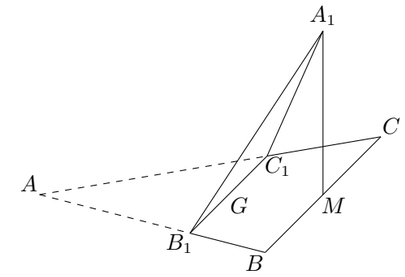
13. 从 -1, 0, 1 , 2 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数, 可组成不同的二次函数共有_____个, 其中不同的偶函数共有_____个. (用数字作答)

14. 若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$, 则实数 a 的取值范围是_____; 若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a\leqslant -3$ 的解集不是空集, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 设函数 $f(x)=\lg(2x-3)$ 的定义域为集合 M, 函数 $g(x)=\sqrt{1-\dfrac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合 N. 求:
(1) 集合 M, N;
(2) 集合 $M\cap N$, $M\cup N$.

16. 如图, 正三角形 ABC 的边长为 3, 过其中心 G 作 BC 边的平行线, 分别交 AB、AC 于 B_1、C_1. 将 $\triangle AB_1C_1$ 沿 B_1C_1 折起到 $\triangle A_1B_1C_1$ 的位置, 使点 A_1 在平面 BB_1C_1C 上的射影恰是线段 BC 的中点 M. 求:
(1) 二面角 $A_1-B_1C_1-M$ 的大小;
(2) 异面直线 A_1B_1 与 CC_1 所成角的大小. (用反三角函数表示)



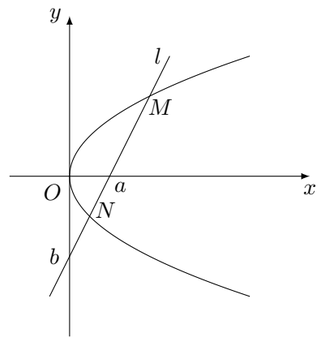
17. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1=2$, $a_3=18$; $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_1=2$, $b_1+b_2+b_3+b_4=a_1+a_2+a_3>20$.
(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的公式;
(3) 设 $P_n=b_1+b_4+b_7+\cdots+b_{3n-2}$, $Q_n=b_{10}+b_{12}+b_{14}+\cdots+b_{2n+8}$, 其中 $n=1,2,\cdots$, 试比较 P_n 与 Q_n 的大小, 并证明你的结论.

18. 如图, O 为坐标原点, 直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b, 且交抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 于 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$ 两点.

(1) 写出直线 l 的截距式方程;

(2) 证明: $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{b}$;

(3) 当 $a=2p$ 时, 求 $\angle MON$ 的大小.



19. 经过长期观测得到: 在交通繁忙的时段内, 某公路段汽车的车流量 y (千辆/小时) 与汽车的平均速度 v (千米/小时) 之间的函数关系为: $y=\dfrac{920v}{v^2+3v+1600}\ (v>0)$.

(1) 在该时段内, 当汽车的平均速度 v 为多少时, 车流量最大? 最大车流量为多少? (精确到 0.1 千辆/小时)

(2) 若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时, 则汽车站的平均速度应在什么范围内?

20. 现有一组互不相同且从小到大排列的数据: $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$, 其中 $a_0=0$. 为提取反映数据间差异程度的某种指标, 今对其进行如下加工: 记 $T=a_0+a_1+\cdots+a_5$, $x_n=\dfrac{n}{5}$, $y_n=\dfrac{1}{T}(a_0+a_1+\cdots+a_n)$, 作函数 $y=f(x)$, 使其图象为逐点依次连接点 $P_n(x_n,y_n)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 的折线.

(1) 求 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的值;

(2) 设 $P_{n-1}P_n$ 的斜率为 $k_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$, 判断 $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ k_5$ 的大小关系;

(3) 证明: 当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)<x$;

(4) 求由函数 $y=x$ 与 $y=f(x)$ 的图象所围成图形的面积. (用 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 表示)

2005 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）

文科数学

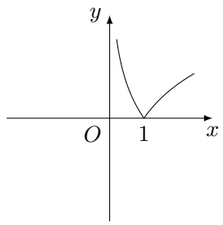
一、选择题

1. $\mathrm{i}-2$ 的共轭复数是 （　）

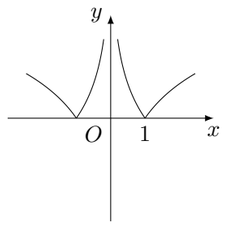
(A) $2+\mathrm{i}$　　(B) $2-\mathrm{i}$　　(C) $-2+\mathrm{i}$　　(D) $-2-\mathrm{i}$

2. 函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象是 （　）

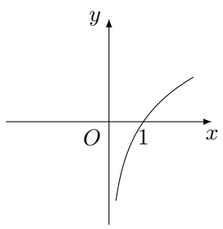
(A)



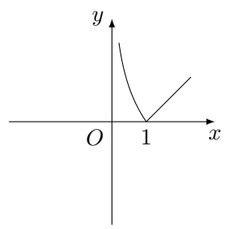
(B)



(C)



(D)



3. 下列命题中, 正确的是 （　）

(A) 经过不同的三点有且只有一个平面

(B) 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线

(C) 垂直于同一个平面的两条直线是平行直线

(D) 垂直于同一个平面的两个平面平行

4. 如果函数 $f(x)=\sin(\pi x+\theta)$ $(0<\theta<2\pi)$ 的最小正周期是 T, 且当 $x=2$ 时取得最大值, 那么 （　）

(A) $T=2$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$　　(B) $T=1$, $\theta=\pi$

(C) $T=2$, $\theta=\pi$　　(D) $T=1$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

5. 设 $abc\neq 0$, “$ac>0$”是“曲线 $ax^2+by^2=c$ 为椭圆”的 （　）

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

6. 直线 $x+\sqrt{3}y-2=0$ 被圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 所截得的线段的长为 （　）

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 2

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\sin A\cos B=\sin C$, 那么 $\triangle ABC$ 一定是 （　）

(A) 直角三角形　　(B) 等腰三角形

(C) 等腰直角三角形　　(D) 正三角形

8. 若不等式 $(-1)^n a<2+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 对于任意正整数 n 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 （　）

(A) $\left[-2,\dfrac{3}{2}\right)$　　(B) $\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)$　　(C) $\left[-3,\dfrac{3}{2}\right)$　　(D) $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$

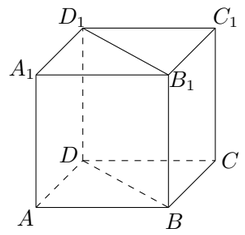
二、填空题

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2n^2-3}=$_____.

10. 椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的离心率是_____, 准线方程是_____.

11. 已知 $\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 那么 $\sin\theta$ 的值为_____, $\cos 2\theta$ 的值为_____.

12. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a, 将该正方体沿对角面 BB_1D_1D 切成两块, 再将这两块拼接成一个不是正方体的四棱柱, 那么所得四棱柱的全面积为_____.



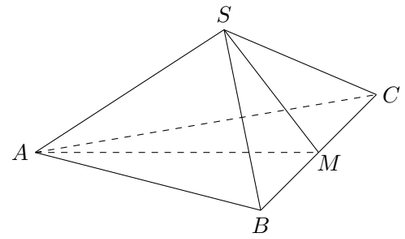
13. 从 0, 1 , 2, 3 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数, 可组成不同的一次函数共有_____个, 不同的二次函数共有_____个. (用数字作答)

14. 若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 设函数 $f(x)=\lg(2x-3)$ 的定义域为集合 M, 函数 $g(x)=\sqrt{(x-3)(x-1)}$ 的定义域为集合 N. 求:
(1) 集合 M, N;
(2) 集合 $M\cap N$, $M\cup N$.

16. 如图, 正三棱锥 $S-ABC$ 中, 底面边长是 3, 棱锥的侧面积等于底面积的 2 倍, M 是 BC 的中点. 求:
(1) $\dfrac{AM}{SM}$ 的值;
(2) 二面角 $S-BC-A$ 的大小;
(3) 正三棱锥 $S-ABC$ 的体积.



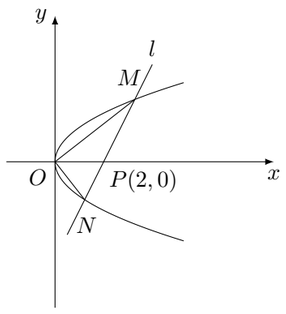
17. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1=2$, $a_4=54$; $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_1=2$, $b_1+b_2+b_3+b_4=a_1+a_2+a_3$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n 的公式;
(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(3) 设 $U_n=b_1+b_4+b_7+\cdots+b_{3n-2}$, 其中 $n=1,2,\cdots$, 求 U_{10} 的值.

18. 如图, O 为坐标原点, 过点 $P(2,0)$ 且斜率为 k 的直线 l 交抛物线 $y^2=2x$ 于 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$ 两点.

(1) 写出直线 l 的截距式方程;

(2) 求 x_1x_2 与 y_1y_2 的值;

(3) 求证: $OM\perp ON$.



19. 经过长期观测得到: 在交通繁忙的时段内, 某公路段汽车的车流量 y (千辆/小时) 与汽车的平均速度 v (千米/小时) 之间的函数关系为: $y=\dfrac{920v}{v^2+3v+1600}$ $(v>0)$.

(1) 在该时段内, 当汽车的平均速度 v 为多少时, 车流量最大? 最大车流量为多少? (精确到 0.1 千辆/小时)

(2) 若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时, 则汽车站的平均速度应在什么范围内?

20. 现有一组互不相同且从小到大排列的数据: $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$, 其中 $a_0=0$. 为提取反映数据间差异程度的某种指标, 今对其进行如下加工: 记 $T=a_0+a_1+\cdots+a_5$, $x_n=\dfrac{n}{5}$, $y_n=\dfrac{1}{T}(a_0+a_1+\cdots+a_n)$, 作函数 $y=f(x)$, 使其图象为逐点依次连接点 $P_n(x_n,y_n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 的折线.

(1) 求 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的值;

(2) 设 $P_{n-1}P_n$ 的斜率为 k_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$, 判断 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 的大小关系;

(3) 证明: $f(x_n)<x_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

2005 年普通高等学校春季招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 方程 $\lg x^2 - \lg(x+2) = 0$ 的解集是_____.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{1+2+\cdots+n} =$_____.

3. 若 $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, 且 $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan\dfrac{\alpha}{2} =$_____.

4. 函数 $f(x) = -x^2$ $(x \in (-\infty, -2])$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$_____.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C = 90°$, $AC = BC = 4$, 则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} =$_____.

6. 某班共有 40 名学生, 其中只有一对双胞胎, 若从中一次随机抽查三位学生的作业, 则这对双胞胎的作业同时被抽中的概率是_____. (结果用最简分数表示)

7. 双曲线 $9x^2 - 16y^2 = 1$ 的焦距是_____.

8. 若 $(x+2)^n = x^n + \cdots + ax^3 + bx^2 + cx + 2^n$ $(n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 3)$, 且 $a : b = 3 : 2$, 则 $n =$_____.

9. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n $(n \in \mathbf{N})$. 关于数列 $\{a_n\}$ 有下列三个命题:
① 若 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是等比数列, 则 $a_n = a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$;
② 若 $S_n = an^2 + bn$ $(a,\ b \in \mathbf{R})$, 则 $\{a_n\}$ 是等差数列;
③ 若 $S_n = 1 - (-1)^n$, 则 $\{a_n\}$ 是等比数列.
这些命题中, 真命题的序号是_____.

10. 若集合 $A = \{x \,|\, 3\cos 2\pi x = 3^x, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{y \,|\, y^2 = 1, y \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$_____.

11. 函数 $y = \sin x + \arcsin x$ 的值域是_____.

12. 已知函数 $f(x) = 2^x + \log_2 x$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 0.1n$ $(n \in \mathbf{N})$, 当 $|f(a_n) - 2005|$ 取得最小值时, $n =$_____.

二、选择题

13. 已知直线 l、m、n 及平面 α, 下列命题中的假命题是 (　)

(A) 若 $l \parallel m$, $m \parallel n$, 则 $l \parallel n$　　(B) 若 $l \perp \alpha$, $n \parallel \alpha$, 则 $l \perp n$

(C) 若 $l \perp m$, $m \parallel n$, 则 $l \perp n$　　(D) 若 $l \parallel \alpha$, $n \parallel \alpha$, 则 $l \parallel n$

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B} = \dfrac{c}{\cos C}$, 则 $\triangle ABC$ 是 (　)

(A) 直角三角形　　(B) 等边三角形

(C) 钝角三角形　　(D) 等腰直角三角形

15. 若 a、b、c 是常数, 则"$a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$"是"对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $ax^2 + bx + c > 0$"的 (　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

16. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 有下列三个命题:
① 若存在常数 M, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) \leqslant M$, 则 M 是函数 $f(x)$ 的最大值;
② 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 且 $x \neq x_0$, 有 $f(x) < f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值;
③ 若存在 $x_0 \in \mathrm{R}$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) \leqslant f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值.
这些命题中, 真命题的个数是 (　)

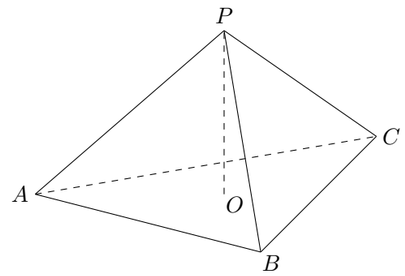
(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

三、解答题

17. 已知 z 是复数, $z + 2\mathrm{i}\dfrac{z}{2-\mathrm{i}}$ 均为实数 (i 为虚数单位), 且复数 $(z + a\mathrm{i})^2$ 在复平面上对应的点在第一象限, 求实数 a 的取值范围.

18. 已知 $\tan\alpha$ 是方程 $x^2 + 2x\sec\alpha + 1 = 0$ 的两个根中较小的根, 求 α 的值.

19. 已知正三棱锥 $P - ABC$ 的体积为 $72\sqrt{3}$, 侧面与底面所成的二面角的大小为 $60°$.
(1) 证明: $PA \perp BC$;
(2) 求底面中心 O 到侧面的距离.



20. 某市 2004 年底有住房面积 1200 万平方米, 计划从 2005 年起, 每年拆除 20 万平方米的旧住房. 假定该市每年新建住房面积是上年年底住房面积的 5%.

(1) 分别求 2005 年底和 2006 年底的住房面积;

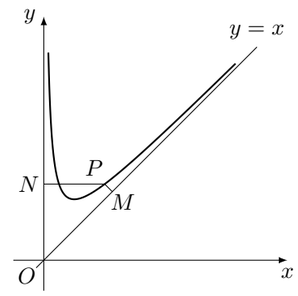
(2) 求 2024 年底的住房面积. (计算结果以万平方米为单位, 且精确到 0.01)

21. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且 $f(2)=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 设点 P 是函数图象上的任意一点, 过点 P 分别作直线 $y=x$ 和 y 轴的垂线, 垂足分别为 M、N.

(1) 求 a 的值;

(2) 问: $|PM|\cdot|PN|$ 是否为定值? 若是, 则求出该定值, 若不是, 则说明理由;

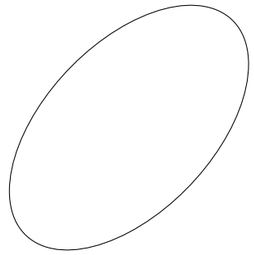
(3) 设 O 为坐标原点, 求四边形 $OMPN$ 面积的最小值.



22. (1) 求右焦点坐标是 $(2,0)$, 且经过点 $(-2,-\sqrt{2})$ 的椭圆的标准方程;

(2) 已知椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$. 设斜率为 k 的直线 l, 交椭圆 C 于 A、B 两点, AB 的中点为 M. 证明: 当直线 l 平行移动时, 动点 M 在一条过原点的定直线上;

(3) 利用 (2) 所揭示的椭圆几何性质, 用作图方法找出下面给定椭圆的中心, 简要写出作图步骤, 并在图中标出椭圆的中心.



2005 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 设合集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x|x>1\}$, $P=\{x|x^2>1\}$, 则下列关系中正确的是 （ ）

(A) $M=P$　　(B) $P\subsetneqq M$

(C) $M\subsetneqq P$　　(D) $\complement_U M\cap P=\varnothing$

2. “$m=\dfrac{1}{2}$”是“直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的 （ ）

(A) 充分必要条件　　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

3. 若 $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, 且 $\vec{c}\perp\vec{a}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 （ ）

(A) 30°　　(B) 60°　　(C) 120°　　(D) 150°

4. 从原点向圆 $x^2+y^2-12y+27=0$ 作两条切线, 则该圆夹在两条切线间的劣弧长为 （ ）

(A) π　　(B) 2π　　(C) 4π　　(D) 6π

5. 对任意的锐角 α, β, 下列不等关系中正确的是 （ ）

(A) $\sin(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$　　(B) $\sin(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$

(C) $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$　　(D) $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$

6. 在正四面体 $P-ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点, 下面四个结论中不成立的是 （ ）

(A) $BC\parallel$ 平面 PDF　　(B) $DF\perp$ 平面 PAE

(C) 平面 $PDF\perp$ 平面 ABC　　(D) 平面 $PAE\perp$ 平面 ABC

7. 北京《财富》全球论坛期间, 某高校有 14 名志愿者参加接待工作, 若每天早、中、晚三班, 每班 4 人, 每人每天最多值一班, 则开幕式当天不同的排班种数为 （ ）

(A) $\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{4}$　　(B) $\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{A}_{12}^{4}\mathrm{A}_{8}^{4}$

(C) $\dfrac{\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{4}}{\mathrm{A}_{3}^{3}}$　　(D) $\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{4}\mathrm{A}_{3}^{3}$

8. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\cos x}$ （ ）

(A) 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上递增, 在 $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上递减

(B) 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上递增, 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上递减

(C) 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上递增, 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上递减

(D) 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},\pi\right]$ 上递增, 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},2\pi\right]$ 上递减

二、填空题

9. 若 $z_1=a+2\mathrm{i}$, $z_2=3-4\mathrm{i}$, 且 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为_____.

10. 已知 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=2$, 则 $\tan\alpha$ 的值为_____, $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值为_____.

11. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是_____. (用数字作答)

12. 过原点作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线, 则切点的坐标为_____, 切线的斜率为_____.

13. 对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$, 有如下结论:

① $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$;

② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;

③ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$;

④ $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

当 $f(x)=\lg x$ 时, 上述结论中正确结论的序号是_____.

14. 已知 n 次式项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

如果在一种算法中, 计算 x_0^k $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算 (6 次乘法, 3 次加法), 那么计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要_____次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法: $P_0(x)=a_0$, $P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$. 利用该算法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算, 计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要_____次运算.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调减区间;

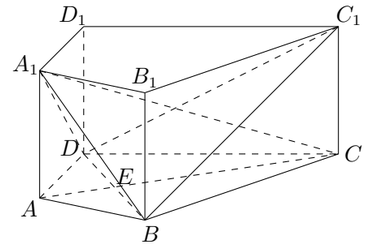
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 20, 求它在该区间上的最小值.

16. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=2$, $DC=2\sqrt{3}$, $AA_1=\sqrt{3}$, $AD\perp DC$, $AC\perp BD$, 垂足为 E.

(1) 求证: $BD\perp A_1C$;

(2) 求二面角 A_1-BD-C_1 的大小;

(3) 求异面直线 AD 与 BC_1 所成角的大小.



17. 甲、乙两人各进行 3 次射击, 甲每次击中目标的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 乙每次击中目标的概率为 $\dfrac{2}{3}$.

(1) 记甲击中目标的次数为 ξ, 求 ξ 的概率分布及数学期望 $E\xi$;

(2) 求乙至多击中目标 2 次的概率;

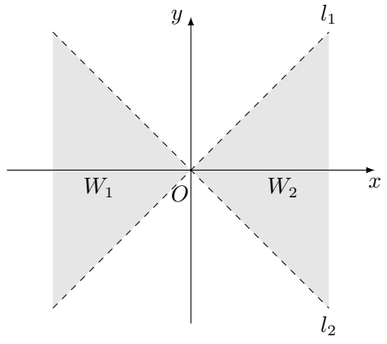
(3) 求甲恰好比乙多击中目标 2 次的概率.

18. 如图, 直线 $l_1: y=kx$ $(k>0)$ 与直线 $l_2: y=-kx$ 之间的阴影区域 (不含边界) 记为 W, 其左半部分记为 W_1, 右半部分记为 W_2.

(1) 分别用不等式组表示 W_1 和 W_2;

(2) 若区域 W 中的动点 $P(x,y)$ 到 l_1, l_2 的距离之积等于 d^2, 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(3) 设不过原点 O 的直线 l 与 (2) 中的曲线 C 相交于 M_1, M_2 两点, 且与 l_1, l_2 分别交于 M_3, M_4 两点. 求证: $\triangle OM_1M_2$ 的重心与 $\triangle OM_3M_4$ 的重心重合.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=a\neq\dfrac{1}{4}$, 且 $a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_n, & n \text{ 为偶数}\\ a_n+\dfrac{1}{4}, & n \text{ 为奇数}\end{cases}$. 记 $b_n=a_{2n-1}-\dfrac{1}{4}$, $n=1, 2, 3, \cdots$.

(1) 求 a_2, a_3;

(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并证明你的结论;

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$.

20. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数, 若存在 $x^*\in(0,1)$, 使得 $f(x)$ 在 $[0,x^*]$ 上单调递增, 在 $[x^*,1]$ 上单调递减, 则称 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的单峰函数, x^* 为峰点, 包含峰点的区间为含峰区间. 对任意的 $[0,1]$ 上的单峰函数 $f(x)$, 下面研究缩短其含峰区间长度的方法.

(1) 证明: 对任意的 x_1, $x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, 则 $(0,x_2)$ 为含峰区间; 若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 则 $(x_1,1)$ 为含峰区间;

(2) 对给定的 r $(0<r<0.5)$, 证明: 存在 x_1, $x_2\in(0,1)$, 满足 $x_2-x_1\geqslant 2r$, 使得由 (1) 所确定的含峰区间的长度不大于 $0.5+r$;

(3) 选取 x_1, $x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, 由 (1) 可确定含峰区间为 $(0,x_2)$ 或 $(x_1,1)$, 在所得的含峰区间内选取 x_3, 由 x_3 与 x_1 或 x_3 与 x_2 类似地可确定一个新的含峰区间, 在第一次确定的含峰区间为 $(0,x_2)$ 的情况下, 试确定 x_1, x_2, x_3 的值, 满足两两之差的绝地值不小于 0.02, 且使得新的含峰区间的长度缩短到 0.34.

注: 区间长度等于区间的右端点与左端点之差.

2005 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 设合集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x|x>1\}$, $P=\{x|x^2>1\}$, 则下列关系中正确的是 （ ）

(A) $M=P$　　(B) $P\subsetneqq M$

(C) $M\subsetneqq P$　　(D) $M\cap P=\mathbf{R}$

2. 为了得到函数 $y=2^{x-3}-1$ 的图象, 只需把函数 $y=2^x$ 的图象上所有的点 （ ）

(A) 向右科移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

(B) 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

(C) 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

(D) 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

3. “$m=\dfrac{1}{2}$”是“直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的 （ ）

(A) 充分必要条件　　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

4. 若 $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, 且 $\vec{c}\perp\vec{a}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 （ ）

(A) 30°　　(B) 60°　　(C) 120°　　(D) 150°

5. 从原点向圆 $x^2+y^2-12y+27=0$ 作两条切线, 则这两条切线的夹角的大小为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

6. 对任意的锐角 α, β, 下列不等关系中正确的是 （ ）

(A) $\sin(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$　　(B) $\sin(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$

(C) $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$　　(D) $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$

7. 在正四面体 $P-ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点, 下面四个结论中不成立的是 （ ）

(A) $BC\parallel$ 平面 PDF　　(B) $DF\perp$ 平面 PAE

(C) 平面 $PDF\perp$ 平面 ABC　　(D) 平面 $PAE\perp$ 平面 ABC

8. 五个工程队承建某项工程的 5 个不同的子项目, 每个工程队承建 1 项, 其中甲工程队不能承建 1 号子项目, 则不同的承建方案共有 （ ）

(A) $C_4^1C_4^4$ 种　　(B) $C_4^1A_4^4$ 种　　(C) C_4^4 种　　(D) A_4^4 种

二、填空题

9. 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程是_____, 焦点坐标是_____.

10. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是_____. (用数字作答)

11. 函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$ 的定义域为_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=\sqrt{3}$, $\angle A=45°$, $\angle C=75°$, 则 BC 的长为_____.

13. 对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$, 有如下结论:

① $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$;

② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;

③ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$;

④ $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

当 $f(x)=\lg x$ 时, 上述结论中正确结论的序号是_____.

14. 已知 n 次式项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

如果在一种算法中, 计算 x_0^k $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算 (6 次乘法, 3 次加法), 那么计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要_____次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法: $P_0(x)=a_0$, $P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$. 利用该算法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算, 计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要_____次运算.

三、解答题

15. 已知 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=2$, 求:

(1) $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值;

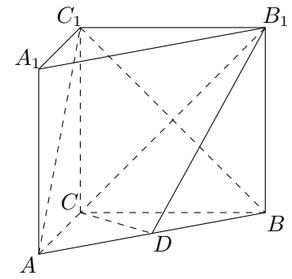
(2) $\dfrac{6\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha-2\cos\alpha}$ 的值.

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=3$, $BC=4$, $AB=5$, $AA_1=4$, 点 D 是 AB 的中点.

(1) 求证: $AC\perp BC_1$;

(2) 求证: $AC_1\parallel$ 平面 CDB_1;

(3) 求异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值.



17. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}S_n$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$, 求:

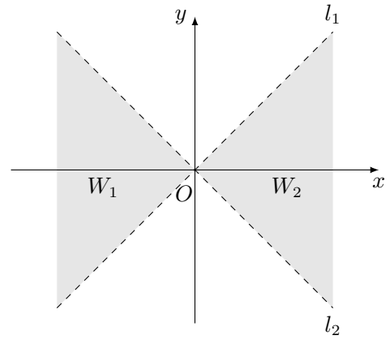
(1) a_2, a_3, a_4 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$ 的值.

18. 甲、乙两人各进行 3 次射击, 甲每次击中目标的概率为 $\frac{1}{2}$, 乙每次击中目标的概率为 $\frac{2}{3}$.
(1) 甲恰好击中目标 2 次的概率;
(2) 乙至少击中目标 2 次的概率;
(3) 乙恰好比甲多击中目标 2 次的概率.

19. 已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调减区间;
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 20, 求它在该区间上的最小值.

20. 如图, 直线 $l_1: y=kx$ $(k>0)$ 与直线 $l_2: y=-kx$ 之间的阴影区域 (不含边界) 记为 W, 其左半部分记为 W_1, 右半部分记为 W_2.
(1) 分别用不等式组表示 W_1 和 W_2;
(2) 若区域 W 中的动点 $P(x,y)$ 到 l_1, l_2 的距离之积等于 d^2, 求点 P 的轨迹 C 的方程;
(3) 设不过原点 O 的直线 l 与 (2) 中的曲线 C 相交于 M_1, M_2 两点, 且与 l_1, l_2 分别交于 M_3, M_4 两点. 求证: $\triangle OM_1M_2$ 的重心与 $\triangle OM_3M_4$ 的重心重合.



2005 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 圆 $(x+2)^2+y^2=5$ 关于原点 $(0,0)$ 对称的圆的方程为 （ ）

(A) $(x-2)^2+y^2=5$　(B) $x^2+(y-2)^2=5$

(C) $(x+2)^2+(y+2)^2=5$　(D) $x^2+(y+2)^2=5$

2. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2005}=$ （ ）

(A) i　(B) $-\mathrm{i}$　(C) 2^{2005}　(D) -2^{2005}

3. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数, 且 $f(2)=0$, 则使得 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,2)$　(B) $(2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　(D) $(-2,2)$

4. 已知 $A(3,1)$, $B(6,1)$, $C(4,3)$, D 为线段 BC 的中点, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 的夹角为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{4}{5}$　(B) $\arccos\dfrac{4}{5}$

(C) $\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$　(D) $-\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$

5. 若 x, y 是正数, 则 $\left(x+\dfrac{1}{2y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值是 （ ）

(A) 3　(B) $\dfrac{7}{2}$　(C) 4　(D) $\dfrac{9}{2}$

6. 已知 α、β 均为锐角, 若 $p:\sin\alpha<\sin(\alpha+\beta)$, $q:\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 对于不重合的两个平面 α 与 β, 给定下列条件:
① 存在平面 γ, 使得 α、β 都垂直于 γ;
② 存在平面 γ, 使得 α、β 都平行于 γ;
③ α 内有不共线的三点到 β 的距离相等;
④ 存在异面直线 l、m, 使得 $l\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$.
其中, 可以判定 α 与 β 平行的条件有 （ ）

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

8. 若 $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式中含 $\dfrac{1}{x^2}$ 项的系数与含 $\dfrac{1}{x^4}$ 项的系数之比为 -5, 则 n 等于 （ ）

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10

9. 若动点 (x,y) 在曲线 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 上变化, 则 x^2+2y 的最大值为 （ ）

(A) $\begin{cases}\dfrac{b^2}{4}+4, & 0<b<4,\\ 2b, & b\geqslant 4\end{cases}$　(B) $\begin{cases}\dfrac{b^2}{4}+4, & 0<b<2,\\ 2b, & b\geqslant 2\end{cases}$

(C) $\dfrac{b^2}{4}+4$　(D) $2b$

10. 在体积为 1 的三棱锥 $A-BCD$ 侧棱 AB、AC、AD 上分别取点 E、F、G, 使 $AE:EB=AF:FC=AG:GD=2:1$, 记 O 为三平面 BCG、CDE、DBF 的交点, 则三棱锥 $O-BCD$ 的体积等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{9}$　(B) $\dfrac{1}{8}$　(C) $\dfrac{1}{7}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

二、填空题

11. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-x-6<0\}$, 集合 $B=\{x\in\mathbf{R}||x-2|<2\}$, 则 $A\cap B=$_____.

12. 曲线 $y=x^3$ 在点 (a,a^3) $(a\neq 0)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=a$ 所围成的三角形的面积为 $\dfrac{1}{6}$, 则 $a=$_____.

13. 已知 α、β 均为锐角, 且 $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$, 则 $\tan\alpha=$_____.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{3n}-3^{2n+1}}{2^{3n}+3^{2n}}=$_____.

15. 某轻轨列车有 4 节车厢, 现有 6 位乘客准备乘坐, 设每一位乘客进入每节车厢是等可能的, 则这 6 位乘客进入各节车厢的人数恰好为 0, 1, 2, 3 的概率为_____.

16. 连接抛物线上任意四点组成的四边形可能是_____. (填写所有正确选项的序号)
① 菱形; ② 有 3 条边相等的四边形; ③ 梯形; ④ 平行四边形; ⑤ 有一组对角相等的四边形.

三、解答题

17. 若函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}-a\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(\pi-\dfrac{x}{2}\right)$ 的最大值为 2, 试确定常数 a 的值.

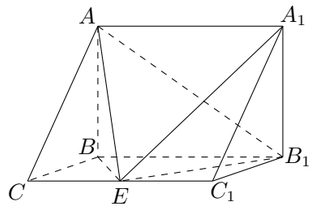
18. 在一次购物抽奖活动中, 假设某 10 张券中有一等奖券 1 张, 可获价值 50 元的奖品; 有二等奖券 3 张, 每张可获价值 10 元的奖品; 其余 6 张没有奖, 某顾客从此 10 张券中任抽 2 张, 求:
(1) 该顾客中奖的概率;
(2) 该顾客获得的奖品总价值 ξ (元) 的概率分布列和期望 $E\xi$.

19. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 讨论函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x^2+ax+a+1)$ 的极值点的个数.

20. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp$ 侧面 BB_1C_1C, E 为棱 CC_1 上异于 C、C_1 的一点, $EA\perp EB_1$, 已知 $AB=\sqrt{2}$, $BB_1=2$, $BC=1$, $\angle BCC_1=\dfrac{\pi}{3}$, 求:

(1) 异面直线 AB 与 EB_1 的距离;

(2) 二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角的正切值.



21. 已知椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 双曲线 C_2 的左、右焦点分别为 C_1 的左、右顶点, 而 C_2 的左、右顶点分别是 C_1 的左、右焦点.

(1) 求双曲线 C_2 的方程;

(2) 若直线 $l:y=kx+\sqrt{2}$ 与椭圆 C_1 及双曲线 C_2 都恒有两个不同的交点, 且 l 与 C_2 的两个交点 A 和 B 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<6$ (其中 O 为原点), 求 k 的取值范围.

22. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n^2+n}\right)a_n+\dfrac{1}{2^n}$ $(n\geqslant 1)$.

(1) 用数学归纳法证明: $a_n\geqslant 2$ $(n\geqslant 2)$;

(2) 已知不等式 $\ln(1+x)<x$ 对 $x>0$ 成立, 证明:$a_n<\mathrm{e}^2$ $(n\geqslant 1)$, 其中无理数 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$.

2005 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 圆 $(x+2)^2+y^2=5$ 关于原点 $(0,0)$ 对称的圆的方程为 （ ）

(A) $(x-2)^2+y^2=5$　(B) $x^2+(y-2)^2=5$

(C) $(x+2)^2+(y+2)^2=5$　(D) $x^2+(y+2)^2=5$

2. $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=$ （ ）

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数, 且 $f(2)=0$, 则使得 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,2)$　(B) $(2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　(D) $(-2,2)$

4. 设向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-1)$, 则 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 等于 （ ）

(A) $(1,1)$　(B) $(-4,-4)$　(C) -4　(D) $(-2,-2)$

5. 不等式组 $\begin{cases}|x-2|<2\\ \log_2(x^2-1)>1\end{cases}$ 的解集为 （ ）

(A) $(0,\sqrt{3})$　(B) $(\sqrt{3},2)$　(C) $(\sqrt{3},4)$　(D) $(2,4)$

6. 已知 α、β 均为锐角, 若 $p:\sin\alpha<\sin(\alpha+\beta)$, $q:\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 对于不重合的两个平面 α 与 β, 给定下列条件:
① 存在平面 γ, 使得 α、β 都垂直于 γ;
② 存在平面 γ, 使得 α、β 都平行于 γ;
③ 存在直线 $l\subset\alpha$, 直线 $m\subset\alpha$, 使得 $l\parallel m$;
④ 存在异面直线 l、m, 使得 $l\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$.
其中, 可以判定 α 与 β 平行的条件有 （ ）

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

8. 若 $(1+2x)^n$ 展开式中含 x^3 项的系数等于含 x 项的系数的 8 倍, 则 n 等于 （ ）

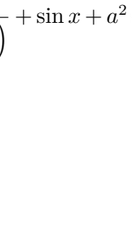
(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 11

9. 若动点 (x,y) 在曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 上变化, 则 x^2+2y 的最大值为 （ ）

(A) $\begin{cases}\frac{b^2}{4}+4, & 0<b<4,\\ 2b, & b\geqslant 4\end{cases}$　(B) $\begin{cases}\frac{b^2}{4}+4, & 0<b<2,\\ 2b, & b\geqslant 2\end{cases}$

(C) $\frac{b^2}{4}+4$　(D) $2b$

10. 有一塔形几何体由若干个正方体构成, 构成方式如图所示, 上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各连接中点, 已知最底层正方体的棱长为 2, 且该塔形的表面积 (含最底层正方体的底面面积) 超过 39, 则该塔形中正方体的个数至少是 （ ）



(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

二、填空题

11. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-4x+3<0\}$, 集合 $B=\{x\in\mathbf{R}|(x-2)(x-5)<0\}$, 则 $A\cap B=$_____.

12. 曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积为_____.

13. 已知 α、β 均为锐角, 且 $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$, 则 $\tan\alpha=$_____.

14. 若 $x^2+y^2=4$, 则 $x-y$ 的最大值是_____.

15. 若 10 把钥匙中只有 2 把能打开某锁, 则从中任取 2 把能将该锁打开的概率为_____.

16. 已知 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$, B 是圆 $F:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=4$ (F 为圆心) 上一动点, 线段 AB 的垂直平分线交 BF 于 P, 则动点 P 的轨迹方程为_____.

三、解答题

17. 若函数 $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sin x+a^2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值为 $\sqrt{2}+3$, 试确定常数 a 的值.

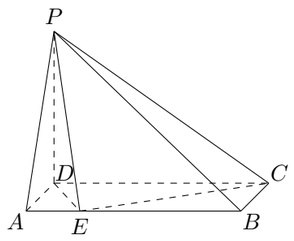
18. 加工某种零件需经过三道工序, 设第一、二、三道工序的合格率分别为 $\frac{9}{10}$、$\frac{8}{9}$、$\frac{7}{8}$, 且各道工序互不影响.
(1) 求该种零件的合格率;
(2) 从该种零件中任取 3 件, 求恰好取到一件合格品的概率和至少取到一件合格品的概率.

19. 设函数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax+8$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.
(1) 若 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极值, 求常数 a 的值;
(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数, 求 a 的取值范围.

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, E 是 AB 上一点, $PE\perp EC$. 已知 $PD=\sqrt{2}$, $CD=2$, $AE=\dfrac{1}{2}$, 求:

(1) 异面直线 PD 与 EC 的距离;

(2) 二面角 $E-PC-D$ 的大小.



21. 已知中心在原点的双曲线 C 的右焦点为 $(2,0)$, 右顶点为 $(\sqrt{3},0)$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若直线 $l:y=kx+\sqrt{2}$ 与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B, 且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$ (其中 O 为原点). 求 k 的取值范围.

22. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且 $8a_{n+1}a_n-16a_{n+1}+2a_n+5=0$ $(n\geqslant 1)$. 记 $b_n=\dfrac{1}{a_n-\dfrac{1}{2}}$ $(n\geqslant 1)$.

(1) 求 b_1、b_2、b_3、b_4 的值;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

2005 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $z=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ 的共轭复数是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(B) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(C) $1-\mathrm{i}$　(D) $1+\mathrm{i}$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7+a_9=16$, $a_4=1$, 则 a_{12} 的值是 （ ）

(A) 15　(B) 30　(C) 31　(D) 64

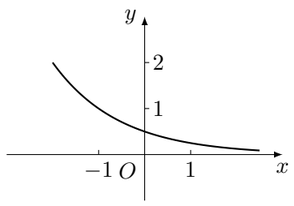
3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\overrightarrow{AB}=(k,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3)$, 则 k 的值是 （ ）

(A) 5　(B) -5　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) $-\dfrac{3}{2}$

4. 已知直线 m、n 与平面 α, β, 给出下列三个命题:
① 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$;
② 若 $m\parallel\alpha$, $n\perp\alpha$, 则 $n\perp m$;
③ 若 $m\perp\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$.
其中真命题的个数是 （ ）

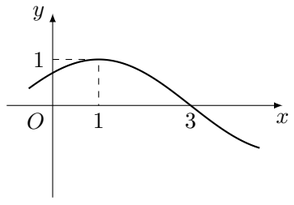
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

5. 若函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象如图, 其中 a、b 为常数, 则下列结论正确的是 （ ）



(A) $a>1$, $b<0$　(B) $a>1$, $b>0$
(C) $0<a<1$, $b>0$　(D) $0<a<1$, $b<0$

6. 若函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ $(x\in\mathbf{R},\ \omega>0,\ 0\leqslant\varphi<2\pi)$ 的部分图象如图, 则 （ ）

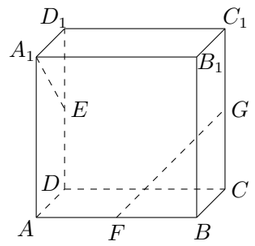


(A) $\omega=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\omega=\dfrac{\pi}{3}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$
(C) $\omega=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\omega=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi=\dfrac{5\pi}{4}$

7. 已知 $p:|2x-3|<1$, $q:x(x-3)<0$, 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

8. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB=2$, $AD=1$, 点 E、F、G 分别是 DD_1、AB、CC_1 的中点, 则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是 （ ）



(A) $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

9. 从 6 人中选 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览, 要求每个城市有一人游览, 每人只游览一个城市, 且这 6 人中甲、乙两人不去巴黎游览, 则不同的选择方案共有 （ ）

(A) 300 种　(B) 240 种　(C) 144 种　(D) 96 种

10. 已知 F_1、F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两焦点, 以线段 F_1F_2 为边作正三角形 MF_1F_2, 若边 MF_1 的中点在双曲线上, 则双曲线的离心率是 （ ）

(A) $4+2\sqrt{3}$　(B) $\sqrt{3}-1$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　(D) $\sqrt{3}+1$

11. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, $a^2+2b^2=6$, 则 $a+b$ 的最小值是 （ ）

(A) $-2\sqrt{2}$　(B) $-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$　(C) -3　(D) $-\dfrac{7}{2}$

12. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数, 且 $f(2)=0$, 则方程在 $f(x)=0$ 在区间 $(0,6)$ 内解的个数的最小值是 （ ）

(A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) 7

二、填空题

13. $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项是_____. (用数字作答)

14. 非负实数 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\leqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则 $x+3y$ 的最大值为_____.

15. 若常数 b 满足 $|b|>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}{b^n}=$_____.

16. 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题:
若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于_____对称, 则函数 $g(x)=$_____.
注: 填上你认为可以成为真命题的一件情形即可, 不必考虑所有可能的情形.

三、解答题

17. 已知 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$.
(1) 求 $\sin x-\cos x$ 的值;
(2) 求 $\dfrac{3\sin^2\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}}{\tan x+\cot x}$ 的值.

18. 甲、乙两人在罚球线投球命中的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 与 $\dfrac{2}{5}$, 投中得 1 分, 投不中得 0 分.
(1) 甲、乙两人在罚球线各投球一次, 求两人得分之和 ξ 的数学期望;
(2) 甲、乙两人在罚球线各投球二次, 求这四次投球中至少一次命中的概率;

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax-6}{x^2+b}$ 的图象在点 $M(-1,f(x))$ 处的切线方程为 $x+2y+5=0$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式;

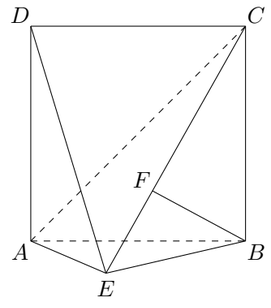
(2) 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

20. 如图, 直二面角 $D-AB-E$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $AE=EB$, F 为 CE 上的点, 且 $BF\perp$ 平面 ACE.

(1) 求证 $AE\perp$ 平面 BCE;

(2) 求二面角 $B-AC-E$ 的大小;

(3) 求点 D 到平面 ACE 的距离.



21. 已知方向向量为 $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$ 的直线 l 过点 $(0,-2\sqrt{3})$ 和椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦点, 且椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 是否存在过点 $E(-2,0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M、N, 满足 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{4}{3}\sqrt{6}\cot\angle MON\neq 0$ (O 为原点). 若存在, 求直线 m 的方程; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$, $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$. 我们知道当 a 取不同的值时, 得到不同的数列, 如当 $a=1$ 时, 得到无穷数列: $1,2,\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3},\cdots$; 当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时, 得到有穷数列: $-\dfrac{1}{2},-1,0$.

(1) 求当 a 为何值时 $a_4=0$;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=-1$, $b_{n+1}=\dfrac{1}{b_n-1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$, 求证 a 取数列 $\{b_n\}$ 中的任一个数, 都可以得到一个有穷数列 $\{a_n\}$;

(3) 若 $\dfrac{3}{2}<a_n<2$ $(n\geqslant 4)$, 求 a 的取值范围.

2005 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x||x-1|\leqslant 1, x\in\mathbf{R}\}$, 集合 $Q=\{x|x\in\mathbf{N}\}$, 则 $P\cap Q$ 等于 （ ）

(A) P　　(B) Q　　(C) $\{1,2\}$　　(D) $\{0,1,2\}$

2. 不等式 $\dfrac{2x-1}{3x+1}>0$ 的解集是 （ ）

(A) $\left\{x\left|x<-\dfrac{1}{3}\text{ 或 }x>\dfrac{1}{2}\right.\right\}$　　(B) $\left\{x\left|-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}\right.\right\}$

(C) $\left\{x\left|x>\dfrac{1}{2}\right.\right\}$　　(D) $\left\{x\left|x>-\dfrac{1}{3}\right.\right\}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7+a_9=16$, $a_4=1$, 则 a_{12} 的值是 （ ）

(A) 15　　(B) 30　　(C) 31　　(D) 64

4. 函数 $y=\cos 2x$ 在下列哪个区间上是减函数 （ ）

(A) $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$　　(C) $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　　(D) $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$

5. 下列结论正确的是 （ ）

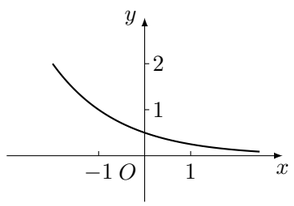
(A) 当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时, $\lg x+\dfrac{1}{\lg x}\geqslant 2$

(B) 当 $x>0$ 时, $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geqslant 2$

(C) 当 $x\geqslant 2$ 时, $x+\dfrac{1}{x}$ 的最小值为 2

(D) 当 $0<x\leqslant 2$ 时, $x-\dfrac{1}{x}$ 无最大值

6. 若函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象如图, 其中 a、b 为常数, 则下列结论正确的是 （ ）



(A) $a>1, b<0$　　(B) $a>1, b>0$

(C) $0<a<1, b>0$　　(D) $0<a<1, b<0$

7. 已知直线 m、n 与平面 α, β, 给出下列三个命题:
① 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$;
② 若 $m\parallel\alpha$, $n\perp\alpha$, 则 $n\perp m$;
③ 若 $m\perp\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$.
其中真命题的个数是 （ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

8. 已知 $p: a\neq 0$, $q: ab\neq 0$, 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

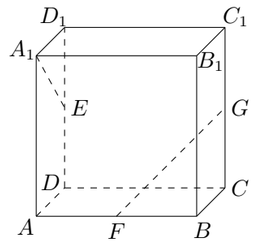
9. 已知定点 A、B 且 $|AB|=4$, 动点 P 满足 $|PA|-|PB|=3$, 则 $|PA|$ 的最小值是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) $\dfrac{7}{2}$　　(D) 5

10. 从 6 人中选 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览, 要求每个城市有一人游览, 每人只游览一个城市, 且这 6 人中甲、乙两人不去巴黎游览, 则不同的选择方案共有 （ ）

(A) 300 种　　(B) 240 种　　(C) 144 种　　(D) 96 种

11. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB=2$, $AD=1$, 点 E、F、G 分别是 DD_1、AB、CC_1 的中点, 则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是 （ ）



(A) $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

12. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的偶函数, 且 $f(2)=0$, 则方程在 $f(x)=0$ 在区间 $(0,6)$ 内解的个数的最小值是 （ ）

(A) 5　　(B) 4　　(C) 3　　(D) 2

二、填空题

13. $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项是_____. (用数字作答)

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\overrightarrow{AB}=(k,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3)$, 则 k 的值是_____.

15. 非负实数 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\leqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则 $x+3y$ 的最大值为_____.

16. 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题:
若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于_____对称, 则函数 $g(x)=$_____.
注: 填上你认为可以成为真命题的一件情形即可, 不必考虑所有可能的情形.

三、解答题

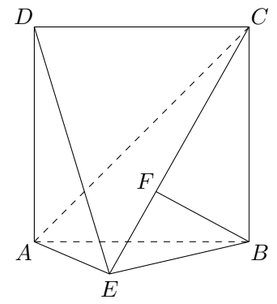
17. 已知 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$.
(1) 求 $\sin x-\cos x$ 的值;
(2) 求 $\dfrac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}$ 的值.

18. 甲、乙两人在罚球线投球命中的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 与 $\dfrac{2}{5}$, 投中得 1 分, 投不中得 0 分.
(1) 甲、乙两人在罚球线各投球一次, 求两人得分之和 ξ 的数学期望;
(2) 甲、乙两人在罚球线各投球二次, 求这四次投球中至少一次命中的概率.

19. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 且 a_1, a_3, a_2 成等差数列.
(1) 求 q 的值;
(2) 设 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, q 为公差的等差数列, 其前 n 项和为 S_n, 当 $n \geqslant 2$ 时, 比较 S_n 与 b_n 的大小, 并说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + ax + d$ 的图象过点 $P(0,2)$, 且在点 $M(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $6x - y + 7 = 0$.
(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;
(2) 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间.

21. 如图, 直二面角 $D - AB - E$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $AE = EB$, F 为 CE 上的点, 且 $BF \perp$ 平面 ACE.
(1) 求证 $AE \perp$ 平面 BCE;
(2) 求二面角 $B - AC - E$ 的大小;
(3) 求点 D 到平面 ACE 的距离.



22. 已知方向向量为 $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$ 的直线 l 过点 $(0, -2\sqrt{3})$ 和椭圆 C : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的焦点, 且椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 是否存在过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M、N, 满足 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \dfrac{4}{3}\sqrt{6}\cot\angle MON \neq 0$ (O 为原点). 若存在, 求直线 m 的方程; 若不存在, 请说明理由.

2005 年普通高等学校招生考试（广东卷）

数学试卷

一、选择题

1. 若集合 $M=\{x||x|\leqslant 2\}$, $N=\{x|x^2-3x=0\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $\{3\}$　(B) $\{0\}$　(C) $\{0,2\}$　(D) $\{0,3\}$

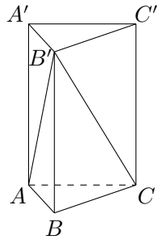
2. 若 $(a-2\mathrm{i})\mathrm{i}=b-\mathrm{i}$, 其中 a、$b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则 $a^2+b^2=$ （　）

(A) 0　(B) 2　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 5

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}=$ （　）

(A) $-\dfrac{1}{6}$　(B) 0　(C) $\dfrac{1}{6}$　(D) $\dfrac{1}{3}$

4. 已知高为 3 的直棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的底面是边长为 1 的正三角形 (如图所示), 则三棱锥 $B'-ABC$ 的体积为 （　）



(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

5. 若焦点在 x 轴上的椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 则 $m=$ （　）

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{8}{3}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

6. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 是减函数的区间为 （　）

(A) $(2,+\infty)$　(B) $(-\infty,2)$　(C) $(-\infty,0)$　(D) $(0,2)$

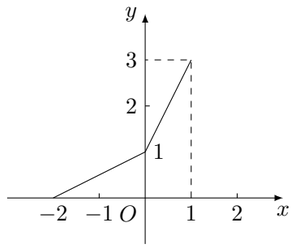
7. 给出下列关于互不相同的直线 m、l、n 和平面 α、β 的四个命题:
① 若 $m\subset\alpha$, $l\cap\alpha=A$, $A\notin m$, 则 l 与 m 不共面;
② 若 m、l 是异面直线, $l\parallel\alpha$, $m\parallel\alpha$, 且 $n\perp l$, $n\perp m$, 则 $n\perp\alpha$;
③ 若 $l\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\parallel m$;
④ 若 $l\subset\alpha$, $m\subset\alpha$, $l\cap m=A$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$.
其中为假命题的是 （　）

(A) ①　(B) ②　(C) ③　(D) ④

8. 先后抛掷两枚均匀的正方体骰子 (它们的六个面分别标有点数 1、2、3、4、5、6), 骰子朝上的面的点数分别为 X、Y, 则 $\log_{2X}Y=1$ 的概率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{5}{36}$　(C) $\dfrac{1}{12}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

9. 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 现将 $y=g(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 2 个单位, 再沿 y 轴向上平移 1 个单位, 所得的图象是由两条线段组成的折线 (如图所示), 则函数 $f(x)$ 的表达式为 （　）



(A) $f(x)=\begin{cases}2x+2, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{2}+2, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$　(B) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{2}-2, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ \dfrac{x}{2}+1, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$　(D) $f(x)=\begin{cases}2x-6, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ \dfrac{x}{2}-3, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$

10. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_2=\dfrac{x_1}{2}$, $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$, $n=3,4,\cdots$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, 则 $x_1=$ （　）

(A) $\dfrac{3}{2}$　(B) 3　(C) 4　(D) 5

二、填空题

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$ 的定义域是_____.

12. 已知向量 $\vec{a}=(2,3)$, $\vec{b}=(x,6)$, 且 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 则 $x=$_____.

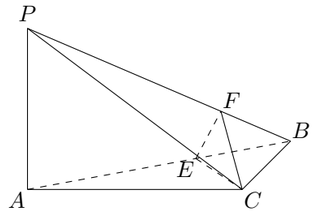
13. 已知 $(x\cos\theta+1)^5$ 的展开式中 x^2 的系数与 $\left(x+\dfrac{5}{4}\right)^4$ 的展开式中 x^3 的系数相等, 则 $\cos\theta=$_____.

14. 设平面内有 n 条直线 $(n\geqslant 3)$, 其中有且仅有两条直线互相平行, 任意三条直线不过同一点. 若用 $f(n)$ 表示这 n 条直线交点的个数, 则 $f(4)=$_____; 当 $n>4$ 时, $f(n)=$_____. (用 n 表示)

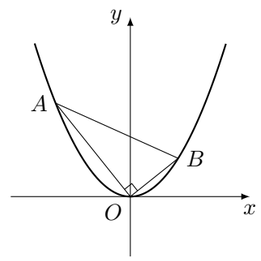
三、解答题

15. 化简 $f(x)=\cos\left(\dfrac{6k+1}{3}\pi+2x\right)+\cos\left(\dfrac{6k-1}{3}\pi-2x\right)+2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)$ $(x\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{Z})$, 并求函数 $f(x)$ 的值域和最小正周期.

16. 如图所示, 在四面体 $P-ABC$ 中, 已知 $PA=BC=6$, $PC=AB=10$, $AC=8$, $PB=2\sqrt{34}$. F 是线段 PB 上一点, $CF=\dfrac{15}{17}\sqrt{34}$, 点 E 在线段 AB 上, 且 $EF\perp PB$.
(1) 证明: $PB\perp$ 平面 CEF;
(2) 求二面角 $B-CE-F$ 的大小.



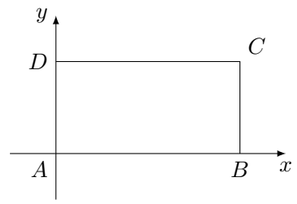
17. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y=x^2$ 上异于坐标原点 O 的两不同动点 A、B 满足 $AO\perp BO$ (如图所示).
(1) 求 $\triangle AOB$ 的重心 G (即三角形三条中线的交点) 的轨迹方程;
(2) $\triangle AOB$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 请求出最小值; 若不存在, 请说明理由.



18. 箱中装有大小相同的黄、白两种颜色的乒乓球, 黄、白乒乓球的数量比为 $s:t$. 现从箱中每次任意取出一个球, 若取出的是黄球则结束, 若取出的是白球, 则将其放回箱中, 并继续从箱中任意取出一个球, 但取球的次数最多不超过 n 次, 以 ξ 表示取球结束时已取到白球的次数.
(1) 求 ξ 的分布列;
(2) 求 ξ 的数学期望.

19. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$, $f(7-x)=f(7+x)$, 且在闭区间 $[0,7]$ 上, 只有 $f(1)=f(3)=0$.
(1) 试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性;
(2) 试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2005,2005]$ 上的根的个数, 并证明你的结论.

20. 在平面直角坐标系中, 已知矩形 $ABCD$ 的长为 2, 宽为 1, AB、AD 边分别在 x 轴、y 轴的正半轴上, A 点与坐标原点重合 (如图所示). 将矩形折叠, 使 A 点落在线段 DC 上.
(1) 若折痕所在直线的斜率为 k, 试写出折痕所在直线的方程;
(2) 求折痕的长的最大值.



2005 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 P、Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P, b\in Q\}$, 若 $P=\{0,2,5\}$, $Q=\{1,2,6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是 （ ）

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

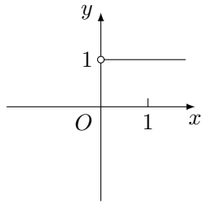
2. 对任意实数 a, b, c, 给出下列命题:
① “$a=b$”是“$ac=bc$”充要条件;
② “$a+5$ 是无理数”是“a 是无理数”的充要条件;
③ “$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件;
④ “$a<5$”是“$a<3$”的必要条件.
其中真命题的个数是 （ ）

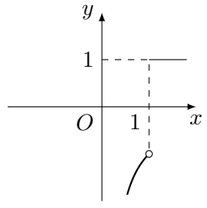
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

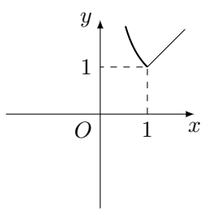
3. $\dfrac{(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}=$ （ ）

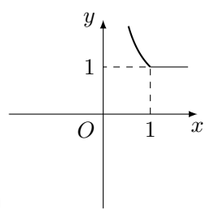
(A) $-2-\mathrm{i}$ (B) $-2+\mathrm{i}$ (C) $2-\mathrm{i}$ (D) $2+\mathrm{i}$

4. 函数 $y=\mathrm{e}^{|\ln x|}-|x-1|$ 的图象大致是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

5. 双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{n}=1$ $(mn\neq 0)$ 离心率为 2, 有一个焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合, 则 mn 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{16}$ (B) $\dfrac{3}{8}$ (C) $\dfrac{16}{3}$ (D) $\dfrac{8}{3}$

6. 在 $y=2^x$, $y=\log_2 x$, $y=x^2$, $y=\cos 2x$ 这四个函数中, 当 $0<x_1<x_2<1$ 时, 使 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数的个数是 （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha\in$ （ ）

(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$ (C) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$ (D) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

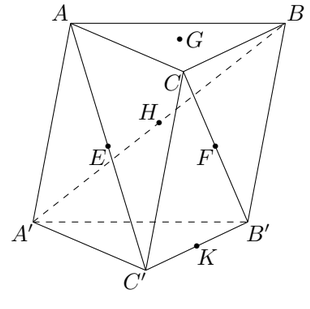
8. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^2}\right)=1$, 则常数 a, b 的值为 （ ）

(A) $a=-2$, $b=4$ (B) $a=2$, $b=-4$
(C) $a=-2$, $b=-4$ (D) $a=2$, $b=4$

9. 若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $2x$ 与 $3\sin x$ 的大小关系 （ ）

(A) $2x>3\sin x$ (B) $2x<3\sin x$
(C) $2x=3\sin x$ (D) 与 x 的取值有关

10. 如图, 在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中, 点 E、F、H、K 分别为 AC'、CB'、$A'B$、$B'C'$ 的中点, G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 从 K、H、G、B' 中取一点作为 P, 使得该棱柱恰有 2 条棱与平面 PEF 平行, 则 P 为 （ ）



(A) K (B) H (C) G (D) B'

11. 某初级中学有学生 270 人, 其中一年级 108 人, 二、三年级各 81 人, 现要利用抽样方法抽取 10 人参加某项调查, 考虑选用简单随机抽样、分层抽样和系统抽样三种方案, 使用简单随机抽样和分层抽样时, 将学生按一、二、三年级依次统一编号为 1, 2, $\cdots$, 270; 使用系统抽样时, 将学生统一随机编号 1, 2, $\cdots$, 270, 并将整个编号依次分为 10 段. 如果抽得号码有下列四种情况:
① 7, 34, 61, 88, 115, 142, 169, 196, 223, 250;
② 5, 9, 100, 107, 111, 121, 180, 195, 200, 265;
③ 11, 38, 65, 92, 119, 146, 173, 200, 227, 254;
④ 30, 57, 84, 111, 138, 165, 192, 219, 246, 270;
关于上述样本的下列结论中, 正确的是 （ ）

(A) ②、③都不能为系统抽样 (B) ②、④都不能为分层抽样
(C) ①、④都可能为系统抽样 (D) ①、③都可能为分层抽样

12. 以平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的任意三个顶点为顶点作三角形, 从中随机取出两个三角形, 则这两个三角形不共面的概率 p 为 （ ）

(A) $\dfrac{367}{385}$ (B) $\dfrac{376}{385}$ (C) $\dfrac{192}{385}$ (D) $\dfrac{18}{385}$

二、填空题

13. 已知向量 $\vec{a}=(-2,2)$, $\vec{b}=(5,k)$. 若 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ 不超过 5, 则 k 的取值范围是_____.

14. $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5$ 的展开式中整理后的常数项为_____.

15. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 前 n 项和为 S_n, 若 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 成等差数列, 则 q 的值为_____.

16. 某实验室需购某种化工原料 106 千克, 现在市场上该原料有两种包装, 一种是每袋 35 千克, 价格为 140 元; 另一种是每袋 24 千克, 价格为 120 元. 在满足需要的条件下, 最少要花费_____元.

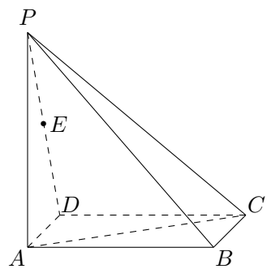
三、解答题

17. 已知向量 $\vec{a}=(x^2,x+1)$, $\vec{b}=(1-x,t)$, 若函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是增函数, 求 t 的取值范围.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$, $\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, AC 边上的中线 $BD=\sqrt{5}$, 求 $\sin A$ 的值.

19. 某地最近出台一项机动车驾照考试规定: 每位考试者一年之内最多有 4 次参加考试的机会, 一旦某次考试通过, 使可领取驾照, 不再参加以后的考试, 否则就一直考到第 4 次为止. 如果李明决定参加驾照考试, 设他每次参加考试通过的概率依次为 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 求在一年内李明参加驾照考试次数 ξ 的分布列和 ξ 的期望, 并求李明在一年内领到驾照的概率.

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AB=\sqrt{3}$, $BC=1$, $PA=2$, E 为 PD 的中点.
(1) 求直线 AC 与 PB 所成角的余弦值;
(2) 在侧面 PAB 内找一点 N, 使 $NE\perp$ 面 PAC, 并求出 N 点到 AB 和 AP 的距离.



21. 设 A、B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点, 点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点, 线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C、D 两点.
(1) 确定 λ 的取值范围, 并求直线 AB 的方程;
(2) 试判断是否存在这样的 λ, 使得 A、B、C、D 四点在同一个圆上? 并说明理由.

22. 已知不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$, 其中 n 为大于 2 的整数, $[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项为正, 且满足 $a_1=b\ (b>0)$, $a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$, $n=2,3,4,\cdots$.
(1) 证明: $a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$, $n=3,4,5,\cdots$;
(2) 猜测数列 $\{a_n\}$ 是否有极限? 如果有, 写出极限的值 (不必证明);
(3) 试确定一个正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 对任意 $b>0$, 都有 $a_n<\frac{1}{5}$.

2005 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 P、Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P, b\in Q\}$, 若 $P=\{0,2,5\}$, $Q=\{1,2,6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是 （ ）

(A) 9　　(B) 8　　(C) 7　　(D) 6

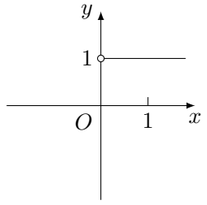
2. 对任意实数 a, b, c, 给出下列命题:
① “$a=b$”是“$ac=bc$”充要条件;
② “$a+5$ 是无理数”是“a 是无理数”的充要条件;
③ “$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件;
④ “$a<5$”是“$a<3$”的必要条件.
其中真命题的个数是 （ ）

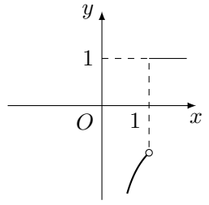
(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

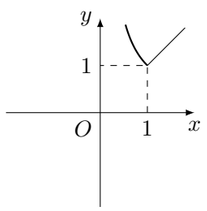
3. 已知向量 $\vec{a}=(-2,2)$, $\vec{b}=(5,k)$. 若 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ 不超过 5, 则 k 的取值范围是 （ ）

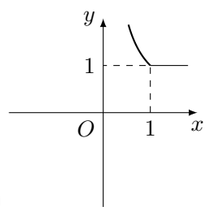
(A) $[-4,6]$　　(B) $[-6,4]$　　(C) $[-6,2]$　　(D) $[-2,6]$

4. 函数 $y=\mathrm{e}^{|\ln x|}-|x-1|$ 的图象大致是 （ ）

(A)


(B)


(C)


(D)


5. 木星的体积约是地球体积的 $240\sqrt{30}$ 倍, 则它的表面积约是地球表面积的 （ ）

(A) 60 倍　　(B) $60\sqrt{30}$ 倍　　(C) 120 倍　　(D) $120\sqrt{30}$ 倍

6. 双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{n}=1$ $(mn\neq 0)$ 离心率为 2, 有一个焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合, 则 mn 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{16}$　　(B) $\dfrac{3}{8}$　　(C) $\dfrac{16}{3}$　　(D) $\dfrac{8}{3}$

7. 在 $y=2^x$, $y=\log_2 x$, $y=x^2$, $y=\cos 2x$ 这四个函数中, 当 $0<x_1<x_2<1$ 时, 使 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数的个数是 （ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

8. 已知 a、b、c 是直线, β 是平面, 给出下列命题:
① 若 $a\perp b$, $b\perp c$, 则 $a/\!/c$;
② 若 $a/\!/b$, $b\perp c$, 则 $a\perp c$;
③ 若 $a/\!/\beta$, $b\subset\beta$, 则 $a/\!/b$;
④ 若 a 与 b 异面, 且 $a/\!/\beta$, 则 $b\beta$ 相交;
⑤ 若 a 与 b 异面, 则至多有一条直线与 a, b 都垂直.
其中真命题的个数是 （ ）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

9. 把一同排 6 张座位编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的电影票全部分给 4 个人, 每人至少分 1 张, 至多分 2 张, 且这两张票具有连续的编号, 那么不同的分法种数是 （ ）

(A) 168　　(B) 96　　(C) 72　　(D) 144

10. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha\in$ （ ）

(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(B) $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(C) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

11. 在函数 $y=x^3-8x$ 的图象上, 其切线的倾斜角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的点中, 坐标为整数的点的个数是 （ ）

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

12. 某初级中学有学生 270 人, 其中一年级 108 人, 二、三年级各 81 人, 现要利用抽样方法抽取 10 人参加某项调查, 考虑选用简单随机抽样、分层抽样和系统抽样三种方案, 使用简单随机抽样和分层抽样时, 将学生按一、二、三年级依次统一编号为 1, 2, $\cdots$, 270; 使用系统抽样时, 将学生统一随机编号 1, 2, $\cdots$, 270, 并将整个编号依次分为 10 段. 如果抽得号码有下列四种情况:
① 7, 34, 61, 88, 115, 142, 169, 196, 223, 250;
② 5, 9, 100, 107, 111, 121, 180, 195, 200, 265;
③ 11, 38, 65, 92, 119, 146, 173, 200, 227, 254;
④ 30, 57, 84, 111, 138, 165, 192, 219, 246, 270;
关于上述样本的下列结论中, 正确的是 （ ）

(A) ②、③都不能为系统抽样　　(B) ②、④都不能为分层抽样

(C) ①、④都可能为系统抽样　　(D) ①、③都可能为分层抽样

二、填空题

13. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}\lg\sqrt{4-x}$ 的定义域是_____.

14. $\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^4+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中整理后的常数项等于_____.

15. 函数 $y=|\sin x|\cos x-1$ 的最小正周期与最大值的和为_____.

16. 某实验室需购某种化工原料 106 千克, 现在市场上该原料有两种包装, 一种是每袋 35 千克, 价格为 140 元; 另一种是每袋 24 千克, 价格为 120 元. 在满足需要的条件下, 最少要花费_____元.

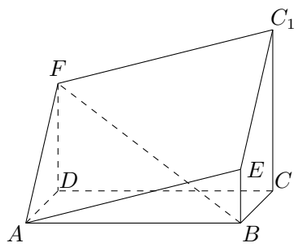
三、解答题

17. 已知向量 $\vec{a}=(x^2,x+1)$, $\vec{b}=(1-x,t)$, 若函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是增函数, 求 t 的取值范围.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan B=\sqrt{3}$, $\cos C=\dfrac{1}{3}$, $AC=3\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2n^2$, $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 = b_1$, $b_2(a_2 - a_1) = b_1$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 如图所示的多面体是由底面为 $ABCD$ 的长方体被截面 AEC_1F 所截面而得到的, 其中 $AB = 4$, $BC = 2$, $CC_1 = 3$, $BE = 1$.
(1) 求 BF 的长;
(2) 求点 C 到平面 AEC_1F 的距离.



21. 某会议室用 5 盏灯照明, 每盏灯各使用灯泡一只, 且型号相同. 假定每盏灯能否正常照明只与灯泡的寿命有关, 该型号的灯泡寿命为 1 年以上的概率为 p_1, 寿命为 2 年以上的概率为 p_2. 从使用之日起每满 1 年进行一次灯泡更换工作, 只更换已坏的灯泡, 平时不换.
(1) 在第一次灯泡更换工作中, 求不需要换灯泡的概率和更换 2 只灯泡的概率;
(2) 在第二次灯泡更换工作中, 对其中的某一盏灯来说, 求该盏灯需要更换灯泡的概率;
(3) 当 $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.3$ 时, 求在第二次灯泡更换工作, 至少需要更换 4 只灯泡的概率. (结果保留两个有效数字)

22. 设 A、B 是椭圆 $3x^2 + y^2 = \lambda$ 上的两点, 点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点, 线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C、D 两点.
(1) 确定 λ 的取值范围, 并求直线 AB 的方程;
(2) 试判断是否存在这样的 λ, 使得 A、B、C、D 四点在同一个圆上? 并说明理由.

2005 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $z=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4$ 的值是 （ ）

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) i

2. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ 的定义域是 （ ）

(A) $(-\infty,0]$ (B) $[0,+\infty)$ (C) $(-\infty,0)$ (D) $(-\infty,+\infty)$

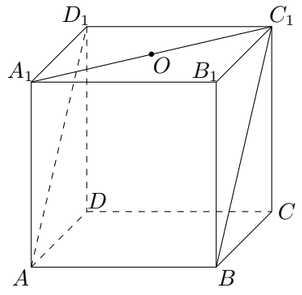
3. 已知数列 $\{\log_2(a_n-1)\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 为等差数列, 且 $a_1=3$, $a_2=5$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_2-a_1}+\dfrac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}\right)=$ （ ）

(A) 2 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\dfrac{1}{2}$

4. 已知点 $P(x,y)$ 在不等式组 $\begin{cases}x-2\leqslant 0\\ y-1\leqslant 0\\ x+2y-2\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域上运动, 则 $z=x-y$ 的取值范围是 （ ）

(A) $[-2,-1]$ (B) $[-2,1]$ (C) $[-1,2]$ (D) $[1,2]$

5. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, O 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 则 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为 （ ）



(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 设 $f_0(x)=\sin x$, $f_1(x)=f_0'(x)$, $f_2(x)=f_1'(x)$, $\cdots$, $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, $n\in\mathbf{N}$, 则 $f_{2005}(x)=$ （ ）

(A) $\sin x$ (B) $-\sin x$ (C) $\cos x$ (D) $-\cos x$

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 右准线与一条渐近线交于点 A, $\triangle OAF$ 的面积为 $\dfrac{a^2}{2}$ (O 为原点), 则两条渐近线的夹角为 （ ）

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

8. 集合 $A=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x+1}<0\right.\right\}$, $B=\{x||x-b|<a\}$, 若“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充分条件, 则 b 的取值范围是 （ ）

(A) $-2\leqslant b<0$ (B) $0<b\leqslant 2$ (C) $-3<b<-1$ (D) $-1\leqslant b<2$

9. 4 位同学参加某种形式的竞赛, 竞赛规则规定: 每位同学必须从甲. 乙两道题中任选一题作答, 选甲题答对得 100 分, 答错得 -100 分; 选乙题答对得 90 分, 答错得 -90 分. 若 4 位同学的总分为 0, 则这 4 位同学不同得分情况的种数是 （ ）

(A) 48 (B) 36 (C) 24 (D) 18

10. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积, $\lambda_1=\dfrac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABc}}$, $\lambda_2=\dfrac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}$, $\lambda_3=\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$, 定义 $f(P)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 若 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $f(Q)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)$, 则 （ ）

(A) 点 Q 在 $\triangle GAB$ 内 (B) 点 Q 在 $\triangle GBC$ 内

(C) 点 Q 在 $\triangle GCA$ 内 (D) 点 Q 与点 G 重合

二、填空题

11. 一工厂生产了某种产品 16800 件, 它们来自甲、乙、丙 3 条生产线, 为检查这批产品的质量, 决定采用分层抽样的方法进行抽样, 已知甲、乙、丙三条生产线抽取的个体数组成一个等差数列, 则乙生产线生产了_____件产品.

12. 在 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^6$ 的展开式中, x^2 项的系数是_____. (用数字作答)

13. 已知直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相交于 A、B 两点, 且 $|AB|=\sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$_____.

14. 设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称, 且存在反函数 $f^{-1}(x)$, $f(4)=0$, 则 $f^{-1}(4)=$_____.

15. 设函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=a$, $x=b$ 及 x 轴所围成图形的面积称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的面积, 已知函数 $y=\sin nx$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{n}\right]$ 上的面积为 $\dfrac{2}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) $y=\sin 3x$ 在 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的面积为_____;

(2) $y=\sin(3x-\pi)+1$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$ 上的面积为_____.

三、解答题

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A(\sin B+\cos B)-\sin C=0$, $\sin B+\cos 2C=0$, 求角 A、B、C 的大小.

17. 如图 1, 已知 $ABCD$ 是上、下底边长分别为 2 和 6, 高为 $\sqrt{3}$ 的等腰梯形, 将它沿对称轴 OO_1 折成直二面角, 如图 2.

(1) 证明: $AC\perp BO_1$;

(2) 求二面角 $O-AC-O_1$ 的大小.

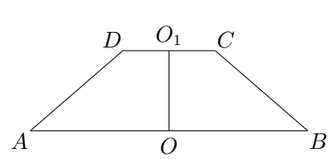


图 1

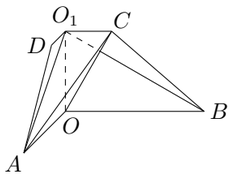


图 2

18. 某城市有甲、乙、丙 3 个旅游景点, 一位客人游览这三个景点的概率分别是 0.4, 0.5, 0.6, 且客人是否游览哪个景点互不影响, 设 ξ 表示客人离开该城市时游览的景点数与没有游览的景点数之差的绝对值.

(1) 求 ξ 的分布及数学期望;

(2) 记“函数 $f(x)=x^2-3\xi x+1$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增”为事件 A, 求事件 A 的概率.

19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1、F_2, 离心率为 e. 直线 $l:y=ex+a$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B, M 是直线 l 与椭圆 C 的一个公共点, P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点, 设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

(1) 证明: $\lambda=1-e^2$;

(2) 确定 λ 的值, 使得 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形.

20. 自然状态下的鱼类是一种可再生资源, 为持续利用这一资源, 需从宏观上考察其再生能力及捕捞强度对鱼群总量的影响. 用 x_n 表示某鱼群在第 n 年年初的总量, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $x_1>0$. 不考虑其它因素, 设在第 n 年内鱼群的繁殖量及捕捞量都与 x_n 成正比, 死亡量与 x_n^2 成正比, 这些比例系数依次为正常数 a, b, c.

(1) 求 x_{n+1} 与 x_n 的关系式;

(2) 猜测: 当且仅当 x_1, a, b, c 满足什么条件时, 每年年初鱼群的总量保持不变? (不要求证明)

(3) 设 $a=2$, $b=1$, 为保证对任意 $x_1\in(0,2)$, 都有 $x_n>0$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则捕捞强度 b 的最大允许值是多少? 证明你的结论.

21. 已知函数 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+bx$, $a\neq 0$.

(1) 若 $b=2$, 且 $h(x)=f(x)-g(x)$ 存在单调递减区间, 求 a 的取值范围;

(2) 设函数 $f(x)$ 的图象 C_1 与函数 $g(x)$ 图象 C_2 交于点 P、Q, 过线段 PQ 的中点作 x 轴的垂线分别交 C_1, C_2 于点 M、N, 证明 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行.

2005 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$, $A=\{-2,-1,0\}$, $B=\{0,1,2\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B=$ （ ）

(A) $\{0\}$ (B) $\{-2,-1\}$ (C) $\{1,2\}$ (D) $\{0,1,2\}$

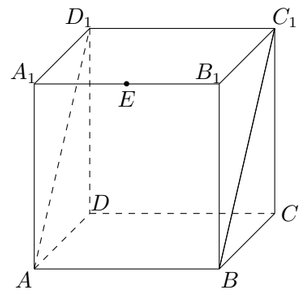
2. $\tan 600^\circ$ 的值是 （ ）

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $-\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ 的定义域是 （ ）

(A) $(-\infty,0]$ (B) $[0,+\infty)$ (C) $(-\infty,0)$ (D) $(-\infty,+\infty)$

4. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E 是 A_1B_1 的中点, 则 E 到平面 ABC_1D_1 的距离为 （ ）



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $a_{20}=$ （ ）

(A) 0 (B) $-\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 设集合 $A=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x+1}<0\right.\right\}$, $B=\{x||x-1|<a\}$, 则“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分又不必要条件

7. 设直线的方程是 $Ax+By=0$, 从 1, 2, 3, 4, 5 这五个数中每次取两个不同的数作为 A、B 的值, 则所得不同直线的条数是 （ ）

(A) 20 (B) 19 (C) 18 (D) 16

8. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 右准线与一条渐近线交于点 A, $\triangle OAF$ 的面积为 $\dfrac{a^2}{2}$ (O 为原点), 则两条渐近线的夹角为 （ ）

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

9. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$, 则 P 是 $\triangle ABC$ 的 （ ）

(A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心

10. 某公司在甲、乙两地销售一种品牌车, 利润 (单位: 万元) 分别为 $L_1=5.06x-0.15x^2$ 和 $L_2=2x$, 其中 x 为销售量 (单位: 辆). 若该公司在这两地共销售 15 辆车, 则能获得的最大利润为 （ ）

(A) 45.606 (B) 45.6 (C) 45.56 (D) 45.51

二、填空题

11. 设直线 $2x+3y+1=0$ 和圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 相交于点 A、B, 则弦 AB 的垂直平分线方程是_____.

12. 一工厂生产了某种产品 16800 件, 它们来自甲、乙、丙 3 条生产线, 为检查这批产品的质量, 决定采用分层抽样的方法进行抽样, 已知甲、乙、丙三条生产线抽取的个体数组成一个等差数列, 则乙生产线生产了_____件产品.

13. 在 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^6$ 的展开式中, x^2 项的系数是_____. (用数字作答)

14. 设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称, 且存在反函数 $f^{-1}(x)$, $f(4)=0$, 则 $f^{-1}(4)=$_____.

15. 已知平面 α, β 和直线, 给出条件:
① $m\parallel\alpha$; ② $m\perp\alpha$; ③ $m\subset\alpha$; ④ $\alpha\perp\beta$; ⑤ $\alpha\parallel\beta$.
(1) 当满足条件_____时, 有 $m\parallel\beta$;
(2) 当满足条件_____时, 有 $m\perp\beta$. (填所选条件的序号)

三、解答题

16. 已知数列 $\{\log_2(a_n-1)\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 为等差数列, 且 $a_1=3$, $a_3=9$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 证明: $\dfrac{1}{a_2-a_1}+\dfrac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}<1$.

17. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A(\sin B+\cos B)-\sin C=0$, $\sin B+\cos 2C=0$, 求角 A、B、C 的大小.

18. 如图 1, 已知 $ABCD$ 是上、下底边长分别为 2 和 6, 高为 $\sqrt{3}$ 的等腰梯形, 将它沿对称轴 OO_1 折成直二面角, 如图 2.
(1) 证明: $AC\perp BO_1$;
(2) 求二面角 $O-AC-O_1$ 的大小.

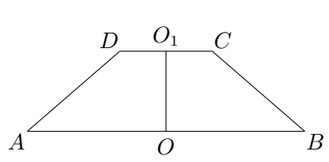


图 1

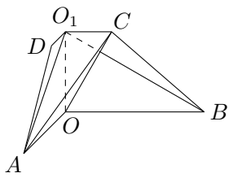


图 2

19. 设 $t \neq 0$, 点 $P(t,0)$ 是函数 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 的图象的一个公共点, 两函数的图象在点 P 处有相同的切线.
(1) 用 t 表示 a, b, c;
(2) 若函数 $y=f(x)-g(x)$ 在 $(-1,3)$ 上单调递减, 求 t 的取值范围.

20. 某单位组织 4 个部门的职工旅游, 规定每个部门只能在韶山、衡山、张家界 3 个景区中任选一个, 假设各部门选择每个景区是等可能的.
(1) 求 3 个景区都有部门选择的概率;
(2) 求恰有 2 个景区有部门选择的概率.

21. 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1、F_2, 离心率为 e. 直线 $l: y=ex+a$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B, M 是直线 l 与椭圆 C 的一个公共点, P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点, 设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.
(1) 证明: $\lambda=1-e^2$;
(2) 若 $\lambda=\dfrac{3}{4}$, $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6; 写出椭圆 C 的方程;
(3) 确定 λ 的值, 使得 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形.

2005 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$, $C=\{2,3,4\}$, 则 $(A\cap B)\cup C=$ （　）

(A) $\{1,2,3\}$　(B) $\{1,2,4\}$　(C) $\{2,3,4\}$　(D) $\{1,2,3,4\}$

2. 函数 $y=x^{1-x}+3$ ($x\in\mathbf{R}$) 的反函数的解析表达式为 （　）

(A) $y=\log_2\dfrac{2}{x-3}$　(B) $y=\log_2\dfrac{x-3}{2}$

(C) $y=\log_2\dfrac{3-x}{2}$　(D) $y=\log_2\dfrac{2}{3-x}$

3. 在各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1=3$, 前三项和为 21, 则 $a_3+a_4+a_5=$ （　）

(A) 33　(B) 72　(C) 84　(D) 189

4. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=2$, $AA_1=1$, 则点 A 到平面 A_1BC 的距离为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　(D) $\sqrt{3}$

5. $\triangle ABC$ 中, $A=\dfrac{\pi}{3}$, $BC=3$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 （　）

(A) $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$　(B) $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

(C) $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$　(D) $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

6. 抛物线 $y=4x^2$ 上的一点 M 到焦点的距离为 1, 则点 M 的纵坐标是(　)

(A) $\dfrac{17}{16}$　(B) $\dfrac{15}{16}$　(C) $\dfrac{7}{8}$　(D) 0

7. 在一次歌手大奖赛上, 七位评委为歌手打出的分数如下: 9.4, 8.4, 9.4, 9.9, 9.6, 9.4, 9.7. 去掉一个最高分和一个最低分后, 所剩数据的平均值和方差分别为 （　）

(A) 9.4, 0.484　(B) 9.4, 0.016　(C) 9.5, 0.04　(D) 9.5, 0.016

8. 设 α, β, γ 为两两不重合的平面, l, m, n 为两两不重合的直线, 给出下列四个命题:

① 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

② 若 $m\subset\alpha$, $n\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

③ 若 $\alpha\parallel\beta$, $l\subset\alpha$, 则 $l\parallel\beta$;

④ 若 $\alpha\cap\beta=l$, $\beta\cap\gamma=m$, $\gamma\cap\alpha=n$, $l\parallel\gamma$, 则 $m\parallel n$.

其中真命题的个数是 （　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

9. 设 $k=1$, 2, 3, 4, 5, 则 $(x+2)^5$ 的展开式中 x^k 的系数不可能是 （　）

(A) 10　(B) 40　(C) 50　(D) 80

10. 若 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha\right)=$ （　）

(A) $-\dfrac{7}{9}$　(B) $-\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{7}{9}$

11. 点 $P(-3,1)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左准线上. 过点 P 且方向为 $\boldsymbol{a}=(2,-5)$ 的光线, 经直线 $y=-2$ 反射后通过椭圆的左焦点, 则这个椭圆的离心率为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

12. 四棱锥的 8 条棱代表 8 种不同的化工产品, 有公共点的两条棱代表的化工产品放在同一仓库是危险的, 没有公共顶点的两条棱多代表的化工产品放在同一仓库是安全的, 现打算用编号为①、②、③、④的 4 个仓库存放这 8 种化工产品, 那么安全存放的不同方法种数为 （　）

(A) 96　(B) 48　(C) 24　(D) 0

二、填空题

13. 命题“若 $a>b$, 则 $2^a>2^b-1$”的否命题为_____.

14. 曲线 $y=x^3+x+1$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程是_____.

15. 函数 $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x^2-3x)}$ 的定义域为_____.

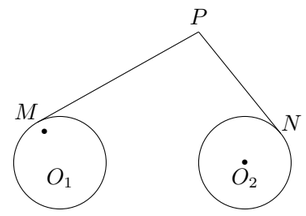
16. 若 $3^a=0.618$, $a\in[k,k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$, 则 $k=$_____.

17. 已知 a, b 为常数, 若 $f(x)=x^2+4x+3$, $f(ax+b)=x^2+10x+24$, 则 $5a-b=$_____.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, O 为中线 AM 上的一个动点, 若 $AM=2$, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 的最小值是_____.

三、解答题

19. 如图, 圆 O_1 与圆 O_2 的半径都是 1, $O_1O_2=4$, 过动点 P 分别作圆 O_1、圆 O_2 的切线 PM、PN (M、N 分别为切点), 使得 $PM=\sqrt{2}PN$. 试建立适当的坐标系, 并求动点 P 的轨迹方程.



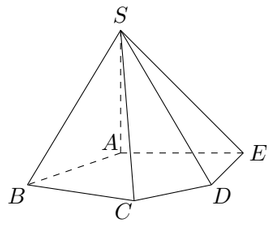
20. 甲、乙两人各射击一次, 击中目标的概率分别是 $\dfrac{2}{3}$ 和 $\dfrac{3}{4}$. 假设两人射击是否击中目标, 相互之间没有影响; 每次射击是否击中目标, 相互之间没有影响.

(1) 求甲射击 4 次, 至少 1 次未击中目标的概率;

(2) 求两人各射击 4 次, 甲恰好击中目标 2 次且乙恰好击中目标 3 次的概率;

(3) 假设某人连续 2 次未击中目标, 则停止射击. 问: 乙恰好射击 5 次后, 被中止射击的概率是多少?

21. 如图, 在五棱锥 $S-ABCDE$ 中, $SA\perp$ 底面 $ABCDE$, $SA=AB=AE=2$, $BC=DE=\sqrt{3}$, $\angle BAE=\angle BCD=\angle CDE=120^\circ$.
(1) 求异面直线 CD 与 SB 所成的角; (用反三角函数值表示)
(2) 证明: $BC\perp$ 平面 SAB;
(3) 用反三角函数值表示二面角 $B-SC-D$ 的大小. (本小问不必写出解答过程)



22. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=x^2|x-a|$.
(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)=x$ 使成立的 x 的集合;
(2) 求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值.

23. 设数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n, 已知 $a_1=1$, $a_2=6$, $a_3=11$, 且 $(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=An+B$, $n=1,2,3,\cdots$, 其中 A, B 为常数.
(1) 求 A 与 B 的值;
(2) 证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列;
(3) 证明不等式 $\sqrt{5a_{mn}}-\sqrt{a_ma_n}>1$ 对任何正整数 m、n 都成立.

2005 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $I=\{x||x|<3, x\in\mathbf{Z}\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{-2,-1,2\}$, 则 $A\cup(\complement_I B)=$ （ ）

(A) $\{1\}$　(B) $\{1,2\}$　(C) $\{2\}$　(D) $\{0,1,2\}$

2. 设复数: $z_1=1+\mathrm{i}$, $z_2=x+2\mathrm{i}$ ($x\in\mathbf{R}$), 若 z_1z_2 为实数, 则 $x=$ （ ）

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2

3. “$a=b$”是“直线 $y=x+2$ 与圆 $(x-a)^2+(y+b)^2=2$ 相切”的 （ ）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分又不必要条件

4. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^{12}$ 的展开式中, 含 x 的正整数次幂的项共有 （ ）

(A) 4 项　(B) 3 项　(C) 2 项　(D) 1 项

5. 设函数 $f(x)=\sin 3x+|\sin 3x|$, 则 $f(x)$ 为 （ ）

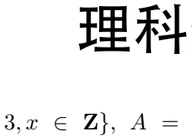
(A) 周期函数, 最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$　(B) 周期函数, 最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$

(C) 周期函数, 数小正周期为 2π　(D) 非周期函数

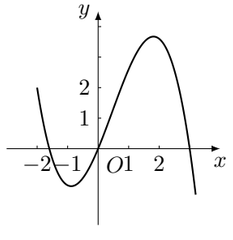
6. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}(-2,-4)$, $|\vec{c}|=\sqrt{5}$, 若 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\frac{5}{2}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 （ ）

(A) 30°　(B) 60°　(C) 120°　(D) 150°

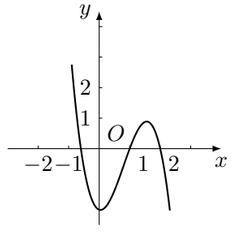
7. 已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如图所示 (其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数), 下面四个图象中, $y=f(x)$ 的图象大致是 （ ）



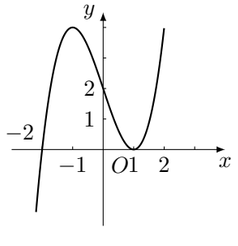
(A)



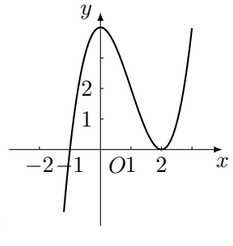
(B)



(C)



(D)



8. 若 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x-1)}{x-1}=1$, 则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{f(2-2x)}=$ （ ）

(A) -1　(B) 1　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{2}$

9. 矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=3$, 沿 AC 将矩形 $ABCD$ 折成一个直二面角 $B-AC-D$, 则四面体 $ABCD$ 的外接球的体积为 （ ）

(A) $\frac{125}{12}\pi$　(B) $\frac{125}{9}\pi$　(C) $\frac{125}{6}\pi$　(D) $\frac{125}{3}\pi$

10. 已知实数 a, b 满足等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^b$, 下列五个关系式:

① $0<b<a$; ② $a<b<0$; ③ $0<a<b$; ④ $b<a<0$; ⑤ $a=b$.

其中不可能成立的关系式有 （ ）

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

11. 在 $\triangle OAB$ 中, O 为坐标原点, $A(1,\cos\theta)$, $B(\sin\theta,1)$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, 则 $\triangle OAB$ 的面积达到最大值时, $\theta=$ （ ）

(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{3}$　(D) $\frac{\pi}{2}$

12. 将 1, 2, $\cdots$, 9 这 9 个数平均分成三组, 则每组的三个数都成等差数列的概率为 （ ）

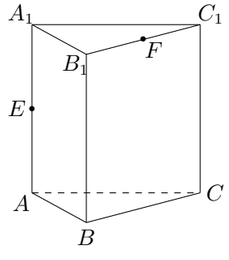
(A) $\frac{1}{56}$　(B) $\frac{1}{70}$　(C) $\frac{1}{336}$　(D) $\frac{1}{420}$

二、填空题

13. 若函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+2a^2})$ 是奇函数, 则 $a=$_____.

14. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases}x-y-2\leqslant0\\x+2y-4>0\\2y-3\leqslant0\end{cases}$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值是_____.

15. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC=\sqrt{2}$, $BB_1=2$, $\angle ABC=90°$, E、F 分别为 AA_1、C_1B_1 的中点, 沿棱柱的表面从 E 到 F 两点的最短路径的长度为_____.



16. 以下同个关于圆锥曲线的命题中:

① 设 A、B 为两个定点, k 为非零常数, $\left|\overrightarrow{PA}\right|-\left|\overrightarrow{PB}\right|=k$, 则动点 P 的轨迹为双曲线;

② 设定圆 C 上一定点 A 作圆的动点弦 AB, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, 则动点 P 的轨迹为椭圆;

③ 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两根可分别作为椭圆和双曲线的离心率;

④ 双曲线 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{35}+y^2=1$ 有相同的焦点.

其中真命题的序号为_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{ax+b}$ (a, b 为常数), 且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根为 $x_1=3$, $x_2=4$.

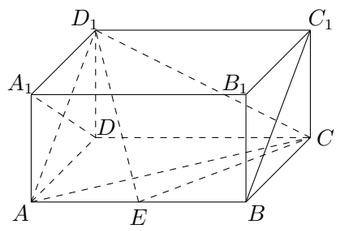
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $k>1$, 解关于 x 的不等式: $f(x)<\dfrac{(k+1)x-k}{2-x}$.

18. 已知向量 $\vec{a}=\left(2\cos\frac{x}{2},\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $\vec{b}=\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, 令 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$. 是否存在实数 $x\in[0,\pi]$, 使 $f(x)+f'(x)=0$ (其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数)? 若存在, 则求出 x 的值; 若不存在, 则证明之.

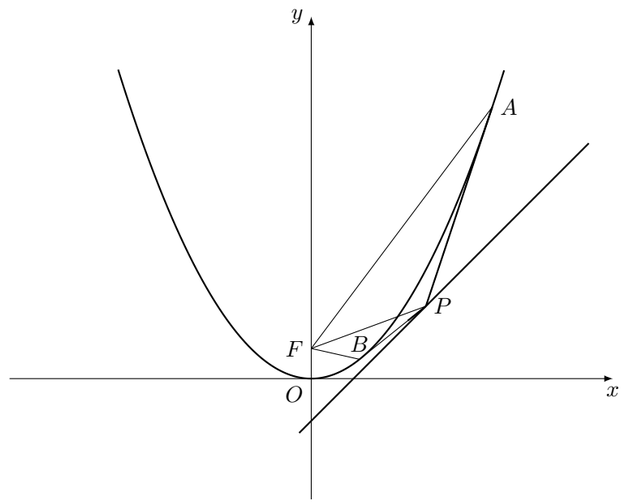
19. A、B 两位同学各有五张卡片, 现以投掷均匀硬币的形式进行游戏, 当出现正面朝上时 A 赢得 B 一张卡片, 否则 B 赢得 A 一张卡片. 规定掷硬币的次数达 9 次时, 或在此前某人已赢得所有卡片时游戏终止. 设 ξ 表示游戏终止时掷硬币的次数.
(1) 求 ξ 的取值范围;
(2) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

20. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 中, $AD=AA_1=1$, $AB=2$, 点 E 在棱 AD 上移动.
(1) 证明: $D_1E\perp A_1D$;
(2) 当 E 为 AB 的中点时, 求点 E 到面 ACD_1 的距离;
(3) AE 等于何值时, 二面角 D_1-EC-D 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且满足: $a_0=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n(4-a_n)$, $n\in\mathbf{N}$.
(1) 证明: $a_n<a_{n+1}<2$, $n\in\mathbf{N}$;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n.

22. 如图, 设抛物线 $C:y=x^2$ 的焦点为 F, 动点 P 在直线 $l:x-y-2=0$ 上运动, 过 P 作抛物线 C 的两条切线 PA、PB, 且与抛物线 C 分别相切于 A、B 两点.
(1) 求 $\triangle APB$ 的重心 G 的轨迹方程;
(2) 证明 $\angle PFA=\angle PFB$.



2005 年普通高等学校招生考试（江西卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $I=\{x||x|<3, x\in\mathbf{Z}\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{-2,-1,2\}$, 则 $A\cup(\complement_I B)=$ （ ）

(A) $\{1\}$　(B) $\{1,2\}$　(C) $\{2\}$　(D) $\{0,1,2\}$

2. 已知 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=3$, 则 $\cos\alpha=$ （ ）

(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $-\dfrac{4}{5}$　(C) $\dfrac{4}{15}$　(D) $-\dfrac{3}{5}$

3. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^{12}$ 的展开式中, 含 x 的正整数次幂的项共有 （ ）

(A) 4 项　(B) 3 项　(C) 2 项　(D) 1 项

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\log_2(-x^2+4x-3)}$ 的定义域为 （ ）

(A) $(1,2)\cup(2,3)$　(B) $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

(C) $(1,3)$　(D) $[1,3]$

5. 设函数 $f(x)=\sin 3x+|\sin 3x|$, 则 $f(x)$ 为 （ ）

(A) 周期函数, 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{3}$　(B) 周期函数, 最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$

(C) 周期函数, 数小正周期为 2π　(D) 非周期函数

6. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}(-2,-4)$, $|\vec{c}|=\sqrt{5}$, 若 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\dfrac{5}{2}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 （ ）

(A) 30°　(B) 60°　(C) 120°　(D) 150°

7. 将 9 个 (含甲、乙) 平均分成三组, 甲、乙分在同一组, 则不同分组方法的种数为 （ ）

(A) 70　(B) 140　(C) 280　(D) 840

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 设命题 $p:\dfrac{a}{\sin B}=\dfrac{b}{\sin C}=\dfrac{c}{\sin A}$, 命题 $q:\triangle ABC$ 是等边三角形, 那么命题 p 是命题 q 的 （ ）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分又不必要条件

9. 矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=3$, 沿 AC 将矩形 $ABCD$ 折成一个直二面角 $B-AC-D$, 则四面体 $ABCD$ 的外接球的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{125}{12}\pi$　(B) $\dfrac{125}{9}\pi$　(C) $\dfrac{125}{6}\pi$　(D) $\dfrac{125}{3}\pi$

10. 已知实数 a, b 满足等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a=\left(\dfrac{1}{3}\right)^b$, 下列五个关系式:

① $0<b<a$; ② $a<b<0$; ③ $0<a<b$; ④ $b<a<0$; ⑤ $a=b$.

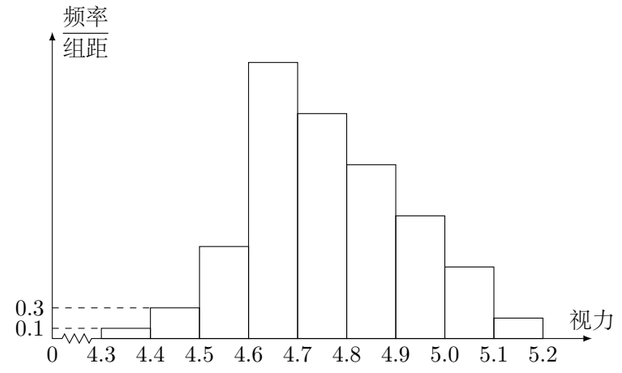
其中不可能成立的关系式有 （ ）

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

11. 在 $\triangle OAB$ 中, O 为坐标原点, $A(1,\cos\theta)$, $B(\sin\theta,1)$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 则 $\triangle OAB$ 的面积达到最大值时, $\theta=$ （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

12. 为了解某校高三学生的视力情况, 随机地抽查了该校 100 名高三学生的视力情况, 得到频率分布直方图. 由于不慎将部分数据丢失, 但知道前 4 组的频数成等比数列, 后 6 组的频数成等差数列, 设最大频率为 a, 视力在 4.6 到 5.0 之间的学生数为 b, 则 a, b 的值分别为 （ ）



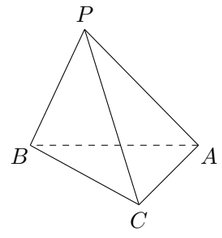
(A) 0.27, 78　(B) 0.27, 83　(C) 2.7, 78　(D) 2.7, 83

二、填空题

13. 若函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+2a^2})$ 是奇函数, 则 $a=$_____.

14. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases}x-y-2\leqslant 0\\ x+2y-4>0\\ 2y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值是_____.

15. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=PB=PC=BC$, 且 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$, 则 PA 与底面 ABC 所成角为_____.



16. 以下同个关于圆锥曲线的命题中:

① 设 A、B 为两个定点, k 为非零常数, $\left|\overrightarrow{PA}\right|-\left|\overrightarrow{PB}\right|=k$, 则动点 P 的轨迹为双曲线;

② 设定圆 C 上一定点 A 作圆的动点弦 AB, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, 则动点 P 的轨迹为椭圆;

③ 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两根可分别作为椭圆和双曲线的离心率;

④ 双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{35}+y^2=1$ 有相同的焦点.

其中真命题的序号为_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{ax+b}$ (a, b 为常数), 且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根为 $x_1=3$, $x_2=4$.

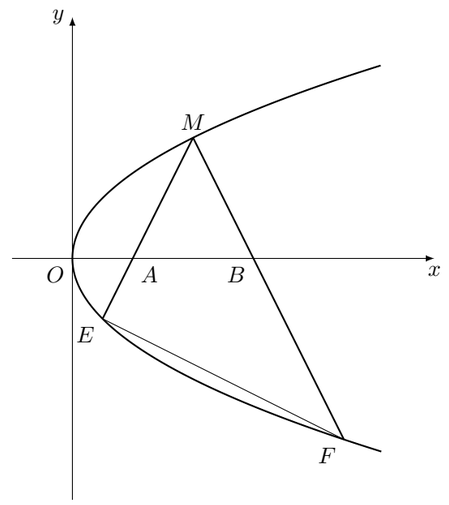
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $k>1$, 解关于 x 的不等式: $f(x)<\dfrac{(k+1)x-k}{2-x}$.

18. 已知向量 $\vec{a}=\left(2\cos\dfrac{x}{2},\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, $\vec{b}=\left(\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right),\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, 令 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$. 求函数 $f(x)$ 的最大值, 最小正周期, 并写出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调区间.

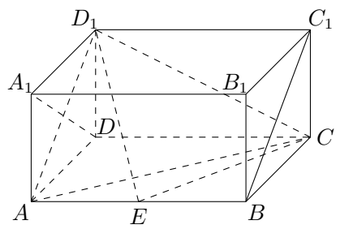
19. A、B 两位同学各有五张卡片, 现以投掷均匀硬币的形式进行游戏, 当出现正面朝上时 A 赢得 B 一张卡片, 否则 B 赢得 A 一张卡片, 如果某人已赢得所有卡片, 则游戏终止. 求掷硬币的次数不大于 7 次时游戏终止的概率.

21. 如图, M 是抛物线上 $y^2 = x$ 上的一点, 动弦 ME、MF 分别交 x 轴于 A、B 两点, 且 $MA = MB$.
(1) 若 M 为定点, 证明: 直线 EF 的斜率为定值;
(2) 若 M 为动点, 且 $\angle EMF = 90°$, 求 $\triangle EMF$ 的重心 G 的轨迹方程.



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n - S_{n-2} = 3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n \geqslant 3)$, 且 $S_1 = 1$, $S_2 = -\dfrac{3}{2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 中, $AD = AA_1 = 1$, $AB = 2$, 点 E 在棱 AD 上移动.
(1) 证明: $D_1E \perp A_1D$;
(2) 当 E 为 AB 的中点时, 求点 E 到面 ACD_1 的距离;
(3) AE 等于何值时, 二面角 $D_1 - EC - D$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.



2005 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

数学试卷

一、选择题

1. 复数 $z=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}-1$ 在复平面内, z 所对应的点在 （　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的 （　）

(A) 充分而不必要的条件　(B) 必要而不充分的条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要的条件

3. 设袋中有 80 个红球, 20 个白球, 若从袋中任取 10 个球, 则其中恰有 6 个红球的概率为 （　）

(A) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^4\cdot\mathrm{C}_{10}^6}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$　(B) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^6\cdot\mathrm{C}_{10}^4}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$　(C) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^4\cdot\mathrm{C}_{20}^6}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$　(D) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^6\cdot\mathrm{C}_{20}^4}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$

4. 已知 m、n 是两条不重合的直线, α、β、γ 是三个两两不重合的平面, 给出下列四个命题:

① 若 $m\perp\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

② 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\alpha$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

③ 若 $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

④ 若 m、n 是异面直线, $m\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\subset\beta$, $n\parallel\alpha$, 则 $\alpha\parallel\beta$.

其中真命题是 （　）

(A) ①和②　(B) ①和③　(C) ③和④　(D) ①和④

5. 函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的反函数是 （　）

(A) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$　(B) $y=-\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

(C) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$　(D) $y=-\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

6. 若 $\log_{2a}\dfrac{1+a^2}{1+a}<0$, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　(B) $(1,+\infty)$　(C) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　(D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

7. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes: x\otimes y=x(1-y)$. 若不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立, 则 （　）

(A) $-1<a<1$　(B) $0<a<2$　(C) $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$　(D) $-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

8. 若钝角三角形三内角的度数成等差数列, 且最大边长与最小边长的比值为 m, 则 m 的范围是 （　）

(A) $(1,2)$　(B) $(2,+\infty)$　(C) $[3,+\infty)$　(D) $(3,+\infty)$

9. 若直线 $2x-y+c=0$ 按向量 $\vec{a}=(1,-1)$ 平移后与圆 $x^2+y^2=5$ 相切, 则 c 的值为 （　）

(A) 8 或 -2　(B) 6 或 -4　(C) 4 或 -6　(D) 2 或 -8

10. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 实数 $x_1\neq x_2$, $\lambda\neq-1$, $\alpha=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $\beta=\dfrac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}$, 若 $|f(x_1)-f(x_2)|<|f(\alpha)-f(\beta)|$, 则(　)

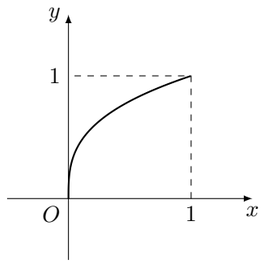
(A) $\lambda<0$　(B) $\lambda=0$　(C) $0<\lambda<1$　(D) $\lambda\geqslant1$

11. 已知双曲线的中心在原点, 离心率为 $\sqrt{3}$. 若它的一条准线与抛物线 $y^2=4x$ 的准线重合, 则该双曲线与抛物线 $y^2=4x$ 的交点到原点的距离是 （　）

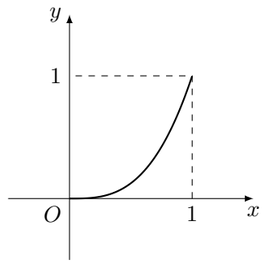
(A) $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$　(B) $\sqrt{21}$　(C) $18+12\sqrt{2}$　(D) 21

12. 一给定函数 $y=f(x)$ 的图象在下列图中, 并且对任意 $a_1\in(0,1)$, 由关系式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}>a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则该函数的图象是 （　）

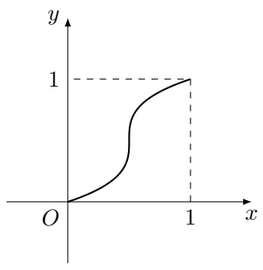
(A)



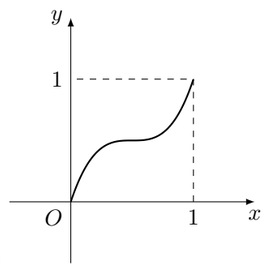
(B)



(C)



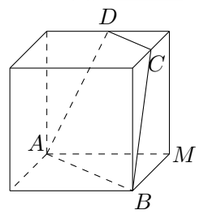
(D)



二、填空题

13. $\left(x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$ 的展开式中常数项是_____.

14. 如图, 正方体的棱长为 1, C、D 分别是两条棱的中点, A、B、M 是顶点, 那么点 M 到截面 $ABCD$ 的距离是_____.



15. 用 1、2、3、4、5、6、7、8 组成没有重复数字的八位数, 要求 1 和 2 相邻, 3 与 4 相邻, 5 与 6 相邻, 而 7 与 8 不相邻, 这样的八位数共有_____个. (用数字作答)

16. ω 是正实数, 设 $S_\omega=\{\theta|f(x)=\cos[\omega(x+\theta)]$ 是奇函数 $\}$, 若对每个实数 a, $S_\omega\cap(a,a+1)$ 的元素不超过 2 个, 且有 a 使 $S_\omega\cap(a,a+1)$ 含 2 个元素, 则 ω 的取值范围是_____.

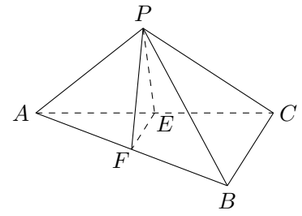
三、解答题

17. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, E、F 分别是 AC、AB 的中点, $\triangle ABC$, $\triangle PEF$ 都是正三角形, $PF\perp AB$.

(1) 证明: $PC\perp$ 平面 PAB;

(2) 求二面角 $P-AB-C$ 的平面角的余弦值;

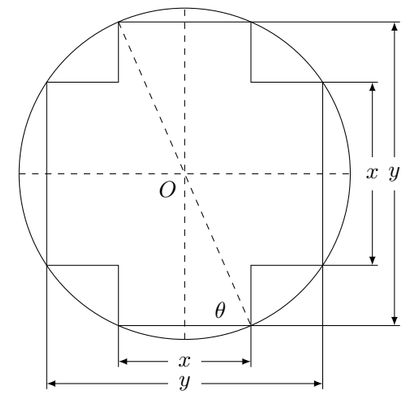
(3) 若点 P、A、B、C 在一个表面积为 12π 的球面上, 求 $\triangle ABC$ 的边长.



18. 如图, 在直径为 1 的圆 O 中, 作一关于圆心对称、邻边互相垂直的十字形, 其中 $y>x>0$.

(1) 将十字形的面积表示为 θ 的函数;

(2) θ 为何值时, 十字形的面积最大? 最大面积是多少?



19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$ $(x\neq -1)$. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=f(a_n)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=|a_n-\sqrt{3}|$, $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 用数学归纳法证明: $b_n\leqslant\dfrac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$;

(2) 证明: $S_n<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

20. 某工厂生产甲、乙两种产品, 每种产品都是经过第一和第二工序加工而成, 两道工序的加工结果相互独立, 每道工序的加工结果均有 A、B 两个等级. 对每种产品, 两道工序的加工结果都为 A 级时, 产品为一等品, 其余均为二等品.

(1) 已知甲、乙两种产品每一道工序的加工结果为 A 级的概率如表一所示, 分别求生产出的甲、乙产品为一等品的概率 $P_{甲}$、$P_{乙}$;

概率 工序 / 产品	第一工序	第二工序
甲	0.8	0.85
乙	0.75	0.8

表一

(2) 已知一件产品的利润如表二所示, 用 ξ、η 分别表示一件甲、乙产品的利润, 在 (1) 的条件下, 求 ξ、η 的分布列及 $E\xi$、E_η;

利润 等级 / 产品	一等	二等
甲	5 (万元)	2.5 (万元)
乙	2.5 (万元)	1.5 (万元)

表二

(3) 已知生产一件产品需用的工人数和资金额如表三所示. 该工厂有工人 40 名, 可用资. 金 60 万元. 设 x、y 分别表示生产甲、乙产品的数量, 在 (2) 的条件下, x、y 为何值时, $z=xE\xi+yE_\eta$ 最大? 最大值是多少?

用量 项目 / 产品	工人 (名)	资金 (万元)
甲	8	8
乙	2	10

表三

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$, Q 是椭圆外的动点, 满足 $\left|\overrightarrow{F_1Q}\right|=2a$. 点 P 是线段 F_1Q 与该椭圆的交点, 点 T 在线段 F_2Q 上, 并且满足 $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0$, $\left|\overrightarrow{TF_2}\right|\neq 0$.

(1) 设 x 为点 P 的横坐标, 证明: $\left|\overrightarrow{F_1P}\right|=a+\dfrac{c}{a}x$;

(2) 求点 T 的轨迹 C 的方程;

(3) 试问: 在点 T 的轨迹 C 上, 是否存在点 M, 使 $\triangle F_1MF_2$ 的面积 $S=b^2$. 若存在, 求 $\angle F_1MF_2$ 的正切值; 若不存在, 请说明理由.

22. 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可导, 导函数 $f'(x)$ 是减函数, 且 $f'(x)>0$. 设 $x_0\in(0,+\infty)$, $y=kx+m$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程, 并设函数 $g(x)=kx+m$.

(1) 用 x_0、$f(x_0)$、$f'(x_0)$ 表示 m;

(2) 证明: 当 $x_0\in(0,+\infty)$, $g(x)\geqslant f(x)$;

(3) 若关于 x 的不等式 $x^2+1\geqslant ax+b\geqslant\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立, 其中 a、b 为实数, 求 b 的取值范围及 a 与 b 所满足的关系.

2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}^3}{1-\sqrt{2}\mathrm{i}}=$ （　）

(A) i　(B) $-\mathrm{i}$　(C) $2\sqrt{2}-\mathrm{i}$　(D) $-2\sqrt{2}+\mathrm{i}$

2. 设 I 为全集, S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$, 则下面论断正确的是 （　）

(A) $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$　(B) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

(C) $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$　(D) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

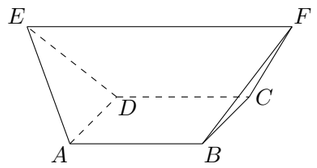
3. 一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面面积为 π, 则球的表面积为 （　）

(A) $8\sqrt{2}\pi$　(B) 8π　(C) $4\sqrt{2}\pi$　(D) 4π

4. 已知直线 l 过点 $(-2,0)$, 当直线 l 与圆 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 有两个交点时, 其斜率 k 的取值范围是 （　）

(A) $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　(B) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　(C) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$　(D) $\left(-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{8}\right)$

5. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 且 $\triangle ADE$、$\triangle BCF$ 均为正三角形, $EF\parallel AB$, $EF=2$, 则该多面体的体积为 （　）



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{4}{3}$　(D) $\dfrac{3}{2}$

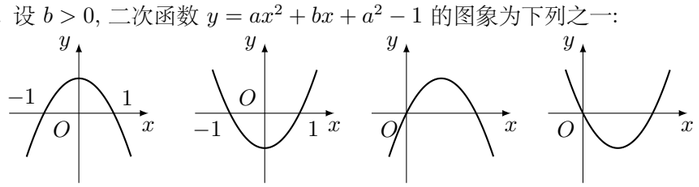
6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ $(a>0)$ 的一条准线与抛物线 $y^2=-6x$ 的准线重合, 则该双曲线的离心率为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为 （　）

(A) 2　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 4　(D) $4\sqrt{3}$

8. 设 $b>0$, 二次函数 $y=ax^2+bx+a^2-1$ 的图象为下列之一:



则 a 的值为 （　）

(A) 1　(B) -1　(C) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$　(D) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

9. 设 $0<a<1$, 函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$, 则使 $f(x)<0$ 的 x 取值范围是 （　）

(A) $f(x)$　(B) $(0,+\infty)$　(C) $(-\infty,\log_a 3)$　(D) $(\log_a 3,+\infty)$

10. 在坐标平面上, 不等式组 $\begin{cases}y\geqslant x-1\\ y\leqslant -3|x|+1\end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为 （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(D) 2

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan\dfrac{A+B}{2}=\sin C$, 给出以下四个论断: ① $\tan A\cdot\cot B=1$; ② $0<\sin A+\sin B\leqslant\sqrt{2}$; ③ $\sin^2 A+\cos^2 B=1$; ④ $\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$. 其中正确的是 （　）

(A) ①③　(B) ②④　(C) ①④　(D) ②③

12. 过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条, 其中异面直线有 （　）

(A) 18 对　(B) 24 对　(C) 30 对　(D) 36 对

二、填空题

13. 若正整数 m 满足 $10^{m-1}<2^{512}<10^m$, 则 $m=$_____. $(\lg 2\approx 0.3010)$

14. $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中, 常数项为_____. (用数字作答)

15. $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O, 两条边上的高的交点为 H, $\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, 则实数 $m=$_____.

16. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E, 交 CC' 于 F, 则:

① 四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形;

② 四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形;

③ 四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形;

④ 平面 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$.

以上结论正确的为_____. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\sin(2\pi+\varphi)$ $(-\pi<\varphi<0)$, $y=f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$.

(1) 求 φ;

(2) 求函数 $y=f(x)$ 的单调增区间;

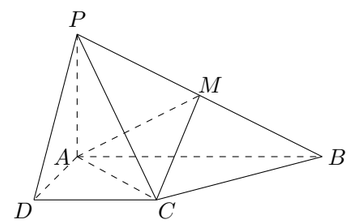
(3) 证明直线 $5x-2y+c=0$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象不相切.

18. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, $AB\parallel DC$, $\angle DAB=90^\circ$, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=AD=DE=\dfrac{1}{2}AB=1$, M 是 PB 的中点.

(1) 证明: 面 $PAD\perp$ 面 PCD;

(2) 求 AC 与 PB 所成的角;

(3) 求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.



19. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 前 n 项和 $S_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$.

(1) 求 q 的取值范围;

(2) 设 $b_n=a_{n+2}-\dfrac{3}{2}a_{n+1}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 试比较 S_n 和 T_n 的大小.

20. 9 粒种子分种在 3 个坑内, 每坑 3 粒, 每粒种子发芽的概率为 0.5, 若一个坑内至少有 1 粒种子发芽, 则这个坑不需要补种, 若一个坑里的种子都没发芽, 则这个坑需要补种, 假定每个坑至多补种一次, 每补种 1 个坑需 10 元, 用 ξ 表示补种费用, 写出 ξ 的分布列并求 ξ 的数学期望. (精确到 0.01)

21. 已知椭圆的中心为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\vec{a}=(3,-1)$ 共线.
(1) 求椭圆的离心率;
(2) 设 M 为椭圆上任意一点, 且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbf{R})$, 证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

22. (1) 设函数 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)$ $(0<x<1)$, 求 $f(x)$ 的最小值;
(2) 设正数 $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_{2^n}$ 满足 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2^n}=1$, 证明: $p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+p_3\log_2 p_3+\cdots+p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\geqslant -n$.

2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 设 I 为全集, S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 （ ）

(A) $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \varnothing$　　(B) $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$

(C) $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \varnothing$　　(D) $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$

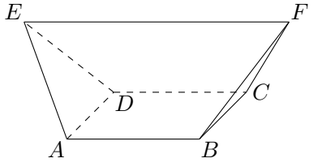
2. 一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面面积为 π, 则球的表面积为 （ ）

(A) $8\sqrt{2}\pi$　　(B) 8π　　(C) $4\sqrt{2}\pi$　　(D) 4π

3. 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$, 已知 $f(x)$ 在 $x = -3$ 时取得极值, 则 $a =$ （ ）

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

4. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 且 $\triangle ADE$、$\triangle BCF$ 均为正三角形, $EF \parallel AB$, $EF = 2$, 则该多面体的体积为 （ ）



(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\frac{4}{3}$　　(D) $\frac{3}{2}$

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ $(a > 0)$ 的一条准线与抛物线 $y^2 = -6x$ 的准线重合, 则该双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　(D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1 + \cos 2x + 8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为 （ ）

(A) 2　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) 4　　(D) $4\sqrt{3}$

7. $y = \sqrt{2x - x^2}$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$　　(B) $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$

(C) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$　　(D) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$

8. 设 $0 < a < 1$, 函数 $f(x) = \log_a(a^{2x} - 2a^x - 2)$, 则使 $f(x) < 0$ 的 x 取值范围是 （ ）

(A) $f(x)$　　(B) $(0, +\infty)$　　(C) $(-\infty, \log_a 3)$　　(D) $(\log_a 3, +\infty)$

9. 在坐标平面上, 不等式组 $\begin{cases} y \geqslant x - 1 \\ y \leqslant -3|x| + 1 \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　(D) 2

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan\frac{A+B}{2} = \sin C$, 给出以下四个论断: ① $\tan A \cdot \cot B = 1$; ② $0 < \sin A + \sin B \leqslant \sqrt{2}$; ③ $\sin^2 A + \cos^2 B = 1$; ④ $\cos^2 A + \cos^2 B = \sin^2 C$. 其中正确的是 （ ）

(A) ①③　　(B) ②④　　(C) ①④　　(D) ②③

11. 点 O 是三角形 ABC 所在平面内的一点, 满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 （ ）

(A) 三个内角的角平分线的交点　　(B) 三条边的垂直平分线的交点

(C) 三条中线的交点　　(D) 三条高的交点

12. 设直线 l 过点 $(-2, 0)$, 且与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 则 l 的斜率是 （ ）

(A) ± 1　　(B) $\pm\frac{1}{2}$　　(C) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\pm\sqrt{3}$

二、填空题

13. 若正整数 m 满足 $10^{m-1} < 2^{512} < 10^m$, 则 $m =$_____. $(\lg 2 \approx 0.3010)$

14. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中, 常数项为_____. (用数字作答)

15. 从 6 名男生和 4 名女生中, 选出 3 名代表, 要求至少包含 1 名女生, 则不同的选法有_____种.

16. 在正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, 过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E, 交 CC' 于 F, 则:

① 四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形;

② 四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形;

③ 四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形;

④ 平面 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$.

以上结论正确的为_____. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x) = \sin(2\pi + \varphi)$ $(-\pi < \varphi < 0)$, $y = f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x = \frac{\pi}{8}$.

(1) 求 φ;

(2) 求函数 $y = f(x)$ 的单调增区间;

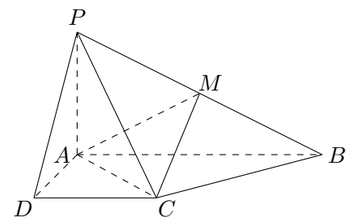
(3) 画出函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的图象.

18. 已知四棱锥 $P - ABCD$ 的底面为直角梯形, $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90°$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = AD = DE = \frac{1}{2}AB = 1$, M 是 PB 的中点.

(1) 证明: 面 $PAD \perp$ 面 PCD;

(2) 求 AC 与 PB 所成的角;

(3) 求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.



19. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a, 且不等式 $f(x) > -2x$ 的解集为 $(1, 3)$.

(1) 若方程 $f(x) + 6a = 0$ 有两个相等的根, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为正数, 求 a 的取值范围.

20. 9 粒种子分种在甲、乙、丙 3 个坑内, 每坑 3 粒, 每粒种子发芽的概率为 0.5. 若一个坑内至少有 1 粒种子发芽, 则这个坑不需要补种; 若一个坑内的种子都没发芽, 则这个坑需要补种.
(1) 求甲坑不需要补种的概率;
(2) 求 3 个坑中恰有 1 个坑不需要补种的概率;
(3) 求有坑需要补种的概率. (精确到 0.001)

21. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\dfrac{1}{2}$, 前 n 项和为 S_n, 且 $2^{10}S_{30}-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项;
(2) 求 $\{nS_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 已知椭圆的中心为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\vec{a}=(3,-1)$ 共线.
(1) 求椭圆的离心率;
(2) 设 M 为椭圆上任意一点, 且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbf{R})$, 证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点. 那么, 正方体的过 P、Q、R 的截面图形是 （ ）

(A) 三角形 (B) 四边形 (C) 五边形 (D) 六边形

3. 函数 $y=\sqrt[3]{x^2-1}\ (x\leqslant 0)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\sqrt{(x+1)^3}\ (x\geqslant -1)$ (B) $y=-\sqrt{(x+1)^3}\ (x\geqslant -1)$

(C) $y=\sqrt{(x+1)^3}\ (x\geqslant 0)$ (D) $y=-\sqrt{(x+1)^3}\ (x\geqslant 0)$

4. 已知函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是减函数, 则 （ ）

(A) $0<\omega\leqslant 1$ (B) $-1\leqslant\omega<0$ (C) $\omega\geqslant 1$ (D) $\omega\leqslant -1$

5. 设 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$, 若 $\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$ 为实数, 则 （ ）

(A) $bc+ad\neq 0$ (B) $bc-ad\neq 0$

(C) $bc-ad=0$ (D) $bc+ad=0$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为 F_1、F_2, 点 M 在双曲线上且 $MF_1\perp x$ 轴, 则 F_1 到直线 F_2M 的距离为 （ ）

(A) $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ (B) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

7. 锐角三角形的内角 A、B 满足 $\tan A-\frac{1}{\sin 2A}=\tan B$, 则有 （ ）

(A) $\sin 2A-\cos B=0$ (B) $\sin 2A+\cos B=0$

(C) $\sin 2A-\sin B=0$ (D) $\sin 2A+\sin B=0$

8. 已知点 $A(\sqrt{3},1)$, $B(0,0)$, $C(\sqrt{3},0)$. 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E, 那么有 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{CE}$, 其中 λ 等于 （ ）

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

9. 已知集合 $M=\{x|x^2-3x-28\leqslant 0\}$, $N=\{x|x^2-x-6>0\}$, 则 $M\cap N$ 为 （ ）

(A) $\{x|-4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$

(B) $\{x|-4<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<7\}$

(C) $\{x|x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$

(D) $\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

10. 点 P 在平面上作匀速直线运动, 速度向量 $\boldsymbol{v}=(4,-3)$ (即点 P 的运动方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同, 且每秒移动的距离为 $|\boldsymbol{v}|$ 个单位). 设开始时点 P 的坐标为 $(-10,10)$, 则 5 秒后点 P 的坐标为 （ ）

(A) $(-2,4)$ (B) $(-30,25)$ (C) $(10,-5)$ (D) $(5,-10)$

11. 如果 a_1, a_2, $\cdots$, a_8 为各项都大于零的等差数列, 公差 $d\neq 0$, 则 （ ）

(A) $a_1a_8>a_4a_5$ (B) $a_1a_8<a_4a_5$

(C) $a_1+a_8>a_4+a_5$ (D) $a_1a_8=a_4a_5$

12. 将半径都为 1 的 4 个铅球完全装入形状为正四面体的容品里, 这个正四面体的高最小值为 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$ (B) $2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (C) $4+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

二、填空题

13. 圆心为 $(1,2)$ 且与直线 $5x-12y-7=0$ 相切的圆的方程为_____.

14. 设 α 为第四象限的角, 若 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$, 则 $\tan 2\alpha=$_____.

15. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有_____个.

16. 下面是关于三棱锥的四个命题:

① 底面是等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥;

② 底面是等边三角形, 侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥;

③ 底面是等边三角形, 侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥;

④ 侧棱与底面所成的角都相等, 且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.

其中, 真命题的编号是_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=2^{|x+1|-|x-1|}$, 求使 $f(x)\geqslant 2\sqrt{2}$ 的 x 的取值范围.

18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, $\lg a_1$、$\lg a_2$、$\lg a_4$ 成等差数列. 又 $b_n=\frac{1}{a_{2^n}}$, $n=1,2,3,\cdots$.

(1) 证明 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(2) 如果无穷等比数列 $\{b_n\}$ 各项的和 $S=\frac{1}{3}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d.

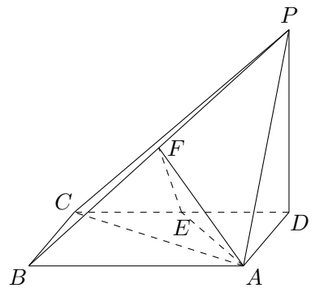
注: 无穷数列各项的和即当 $n\to\infty$ 时数列前 n 项和的极限.

19. 甲、乙两队进行一场排球比赛. 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6. 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束. 设各局比赛相互间没有影响. 令 ξ 为本场比赛的局数, 求 ξ 的概率分布和数学期望. (精确到 0.0001)

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $AD=PD$, E、F 分别为 CD、PB 的中点.

(1) 求证: $EF\perp$ 平面 PAB;

(2) 设 $AB=\sqrt{2}BC$, 求 AC 与平面 AEF 所成的角的大小.



21. P、Q、M、N 四点都在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上, F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线, $\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线, 且 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

22. 已知 $a\geqslant 0$, 函数 $f(x)=(x^2-2ax)\mathrm{e}^x$.

(1) 当 x 为何值时, $f(x)$ 取得最小值? 证明你的结论;

(2) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是单调函数, 求 a 的取值范围.

2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点. 那么, 正方体的过 P、Q、R 的截面图形是 （ ）

(A) 三角形 (B) 四边形 (C) 五边形 (D) 六边形

3. 函数 $y=x^2-1$ $(x\leqslant 0)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\sqrt{x+1}$ $(x\geqslant -1)$ (B) $y=-\sqrt{x+1}$ $(x\geqslant -1)$

(C) $y=\sqrt{x+1}$ $(x\geqslant 0)$ (D) $y=-\sqrt{x+1}$ $(x\geqslant 0)$

4. 已知函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是减函数, 则 （ ）

(A) $0<\omega\leqslant 1$ (B) $-1\leqslant\omega<0$ (C) $\omega\geqslant 1$ (D) $\omega\leqslant -1$

5. 抛物线 $x^2=4y$ 上一点 A 的纵坐标为 4, 则点 A 与抛物线焦点的距离为 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

6. 双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程是 （ ）

(A) $y=\pm\frac{2}{3}x$ (B) $y=\pm\frac{4}{9}x$ (C) $y=\pm\frac{3}{2}x$ (D) $\sqrt{3}$

7. 如果数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 （ ）

(A) $a_1+a_8<a_4+a_5$ (B) $a_1+a_8=a_4+a_5$

(C) $a_1+a_8>a_4+a_5$ (D) $a_1a_8=a_4a_5$

8. $(x-\sqrt{2}y)^{10}$ 的展开式中 x^6y^4 项的系数是 （ ）

(A) 840 (B) -840 (C) 210 (D) -210

9. 已知点 $A(\sqrt{3},1)$, $B(0,0)$, $C(\sqrt{3},0)$. 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E, 那么有 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{CE}$, 其中 λ 等于 （ ）

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

10. 已知集合 $M=\{x|x^2-3x-28\leqslant 0\}$, $N=\{x|x^2-x-6>0\}$, 则 $M\cap N$ 为 （ ）

(A) $\{x|-4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$

(B) $\{x|-4<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<7\}$

(C) $\{x|x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$

(D) $\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

11. 点 P 在平面上作匀速直线运动, 速度向量 $\boldsymbol{v}=(4,-3)$ (即点 P 的运动方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同, 且每秒移动的距离为 $|\boldsymbol{v}|$ 个单位). 设开始时点 P 的坐标为 $(-10,10)$, 则 5 秒后点 P 的坐标为 （ ）

(A) $(-2,4)$ (B) $(-30,25)$ (C) $(10,-5)$ (D) $(5,-10)$

12. $\triangle ABC$ 的顶点 B 在平面 α 内, A、C 在 α 的同一侧, AB、BC 与 α 所成的角分别是 30° 和 45°. 若 $AB=3$, $BC=4\sqrt{2}$, $AC=5$, 则 AC 与 α 所成的角为 （ ）

(A) 60° (B) 45° (C) 30° (D) 15°

二、填空题

13. 在 $\frac{8}{3}$ 和 $\frac{27}{2}$ 之间插入三个数, 使这五个数成等比数列, 则插入的三个数的乘积为_____.

14. 圆心为 $(1,2)$ 且与直线 $5x-12y-7=0$ 相切的圆的方程为_____.

15. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有_____个.

16. 下面是关于三棱锥的四个命题:

① 底面是等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥;

② 底面是等边三角形, 侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥;

③ 底面是等边三角形, 侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥;

④ 侧棱与底面所成的角都相等, 且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.

其中, 真命题的编号是_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 已知 α 为第二象限的角, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, β 为第一象限的角, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, 求 $\tan(2\alpha-\beta)$ 的值.

18. 甲、乙两队进行一场排球比赛, 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6, 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束, 设各局比赛相互间没有影响, 求:

(1) 前三局比赛甲队领先的概率;

(2) 本场比赛乙队以 3 : 2 取胜的概率. (精确到 0.001)

19. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, $\lg a_1$、$\lg a_2$、$\lg a_4$ 成等差数列. 又 $b_n=\frac{1}{a_{2^n}}$, $n=1,2,3,\cdots$.

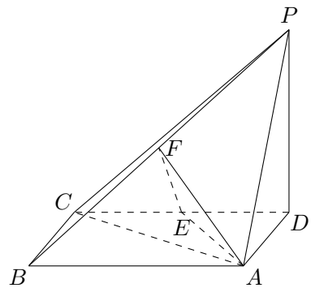
(1) 证明 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(2) 如果数列 $\{b_n\}$ 前 3 项的和等于 $\frac{7}{24}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d.

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $AD=PD$, E、F 分别为 CD、PB 的中点.

(1) 求证: $EF\perp$ 平面 PAB;

(2) 设 $AB=\sqrt{2}BC$, 求 AC 与平面 AEF 所成的角的大小.



21. 设 a 为实数, 函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 a 在什么范围内取值时, 曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴仅有一个交点.

22. P、Q、M、N 四点都在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上, F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线, $\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线, 且 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

1. 已知 α 为第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 （ ）

(A) 第一或第二象限　(B) 第二或第三象限

(C) 第一或第三象限　(D) 第二或第四象限

2. 已知过点 $A(-2,m)$ 和 $B(m,4)$ 的直线与直线 $2x+y-1=0$ 平行, 则 m 的值为 （ ）

(A) 0　(B) -8　(C) 2　(D) 10

3. 在 $(x-1)(x+1)^8$ 的展开式中 x^5 的系数是 （ ）

(A) -14　(B) 14　(C) -28　(D) 28

4. 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V, P、Q 分别是侧棱 AA_1、CC_1 上的点, 且 $PA=QC_1$, 则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为 （ ）

(A) $\frac{1}{6}V$　(B) $\frac{1}{4}V$　(C) $\frac{1}{3}V$　(D) $\frac{1}{2}V$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{2}{x^2-4x+3}\right)=$ （ ）

(A) $-\frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $-\frac{1}{6}$　(D) $\frac{1}{6}$

6. 若 $a=\frac{\ln 2}{2}$, $b=\frac{\ln 3}{3}$, $c=\frac{\ln 5}{5}$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$　(B) $c<b<a$　(C) $c<a<b$　(D) $b<a<c$

7. 设 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, 且 $\sqrt{1-\sin 2x}=\sin x-\cos x$, 则 （ ）

(A) $0\leqslant x\leqslant\pi$　(B) $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$　(D) $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$

8. $\frac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=$ （ ）

(A) $\tan\alpha$　(B) $\tan 2\alpha$　(C) 1　(D) $\frac{1}{2}$

9. 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1、F_2, 点 M 在双曲线上且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$, 则点 M 到 x 轴的距离为 （ ）

(A) $\frac{4}{3}$　(B) $\frac{5}{3}$　(C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(D) $\sqrt{3}$

10. 设椭圆的两个焦点分别为 F_1、F_2, 过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P, 若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形, 则椭圆的离心率是 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　(C) $2-\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{2}-1$

11. 不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等, 这样的平面 α 共有 （ ）

(A) 3 个　(B) 4 个　(C) 6 个　(D) 7 个

12. 计算机中常用十六进制是逢 16 进 1 的计数制, 采用数字 0 ～ 9 和字母 $A\sim F$ 共 16 个计数符号, 这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7
十六进制	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	8	9	10	11	12	13	14	15

例如, 用十六进制表示: $E+D=1B$, 则 $A\times B=$ （ ）

(A) $6E$　(B) 72　(C) $5F$　(D) $B0$

二、填空题

13. 已知复数 $z_0=3+2\mathrm{i}$, 复数 z 满足 $z\cdot z_0=3z+z_0$, 则复数 $z=$_____.

14. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(k,12)$, $\overrightarrow{OB}=(4,5)$, $\overrightarrow{OC}=(-k,10)$, 且 A、B、C 三点共线, 则 $k=$_____.

15. 设 l 为平面上过点 $(0,1)$ 的直线, l 的斜率等可能地取 $-2\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, 用 ξ 表示坐标原点到 l 的距离, 则随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi=$_____.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=3$, $AC=4$, P 是 AB 上的点, 则点 P 到 AC、BC 的距离乘积的最大值是_____.

三、解答题

17. 设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响. 已知在某一小时内, 甲、乙都需要照顾的概率为 0.05, 甲、丙都需要照顾的概率为 0.1, 乙、丙都需要照顾的概率为 0.125,

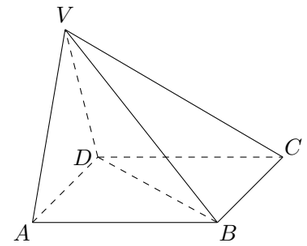
(1) 求甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别是多少;

(2) 计算这个小时内至少有一台需要照顾的概率.

18. 如图, 在四棱锥 $V-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧面 VAD 是正三角形, 平面 $VAD\perp$ 底面 $ABCD$.

(1) 证明: $AB\perp$ 平面 VAD;

(2) 求面 VAD 与面 VDB 所成的二面角的大小.



19. $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 a, b, c 成等比数列, $\cos B=\frac{3}{4}$.

(1) 求 $\cot A+\cot C$ 的值;

(2) 设 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}$, 求 $a+c$ 的值.

20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d \neq 0$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等差中项. 已知数列 a_1, a_3, a_{k_1}, a_{k_2}, $\cdots$, a_{k_n}, $\cdots$ 成等比数列, 求数列 $\{k_n\}$ 的通项 k_n.

21. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点在抛物线 $y = 2x^2$ 上, l 是 AB 的垂直平分线.
(1) 当且仅当 $x_1 + x_2$ 取何值时, 直线 l 经过抛物线的焦点 F? 证明你的结论;
(2) 当直线 l 的斜率为 2 时, 求 l 在 y 轴上截距的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = \dfrac{4x^2 - 7}{2 - x}$, $x \in [0, 1]$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和值域;
(2) 设 $a \geqslant 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a$, $x \in [0, 1]$. 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.

2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

1. 已知 α 为第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 （ ）

(A) 第一或第二象限　(B) 第二或第三象限

(C) 第一或第三象限　(D) 第二或第四象限

2. 已知过点 $A(-2,m)$ 和 $B(m,4)$ 的直线与直线 $2x+y-1=0$ 平行, 则 m 的值为 （ ）

(A) 0　(B) -8　(C) 2　(D) 10

3. 在 $(x-1)(x+1)^8$ 的展开式中 x^5 的系数是 （ ）

(A) -14　(B) 14　(C) -28　(D) 28

4. 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V, P、Q 分别是侧棱 AA_1、CC_1 上的点, 且 $PA=QC_1$, 则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为 （ ）

(A) $\frac{1}{6}V$　(B) $\frac{1}{4}V$　(C) $\frac{1}{3}V$　(D) $\frac{1}{2}V$

5. 设 $3^x=\frac{1}{7}$, 则 （ ）

(A) $-2<x<-1$　(B) $-3<x<-2$

(C) $-1<x<0$　(D) $0<x<1$

6. 若 $a=\frac{\ln 2}{2}$, $b=\frac{\ln 3}{3}$, $c=\frac{\ln 5}{5}$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$　(B) $c<b<a$　(C) $c<a<b$　(D) $b<a<c$

7. 设 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, 且 $\sqrt{1-\sin 2x}=\sin x-\cos x$, 则 （ ）

(A) $0\leqslant x\leqslant\pi$　(B) $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$　(D) $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$

8. $\frac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=$ （ ）

(A) $\tan\alpha$　(B) $\tan 2\alpha$　(C) 1　(D) $\frac{1}{2}$

9. 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1、F_2, 点 M 在双曲线上且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$, 则点 M 到 x 轴的距离为 （ ）

(A) $\frac{4}{3}$　(B) $\frac{5}{3}$　(C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(D) $\sqrt{3}$

10. 设椭圆的两个焦点分别为 F_1、F_2, 过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P, 若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形, 则椭圆的离心率是 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　(C) $2-\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{2}-1$

11. 不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等, 这样的平面 α 共有 （ ）

(A) 3 个　(B) 4 个　(C) 6 个　(D) 7 个

12. 计算机中常用十六进制是逢 16 进 1 的计数制, 采用数字 0 ～ 9 和字母 $A\sim F$ 共 16 个计数符号, 这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7
十六进制	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	8	9	10	11	12	13	14	15

例如, 用十六进制表示: $E+D=1B$, 则 $A\times B=$ （ ）

(A) $6E$　(B) 72　(C) $5F$　(D) $B0$

二、填空题

13. 经问卷调查, 某班学生对摄影分别执“喜欢”、“不喜欢”和“一般”三种态度, 其中执“一般”态度的比“不喜欢”态度的多 12 人, 按分层抽样方法从全班选出部分学生座谈摄影, 如果选出的 5 位“喜欢”摄影的同学、1 位“不喜欢”摄影的同学和 3 位执“一般”态度的同学, 那么全班学生中“喜欢”摄影的比全班人数的一半还多_____人.

14. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(k,12)$, $\overrightarrow{OB}=(4,5)$, $\overrightarrow{OC}=(-k,10)$, 且 A、B、C 三点共线, 则 $k=$_____.

15. 曲线 $y=2x-x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为_____.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=3$, $AC=4$, P 是 AB 上的点, 则点 P 到 AC、BC 的距离乘积的最大值是_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\sin^2x+\sin 2x$, $x\in[0,2\pi]$. 求使 $f(x)$ 为正值的 x 的集合.

18. 设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响. 已知在某一小时内, 甲、乙都需要照顾的概率为 0.05, 甲、丙都需要照顾的概率为 0.1, 乙、丙都需要照顾的概率为 0.125,

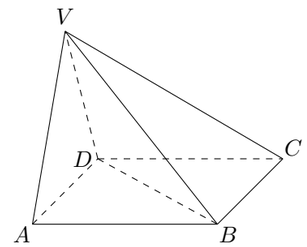
(1) 求甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别是多少;

(2) 计算这个小时内至少有一台需要照顾的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $V-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧面 VAD 是正三角形, 平面 $VAD\perp$ 底面 $ABCD$.

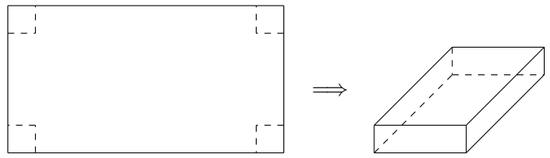
(1) 证明: $AB\perp$ 平面 VAD;

(2) 求面 VAD 与面 VDB 所成的二面角的大小.



20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d \neq 0$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等差中项. 已知数列 a_1, a_3, a_{k_1}, a_{k_2}, $\cdots$, a_{k_n}, $\cdots$ 成等比数列, 求数列 $\{k_n\}$ 的通项 k_n.

21. 用长为 90 cm, 宽为 48 cm 的长方形铁皮做一个无盖的容器, 先在四角分别截去一个小正方形, 然后把四边翻转 90° 角, 再焊接而成 (如图), 问该容器的高为多少时, 容器的容积最大? 最大容积是多少?



22. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点在抛物线 $y = 2x^2$ 上, l 是 AB 的垂直平分线.
(1) 当且仅当 $x_1 + x_2$ 取何值时, 直线 l 经过抛物线的焦点 F? 证明你的结论;
(2) 当 $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ 时, 求直线 l 的方程.

2005 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

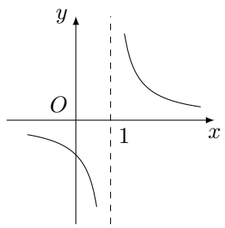
一、选择题

1. $\dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}+\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=$ （　）

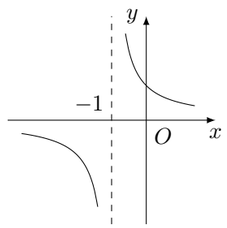
(A) i　　(B) $-\mathrm{i}$　　(C) 1　　(D) -1

2. 函数 $y=\dfrac{1-x}{x}$ $(x\neq 0)$ 的反函数图象大致是 （　）

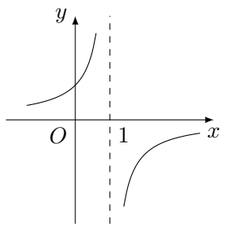
(A)



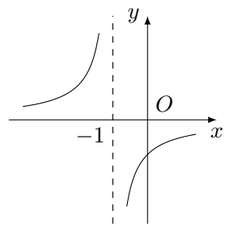
(B)



(C)



(D)



3. 已知函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$, 则下列判断正确的是 （　）

(A) 此函数的最小周期为 2π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

(B) 此函数的最小周期为 π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

(C) 此函数的最小周期为 2π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

(D) 此函数的最小周期为 π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

4. 下列函数既是奇函数, 又在区间 $[-1,1]$ 上单调递减的是 （　）

(A) $f(x)=\sin x$　　(B) $f(x)=-|x+1|$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$　　(D) $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$

5. 如果 $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 128, 则展开式中 $\dfrac{1}{x^3}$ 的系数是 （　）

(A) 7　　(B) -7　　(C) 21　　(D) -21

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x^2), & -1<x<0\\ \mathrm{e}^{x-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$, 若 $f(1)+f(a)=2$, 则 a 的所有可能值为 （　）

(A) 1　　(B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 且 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=-5\vec{a}+6\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=7\vec{a}-2\vec{b}$, 则一定共线的三点是 （　）

(A) A、B、D　　(B) A、B、C　　(C) B、C、D　　(D) A、C、D

8. 设地球的半径为 R, 若甲地位于北纬 45° 东经 120°, 乙地位于南纬 75° 东经 120°, 则甲、乙两地的球面距离为 （　）

(A) $\sqrt{3}R$　　(B) $\dfrac{\pi}{6}R$　　(C) $\dfrac{5\pi}{6}R$　　(D) $\dfrac{2\pi}{3}R$

9. 10 张奖券中只有 3 张有奖, 5 个人购买, 每人 1 张, 至少有 1 人中奖的概率是 （　）

(A) $\dfrac{3}{10}$　　(B) $\dfrac{1}{12}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{11}{12}$

10. 设集合 A、B 是全集 U 的两个子集, 则 $A\subsetneqq B$ 是 $\left(\complement_U A\right)\cup B=U$ 的（　）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

11. $0<a<1$, 下列不等式一定成立的是 （　）

(A) $|\log_{(1+a)}(1-a)|+|\log_{(1-a)}(1+a)|>2$

(B) $|\log_{(1+a)}(1-a)|<|\log_{(1-a)}(1+a)|$

(C) $|\log_{(1+a)}(1-a)+\log_{(1-a)}(1+a)|<|\log_{(1+a)}(1-a)|+|\log_{(1-a)}(1+a)|$

(D) $|\log_{(1+a)}(1-a)-\log_{(1-a)}(1+a)|<|\log_{(1+a)}(1-a)|-|\log_{(1-a)}(1+a)|$

12. 设直线 $l:2x+y+2=0$ 关于原点对称的直线为 l', 若 l' 与椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的交点为 A、B, 点 P 为椭圆上的动点, 则使 $\triangle PAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}$ 的点 P 的个数为 （　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

二、填空题

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{C}_n^2+2\mathrm{C}_n^{n-2}}{(n+1)^2}=$_____.

14. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 右准线 l 与两条渐近线交于 P、Q 两点, 如果 $\triangle PQF$ 是直角三角形, 则双曲线的离心率 $e=$_____.

15. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5\\ 3x+2y\leqslant 12\\ 0\leqslant x\leqslant 3\\ 0\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$, 则使得目标函数 $z=6x+5y$ 的最大的点 (x,y) 是_____.

16. 已知 m、n 是不同的直线, α、β 是不重合的平面, 给出下列命题:

① 若 $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 $m\parallel n$;

② 若 m, $n\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

③ 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

④ m, n 是两条异面直线, 若 $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\alpha$, $n\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$.

上面的命题中, 真命题的序号是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知向量 $\vec{m}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 和 $\vec{n}=\left(\sqrt{2}-\sin\theta,\cos\theta\right)$, $\theta\in(\pi,2\pi)$, 且 $|\vec{m}+\vec{n}|=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$, 求 $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的值.

18. 袋中装有黑球和白球共 7 个, 从中任取 2 个球都是白球的概率为 $\dfrac{1}{7}$, 现有甲、乙两人从袋中轮流摸取 1 球, 甲先取, 乙后取, 然后甲再取 $\cdots$, 取后不放回, 直到两人中有一人取到白球时既终止. 每个球在每一次被取出的机会是等可能的, 用 ξ 表示取球终止所需要的取球次数.

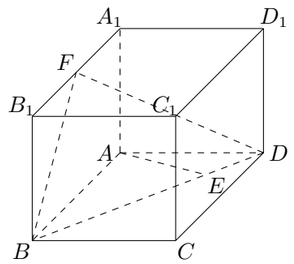
(1) 求袋中所有的白球的个数;

(2) 求随机变量 ξ 的概率分布;

(3) 求甲取到白球的概率.

19. 已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=mx^3-3(m+1)x^2+nx+1$ 的一个极值点, 其中 $m,\ n\in\mathbf{R},\ m<0$.
(1) 求 m 与 n 的关系式;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(3) 当 $x\in[-1,1]$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的图象上任意一点的切线斜率恒大于 $3m$, 求 m 的取值范围.

20. 如图, 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=2$, $AA_1=1$, 直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 30°, AE 垂直 BD 于 E, F 为 A_1B_1 的中点.
(1) 求异面直线 AE 与 BF 所成的角;
(2) 求平面 BDF 与平面 AA_1B 所成的二面角 (锐角) 的大小;
(3) 求点 A 到平面 BDF 的距离.



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=5$, 前 n 项和为 S_n, 且 $S_{n+1}=S_n+n+5$ ($n\in\mathbf{N}^*$).
(1) 证明数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列;
(2) 令 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 求函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$ 并比较 $2f'(1)$ 与 $23n^2-13n$ 的大小.

22. 已知动圆过定点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$, 且与直线 $x=-\frac{p}{2}$ 相切, 其中 $p>0$.
(1) 求动圆圆心 C 的轨迹的方程;
(2) 设 A、B 是轨迹 C 上异于原点 O 的两个不同点, 直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为 α 和 β, 当 α, β 变化且 $\alpha+\beta$ 为定值 θ ($0<\theta<\pi$) 时, 证明直线 AB 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

2005 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$, 公差 $d=3$ 的等差数列, 如果 $a_n=2005$, 则序号 n 等于 （ ）

(A) 667　　(B) 668　　(C) 669　　(D) 670

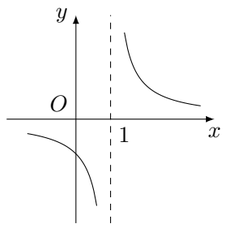
2. 下列大小关系正确的是 （ ）

(A) $0.4^3<3^{0.4}<\log_4 0.3$　　(B) $0.4^3<\log_4 0.3<3^{0.4}$

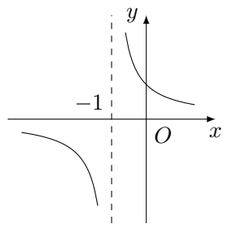
(C) $\log_4 0.3<0.4^3<3^{0.4}$　　(D) $\log_4 0.3<3^{0.4}<0.4^3$

3. 函数 $y=\dfrac{1-x}{x}$ $(x\neq 0)$ 的反函数图象大致是 （ ）

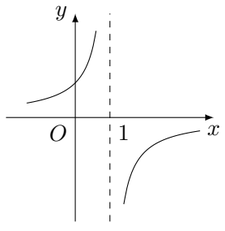
(A)



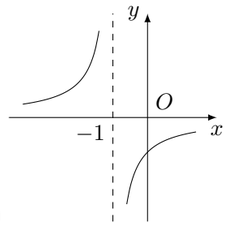
(B)



(C)



(D)



4. 已知函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$, 则下列判断正确的是 （ ）

(A) 此函数的最小周期为 2π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

(B) 此函数的最小周期为 π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

(C) 此函数的最小周期为 2π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

(D) 此函数的最小周期为 π, 其图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

5. 下列函数既是奇函数, 又在区间 $[-1,1]$ 上单调递减的是 （ ）

(A) $f(x)=\sin x$　　(B) $f(x)=-|x+1|$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$　　(D) $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$

6. 如果 $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 128, 则展开式中 $\dfrac{1}{x^3}$ 的系数是 （ ）

(A) 7　　(B) -7　　(C) 21　　(D) -21

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x^2), & -1<x<0\\ \mathrm{e}^{x-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$, 若 $f(1)+f(a)=2$, 则 a 的所有可能值为 （ ）

(A) 1　　(B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 且 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=-5\vec{a}+6\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=7\vec{a}-2\vec{b}$, 则一定共线的三点是 （ ）

(A) A、B、D　　(B) A、B、C　　(C) B、C、D　　(D) A、C、D

9. 设地球的半径为 R, 若甲地位于北纬 45° 东经 120°, 乙地位于南纬 75° 东经 120°, 则甲、乙两地的球面距离为 （ ）

(A) $\sqrt{3}R$　　(B) $\dfrac{\pi}{6}R$　　(C) $\dfrac{5\pi}{6}R$　　(D) $\dfrac{2\pi}{3}R$

10. 10 张奖券中只有 3 张有奖, 5 个人购买, 每人 1 张, 至少有 1 人中奖的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{3}{10}$　　(B) $\dfrac{1}{12}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{11}{12}$

11. 设集合 A、B 是全集 U 的两个子集, 则 $A\subsetneqq B$ 是 $\left(\complement_U A\right)\cup B=U$ 的（ ）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

12. 设直线 $l:2x+y+2=0$ 关于原点对称的直线为 l', 若 l' 与椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的交点为 A、B, 点 P 为椭圆上的动点, 则使 $\triangle PAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}$ 的点 P 的个数为 （ ）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

二、填空题

13. 某学校共有教师 490 人, 其中不到 40 岁的有 350 人, 40 岁及以上的有 140 人, 为了解普通话在该校教师中的推广普及情况, 用分层抽样的方法, 从全体教师中抽取一个容量为 70 人的样本进行普通话水平测试, 其中在不到 40 岁的教师中应抽取的人数是_____.

14. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 右准线 l 与两条渐近线交于 P、Q 两点, 如果 $\triangle PQF$ 是直角三角形, 则双曲线的离心率 $e=$_____.

15. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5\\ 3x+2y\leqslant 12\\ 0\leqslant x\leqslant 3\\ 0\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$, 则使得目标函数 $z=6x+5y$ 的最大的点 (x,y) 是_____.

16. 已知 m、n 是不同的直线, α、β 是不重合的平面, 给出下列命题:

① 若 $m\parallel\alpha$, 则 m 平行于平面 α 内的任一条直线;

② 若 $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 $m\parallel n$;

③ 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

④ 若 $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, 则 $m\parallel\beta$.

上面的命题中, 真命题的序号是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知向量 $\vec{m}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 和 $\vec{n}=\left(\sqrt{2}-\sin\theta,\cos\theta\right)$, $\theta\in(\pi,2\pi)$, 且 $|\vec{m}+\vec{n}|=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$, 求 $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的值.

18. 袋中装有黑球和白球共 7 个, 从中任取 2 个球都是白球的概率为 $\dfrac{1}{7}$, 现有甲、乙两人从袋中轮流摸取 1 球, 甲先取, 乙后取, 然后甲再取 $\cdots$, 取后不放回, 直到两人中有一人取到白球时既终止, 每个球在每一次被取出的机会是等可能的.

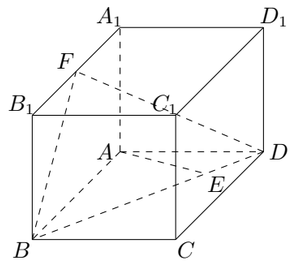
(1) 求袋中原有的白球的个数;

(2) 求取球 2 次终止的概率;

(3) 求甲取到白球的概率.

19. 已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=mx^3-3(m+1)x^2+nx+1$ 的一个极值点, 其中 $m,\ n\in\mathbf{R},\ m<0$.
(1) 求 m 与 n 的关系式;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

20. 如图, 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=2$, $AA_1=1$, 直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 30°, AE 垂直 BD 于 E, F 为 A_1B_1 的中点.
(1) 求异面直线 AE 与 BF 所成的角;
(2) 求平面 BDF 与平面 AA_1B 所成的二面角 (锐角) 的大小;
(3) 求点 A 到平面 BDF 的距离.



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=5$, 前 n 项和为 S_n, 且 $S_{n+1}=S_n+n+5$ ($n\in\mathbf{N}^*$).
(1) 证明数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列;
(2) 令 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 求函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$.

22. 已知动圆过定点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$, 且与直线 $x=-\frac{p}{2}$ 相切, 其中 $p>0$.
(1) 求动圆圆心 C 的轨迹的方程;
(2) 设 A、B 是轨迹 C 上异于原点 O 的两个不同点, 直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为 α 和 β, 当 α, β 变化且 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, 证明直线 AB 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

2005 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

2. 方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是_____.

3. 直角坐标平面 xOy 中, 若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$, 则点 P 的轨迹方程是_____.

4. 在 $(x-a)^{10}$ 的展开式中, x^7 的系数是 15, 则实数 $a=$_____.

5. 若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 3x$, 它的一个焦点是 $(\sqrt{10},0)$, 则双曲线的方程是_____.

6. 将参数方程 $\begin{cases}x=1+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 化为普通方程, 所得方程是_____.

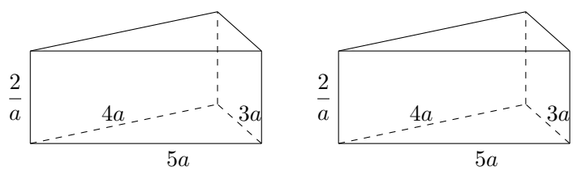
7. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^{n-1}}=$_____.

8. 某班有 50 名学生, 其中 15 人选修 A 课程, 另外 35 人选修 B 课程. 从班级中任选两名学生, 他们是选修不同课程的学生的概率是_____. (结果用分数表示)

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A=120^\circ$, $AB=5$, $BC=7$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=$_____.

10. 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是_____.

11. 有两个相同的直三棱柱, 高为 $\dfrac{2}{a}$, 底面三角形的三边长分别为 $3a$, $4a$, $5a$ ($a>0$). 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱, 在所有可能的情形中, 全面积最小的是一个四棱柱, 则 a 的取值范围是_____.



12. 用 n 个不同的实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 可得到 $n!$ 个不同的排列, 每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵. 对第 i 行 a_{i1}, a_{i2}, $\cdots$, a_{in}, 记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$, $i=1,2,3,\cdots,n!$. 例如: 用 1, 2, 3 可得数阵如图, 由于此数阵中每一列各数之和都是 12, 所以, $b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times12-3\times12=-24$, 那么, 在用 1, 2, 3, 4, 5 形成的数阵中, $b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$_____.

$$\begin{array}{ccc}1&2&3\\1&3&2\\2&1&3\\2&3&1\\3&1&2\\3&2&1\end{array}$$

二、选择题

13. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$, 则该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 ( )

(A) 单调递减无最小值　(B) 单调递减有最小值

(C) 单调递增无最大值　(D) 单调递增有最大值

14. 已知集合 $M=\{x||x-1|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$, $P=\left\{x\left|\dfrac{5}{x+1}\geqslant 1,x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$, 则 $M\cap P$ 等于 ( )

(A) $\{x|0<x\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}$　(B) $\{x|0\leqslant x\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 0,x\in\mathbf{Z}\}$　(D) $\{x|-1\leqslant x<0,x\in\mathbf{Z}\}$

15. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于 A、B 两点, 它们的横坐标之和等于 5, 则这样的直线 ( )

(A) 有且仅有一条　(B) 有且仅有两条

(C) 有无穷多条　(D) 不存在

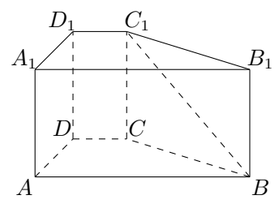
16. 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg|x-1||, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$, 则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是 ( )

(A) $b<0$ 且 $c>0$　(B) $b>0$ 且 $c<0$

(C) $b<0$ 且 $c=0$　(D) $b\geqslant 0$ 且 $c=0$

三、解答题

17. 如图, 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $\angle A$ 是直角, $AB\parallel CD$, $AB=4$, $AD=2$, $DC=1$, 求异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)

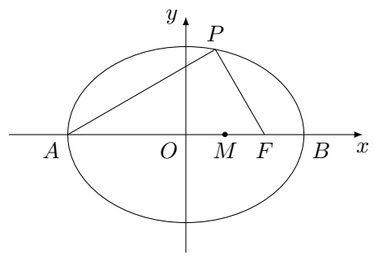


18. 证明: 在复数范围内, 方程 $|z|^2+(1-\mathrm{i})\overline{z}-(1+\mathrm{i})z=\dfrac{5-5\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位) 无解.

19. r 如图, 点 A、B 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 长轴的左、右端点, 点 F 是椭圆的右焦点, 点 P 在椭圆上, 且位于 x 轴上方, $PA\perp PF$.

(1) 求点 P 的坐标;

(2) 设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点, M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$, 求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.



20. 假设某市 2004 年新建住房面积 400 万平方米, 其中有 250 万平方米是中低价房. 预计在今后的若干年内, 该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%. 另外, 每年新建住房中, 中低价房的面积均比上一年增加 50 万平方米. 那么, 到哪一年底,

(1) 该市历年所建中低价层的累计面积 (以 2004 年为累计的第一年) 将首次不少于 4750 万平方米?

(2) 当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

21. 对定义域是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$, 规定: 函数

$$h(x)=\begin{cases} f(x)g(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\in D_g \\ f(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\notin D_g \\ g(x), & \text{当 } x\notin D_f \text{ 且 } x\in D_g \end{cases}.$$

(1) 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=x^2$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;

(2) 求问题 (1) 中函数 $h(x)$ 的值域;

(3) 若 $g(x)=f(x+\alpha)$, 其中 α 是常数, 且 $\alpha\in[0,\pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x)=\cos 4x$, 并予以证明.

22. 在直角坐标平面中, 已知点 $P_1(1,2)$, $P_2(2,2^2)$, $P_3(3,2^3)$, $\cdots$, $P_n(n,2^n)$, 其中 n 是正整数, 对平面上任一点 A_0, 记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点, A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点, $\cdots$, A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点.

(1) 求向量 $\overrightarrow{A_0A_2}$ 的坐标;

(2) 当点 A_0 在曲线 C 上移动时, 点 A_2 的轨迹是函数 $y=f(x)$ 的图象, 其中 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数, 且当 $x\in(0,3]$ 时, $f(x)=\lg x$. 求以曲线 C 为图象的函数在 $(1,4]$ 上的解析式;

(3) 对任意偶数 n, 用 n 表示向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 的坐标.

2005 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

2. 方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是_____.

3. 若 x, y 满足条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 3\\ y\leqslant 2x\end{cases}$，则 $z=3x+4y$ 的最大值是_____.

4. 直角坐标平面 xOy 中，若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$，则点 P 的轨迹方程是_____.

5. 函数 $y=\cos 2x+\sin x\cos x$ 的最小正周期 $T=$_____.

6. 若 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=$_____.

7. 若椭圆长轴长与短轴长之比为 2，它的一个焦点是 $\left(2\sqrt{15},0\right)$，则椭圆的标准方程是_____.

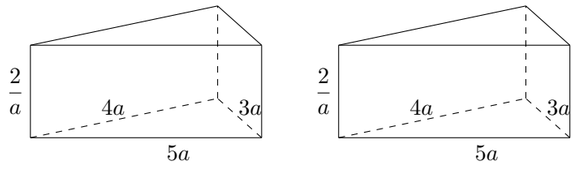
8. 某班有 50 名学生，其中 15 人选修 A 课程，另外 35 人选修 B 课程. 从班级中任选两名学生，他们是选修不同课程的学生的概率是_____. (结果用分数表示)

9. 直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是_____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $A=120^\circ$, $AB=5$, $BC=7$，则 $AC=$_____.

11. 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点，则 k 的取值范围是_____.

12. 有两个相同的直三棱柱，高为 $\dfrac{2}{a}$，底面三角形的三边长分别为 $3a$, $4a$, $5a$ $(a>0)$. 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱，在所有可能的情形中，全面积最小的是一个四棱柱，则 a 的取值范围是_____.



二、选择题

13. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$，则该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 （ ）

(A) 单调递减无最小值　(B) 单调递减有最小值

(C) 单调递增无最大值　(D) 单调递增有最大值

14. 已知集合 $M=\{x||x-1|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$, $P=\left\{x\left|\dfrac{5}{x+1}\geqslant 1, x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则 $M\cap P$ 等于 （ ）

(A) $\{x|0<x\leqslant 3, x\in\mathbf{Z}\}$　(B) $\{x|0\leqslant x\leqslant 3, x\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 0, x\in\mathbf{Z}\}$　(D) $\{x|-1\leqslant x<0, x\in\mathbf{Z}\}$

15. 条件甲: “$a>1$”是条件乙: “$a>\sqrt{a}$”的 （ ）

(A) 既不充分也不必要条件　(B) 充要条件

(C) 充分不必要条件　(D) 必要不充分条件

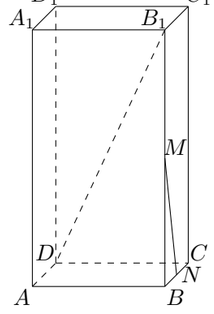
16. 用 n 个不同的实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 可得到 $n!$ 个不同的排列，每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵. 对第 i 行 a_{i1}, a_{i2}, $\cdots$, a_{in}，记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$, $i=1, 2, 3, \cdots, n!$. 例如：用 1, 2, 3 可得数阵如图，由于此数阵中每一列各数之和都是 12，所以，$b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times 12-3\times 12=-24$，那么，在用 1, 2, 3, 4, 5 形成的数阵中，$b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$ （ ）

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

(A) -3600　(B) 1800　(C) -1080　(D) -720

三、解答题

17. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是 BB_1 和 BC 的中点，$AB=4$, $AD=2$, B_1D 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 60°，求异面直线 B_1D 与 MN 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 在复数范围内解方程 $|z|^2+(z+\bar{z})\mathrm{i}=\dfrac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$. (i 为虚数单位)

19. 已知函数 $f(x)=kx+b$ 的图象与 x, y 轴分别相交于点 A、B, $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$ 分别是与 x, y 轴正半轴同方向的单位向量)，函数 $g(x)=x^2-x-6$.

(1) 求 k, b 的值;

(2) 当 x 满足 $f(x)>g(x)$ 时，求函数 $\dfrac{g(x)+1}{f(x)}$ 的最小值.

20. 假设某市 2004 年新建住房面积 400 万平方米, 其中有 250 万平方米是中低价房. 预计在今后的若干年内, 该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%. 另外, 每年新建住房中, 中低价房的面积均比上一年增加 50 万平方米. 那么, 到哪一年底,

(1) 该市历年所建中低价层的累计面积 (以 2004 年为累计的第一年) 将首次不少于 4750 万平方米?

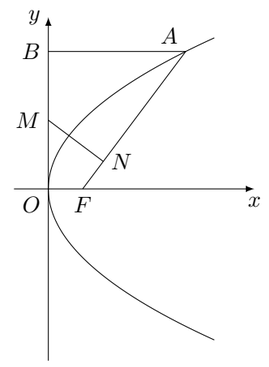
(2) 当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

21. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, A 是抛物线上横坐标为 4、且位于 x 轴上方的点, A 到抛物线准线的距离等于 5. 过 A 作 AB 垂直于 y 轴, 垂足为 B, OB 的中点为 M.

(1) 求抛物线方程;

(2) 过 M 作 $MN\perp FA$, 垂足为 N, 求点 N 的坐标;

(3) 以 M 为圆心, MB 为半径作圆 M, 当 $K(m,0)$ 是 x 轴上一动点时, 讨论直线 AK 与圆 M 的位置关系.



22. 对定义域是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$, 规定: 函数 $h(x)=\begin{cases}f(x)g(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\in D_g\\ f(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\notin D_g\\ g(x), & \text{当 } x\notin D_f \text{ 且 } x\in D_g\end{cases}$.

(1) 若函数 $f(x)=-2x+3$, $x\geqslant 1$ $g(x)=x-2$, $x\in\mathbf{R}$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;

(2) 求问题 (1) 中函数 $h(x)$ 的最大值;

(3) 若 $g(x)=f(x+\alpha)$, 其中 α 是常数, 且 $\alpha\in[0,\pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x)=\cos 4x$, 并予以证明.

2005 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x||4x-1|\geqslant 9, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\left\{x\left|\frac{x}{x+3}\geqslant 0, x\in\mathbf{R}\right.\right\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $(-3,-2]$　　(B) $(-3,-2]\cup\left[0,\frac{5}{2}\right]$

(C) $(-\infty,-3]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$　　(D) $(-\infty,-3)\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$

2. 若复数 $\frac{a+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ ($a\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位位) 是纯虚数, 则实数 a 的值为（　）

(A) -2　　(B) 4　　(C) -6　　(D) 6

3. 给出下列三个命题:

① 若 $a\geqslant b>-1$, 则 $\frac{a}{1+a}\geqslant\frac{b}{1+b}$;

② 若正整数 m 和 n 满足 $m\leqslant n$, 则 $\sqrt{m(n-m)}\leqslant\frac{n}{2}$;

③ 设 $P(x_1,y_1)$ 为圆 $O_1: x^2+y^2=9$ 上任一点, 圆 O_2 以 $Q(a,b)$ 为圆心且半径为 1. 当 $(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$ 时, 圆 O_1 与圆 O_2 相切.

其中假命题的个数为 （　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 设 α, β, γ 为平面, m, n, l 为直线, 则 $m\perp\beta$ 的一个充分条件是 （　）

(A) $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $m\perp l$　　(B) $\alpha\cap\gamma=m$, $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$

(C) $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, $m\perp\alpha$　　(D) $n\perp\alpha$, $n\perp\beta$, $m\perp\alpha$

5. 设双曲线以椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 长轴的两个端点为焦点, 其准线过椭圆的焦点, 则双曲线的渐近线的斜率为 （　）

(A) ±2　　(B) $\pm\frac{4}{3}$　　(C) $\pm\frac{1}{2}$　　(D) $\pm\frac{3}{4}$

6. 从集合 $\{1,2,3\cdots,11\}$ 中任选两个元素作为椭圆方程 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ 中的 m 和 n, 则能组成落在矩形区域 $B=\{(x,y)||x|<11$ 且 $|y|<9\}$ 内的椭圆个数为 （　）

(A) 43　　(B) 72　　(C) 86　　(D) 90

7. 某人射击一次击中的概率为 0.6, 经过 3 次射击, 此人至少有两次击中目标的概率为 （　）

(A) $\frac{81}{125}$　　(B) $\frac{54}{125}$　　(C) $\frac{36}{125}$　　(D) $\frac{27}{125}$

8. 要得到函数 $y=\sqrt{2}\cos x$ 的图象, 只需将函数 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象上所有的点的 （　）

(A) 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

(B) 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

(C) 横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向左平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

(D) 横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

9. 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$ ($a>1$) 的反函数, 则使 $f^{-1}(x)>1$ 成立的 x 的取值范围为 （　）

(A) $\left(\frac{a^2-1}{2a},+\infty\right)$　　(B) $\left(-\infty,\frac{a^2-1}{2a}\right)$

(C) $\left(\frac{a^2-1}{2a},a\right)$　　(D) $[a,+\infty)$

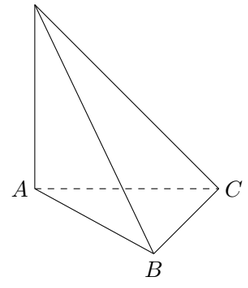
10. 若函数 $f(x)=\log_a(x^3-ax)$ ($a>0$, $a\neq1$) 在区间 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 内单调递增, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $\left[\frac{1}{4},1\right)$　　(B) $\left[\frac{3}{4},1\right)$　　(C) $\left(\frac{9}{4},+\infty\right)$　　(D) $\left(1,\frac{9}{4}\right)$

二、填空题

11. 设 $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2 6+\mathrm{C}_n^3 6^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n 6^{n-1}=$_____.

12. 如图, $PA\perp$ 平面 ABC, $\angle ACB=90^\circ$ 且 $PA=AC=BC=a$, 则异面直线 PB 与 AC 所成角的正切值等于_____.



13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$ ($n\in\mathbf{N}^*$), 则 $S_{100}=$_____.

14. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0,1)$ 和点 $B(-3,4)$, 若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上且 $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2$, 则 $\overrightarrow{OC}=$_____.

15. 某公司有 5 万元资金用于投资开发项目, 如果成功, 一年后可获利 12%, 一旦失败, 一年后将丧失全部资金的 50%, 下表是过去 200 例类似项目开发的实施结果:

投资成功	投资失败
192 次	8 次

则该公司一年后估计可获收益的期望是_____(元).

16. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=$_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 所对的边长分别为 a, b, c, 设 a, b, c 满足条件 $b^2+c^2-bc=a^2$ 和 $\frac{c}{b}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$, 求 $\angle A$ 和 $\tan B$ 的值.

18. 已知 $u_n=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n$ ($n\in\mathbf{N}^*$, $a>0$, $b>0$).

(1) 当 $a=b$ 时, 求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

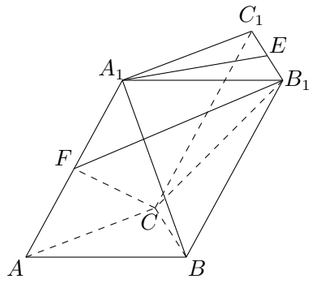
(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}$.

19. 如图, 在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle A_1AB=\angle A_1AC$, $AB=AC$, $A_1A=A_1B=a$, 侧面 B_1BCC_1 与底面 ABC 所成的二面角为 $120°$, E、F 分别是棱 B_1C_1, A_1A 的中点.

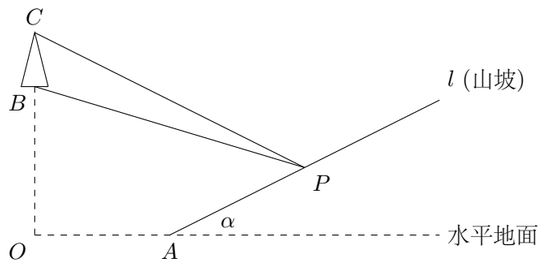
(1) 求 A_1A 与底面 ABC 所成的角;

(2) 证明 A_1E // 平面 B_1FC;

(3) 求经过 A_1, A, B, C 四点的球的体积.



20. 某人在一山坡 P 处观看对面山项上的一座铁塔, 如图所示, 塔高 $BC=80$ (米), 塔所在的山高 $OB=220$ (米), $OA=200$ (米), 图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上, l 与水平地面的夹角为 α, $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. 试问此人距水平地面多高时, 观看塔的视角 $\angle BPC$ 最大? (不计此人的身高)



21. 抛物线 C 的方程为 $y=ax^2$ $(a<0)$, 过抛物线 C 上一点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0\neq 0)$ 作斜率为 k_1, k_2 的两条直线分别交抛物线 C 于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点 (P, A, B 三点互不相同), 且满足 $k_2+\lambda k_1=0$ $(\lambda\neq 0,\ \lambda\neq -1)$.

(1) 求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程;

(2) 设直线 AB 上一点 M, 满足 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$, 证明线段 PM 的中点在 y 轴上;

(3) 当 $\lambda=1$ 时, 若点 P 的坐标为 $(1,-1)$, 求 $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.

22. 设函数 $f(x)=x\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$.

(1) 证明 $f(x+2k\pi)-f(x)=2k\pi\sin x$, 其中 k 为整数;

(2) 设 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点, 证明 $[f(x_0)]^2=\dfrac{{x_0}^4}{1+{x_0}^2}$;

(3) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的全部极值点按从小到大的顺序排列 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$, 证明 $\dfrac{\pi}{2}<a_{n+1}-a_n<\pi$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$.

2005 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|0\leqslant x<3 \text{ 且 } x\in\mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是 （ ）

(A) 16 (B) 8 (C) 7 (D) 4

2. 已知 $\log_{\frac{1}{2}}b<\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}c$, 则 （ ）

(A) $2^b>2^a>2^c$ (B) $2^a>2^b>2^c$

(C) $2^c>2^b>2^a$ (D) $2^c>2^a>2^b$

3. 某人射击一次击中的概率为 0.6, 经过 3 次射击, 此人至少有两次击中目标的概率为 （ ）

(A) $\frac{81}{125}$ (B) $\frac{54}{125}$ (C) $\frac{36}{125}$ (D) $\frac{27}{125}$

4. 将直线 $2x-y+\lambda=0$ 沿 x 轴向左平移 1 个单位, 所得直线与圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 相切, 则实数 λ 的值为

(A) -3 或 7 (B) -2 或 8 (C) 0 或 10 (D) 1 或 11

5. 设 α,β,γ 为平面, m,n,l 为直线, 则 $m\perp\beta$ 的一个充分条件是 （ ）

(A) $\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l,m\perp l$ (B) $\alpha\cap\gamma=m,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$

(C) $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,m\perp\alpha$ (D) $n\perp\alpha,n\perp\beta,m\perp\alpha$

6. 设双曲线以椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 长轴的两个端点为焦点, 其准线过椭圆的焦点, 则双曲线的渐近线的斜率为 （ ）

(A) ±2 (B) $\pm\frac{4}{3}$ (C) $\pm\frac{1}{2}$ (D) $\pm\frac{3}{4}$

7. 给出下列三个命题:

① 若 $a\geqslant b>-1$, 则 $\frac{a}{1+a}\geqslant\frac{b}{1+b}$;

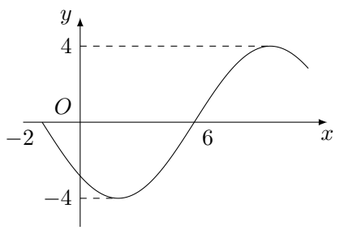
② 若正整数 m 和 n 满足 $m\leqslant n$, 则 $\sqrt{m(n-m)}\leqslant\frac{n}{2}$;

③ 设 $P(x_1,y_1)$ 为圆 $O_1:x^2+y^2=9$ 上任一点, 圆 O_2 以 $Q(a,b)$ 为圆心且半径为 1. 当 $(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$ 时, 圆 O_1 与圆 O_2 相切.

其中假命题的个数为 （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

8. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2},\ x\in\mathbf{R}\right)$ 的部分图象如图所示, 则函数表达式为 （ ）



(A) $y=-4\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)$ (B) $y=4\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{4}\right)$

(C) $y=-4\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{4}\right)$ (D) $y=4\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)$

9. 若函数 $f(x)=\log_a(2x^2+x)$ $(a>0,\ a\neq1)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内恒有 $f(x)>0$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间为 （ ）

(A) $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$ (B) $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

(C) $(0,+\infty)$ (D) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 6 为周期的函数, $f(x)$ 在 $(0,3)$ 内单调递增, 且 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称, 则下面正确的结论是 （ ）

(A) $f(1.5)<f(3.5)<f(6.5)$ (B) $f(3.5)<f(1.5)<f(6.5)$

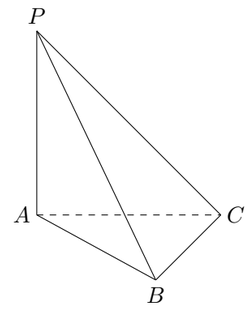
(C) $f(6.5)<f(3.5)<f(1.5)$ (D) $f(3.5)<f(6.5)<f(1.5)$

二、填空题

11. 二项式 $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式中常数项为_____. (用数字作答)

12. 已知 $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为邻边作平行四边形, 则此平行四边形的两条对角线中较短的一条的长度为_____.

13. 如图, $PA\perp$ 平面 ABC, $\angle ACB=90^\circ$ 且 $PA=AC=BC=a$, 则异面直线 PB 与 AC 所成角的正切值等于_____.

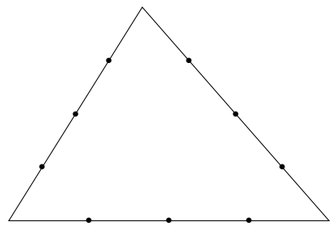


14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $S_{10}=$_____.

15. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0,1)$ 和点 $B(-3,4)$, 若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上且 $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2$, 则 $\overrightarrow{OC}=$_____.

16. 设函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$, 则函数 $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域为_____.

17. 在三角形的每条边上各取三个分点 (如图). 以这 9 个分点为顶点可画出若干个三角形, 若从中任意抽取一个三角形, 则其三个顶点分别落在原三角形的三条不同边上的概率为_____. (用数字作答)



三、解答题

18. 已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos2\alpha=\frac{7}{25}$, 求 $\sin\alpha$ 及 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$.

19. 若公比为 c 的等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$ 且满足 $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ $(n=3,\ 4,\ \cdots)$.

(1) 求 c 的值;

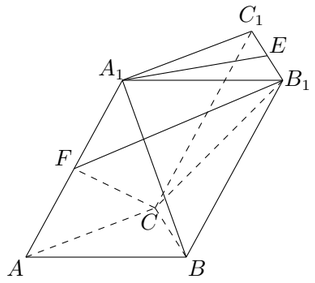
(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20. 如图, 在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle A_1AB=\angle A_1AC$, $AB=AC$, $A_1A=A_1B=a$, 侧面 B_1BCC_1 与底面 ABC 所成的二面角为 $120°$, E、F 分别是棱 B_1C_1, A_1A 的中点.

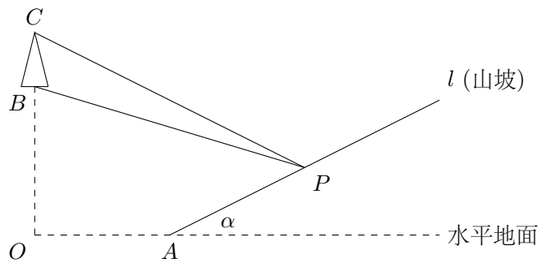
(1) 求 A_1A 与底面 ABC 所成的角;

(2) 证明 A_1E // 平面 B_1FC;

(3) 求经过 A_1, A, B, C 四点的球的体积.



21. 某人在一山坡 P 处观看对面山项上的一座铁塔, 如图所示, 塔高 $BC=80$ (米), 塔所在的山高 $OB=220$ (米), $OA=200$ (米), 图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上, l 与水平地面的夹角为 α, $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. 试问此人距水平地面多高时, 观看塔的视角 $\angle BPC$ 最大? (不计此人的身高)



22. 已知 $m\in\mathbf{R}$, 设 P: x_1 和 x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两个实根, 不等式 $|m^2-5m-3|\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意实数 $a\in[-1,1]$ 恒成立; Q: 函数 $f(x)=x^3+mx^2+\left(m+\dfrac{4}{3}\right)x+6$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有极值. 求使 P 正确且 Q 正确的 m 的取值范围.

23. 抛物线 C 的方程为 $y=ax^2$ $(a<0)$, 过抛物线 C 上一点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0\neq0)$ 作斜率为 k_1, k_2 的两条直线分别交抛物线 C 于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点 (P, A, B 三点互不相同), 且满足 $k_2+\lambda k_1=0$ $(\lambda\neq0,\ \lambda\neq-1)$.

(1) 求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程;

(2) 设直线 AB 上一点 M, 满足 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$, 证明线段 PM 的中点在 y 轴上;

(3) 当 $\lambda=1$ 时, 若点 P 的坐标为 $(1,-1)$, 求 $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.

2005 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=$ （　）

(A) 2　　(B) 4　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 0

2. 点 $(1,-1)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离是 （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}|x-1|-2, & |x|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & |x|>1\end{cases}$，则 $f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{4}{13}$　　(C) $-\dfrac{9}{5}$　　(D) $\dfrac{25}{41}$

4. 在复平面内，复数 $\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2$ 对应的点位于 （　）

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

5. 在 $(1-x)^5+(1-x)^6+(1-x)^7+(1-x)^8$ 的展开式中，含 x^3 的项的系数是 （　）

(A) 74　　(B) 121　　(C) -74　　(D) -121

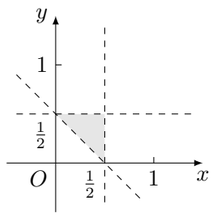
6. 设 α、β 为两个不同的平面，l、m 为两条不同的直线，且 $l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，有如下的两个命题：① 若 $\alpha/\!/\beta$，则 $l/\!/m$；② 若 $l\perp m$，则 $\alpha\perp\beta$. 那么（　）

(A) ①是真命题，②是假命题　　(B) ①是假命题，②是真命题

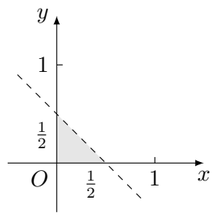
(C) ①②都是真命题　　(D) ①②都是假命题

7. 设集合 $A\{(x,y)|x,y,1-x-y$ 是三角形的三边长$\}$，则 A 所表示的平面区域（不含边界的阴影部分）是 （　）

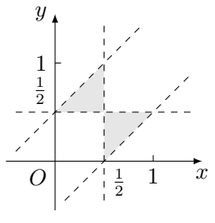
(A)



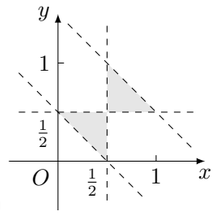
(B)



(C)



(D)



8. 已知 $k<-4$，则函数 $y=\cos 2x+k(\cos x-1)$ 的最小值是 （　）

(A) 1　　(B) -1　　(C) $2k+1$　　(D) $-2k+1$

9. 设 $f(n)=2n+1$ $(n\in\mathbf{N})$，$P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{3,4,5,6,7\}$，记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in P\}$，$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in Q\}$，则 $\left(\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q}\right)\cup\left(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P}\right)=$ （　）

(A) $\{0,3\}$　　(B) $\{1,2\}$　　(C) $\{3,4,5\}$　　(D) $\{1,2,6,7\}$

10. 已知向量 $\vec{a}\neq\vec{e}$，$|\vec{e}|=1$，对任意 $t\in\mathbf{R}$，恒有 $|\vec{a}-t\vec{e}|\geqslant|\vec{a}-\vec{e}|$，则

(A) $\vec{a}\perp\vec{e}$　　(B) $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{e})$

(C) $\vec{e}\perp(\vec{a}-\vec{e})$　　(D) $(\vec{a}+\vec{e})\perp(\vec{a}-\vec{e})$

二、填空题

11. 函数 $y=\dfrac{x}{x+2}$ $(x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq-2)$ 的反函数是_____.

12. 设 M、N 是直角梯形 $ABCD$ 两腰的中点，$DE\perp AB$ 于 E（如图）. 现将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起，使二面角 $A-DE-B$ 为 $45°$，此时点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影恰为点 B，则 M、N 的连线与 AE 所成角的大小等于_____.



13. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线相交于 M、N 两点，以 MN 为直径的圆恰好过双曲线的右顶点，则双曲线的离心率等于_____.

14. 从集合 $\{O,P,Q,R,S\}$ 与 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 中各任取 2 个元素排成一排（字母和数字均不能重复）. 每排中字母 O，Q 和数字 0 至多只能出现一个的不同排法种数是_____.（用数字作答）.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=-\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{25\pi}{6}\right)$ 的值；

(2) 设 $\alpha\in(0,\pi)$，$f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

16. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称，且 $f(x)=x^2+2x$.

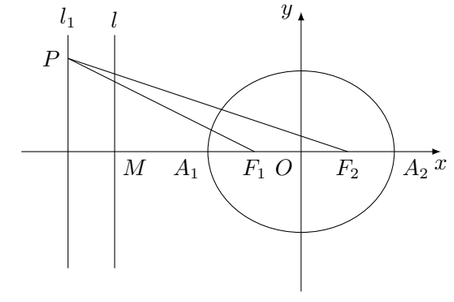
(1) 求函数 $g(x)$ 的解析式；

(2) 解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$.

17. 如图，已知椭圆的中心在坐标原点，焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，长轴 A_1A_2 的长为 4，左准线 l 与 x 轴的交点为 M，$|MA_1|:|A_1F_1|=2:1$.

(1) 求椭圆的方程；

(2) 若直线 $l_1:x=m$ $(|m|>1)$，P 为 l_1 上的动点，使 $\angle F_1PF_2$ 最大的点 P 记为 Q，求点 Q 的坐标.（用 m 表示）

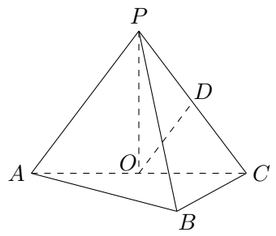


18. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, $AB=BC=kPA$, 点 O、D 分别是 AC、PC 的中点, $OP \perp$ 底面 ABC.

(1) 求证: $OD \parallel$ 平面 PAB;

(2) 当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时, 求直线 PA 与平面 PBC 所成角的大小;

(3) 当 k 取何值时, O 在平面 PBC 内的射影恰好为 $\triangle PBC$ 的重心?



19. 袋子 A 和 B 中装有若干个均匀的红球和白球, 从 A 中摸出一个红球的概率是 $\dfrac{1}{3}$, 从 B 中摸出一个红球的概率为 p.

(1) 从 A 中有放回地摸球, 每次摸出一个, 有 3 次摸到红球即停止.

① 求恰好摸 5 次停止的概率;

② 记 5 次之内 (含 5 次) 摸到红球的次数为 ξ, 求随机变量 ξ 的分布率及数学期望 $E\xi$;

(2) 若 A、B 两个袋子中的球数之比为 $1:2$, 将 A、B 中的球装在一起后, 从中摸出一个红球的概率是 $\dfrac{2}{5}$, 求 p 的值.

20. 设点 $A_n(x_n,0)$, $P_n(x_n,2^{n-1})$ 和抛物线 $C_n: y=x^2+a_nx+b_n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$, 其中 $a_n=-2-4n-\dfrac{1}{2^{n-1}}$, x_n 由以下方法得到:

$x_1=1$, 点 $P_2(x_2,2)$ 在抛物线 $C_1: y=x^2+a_1x+b_1$ 上, 点 $A_1(x_1,0)$ 到 P_2 的距离是 A_1 到 C_1 上点的最短距离, $\cdots$, 点 $P_{n+1}(x_{n+1},2^n)$ 在抛物线 $C_n: y=x^2+a_nx+b_n$ 上, 点 $A_n(x_n,0)$ 到 P_{n+1} 的距离是 A_n 到 C_n 上点的最短距离.

(1) 求 x_2 及 C_1 的方程.

(2) 证明 $\{x_n\}$ 是等差数列.

2005 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

1. 函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

2. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $P=\{1,2,3,4,5\}$, $Q=\{3,4,5,6,7\}$, 则 $P\cap(\complement_U Q)=$ （ ）

(A) $\{1,2\}$ (B) $\{3,4,5\}$

(C) $\{1,2,6,7\}$ (D) $\{1,2,3,4,5\}$

3. 点 $(1,-1)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

4. 设 $f(x)=|x-1|-|x|$, 则 $f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=$ （ ）

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

5. 在 $(1-x)^5-(1-x)^6$ 的展开式中, 含 x^3 的项的系数是 （ ）

(A) -5 (B) 5 (C) -10 (D) 10

6. 从存放号码分别为 1, 2, $\cdots$, 10 的卡片的盒子中, 有放回地取 100 次, 每次取一张卡片并记下号码, 统计结果如下:

卡片号码	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
取到的次数	13	8	5	7	6	13	18	10	11	9

则取到号码为奇数的频率是 （ ）

(A) 0.53 (B) 0.5 (C) 0.47 (D) 0.37

7. 设 α、β 为两个不同的平面, l、m 为两条不同的直线, 且 $l\subset\alpha$, $m\subset\beta$, 有如下的两个命题: ① 若 $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\parallel m$; ② 若 $l\perp m$, 则 $\alpha\perp\beta$. 那么( )

(A) ①是真命题, ②是假命题 (B) ①是假命题, ②是真命题

(C) ①②都是真命题 (D) ①②都是假命题

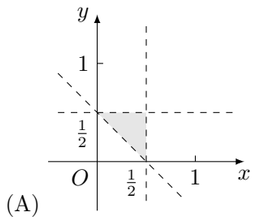
8. 已知向量 $\vec{a}=(x-5,3)$, $\vec{b}=(2,x)$, 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$, 则由 x 的值构成的集合是 （ ）

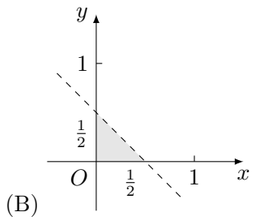
(A) $\{2,3\}$ (B) $\{-1,6\}$ (C) $\{2\}$ (D) $\{6\}$

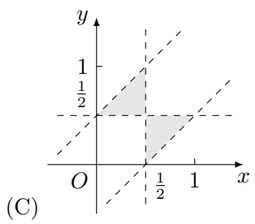
9. 函数 $y=ax^2+1$ 的图象与直线 $y=x$ 相切, 则 $a=$ （ ）

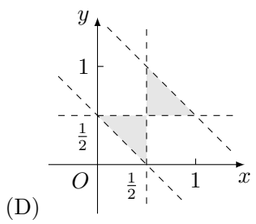
(A) $\dfrac{1}{8}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

10. 设集合 $A\{(x,y)|x,y,1-x-y$ 是三角形的三边长$\}$, 则 A 所表示的平面区域 (不含边界的阴影部分) 是 （ ）

(A) 

(B) 

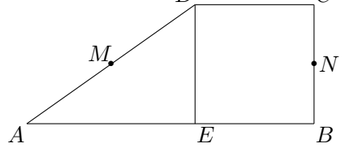
(C) 

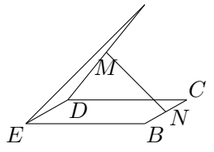
(D) 

二、填空题

11. 函数 $y=\dfrac{x}{x+2}$ ($x\in\mathbf{R}$, 且 $x\neq-2$) 的反函数是_____.

12. 设 M、N 是直角梯形 $ABCD$ 两腰的中点, $DE\perp AB$ 于 E (如图). 现将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 使二面角 $A-DE-B$ 为 45°, 此时点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影恰为点 B, 则 M、N 的连线与 AE 所成角的大小等于_____.





13. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的左焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线相交于 M、N 两点, 以 MN 为直径的圆恰好过双曲线的右顶点, 则双曲线的离心率等于_____.

14. 从集合 $\{P,Q,R,S\}$ 与 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 中各任限 2 个元素排成一排 (字母和数字均不能重复). 每排中字母 Q 和数字 0 至多只能出现一个的不同排法种数是_____. (用数字作答).

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+\cos 2x$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值;

(2) 设 $\alpha\in(0,\pi)$, $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $\sin\alpha$ 的值.

16. 已知实数 a, b, c 成等差数列, $a+1$, $b+1$, $c+4$ 成等比数列, 且 $a+b+c=15$, 求 a, b, c.

17. 袋子 A 和 B 中装有若干个均匀的红球和白球, 从 A 中摸出一个红球的概率是 $\dfrac{1}{3}$, 从 B 中摸出一个红球的概率为 p.

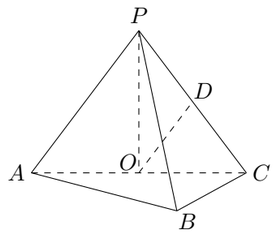
(1) 从 A 中有放回地摸球, 每次摸出一个, 共摸 5 次.

① 恰好有 3 次摸到红球的概率;

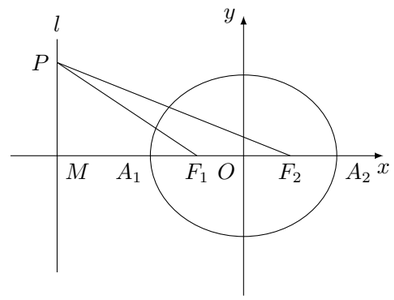
② 第一次、第三次、第五次摸到红球的概率;

(2) 若 A、B 两个袋子中的球数之比为 1 : 2, 将 A、B 中的球装在一起后, 从中摸出一个红球的概率是 $\dfrac{2}{5}$, 求 p 的值.

18. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, $AB=BC=\dfrac{1}{2}PA$, 点 O、D 分别是 AC、PC 的中点, $OP \perp$ 底面 ABC.
(1) 求证: $OD \parallel$ 平面 PAB;
(2) 求直线 PA 与平面 PBC 所成角的大小.



19. 如图, 已知椭圆的中心在坐标原点, 焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, 长轴 A_1A_2 的长为 4, 左准线 l 与 x 轴的交点为 M, $|MA_1|:|A_1F_1|=2:1$.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 若点 P 为 l 上的动点, 求 $\angle F_1PF_2$ 的最大值.



20. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称, 且 $f(x)=x^2+2x$.
(1) 求函数 $g(x)$ 的解析式;
(2) 解不等式 $g(x) \geqslant f(x)-|x-1|$;
(3) 若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数, 求实数 λ 的取值范围.

2006 年普通高等学校春季招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{4n+3}=$_____.

2. 方程 $\log_3(2x-1)=1$ 的解 $x=$_____.

3. 函数 $f(x)=3x+5,\ x\in[0,1]$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

4. 不等式 $\dfrac{1-2x}{x+1}>0$ 的解集是_____.

5. 已知圆 $C:(x+5)^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 和直线 $l:3x+y+5=0$. 若圆 C 与直线 l 没有公共点, 则 r 的取值范围是_____.

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f(x)=x-x^4$, 则当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f(x)=$_____.

7. 电视台连续播放 6 个广告, 其中含 4 个不同的商业广告和 2 个不同的公益广告, 要求首尾必须播放公益广告, 则共有种不同的播放方式_____. (结果用数值表示)

8. 正四棱锥底面边长为 4, 侧棱长为 3, 则其体积为_____.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC=8$, $AC=5$, 三角形面积为 12, 则 $\cos 2C=$_____.

10. 若向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角为 $150°$, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right|=4$, 则 $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=$_____.

11. 已知直线 l 过点 $P(2,1)$, 且与 x 轴、y 轴的正半轴分别交于 A、B 两点, O 为坐标原点, 则三角形 OAB 面积的最小值为_____.

12. 同学们都知道, 在一次考试后, 如果按顺序去掉一些高分, 那么班级的平均分将降低; 反之, 如果按顺序去掉一些低分, 那么班级的平均分将提高. 这两个事实可以用数学语言描述为: 若有限数列 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 满足 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, 则_____. (结论用数学式子表示)

二、选择题

13. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 （ ）

(A) $(0,1)$　　(B) $(1,0)$　　(C) $(0,2)$　　(D) $(2,0)$

14. 若 a、b、$c\in\mathbf{R}$, $a>b$, 则下列不等式成立的是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　(B) $a^2>b^2$

(C) $\dfrac{a}{c^2+1}>\dfrac{b}{c^2+1}$　　(D) $a|c|>b|c|$

15. 若 $k\in\mathbf{R}$, 则“$k>3$”是“方程 $\dfrac{x^2}{k-3}-\dfrac{y^2}{k+3}=1$ 表示双曲线”的 （ ）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

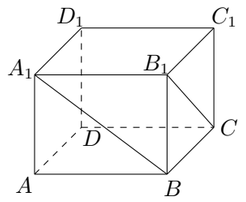
(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

16. 若集合 $A=\left\{y\left|y=x^{\frac{1}{3}},-1\leqslant x\leqslant 1\right.\right\}$, $B=\left\{y\left|y=2-\dfrac{1}{x},0<x\leqslant 1\right.\right\}$, 则 $A\cap B$ 等于 （ ）

(A) $(-\infty,1]$　　(B) $[-1,1]$　　(C) $\varnothing$　　(D) $\{1\}$

三、解答题

17. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DA=DC=4$, $DD_1=3$, 求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 已知复数 w 满足 $w-4=(3-2w)\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), $z=\dfrac{5}{w}+|w-2|$, 求一个以 z 为根的实系数一元二次方程.

19. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

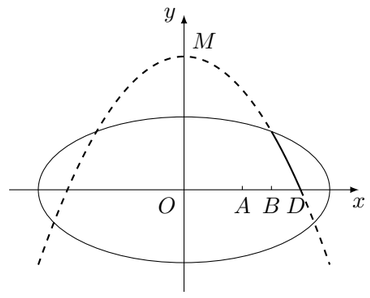
(1) 若 $\sin x=\dfrac{4}{5}$, 求函数 $f(x)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域.

20. 学校科技小组在计算机上模拟航天器变轨返回试验. 设计方案如图: 航天器运行 (按顺时针方向) 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$, 变轨 (即航天器运行轨迹由椭圆变为抛物线) 后返回的轨迹是以 y 轴为对称轴、$M\left(0,\dfrac{64}{7}\right)$ 为顶点的抛物线的实线部分, 降落点为 $D(8,0)$. 观测点 $A(4,0)$、$B(6,0)$ 同时跟踪航天器.

(1) 求航天器变轨后的运行轨迹所在的曲线方程;

(2) 试问: 当航天器在 x 轴上方时, 观测点 AB 测得离航天器的距离分别为多少时, 应向航天器发出变轨指令?



21. 设函数 $f(x)=|x^2-4x-5|$.

(1) 在区间 $[-2,6]$ 上画出函数 $f(x)$ 的图象;

(2) 设集合 $A=\{x\,|f(x)\geqslant 5\}$, $B=(-\infty,-2]\cup[0,4]\cup[6,+\infty)$. 试判断集合 A 和 B 之间的关系, 并给出证明;

(3) 当 $k>2$ 时, 求证: 在区间 $[-1,5]$ 上, $y=kx+3k$ 的图象位于函数 $f(x)$ 图象的上方.

22. 已知数列 a_1, a_2, $\cdots$, a_{30}, 其中 a_1, a_2, $\cdots$, a_{10} 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列; a_{10}, a_{11}, $\cdots$, a_{20} 是公差为 d 的等差数列; a_{20}, a_{21}, $\cdots$, a_{30} 是公差为 d^2 的等差数列 ($d\neq 0$).

(1) 若 $a_{20}=40$, 求 d;

(2) 试写出 a_{30} 关于 d 的关系式, 并求 a_{30} 的取值范围;

(3) 续写已知数列, 使得 a_{30}, a_{31}, $\cdots$, a_{40} 是公差为 d^3 的等差数列, $\cdots$, 依次类推, 把已知数列推广为无穷数列. 提出同 (2) 类似的问题 ((2) 应当作为特例), 并进行研究, 你能得到什么样的结论?

2006 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$ 等于 （ ）

(A) i (B) $-\mathrm{i}$ (C) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ (D) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=-x^2, -1\leqslant x\leqslant 2\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于 （ ）

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\{x|x\in\mathbf{R}, x\neq 0\}$

(C) $\{0\}$ (D) $\varnothing$

3. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}$ 的右焦点重合, 则 p 的值为( )

(A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4

4. 设 $a, b\in\mathbf{R}$, 已知命题 $p: a=b$; 命题 $q: \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$, 则 p 是 q 成立的 （ ）

(A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件

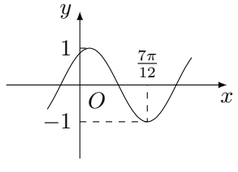
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 函数 $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\geqslant 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$ (B) $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$

(C) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\geqslant 0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$ (D) $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$

6. 将函数 $y=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 的图象按向量 $\vec{a}=\left(-\dfrac{\pi}{6}, 0\right)$ 平移, 平移后的图象如图所示, 则平移后的图象所对应的函数解析式是 （ ）



(A) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (B) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (D) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. 若曲线 $y=x^4$ 的一条切线 l 与直线 $x+4y-8=0$ 垂直, 则 l 的方程为 （ ）

(A) $4x-y-3=0$ (B) $x+4y-5=0$

(C) $4x-y+3=0$ (D) $x+4y+3=0$

8. 设 $a>0$, 对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+a}{\sin x}$ $(0<x<\pi)$, 下列结论正确的是( )

(A) 有最大值而无最小值 (B) 有最小值而无最大值

(C) 有最大值且有最小值 (D) 既无最大值又无最小值

9. 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一球面上, 则此球的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ (B) $\dfrac{1}{3}\pi$ (C) $\dfrac{2}{3}\pi$ (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

10. 如果实数 x, y 满足条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ y+1\geqslant 0\\ x+y+1\leqslant 0\end{cases}$, 那么 $2x-y$ 的最大值为( )

(A) 2 (B) 1 (C) -2 (D) -3

11. 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值, 则 （ ）

(A) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是锐角三角形

(B) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是钝角三角形

(C) $\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是锐角三角形

(D) $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是钝角三角形

12. 在正方体上任选 3 个顶点连成三角形, 则所得的三角形是直角非等腰三角形的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{7}$ (B) $\dfrac{2}{7}$ (C) $\dfrac{3}{7}$ (D) $\dfrac{4}{7}$

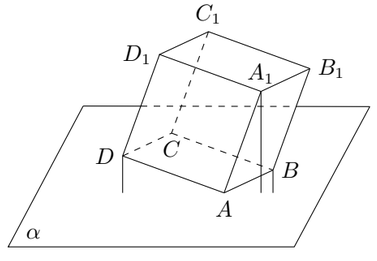
二、填空题

13. 设常数 $a>0$, $\left(ax^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{3}{2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a+a^2+\cdots+a^n)=$_____.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$, M 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{MN}=$_____. (用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示)

15. 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$, 若 $f(1)=-5$, 则 $f(f(5))=$_____.

16. 多面体上, 位于同一条棱两端的顶点称为相邻的. 如图, 正方体的一个顶点 A 在平面 α 内, 其余顶点在 α 的同侧, 正方体上与顶点 A 相邻的三个顶点到 α 的距离分别为 $1, 2$ 和 4. P 是正方体的其余四个顶点中的一个, 则 P 到平面 α 的距离可能是: ① 3; ② 4; ③ 5; ④ 6; ⑤ 7.
以上结论正确的是_____. (写出所有正确结论的编号)



三、解答题

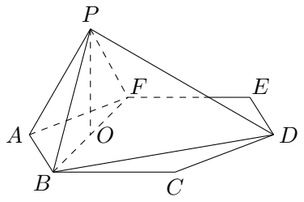
17. 已知 $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$, $\tan\alpha+\cot\alpha=-\dfrac{10}{3}$.
(1) 求 $\tan\alpha$ 的值;
(2) 求 $\dfrac{5\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+8\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+11\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-8}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$ 的值.

18. 在添加剂的搭配适用中, 为了找到最佳的搭配方案, 需要对各种不同的搭配方式作比较, 在试制某种牙膏新品种时, 需要选用两种不同的添加剂. 现有芳香度分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5 的六种添加剂可供选用. 根据实验设计学原理, 通常首先要随机选取两种不同的添加剂进行搭配实验. 用 ξ 表示所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和.
(1) 写出 ξ 的分布列; (以列表的形式给出结论, 不必写计算过程)
(2) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$. (要求写出计算过程或说明道理)

19. 如图, P 是边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 所在平面外一点, $PA=1$, P 在平面 ABC 内的射影为 BF 的中点 O.

(1) 证明: $PA \perp BF$;

(2) 求面 APB 与面 DPB 所成二面角的大小.



20. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义, 对任意实数 $a>0$ 和任意实数 x, 都有 $f(ax)=af(x)$.

(1) 证明 $f(0)=0$;

(2) 证明 $f(x)=\begin{cases} kx, & x \geqslant 0 \\ hx, & x<0 \end{cases}$, 其中 k 和 h 均为常数;

(3) 当 (2) 中的 $k>0$ 时, 设 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f(x)$ $(x>0)$, 讨论 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性并求极值.

21. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $S_n=n^2a_n-n(n-1)$, $n=1,2,\cdots$.

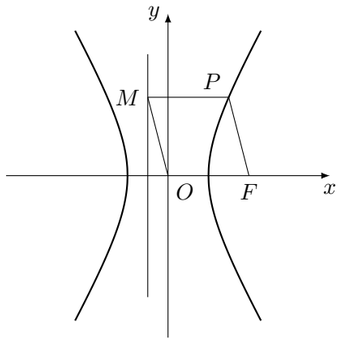
(1) 写出 S_n 与 S_{n-1} 的递推关系式 $(n \geqslant 2)$, 并求 S_n 关于 n 的表达式;

(2) 设 $f_n(x)=\dfrac{S_n}{n}x^{n+1}$, $b_n=f_n'(p)$ $(p \in \mathbf{R})$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 如图, F 为双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点, P 为双曲线 C 右支上一点, 且位于 x 轴上方, M 为左准线上一点, O 为坐标原点. 已知四边形 $OFPM$ 为平行四边形, $|PF|=\lambda|OF|$.

(1) 写出双曲线 C 的离心率 e 与 λ 的关系式;

(2) 当 $\lambda=1$ 时, 经过焦点 F 且平行于 OP 的直线交双曲线于 A、B 点, 若 $|AB|=12$, 求此时的双曲线方程.



2006 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 集合 $S=\{1,3,5\}$, $T=\{3,6\}$, 则 $\complement_U(S\cup T)$ 等于 （ ）

(A) $\varnothing$ (B) $\{2,4,7,8\}$ (C) $\{1,3,5,6\}$ (D) $\{2,4,6,8\}$

2. 不等式 $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$ 的解集是 （ ）

(A) $(-\infty,2)$ (B) $(2,+\infty)$

(C) $(0,2)$ (D) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

3. 函数 $y=\mathrm{e}^{x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=1+\ln x$ $(x>0)$ (B) $y=1-\ln x$ $(x>0)$

(C) $y=-1-\ln x$ $(x>0)$ (D) $y=-1+\ln x$ $(x>0)$

4. “$x>3$”是“$x^2>4$”的 （ ）

(A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}$ 的右焦点重合, 则 p 的值为（ ）

(A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4

6. 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一球面上, 则此球的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ (B) $\dfrac{1}{3}\pi$ (C) $\dfrac{2}{3}\pi$ (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

7. 直线 $x+y=1$ 与圆 $x^2+y^2-2ay=0$ $(a>0)$ 没有公共点, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,\sqrt{2}-1)$ (B) $(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$

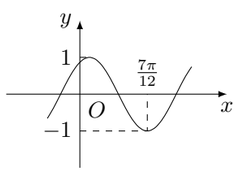
(C) $(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$ (D) $(0,\sqrt{2}+1)$

8. 对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+1}{\sin x}$ $(0<x<\pi)$, 下列结论正确的是 （ ）

(A) 有最大值而无最小值 (B) 有最小值而无最大值

(C) 有最大值且有最小值 (D) 既无最大值又无最小值

9. 将函数 $y=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 的图象按向量 $\vec{a}=\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 平移, 平移后的图象如图所示, 则平移后的图象所对应的函数解析式是 （ ）



(A) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (B) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (D) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

10. 如果实数 x, y 满足条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ y+1\geqslant 0\\ x+y+1\leqslant 0\end{cases}$, 那么 $2x-y$ 的最大值为（ ）

(A) 2 (B) 1 (C) -2 (D) -3

11. 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值, 则 （ ）

(A) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是锐角三角形

(B) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是钝角三角形

(C) $\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是锐角三角形

(D) $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是钝角三角形

12. 在正方体上任选 3 个顶点连成三角形, 则所得的三角形是直角非等腰三角形的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{7}$ (B) $\dfrac{2}{7}$ (C) $\dfrac{3}{7}$ (D) $\dfrac{4}{7}$

二、填空题

13. 设常数 $a>0$, $\left(ax^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{3}{2}$, 则 $a=$_____.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$, M 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{MN}=$_____. (用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示)

15. 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$, 若 $f(1)=-5$, 则 $f(f(5))=$_____.

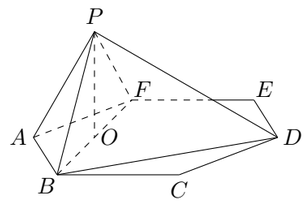
16. 平行四边形的一个顶点 A 在平面 α 内, 其余顶点在 α 的同侧, 已知其中两个顶点到 α 的距离分别为 $1,2$, 那么剩下的一个顶点到平面 α 的距离可能是: ① 1; ② 2; ③ 3; ④ 4.
以上结论正确的是_____. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.
(1) 求 $\dfrac{\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha}$ 的值;
(2) 求 $\tan\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)$ 的值.

18. 在添加剂的搭配适用中, 为了找到最佳的搭配方案, 需要对各种不同的搭配方式作比较, 在试制某种牙膏新品种时, 需要选用两种不同的添加剂. 现有芳香度分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5 的六种添加剂可供选用. 根据试验设计学原理, 通常首先要随机选取两种不同的添加剂进行搭配试验.
(1) 求所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和等于 4 的概率;
(2) 求所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和不小于 3 的概率.

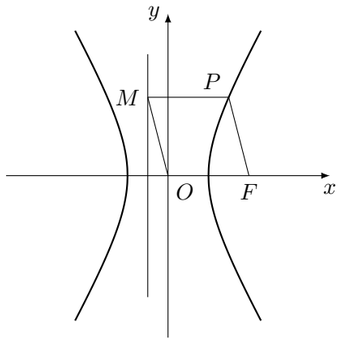
19. 如图, P 是边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 所在平面外一点, $PA=1$, P 在平面 ABC 内的射影为 BF 的中点 O.
(1) 证明: $PA\perp BF$;
(2) 求面 APB 与面 DPB 所成二面角的大小.



20. 设函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx$ $(x\in\mathbf{R})$, 已知 $g(x)=f(x)-f'(x)$ 是奇函数.
(1) 求 b、c 的值;
(2) 求 $g(x)$ 的单调区间与极值.

21. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 前 n 项和 S_n 满足条件 $\dfrac{S_{2n}}{S_n}=\dfrac{4n+2}{n+1}$, $n=1,2,\cdots$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 $b_n=a_np^{a_n}$ $(p>0)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 如图, F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点, P 为双曲线 C 右支上一点, 且位于 x 轴上方, M 为左准线上一点, O 为坐标原点. 已知四边形 $OFPM$ 为平行四边形, $|PF|=\lambda|OF|$.
(1) 写出双曲线 C 的离心率 e 与 λ 的关系式;
(2) 当 $\lambda=1$ 时, 经过焦点 F 且平行于 OP 的直线交双曲线于 A、B 点, 若 $|AB|=12$, 求此时的双曲线方程.



2006 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 都是非零向量, 则"$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$"是"$\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$"的（ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 在 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字组成的没有重复数字的三位数中, 各位数字之和为奇数的共有 （ ）

(A) 36 个　(B) 24 个　(C) 18 个　(D) 6 个

4. 平面 α 的斜线 AB 交 α 于点 B, 过定点 A 的动直线 l 与 AB 垂直, 且交 α 于点 C, 则动点 C 的轨迹是 （ ）

(A) 一条直线　(B) 一个圆　(C) 一个椭圆　(D) 双曲线的一支

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1\\ \log_a x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数, 那么 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,1)$　(B) $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$　(C) $\left[\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{3}\right)$　(D) $\left[\dfrac{1}{7},1\right)$

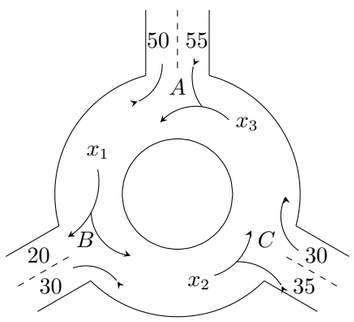
6. 在下列四个函数中, 满足性质: "对于区间 $(1,2)$ 上的任意 x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$, $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_2-x_1|$ 恒成立"的只有 （ ）

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$　(B) $f(x)=|x|$　(C) $f(x)=2^x$　(D) $f(x)=x^2$

7. 设 $f(n)=2+2^4+2^7+2^{10}+\cdots+2^{3n+10}$ $(n\in\mathbf{N})$, 则 $f(n)$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{2}{7}(8^n-1)$　(B) $\dfrac{2}{7}(8^{n+1}-1)$　(C) $\dfrac{2}{7}(8^{n+3}-1)$　(D) $\dfrac{2}{7}(8^{n+4}-1)$

8. 如图为某三岔路口交通环岛的简化模型, 在某高峰时段, 单位时间进出路口 A, B, C, 的机动车辆数如图所示, 图中 x_1, x_2, x_3 分别表示该时段单位时间通过路段 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ 的机动车辆数 (假设: 单位时间内, 在上述路段中, 同一路段上驶入与驶出的车辆数相等), 则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是 （ ）



(A) $x_1>x_2>x_3$　(B) $x_1>x_3>x_2$　(C) $x_2>x_3>x_1$　(D) $x_3>x_2>x_1$

二、填空题

9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ 的值等于_____.

10. 在 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中, x^2 的系数为_____. (用数字作答)

11. 若三点 $A(2,2)$, $B(a,0)$, $C(0,b)$ $(ab\neq 0)$ 共线, 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的值等于_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$, 则 $\angle B$ 的大小是_____.

13. 已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 4\\ y\geqslant x\\ x\geqslant 1\end{cases}$, 点 O 为坐标原点, 那么 $|PO|$ 的最小值等于_____, 最大值等于_____.

14. 已知 A, B, C 三点在球心为 O, 半径为 R 的球面上, $AC\perp BC$, 且 $AB=R$, 那么 A, B 两点的球面距离为_____, 球心到平面 ABC 的距离为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$.

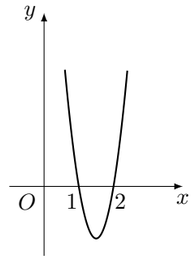
(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 设 α 是第四象限的角, 且 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$, 求 $f(\alpha)$ 的值.

16. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5, 其导函数 $y=f'(x)$ 的图象经过点 $(1,0)$, $(2,0)$, 如图所示, 求:

(1) x_0 的值;

(2) a, b, c 的值.

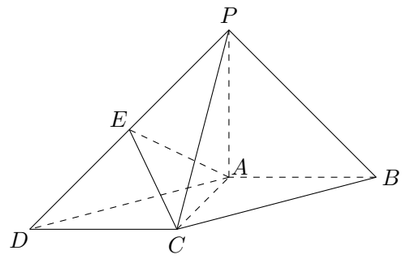


17. 如图, 在底面为平行四边形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB\perp AC$, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA=AB$, 点 E 是 PD 的中点.

(1) 求证: $AC\perp PB$;

(2) 求证: $PB\parallel$ 平面 AEC;

(3) 求二面角 $E-AC-B$ 的大小.



18. 某公司招聘员工, 指定三门考试课程, 有两种考试方案.
方案一: 考试三门课程, 至少有两门及格为考试通过;
方案二: 在三门课程中, 随机选取两门, 这两门都及格为考试通过.
假设某应聘者对三门指定课程考试及格的概率分别是 a, b, c, 且三门课程考试是否及格相互之间没有影响.
(1) 分别求该应聘者用方案一和方案二时考试通过的概率;
(2) 试比较该应聘者在上述两种方案下考试通过的概率的大小. (说明理由)

19. 已知点 $M(-2,0)$, $N(2,0)$, 动点 P 满足条件 $|PM|-|PN|=2\sqrt{2}$. 记动点 P 的轨迹为 W.
(1) 求 W 的方程;
(2) 若 A, B 是 W 上的不同两点, O 是坐标原点, 求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值.

20. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 a_1, a_2 是正整数, 且 $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$, $n=3$, 4, 5, $\cdots$, 则称 $\{a_n\}$ 为"绝对差数列".
(1) 举出一个前五项不为零的"绝对差数列"(只要求写出前十项);
(2) 若"绝对差数列"$\{a_n\}$ 中, $a_{20}=3$, $a_{21}=0$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$, $n=1$, 2, 3, $\cdots$, 分别判断当 $n\to\infty$ 时, a_n 与 b_n 的极限是否存在, 如果存在, 求出其极限值;
(3) 证明: 任何"绝对差数列"中总含有无穷多个为零的项.

2006 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|2x+1<3\}$, $B=\{x|-3<x<2\}$, 则 $A\cap B$ 等于（　）

(A) $\{x|-3<x<1\}$　(B) $\{x|1<x<2\}$

(C) $\{x|x>-3\}$　(D) $\{x|x<1\}$

2. 函数 $y=1+\cos x$ 的图象（　）

(A) 关于 x 轴对称　(B) 关于 y 轴对称

(C) 关于原点对称　(D) 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

3. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 都是非零向量, 则"$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$"是"$\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$"的(　)

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 在 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字组成的没有重复数字的三位数中, 各位数字之和为奇数的共有（　）

(A) 36 个　(B) 24 个　(C) 18 个　(D) 6 个

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-4a, & x<1\\ \log_a x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数, 那么 a 的取值范围是（　）

(A) $(1,+\infty)$　(B) $(-\infty,3)$　(C) $\left[\dfrac{3}{5},3\right)$　(D) $(1,3)$

6. 如果 -1, a, b, c, -9 成等比数列, 那么（　）

(A) $b=3$, $ac=9$　(B) $b=-3$, $ac=9$

(C) $b=3$, $ac=-9$　(D) $b=-3$, $ac=-9$

7. 设 A, B, C, D 是空间四个不同的点, 在下列命题中, 不正确的是（　）

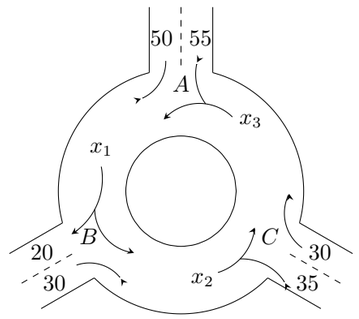
(A) 若 AC 与 BD 共面, 则 AD 与 BC 共面

(B) 若 AC 与 BD 是异面直线, 则 AD 与 BC 是异面直线

(C) 若 $AB=AC$, $DB=DC$ 则 $AD=BC$

(D) 若 $AB=AC$, $DB=DC$ 则 $AD\perp BC$

8. 如图为某三岔路口交通环岛的简化模型, 在某高峰时段, 单位时间进出路口 A, B, C, 的机动车辆数如图所示, 图中 x_1, x_2, x_3 分别表示该时段单位时间通过路段 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ 的机动车辆数 (假设: 单位时间内, 在上述路段中, 同一路段上驶入与驶出的车辆数相等), 则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是（　）



(A) $x_1>x_2>x_3$　(B) $x_1>x_3>x_2$　(C) $x_2>x_3>x_1$　(D) $x_3>x_2>x_1$

二、填空题

9. 若三点 $A(2,2)$, $B(a,0)$, $C(0,4)$ 共线, 则 a 的值等于_____.

10. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中, x^3 的系数是_____. (用数字作答)

11. 已知函数 $f(x)=a^x-4a+3$ 的反函数的图象经过点 $(-1,2)$, 那么 a 的值等于_____.

12. 已知向量 $\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$, 且 $\vec{a}\neq\pm\vec{b}$, 那么 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角的大小是_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 所对的边长分别为 a, b, c 若 $\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$, 则 $a:b:c=$_____, $\angle B$ 的大小是_____.

14. 已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 4\\ y\geqslant x\\ x\geqslant 1\end{cases}$, 点 O 为坐标原点, 那么 $|PO|$ 的最小值等于_____, 最大值等于_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-\sin 2x}{\cos x}$.

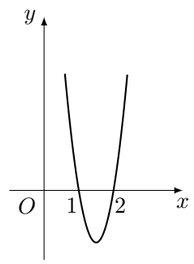
(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 设 α 是第四象限的角, 且 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$, 求 $f(\alpha)$ 的值.

16. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5, 其导函数 $y=f'(x)$ 的图象经过点 $(1,0)$, $(2,0)$, 如图所示, 求:

(1) x_0 的值;

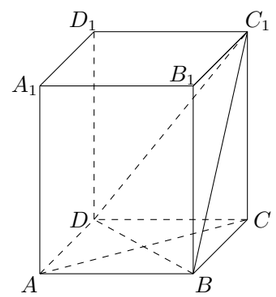
(2) a, b, c 的值.



17. 如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱.

(1) 求证: $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1;

(2) 若二面角 C_1-BD-C 的大小为 60°, 求异面直线 BC_1 与 AC 所成角的大小.



18. 某公司招聘员工, 指定三门考试课程, 有两种考试方案.
方案一: 考试三门课程, 至少有两门及格为考试通过;
方案二: 在三门课程中, 随机选取两门, 这两门都及格为考试通过.
假设某应聘者对三门指定课程考试及格的概率分别是 0.5, 0.6, 0.9, 且三门课程考试是否及格相互之间没有影响.
(1) 该应聘者用方案一考试通过的概率;
(2) 该应聘者用方案二考试通过的概率.

19. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点为 F_1, F_2, 点 P 在椭圆 C 上, 且 $PF_1\perp F_1F_2$, $|PF_1|=\dfrac{4}{3}$, $|PF_2|=\dfrac{14}{3}$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 若直线 l 过圆 $x^2+y^2+4x-2y=0$ 的圆心 M, 交椭圆 C 于 A, B 两点, 且 A、B 关于点 M 对称, 求直线 l 的方程.

20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 及公差 d 都为整数, 前 n 项和为 S_n.
(1) 若 $a_{11}=0$, $S_{14}=98$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 $a_1\geqslant 6$, $a_{11}>0$, $S_{14}\geqslant 77$, 求所有可能的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2006 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A=\{2,4,5,7\}$, $B=\{3,4,5\}$, 则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$ （ ）

(A) $\{1,6\}$　(B) $\{4,5\}$　(C) $\{2,3,4,5,7\}$　(D) $\{1,2,3,6,7\}$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_4+a_6=12$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 S_9 的值为 （ ）

(A) 48　(B) 54　(C) 60　(D) 66

3. 过坐标原点且与圆 $x^2+y^2-4x+2y+\dfrac{5}{2}=0$ 相切的直线的方程为（ ）

(A) $y=-3x$ 或 $y=\dfrac{1}{3}x$　(B) $y=3x$ 或 $y=-\dfrac{1}{3}x$

(C) $y=-3x$ 或 $y=-\dfrac{1}{3}x$　(D) $y=3x$ 或 $y=\dfrac{1}{3}x$

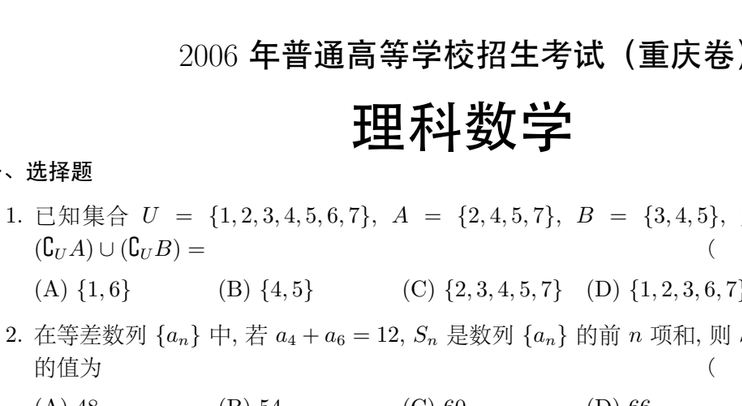
4. 对于任意的直线 l 与平面 α, 在平面 α 内必有直线 m, 使 m 与 l （ ）

(A) 平行　(B) 相交　(C) 垂直　(D) 互为异面直线

5. 若 $\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 64, 则展开式的常数项为 （ ）

(A) -540　(B) -162　(C) 162　(D) 540

6. 为了了解某地区高三学生的身体发育情况, 抽查了该地区 100 名年龄为 17.5 岁 −18 岁的男生体重 (kg), 得到频率分布直方图如下:



根据上图可得这 100 名学生中体重在 $[56.5,64.5)$ 的学生人数是 （ ）

(A) 20　(B) 30　(C) 40　(D) 50

7. 与向量 $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{7}{2}\right)$ 的夹角相等, 且模为 1 的向量是（ ）

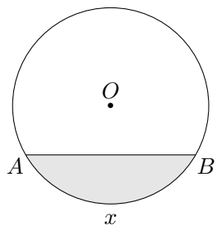
(A) $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$　(B) $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$

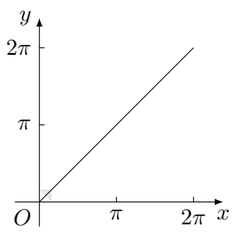
(C) $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$　(D) $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

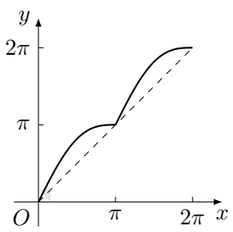
8. 将 5 名实习教师分配到高一年级的 3 个班实习, 每班至少 1 名, 最多 2 名, 则不同的分配方案有 （ ）

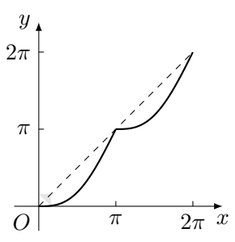
(A) 30 种　(B) 90 种　(C) 180 种　(D) 270 种

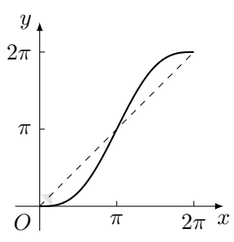
9. 如图所示, 单位圆中弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 x, $f(x)$ 表示弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍, 则函数 $y=f(x)$ 的图象是 （ ）



(A)


(B)


(C)


(D)


10. 若 $a,b,c>0$ 且 $a(a+b+c)+bc=4-2\sqrt{3}$, 则 $2a+b+c$ 的最小值为（ ）

(A) $\sqrt{3}-1$　(B) $\sqrt{3}+1$　(C) $2\sqrt{3}+2$　(D) $2\sqrt{3}-2$

二、填空题

11. 复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}^3}$ 的值是_____.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{2n^2-n+1}=$_____.

13. 已知 $\alpha,\ \beta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$, $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$, $\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{12}{13}$, 则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$_____.

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3$ $(n\geqslant 1)$, 则该数列的通项 $a_n=$_____.

15. 设 $a>0$, $a\neq 1$, 函数 $f(x)=a^{\lg(x^2-2x+3)}$ 有最大值, 则不等式 $\log_a(x^2-5x+7)>0$ 的解集为_____.

16. 已知变量 x, y 满足约束条件 $1\leqslant x+y\leqslant 4$, $-2\leqslant x-y\leqslant 2$. 若目标函数 $z=ax+y$ (其中 $a>0$) 仅在点 $(3,1)$ 处取得最大值, 则 a 的取值范围为_____.

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos^2\omega x+\sin\omega x\cos\omega x+a$ (其中 $\omega>0$, $a\in\mathbf{R}$), 且 $f(x)$ 的图象在 y 轴右侧的第一个最高点的横坐标为 $\dfrac{\pi}{6}$.

(1) 求 ω 的值;

(2) 如果 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 $\sqrt{3}$, 求 a 的值.

18. 某大厦的一部电梯从底层出发后只能在第 18、19、20 层可以停靠. 若该电梯在底层载有 5 位乘客, 且每位乘客在这三层的每一层下电梯的概率均为 $\dfrac{1}{3}$, 用 ξ 表示这 5 位乘客在第 20 层下电梯的人数, 求:

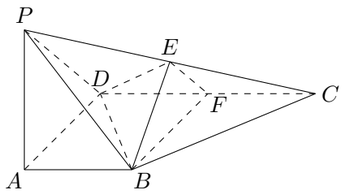
(1) 随机变量 ξ 的分布列;

(2) 随机变量 ξ 的期望.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $\angle DAB$ 为直角, $AB\parallel CD$, $AD=CD=2AB$, E、F 分别为 PC、CD 的中点.

(1) 试证: $CD\perp$ 平面 BEF;

(2) 设 $PA=k\cdot AB$, 且二面角 $E-BD-C$ 的平面角大于 $30°$, 求 k 的取值范围.



20. 已知函数 $f(x)=(x^2+bx+c)\mathrm{e}^x$, 其中 b, $c\in\mathbf{R}$ 为常数.

(1) 若 $b^2>4(a-1)$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $b^2\leqslant 4(c-1)$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-c}{x}=4$, 试证: $-6\leqslant b\leqslant 2$.

21. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.

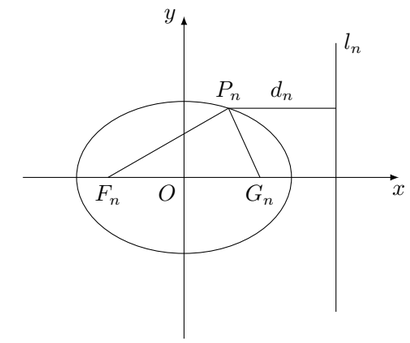
(1) 若 $f(2)=3$, 求 $f(1)$; 又若 $f(0)=a$, 求 $f(a)$;

(2) 设有且仅有一个实数 x_0, 使得 $f(x_0)=x_0$, 求函数 $f(x)$ 的解析表达式.

22. 已知一列椭圆 $C_n: x^2+\dfrac{y^2}{b_n^2}=1$, $0<b_n<1$, $n=1,2,\cdots$. 若椭圆 C_n 上有一点 P_n, 使 P_n 到右准线 l_n 的距离 d_n 是 $|P_nF_n|$ 与 $|P_nG_n|$ 的等差中项, 其中 F_n、G_n 分别是 C_n 的左、右焦点.

(1) 试证: $b_n\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(n\geqslant 1)$;

(2) 取 $b_n=\dfrac{\sqrt{2n+3}}{n+2}$, 并用 S_n 表示 $\triangle P_nF_nG_n$ 的面积, 试证: $S_1<S_2$ 且 $S_n>S_{n+1}$ $(n\geqslant 3)$.



2006 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A=\{2,4,5,7\}$, $B=\{3,4,5\}$, 则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$ （ ）

(A) $\{1,6\}$　(B) $\{4,5\}$　(C) $\{2,3,4,5,7\}$　(D) $\{1,2,3,6,7\}$

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n>0$ 且 $a_3a_7=64$, 则 a_5 的值为 （ ）

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

3. 以点 $(2,-1)$ 为圆心且与直线 $3x-4y+5=0$ 相切的圆的方程为 （ ）

(A) $(x-2)^2+(y+1)^2=3$　(B) $(x+2)^2+(y-1)^2=3$

(C) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$　(D) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

4. 若 P 是平面 α 外一点, 则下列命题正确的是 （ ）

(A) 过 P 只能作一条直线与平面 α 相交

(B) 过 P 可作无数条直线与平面 α 垂直

(C) 过 P 只能作一条直线与平面 α 平行

(D) 过 P 可作无数条直线与平面 α 平行

5. $(2x-3)^5$ 的展开式中 x^2 项的系数为 （ ）

(A) -2160　(B) -1080　(C) 1080　(D) 2160

6. 设函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$, 且 $y=f(2x-1)$ 的图象过点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$, 则 $y=f^{-1}(x)$ 的图象必过点 （ ）

(A) $\left(\frac{1}{2},1\right)$　(B) $\left(1,\frac{1}{2}\right)$　(C) $(1,0)$　(D) $(0,1)$

7. 某地区有 300 家商店, 其中大型商店有 30 家, 中型商店有 75 家, 小型商店有 195 家. 为了掌握各商店的营业情况, 要从中抽取一个容量为 20 的样本. 若采用分层抽样的方法, 抽取的中型商店数是 （ ）

(A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) 13

8. 已知三点 $A(2,3)$, $B(-1,-1)$, $C(6,k)$, 其中 k 为常数. 若 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 （ ）

(A) $\arccos(-\frac{24}{25})$　(B) $\frac{\pi}{2}$ 或 $\arccos\frac{24}{25}$

(C) $\arccos\frac{24}{25}$　(D) $\frac{\pi}{2}$ 或 $\pi-\arccos\frac{24}{25}$

9. 高三 (一) 班需要安排毕业晚会的 4 个音乐节目, 2 个舞蹈节目和 1 个曲艺节目的演出顺序, 要求两个舞蹈节目不连排, 则不同排法的种数是 （ ）

(A) 1800　(B) 3600　(C) 4320　(D) 5040

10. 若 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=-\frac{1}{2}$, 则 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值等于 （ ）

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 设 $A(x_1,y_1)$, $B\left(4,\frac{9}{5}\right)$, $C(x_2,y_2)$ 是右焦点为 F 的椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上三个不同的点, 则"$|AF|$, $|BF|$, $|CF|$ 成等差数列"是"$x_1+x_2=8$"的 （ ）

(A) 充要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分而不必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

12. 若 a, b, $c>0$ 且 $a^2+2ab+2ac+4bc=12$, 则 $a+b+c$ 的最小值是( )

(A) $2\sqrt{3}$　(B) 3　(C) 2　(D) $\sqrt{3}$

二、填空题

13. 已知 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, 则 $\tan\alpha=$_____.

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2$ $(n\geqslant 1)$, 则该数列的通项 $a_n=$_____.

15. 设 $a>0$, $a\neq 1$, 函数 $f(x)=\log_a(x^2-2x+3)$ 有最小值, 则不等式 $\log_a(x-1)>0$ 的解集为_____.

16. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-3\leqslant 0\\ x+3y-3\geqslant 0\\ y-1\leqslant 0\end{cases}$, 若目标函数 $z=ax+y$ (其中 $a>0$) 仅在点 $(3,0)$ 处取得最大值, 则 a 的取值范围为_____.

三、解答题

17. 甲、乙、丙三人在同一办公室工作, 办公室里只有一部电话机, 设经该机打进的电话是打给甲、乙、丙的概率依次为 $\frac{1}{6}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$. 若在一段时间内打进三个电话, 且各个电话相互独立. 求:

(1) 这三个电话是打给同一个人的概率;

(2) 这三个电话中恰有两个是打给甲的概率.

18. 设函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos^2\omega x+\sin\omega x\cos\omega x+a$ (其中 $\omega>0$, $a\in\mathbf{R}$), 且 $f(x)$ 的图象在 y 轴右侧的第一个最高点的横坐标为 $\frac{\pi}{6}$.

(1) 求 ω 的值;

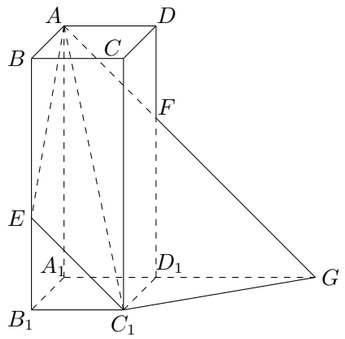
(2) 如果 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 $\sqrt{3}$, 求 a 的值.

19. 设函数 $f(x)=x^3-3ax^2+3bx$ 的图象与直线 $12x+y-1=0$ 相切于点 $(1,-11)$.

(1) 求 a, b 的值;

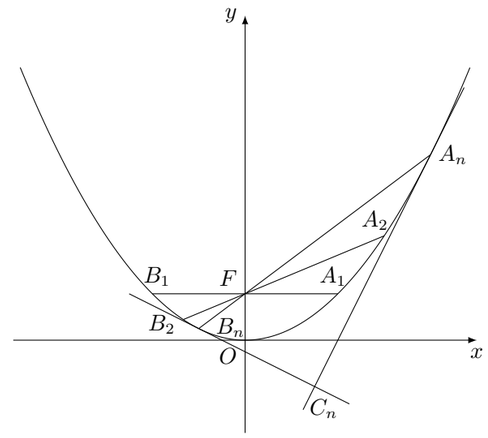
(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

20. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=1$, $BB_1=\sqrt{3}+1$, E 为 BB_1 上使 $B_1E=1$ 的点, 平面 AEC_1 交 DD_1 于 F, 交 A_1D_1 的延长线于 G. 求:
(1) 异面直线 AD 与 C_1G 所成角的大小;
(2) 二面角 $A-C_1G-A_1$ 的正切值.



21. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\dfrac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$ 是奇函数.
(1) 求 a, b 的值;
(2) 若对任意的 $t\in\mathbf{R}$, 不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

22. 如图, 对每个正整数 n, $A_n(x_n,y_n)$ 是抛物线 $x^2=4y$ 上的点, 过焦点 F 的直线 FA_n 交抛物线于另一点 $B_n(s_n,t_n)$.
(1) 试证: $x_ns_n=-4$ $(n\geqslant 1)$;
(2) 取 $x_n=2^n$, 并记 C_n 为抛物线上分别以 A_n 与 B_n 为切点的两条切线的交点. 试证: $|FC_1|+|FC_2|+\cdots+|FC_n|=2^n-2^{-n+1}+1$.



2006 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$, 则复数 $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})$ 为实数的充要条件是 （ ）

(A) $ad-bc=0$ (B) $ac-bd=0$ (C) $ac+bd=0$ (D) $ad+bc=0$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, $a_2+a_3=13$, 则 $a_4+a_5+a_6$ 等于（ ）

(A) 40 (B) 42 (C) 43 (D) 45

3. 已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 等于 （ ）

(A) $\frac{1}{7}$ (B) 7 (C) $-\frac{1}{7}$ (D) -7

4. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 且 $A=\{x||x-1|>2\}$, $B=\{x|x^2-6x+8<0\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B$ 等于 （ ）

(A) $[-1,4)$ (B) $(2,3)$ (C) $(2,3]$ (D) $(-1,4)$

5. 已知正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$, 那么正方体的棱长等于 （ ）

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

6. 在一个口袋中装有 5 个白球和 3 个黑球, 这些球除颜色外完全相同, 从中摸出 3 个球, 至少摸到 2 个黑球的概率等于 （ ）

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{9}{28}$

7. 对于平面 α 和共面的直线 m、n, 下列命题中真命题是 （ ）

(A) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\parallel\alpha$

(B) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$

(C) 若 $m\subset\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$

(D) 若 m、n 与 α 所成的角相等, 则 $m\parallel n$

8. 函数 $y=\log_2\frac{x}{x-1}$ $(x>1)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\frac{2^x}{2^x-1}$ $(x>0)$ (B) $y=\frac{2^x}{2^x-1}$ $(x<0)$

(C) $y=\frac{2^x-1}{2^x}$ $(x>0)$ (D) $y=\frac{2^x-1}{2^x}$ $(x<0)$

9. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2, 则 ω 的最小值等于 （ ）

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) 3

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点, 则此双曲线离心率的取值范围是 （ ）

(A) $(1,2]$ (B) $(1,2)$ (C) $[2,+\infty)$ (D) $(2,+\infty)$

11. 已知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC=30^\circ$. 设 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ (m、$n\in\mathbf{R}$), 则 $\frac{m}{n}$ 等于 （ ）

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

12. 对于直角坐标平面内的任意两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 定义它们之间的一种“距离”: $||AB||=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$. 给出下列三个命题:
① 若点 C 在线段 AB 上, 则 $||AC||+||CB||=||AB||$;
② 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C=90^\circ$, 则 $||AC||^2+||CB||^2=||AB||^2$;
③ 在 $\triangle ABC$ 中, $||AC||+||CB||>||AB||$.
其中真命题的个数为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

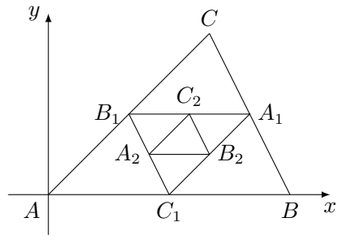
二、填空题

13. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^5$ 展开式中 x^4 的系数是_____. (用数字作答)

14. 已知直线 $x-y-1=0$ 与抛物线 $y=ax^2$ 相切, 则 $a=$_____.

15. 一个均匀小正方体的六个面中, 三个面上标以数 0, 两个面上标以数 1, 一个面上标以数 2. 将这个小正方体抛掷 2 次, 则向上的数之积的数学期望是_____.

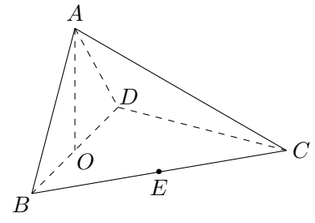
16. 如图, 连结 $\triangle ABC$ 的各边中点得到一个新的 $\triangle A_1B_1C_1$, 又连结 $\triangle A_1B_1C_1$ 的各边中点得到一个新的 $\triangle A_2B_2C_2$, 如此无限继续下去, 得到一系列三角形: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\cdots$, 这一系列三角形趋向于一个点 M. 已知 $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(2,2)$, 则点 M 的坐标是_____.



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调增区间;
(2) 函数 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y=\sin 2x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的变换得到?

18. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, O、E 分别是 BD、BC 的中点, $CA=CB=CD=BD=2$, $AB=AD=\sqrt{2}$.
(1) 求证: $AO\perp$ 平面 BCD;
(2) 求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小;
(3) 求点 E 到平面 ACD 的距离.

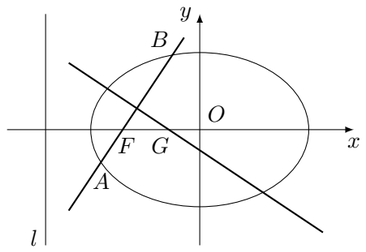


19. 统计表明, 某种型号的汽车在匀速行驶中每小时的耗油量 y (升) 关于行驶速度 x (千米/小时) 的函数解析式可以表示为: $y=\frac{1}{128000}x^3-\frac{3}{80}x+8$ $(0<x\leqslant 120)$. 已知甲、乙两地相距 100 千米.
(1) 当汽车以 40 千米/小时的速度匀速行驶时, 从甲地到乙地要耗油多少升?
(2) 当汽车以多大的速度匀速行驶时, 从甲地到乙地耗油最少? 最少为多少升?

20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点为 F, O 为坐标原点.

(1) 求过点 O、F, 并且与椭圆的左准线 l 相切的圆的方程;

(2) 设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线交椭圆于 A、B 两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 G, 求点 G 横坐标的取值范围.



21. 已知函数 $f(x)=-x^2+8x$, $g(x)=6\ln x+m$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值 $h(t)$;

(2) 是否存在实数 m, 使得 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象有且只有三个不同的交点? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1}4^{b_2-1}4^{b_3-1}\cdots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(3) 证明: $\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2006 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知两条直线 $y=ax-2$ 和 $y=(a+2)x+1$ 互相垂直, 则 a 等于（　）

(A) 2　　(B) 1　　(C) 0　　(D) -1

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, $a_2+a_3=13$, 则 $a_4+a_5+a_6$ 等于(　)

(A) 40　　(B) 42　　(C) 43　　(D) 45

3. “$\tan\alpha=1$”是“$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$”的（　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

4. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 等于（　）

(A) $\dfrac{1}{7}$　　(B) 7　　(C) $-\dfrac{1}{7}$　　(D) -7

5. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 且 $A=\{x||x-1|>2\}$, $B=\{x|x^2-6x+8<0\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B$ 等于（　）

(A) $[-1,4)$　　(B) $(2,3)$　　(C) $(2,3]$　　(D) $(-1,4)$

6. 函数 $y=\dfrac{x}{x+1}$ $(x\neq-1)$ 的反函数是（　）

(A) $y=\dfrac{x}{1-x}$ $(x\neq1)$　　(B) $y=\dfrac{x}{x-1}$ $(x\neq1)$

(C) $y=\dfrac{x-1}{x}$ $(x\neq0)$　　(D) $y=\dfrac{1-x}{x}$ $(x\neq0)$

7. 已知正方体外接球的体积是 $\dfrac{32}{3}\pi$, 那么正方体的棱长等于（　）

(A) $2\sqrt{2}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

8. 从 4 名男生和 3 名女生中选出 3 人, 分别从事三项不同的工作, 若这 3 人中至少有 1 名女生, 则选派方案共有（　）

(A) 108 种　　(B) 186 种　　(C) 216 种　　(D) 270 种

9. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120°, $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{13}$, 则 $\left|\vec{b}\right|$ 等于（　）

(A) 5　　(B) 4　　(C) 3　　(D) 1

10. 对于平面 α 和共面的直线 m、n, 下列命题中真命题是（　）

(A) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\parallel\alpha$

(B) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$

(C) 若 $m\subset\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$

(D) 若 m、n 与 α 所成的角相等, 则 $m\parallel n$

11. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点, 则此双曲线离心率的取值范围是（　）

(A) $(1,2]$　　(B) $(1,2)$　　(C) $[2,+\infty)$　　(D) $(2,+\infty)$

12. 已知 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0<x<1$ 时, $f(x)=\lg x$. 设 $a=f\left(\dfrac{6}{5}\right)$, $b=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $c=f\left(\dfrac{5}{2}\right)$, 则（　）

(A) $a<b<c$　　(B) $b<a<c$　　(C) $c<b<a$　　(D) $c<a<b$

二、填空题

13. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 展开式中 x^4 的系数是_____. (用数字作答)

14. 已知直线 $x-y-1=0$ 与抛物线 $y=ax^2$ 相切, 则 $a=$_____.

15. 已知实数 x、y 满足 $\begin{cases}y\leqslant1\\ y\geqslant|x-1|\end{cases}$, 则 $x+2y$ 的最大值是_____.

16. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2, 则 ω 的最小值等于_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调增区间;

(2) 函数 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y=\sin2x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的变换得到?

18. 每次抛掷一枚骰子 (六个面上分别标以数 1, 2, 3, 4, 5, 6).

(1) 连续抛掷 2 次, 求向上的数不同的概率;

(2) 连续抛掷 2 次, 求向上的数之和为 6 的概率;

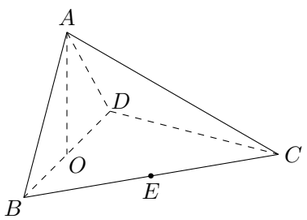
(3) 连续抛掷 5 次, 求向上的数为奇数恰好出现 3 次的概率.

19. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, O、E 分别是 BD、BC 的中点, $CA=CB=CD=BD=2$, $AB=AD=\sqrt{2}$.

(1) 求证: $AO\perp$ 平面 BCD;

(2) 求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小;

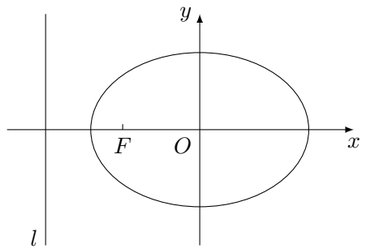
(3) 求点 E 到平面 ACD 的距离.



20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点为 F, O 为坐标原点.

(1) 求过点 O、F, 并且与椭圆的左准线 l 相切的圆的方程;

(2) 设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线交椭圆于 A、B 两点, 并且线段 AB 的中点在直线 $x+y=0$ 上, 求直线 AB 的方程.



21. 已知 $f(x)$ 是二次函数, 不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(0,5)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值是 12.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 是否存在自然数 m, 使得方程 $f(x)+\dfrac{37}{x}=0$ 在区间 $(m,m+1)$ 内有且只有两个不等的实数根? 若存在, 求出所有 m 的值; 若不存在, 说明理由.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1}4^{b_2-1}\cdots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明: $\{b_n\}$ 是等差数列.

2006 年普通高等学校招生考试（广东卷）

数学试卷

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$ 的定义域是 （　）

(A) $\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　(B) $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$　(C) $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$　(D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$

2. 若复数 z 满足方程 $z^2+2=0$, 则 $z^3=$ （　）

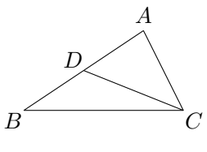
(A) $\pm2\sqrt{2}$　(B) $-2\sqrt{2}$　(C) $-2\sqrt{2}\mathrm{i}$　(D) $\pm2\sqrt{2}\mathrm{i}$

3. 下列函数中, 在其定义域内既是奇函数又是减函数的是 （　）

(A) $y=-x^3,\ x\in\mathbf{R}$　(B) $y=\sin x,\ x\in\mathbf{R}$

(C) $y=x,\ x\in\mathbf{R}$　(D) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x,\ x\in\mathbf{R}$

4. 如图所示, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中点, 则向量 $\overrightarrow{CD}=$ （　）



(A) $-\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　(B) $-\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

(C) $\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　(D) $\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

5. 给出以下四个命题:

① 如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的一个平面和这个平面相交, 那么这条直线和交线平行;

② 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线垂直于这个平面;

③ 如果两条直线都平行于一个平面, 那么这两条直线互相平行;

④ 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直.

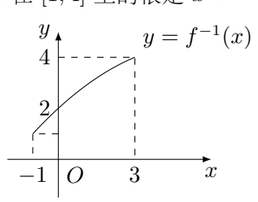
其中真命题的个数是 （　）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

6. 已知某共有 10 项, 其奇数项之和为 15, 偶数项之和为 30, 则其公差为(　)

(A) 5　(B) 4　(C) 3　(D) 2

7. 函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于点 $P(0,2)$ (如图所示), 则方程 $f(x)=0$ 在 $[1,4]$ 上的根是 $x=$ （　）



(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

8. 已知双曲线 $3x^2-y^2=9$, 则双曲线右支上的点 P 到右焦点的距离与点 P 到右准线的距离之比等于 （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(C) 2　(D) 4

9. 在约束条件 $\begin{cases}x\geqslant0\\y\geqslant0\\x+y\leqslant s\\y+2x\leqslant4\end{cases}$ 下, 当 $3\leqslant s\leqslant5$ 时, 目标函数 $z=3x+2y$ 的最大值的变化范围是 （　）

(A) $[6,15]$　(B) $[7,15]$　(C) $[6,8]$　(D) $[7,8]$

10. 对于任意的两个实数对 (a,b) 和 (c,d), 规定: $(a,b)=(c,d)$, 当且仅当 $a=c,\ b=d$; 运算“$\otimes$”为: $(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$; 运算“$\oplus$”为: $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$. 设 $p,\ q\in\mathbf{R}$, 若 $(1,2)\otimes(p,q)=(5,0)$, 则 $(1,2)\oplus(p,q)=$ （　）

(A) $(4,0)$　(B) $(2,0)$　(C) $(0,2)$　(D) $(0,-4)$

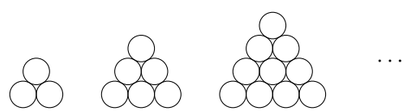
二、填空题

11. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{4}{4-x^2}-\dfrac{1}{2+x}\right)=$_____.

12. 棱长为 3 的正方体的顶点都在同一球面上, 则该球的表面积为_____.

13. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^{11}$ 的展开式中, x^5 的系数为_____.

14. 在德国不莱梅举行的第 48 届世乒赛期间, 某商店橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的展品, 其中第 1 堆只有 1 层, 就一个球; 第 2, 3, 4, $\cdots$ 堆最底层 (第一层) 分别按图示方式固定摆放, 从第二层开始, 每层的小球自然垒放在下一层之上, 第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球, 以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数, 则 $f(3)=$_____; $f(n)=$_____. (答案用 n 表示)



三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right),\ x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的的最大值和最小值;

(3) 若 $f(\alpha)=\dfrac{3}{4}$, 求 $\sin2\alpha$ 的值.

16. 某运动员射击一次所得环数 X 的分布列如下:

X	$0\sim6$	7	8	9	10
P	0	0.2	0.3	0.3	0.2

(1) 求该运动员两次都命中 7 环的概率;

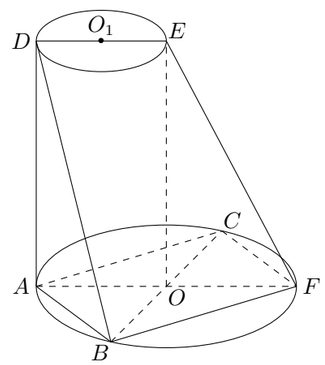
(2) 求 ξ 的分布列;

(3) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

17. 如图所示, AF, DE 分别是 $\odot O$, $\odot O_1$ 的直径, AD 与两圆所在的平面均垂直, $AD=8$, BC 是 $\odot O$ 的直径, $AB=AC=6$, $OE\parallel AD$.

(1) 求二面角 $B-AD-F$ 的大小;

(2) 求直线 BD 与 EF 所成的角.



18. 设函数 $f(x)=-x^3+3x+2$ 分别在 x_1, x_2 处取得极小值、极大值, xOy 平面上点 A, B 的坐标分别为 $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, 该平面上动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4$, 点 Q 是点 P 关于直线 $y=2(x-4)$ 的对称点, 求:
(1) 求点 A, B 的坐标;
(2) 动点 Q 的轨迹方程.

19. 已知公比为 q $(0<q<1)$ 的无穷等比数列 $\{a_n\}$ 各项的和为 9, 无穷等比数列 $\{a_n^2\}$ 各项的和为 $\dfrac{81}{5}$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公比 q;
(2) 对给定的 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$, 设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k, 公差为 $2a_k-1$ 的等差数列, 求 $T^{(2)}$ 的前 10 项之和;
(3) 设 b_i 为数列 $T^{(i)}$ 的第 i 项, $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, 求 S_n, 并求正整数 m $(m>1)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^m}$ 存在且不等于零.

20. A 是由定义在 $[2,4]$ 上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合: ① 对任意的 $x\in[1,2]$, 都有 $\varphi(2x)\in(1,2)$; ② 存在常数 L $(0<L<1)$, 使得对任意的 x_1, $x_2\in[1,2]$, 都有 $|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$.
(1) 设 $\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x\in[2,4]$, 证明: $\varphi(x)\in A$;
(2) 设 $\varphi(x)\in A$, 如果存在 $x_0\in(1,2)$, 使得 $x_0=\varphi(2x_0)$, 那么这样的 x_0 是唯一的;
(3) 设 $\varphi(x)\in A$, 任取 $x_1\in(1,2)$, 令 $x_{n-1}=\varphi(2x_n)$, $n=1,\ 2,\ \cdots$, 证明: 给定正整数 k, 对任意的正整数 p, 成立不等式 $|x_{k+p}-x_k|\leqslant\dfrac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|$.

2006 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知向量 $\vec{a}=(\sqrt{3},1)$, $\vec{b}$ 是不平行于 x 轴的单位向量, 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$, 则 $\vec{b}=$ （ ）

(A) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ (D) $(1,0)$

2. 若互不相等的实数 a, b, c 成等差数列, c, a, b 成等比数列, 且 $a+3b+c=10$, 则 $a=$ （ ）

(A) 4 (B) 2 (C) -2 (D) -4

3. $\triangle ABC$ 的内角 A 满足 $\sin 2A=\frac{2}{3}$, 则 $\sin A+\cos A=$ （ ）

(A) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $-\frac{5}{3}$

4. 设 $f(x)=\lg\frac{2+x}{2-x}$, 则 $f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{2}{x}\right)$ 的定义域为 （ ）

(A) $(-4,0)\cup(0,4)$ (B) $(-4,-1)\cup(1,4)$
(C) $(-2,-1)\cup(1,2)$ (D) $(-4,-2)\cup(2,4)$

5. 在 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{24}$ 的展开式中, x 的幂的指数是整数的项共有 （ ）

(A) 3 项 (B) 4 项 (C) 5 项 (D) 9 项

6. 关于直线 m, n 与平面 α, β, 有以下四个命题:
① 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\parallel n$;
② 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp n$;
③ 若 $m\perp\alpha$, $n\parallel\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\perp n$;
④ 若 $m\parallel\alpha$, $n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $m\parallel n$.
其中真命题的序号是 （ ）

(A) ①② (B) ③④ (C) ①④ (D) ②③

7. 设过点 $P(x,y)$ 的直线分别与 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴交于 A, B 两点, 点 Q 与点 P 关于 y 轴对称, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ 且 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$, 则点 P 的轨迹方程是 （ ）

(A) $3x^2+\frac{3}{2}y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ (B) $3x^2-\frac{3}{2}y^2=1\ (x>0,\ y>0)$
(C) $\frac{3}{2}x^2-3y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ (D) $\frac{3}{2}x^2+3y^2=1\ (x>0,\ y>0)$

8. 有限集合 S 中元素的个数记作 $\mathrm{card}(S)$, 设 A, B 都为有限集合, 给出下列命题:
① $A\cap B=\varnothing$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$;
② $A\subseteq B$ 的必要条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$;
③ $A\nsubseteq B$ 的充分条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$;
④ $A=B$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$.
其中真命题的序号是 （ ）

(A) ③④ (B) ①② (C) ①④ (D) ②③

9. 已知平面区域 D 由以 $A(1,3)$, $B(5,2)$, $C(3,1)$ 为顶点的三角形内部和边界组成. 若在区域 D 上有无穷多个点 (x,y) 可使目标函数 $z=x+my$ 取得最小值, 则 $m=$ （ ）

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 4

10. 关于 x 的方程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$, 给出下列四个命题:
① 存在实数 k, 使得方程恰有 2 个不同的实根;
② 存在实数 k, 使得方程恰有 4 个不同的实根;
③ 存在实数 k, 使得方程恰有 5 个不同的实根;
④ 存在实数 k, 使得方程恰有 8 个不同的实根.
其中假命题的个数是 （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题

11. 设 x、y 为实数, 且 $\frac{x}{1-\mathrm{i}}+\frac{y}{1-2\mathrm{i}}=\frac{5}{1-3\mathrm{i}}$, 则 $x+y=$_____.

12. 接种某疫苗后, 出现发热反应的概率为 0.80, 现有 5 人接种该疫苗, 至少有 3 人出现发热反应的概率为_____. (精确到 0.01)

13. 已知直线 $5x+12y+a=0$ 与圆 $x^2-2x+y^2=0$ 相切, 则 a 的值为_____.

14. 某工程队有 6 项工程需要先后单独完成, 其中工程乙必须在工程甲完成后才能进行, 工程丙必须在工程乙完成后才能进行, 又工程丁必须在工程丙完成后立即进行. 那么安排这 6 项工程的不同排法种数是_____. (用数字作答)

15. 将杨辉三角中的每一个数 C_n^r 都换成分数 $\frac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^r}$, 就得到一个如下图所示的分数三角形, 成为莱布尼茨三角形, 从莱布尼茨三角形可看出 $\frac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^r}+\frac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^x}=\frac{1}{n\mathrm{C}_{n-1}^r}$, 其中 $x=$_____, 令 $a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\cdots+\frac{1}{n\mathrm{C}_{n-1}^2}+\frac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$_____.

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{7}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{140}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{7}$$

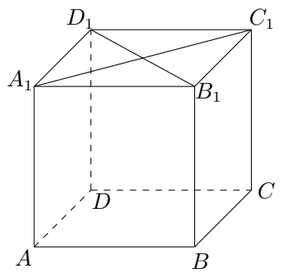
$$\cdots\cdots$$

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$, 其中向量 $\vec{a}=(\sin x,-\cos x)$, $\vec{b}=(\sin x,-3\cos x)$, $\vec{c}=(-\cos x,\sin x)$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小正周期;
(2) 将函数 $f(x)$ 的图像按向量 $\vec{d}$ 平移, 使平移后得到的图像关于坐标原点成中心对称, 求长度最小的 $\vec{d}$.

17. 已知二次函数 $y=f(x)$ 的图象经过坐标原点, 其导函数为 $f'(x)=6x-2$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 点 (n,S_n) $(n\in\mathbf{N}^*)$ 均在函数 $y=f(x)$ 的图象上.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n=\frac{3}{a_na_{n+1}}$, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求使得 $T_n<\frac{m}{20}$ 对所有 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立的最小正整数 m.

18. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是侧棱 CC_1 上的一点, $CP=m$.
(1) 试确定 m, 使直线 AP 与平面 BDD_1B_1 所成角的正切值为 $3\sqrt{2}$;
(2) 在线段 A_1C_1 上是否存在一个定点 Q, 使得对任意的 m, D_1Q 在平面 APD_1 上的射影垂直于 AP, 并证明你的结论.



19. 在某校举行的数学竞赛中, 全体参赛学生的竞赛成绩近似服从正态分布 $N(70,100)$. 已知成绩在 90 分以上 (含 90 分) 的学生有 12 名.
(1) 试问此次参赛学生总数约为多少人?
(2) 若该校计划奖励竞赛成绩排在前 50 名的学生, 试问设奖的分数线约为多少分?

可供查阅的 (部分) 标准正态分布表 $\Phi(x_0)=P(x<x_0)$

x_0	0	1	2	3	4
1.2	0.8849	0.8869	0.888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
x_0	5	6	7	8	9
1.2	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.9	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

20. 设 A、B 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0)$ 的左、右顶点, 椭圆长半轴的长等于焦距, 且 $x=4$ 为它的右准线.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设 P 为右准线上不同于点 $(4,0)$ 的任意一点, 若直线 AP, BP 分别与椭圆相交于异于 A, B 的点 M、N, 证明点 B 在以 MN 为直径的圆内.

21. 设 $x=3$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax+b)\mathrm{e}^{3-x}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的一个极值点.
(1) 求 a 与 b 的关系式 (用 a 表示 b), 并求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 设 $a>0$, $g(x)=\left(a^2+\dfrac{25}{4}\right)\mathrm{e}^x$. 若存在 ξ_1, $\xi_2\in[0,4]$ 使得 $|f(\xi_1)-g(\xi_2)|<1$ 成立, 求 a 的取值范围.

2006 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. 集合 $P=\{x|x^2-16<0\}$, $Q=\{x|x=2n, n\in\mathbf{Z}\}$, 则 $P\cap Q=$ （ ）

(A) $\{-2,2\}$ (B) $\{-2,2,-4,4\}$

(C) $\{-2,0,2\}$ (D) $\{-2,2,0,-4,4\}$

2. 已知非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 若 $\vec{a}+2\vec{b}$ 与 $\vec{a}-2\vec{b}$ 互相垂直, 则 $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) 4 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 2

3. 已知 $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\alpha\in(0,\pi)$, 则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$ （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ (B) $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ (C) $\dfrac{5}{3}$ (D) $-\dfrac{5}{3}$

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{10}=3$, 则 $a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9=$ （ ）

(A) 81 (B) $27\sqrt[5]{27}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 243

5. 甲: A_1、A_2 是互斥事件; 乙: A_1、A_2 是对立事件. 那么 （ ）

(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

6. 关于直线 m, n 与平面 α, β, 有以下四个命题:

① 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\parallel n$;

② 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp n$;

③ 若 $m\perp\alpha$, $n\parallel\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\perp n$;

④ 若 $m\parallel\alpha$, $n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $m\parallel n$.

其中真命题的序号是 （ ）

(A) ①② (B) ③④ (C) ①④ (D) ②③

7. 设 $f(x)=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$, 则 $f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$ 的定义域为 （ ）

(A) $(-4,0)\cup(0,4)$ (B) $(-4,-1)\cup(1,4)$

(C) $(-2,-1)\cup(1,2)$ (D) $(-4,-2)\cup(2,4)$

8. 在 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{24}$ 的展开式中, x 的幂的指数是整数的项共有 （ ）

(A) 3 项 (B) 4 项 (C) 5 项 (D) 9 项

9. 设过点 $P(x,y)$ 的直线分别与 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴交于 A, B 两点, 点 Q 与点 P 关于 y 轴对称, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ 且 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$, 则点 P 的轨迹方程是 （ ）

(A) $3x^2+\dfrac{3}{2}y^2=1$ $(x>0,\ y>0)$ (B) $3x^2-\dfrac{3}{2}y^2=1$ $(x>0,\ y>0)$

(C) $\dfrac{3}{2}x^2-3y^2=1$ $(x>0,\ y>0)$ (D) $\dfrac{3}{2}x^2+3y^2=1$ $(x>0,\ y>0)$

10. 关于 x 的方程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$, 给出下列四个命题:

① 存在实数 k, 使得方程恰有 2 个不同的实根;

② 存在实数 k, 使得方程恰有 4 个不同的实根;

③ 存在实数 k, 使得方程恰有 5 个不同的实根;

④ 存在实数 k, 使得方程恰有 8 个不同的实根.

其中假命题的个数是 （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $b=4$, $A=30^\circ$, 则 $\sin B=$_____.

12. 接种某疫苗后, 出现发热反应的概率为 0.80, 现有 5 人接种该疫苗, 至少有 3 人出现发热反应的概率为_____. (精确到 0.01)

13. 若直线 $y=kx+2$ 与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是_____.

14. 安排 5 名歌手的演出顺序时, 要求某名歌手不第一个出场, 另一名歌手不最后一个出场, 不同排法的总数是_____. (用数字作答)

15. 半径为 r 的圆的面积 $S(r)=\pi r^2$, 周长 $C(r)=2\pi r$, 若将 r 看作 $(0,+\infty)$ 上的变量, 则 $(\pi r^2)'=2\pi r$ ①, ①式可以用语言叙述为: 圆的面积函数的导数等于圆的周长函数. 对于半径为 R 的球, 若将 R 看作 $(0,+\infty)$ 上的变量, 请你写出类似于①的式子: _____②, ②式可以用语言叙述为: _____.

三、解答题

16. 设向量 $\vec{a}=(\sin x,\cos x)$, $\vec{b}=(\cos x,\cos x)$, $x\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值与最小正周期;

(2) 求使不等式 $f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$ 成立的 x 的取值集.

17. 某单位最近组织了一次健身活动, 活动分为登山组和游泳组, 且每个职工至多参加了其中一组. 在参加活动的职工中, 青年人占 42.5%, 中年人占 47.5%, 老年人占 10%. 登山组的职工占参加活动总人数的 $\dfrac{1}{4}$, 且该组中, 青年人占 50%, 中年人占 40%, 老年人占 10%. 为了了解各组不同年龄层次的职工对本次活动的满意程度, 现用分层抽样的方法从参加活动的全体职工中抽取一个容量为 200 的样本. 试确定:

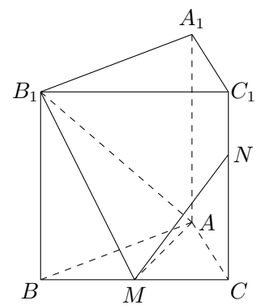
(1) 游泳组中, 青年人、中年人、老年人分别所占的比例;

(2) 游泳组中, 青年人、中年人、老年人分别应抽取的人数.

18. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长和底面边长均为 1, M 是底面 BC 边上的中点, N 是侧棱 CC_1 上的点, 且 $CN=2C_1N$.

(1) 求二面角 B_1-AM-N 的平面角的余弦值;

(2) 求点 B_1 到平面 AMN 的距离.



19. 设函数 $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$ 在 $x=1$ 处取得极值 -2, 试用 c 表示 a 和 b, 并求 $f(x)$ 的单调区间.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 点 $\left(n, \dfrac{S_n}{n}\right)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 均在函数 $y=3x-2$ 的图像上.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n=\dfrac{3}{a_n a_{n+1}}$, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求使得 $T_n<\dfrac{m}{20}$ 对所有 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立的最小正整数 m.

21. 设 A、B 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0)$ 的左、右顶点, 椭圆长半轴的长等于焦距, 且 $x=4$ 为它的右准线.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设 P 为右准线上不同于点 $(4,0)$ 的任意一点, 若直线 AP, BP 分别与椭圆相交于异于 A, B 的点 M、N, 证明点 B 在以 MN 为直径的圆内.

2006 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{\log_2 x-2}$ 的定义域是 （ ）

(A) $(3,+\infty)$ (B) $[3,+\infty)$ (C) $(4,+\infty)$ (D) $[4,+\infty)$

2. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=\dfrac{1}{3}$, 且对任意正整数 m, n 都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2

3. 过平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 任意两条棱的中点作直线, 其中与平面 DBB_1D_1 平行的直线共有 （ ）

(A) 4 条 (B) 6 条 (C) 8 条 (D) 12 条

4. “$a=1$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数”的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $|\vec{a}|=2\left|\vec{b}\right|\neq 0$, 且关于 x 的方程 $x^2+|\vec{a}|x+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 有实根, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的取值范围是 （ ）

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$ (C) $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ (D) $\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$

6. 某外商计划在 4 个候选城市投资 3 个不同的项目, 且在同一个城市投资的项目不超过 2 个, 则该外商不同的投资方案有 （ ）

(A) 16 种 (B) 36 种 (C) 42 种 (D) 60 种

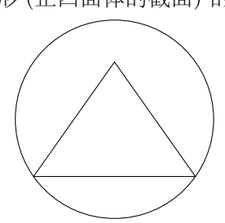
7. 过双曲线 $M:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l, 若 l 与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于点 B, C, 且 $|AB|=|BC|$, 则双曲线 M 的离心率是 （ ）

(A) $\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

8. 设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$, 集合 $M=\{x|f(x)<0\}$, $P=\{x|f'(x)>0\}$, 若 $M\subsetneqq P$, 则实数 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,1)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

9. 棱长为 2 的正四面体的四个顶点都在同一个球面上, 若过该球球心的一个截面如图, 则图中三角形 (正四面体的截面) 的面积是 （ ）



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

10. 若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l:ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 （ ）

(A) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$ (C) $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ (D) $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

二、填空题

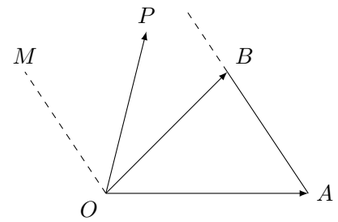
11. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 -80, 则实数 a 的值是_____.

12. 已知 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x-y+1\leqslant 0\\ 2x-y-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 x^2+y^2 的最小值是_____.

13. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 在它们交点处的两条切线与 x 轴所围成的三角形的面积是_____.

14. 若 $f(x)=a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+b\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(ab\neq 0)$ 是偶函数, 则有序实数对 (a,b) 可以是_____. (写出你认为正确的一组数字即可)

15. 如图, $OM\parallel AB$, 点 P 在由射线 OM、线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内 (不含边界) 运动, 且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 则 x 的取值范围是_____; 当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时, y 的取值范围是_____.

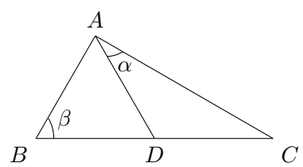


三、解答题

16. 如图, D 是直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点, $AB=AD$, 记 $\angle CAD=\alpha$, $\angle ABC=\beta$.

(1) 证明: $\sin\alpha+\cos 2\beta=0$;

(2) 若 $AC=\sqrt{3}DC$, 求 β 的值.



17. 某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查 (简称安检). 若安检不合格, 则必须整改. 若整改后经复查仍不合格, 则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的, 且每家煤矿整改前安检合格的概率是 0.5, 整改后安检合格的概率是 0.8, 计算 (结果精确到 0.01):

(1) 恰好有两家煤矿必须整改的概率;

(2) 平均有多少家煤矿必须整改;

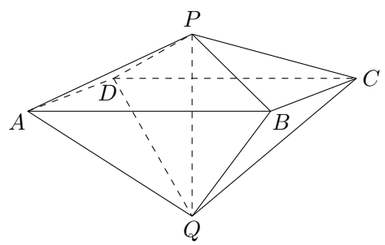
(3) 至少关闭一家煤矿的概率.

18. 如图, 已知两个正四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 的高分别为 1 和 2, $AB=4$.

(1) 证明: $PQ\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求异面直线 AQ 与 PB 所成的角;

(3) 求点 P 到平面 QAD 的距离.



19. 已知函数 $f(x)=x-\sin x$, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $0<a_1<1$, $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1,2,3,\cdots$. 证明:

(1) $0<a_{n+1}<a_n<1$;

(2) $a_{n+1}<\dfrac{1}{6}{a_n}^3$.

20. 对 1 个单位质量的含污物体进行清洗, 清洗前其清洁度 (含污物体的清洁度定义为: $1-\dfrac{\text{污物质量}}{\text{物体质量 (含污物)}}$) 为 0.8, 要求洗完后的清洁度是 0.99. 有两种方案可供选择, 方案甲: 一次清洗; 方案乙: 两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响, 其质量变为 a $(1\leqslant a\leqslant 3)$. 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是 $\dfrac{x+0.8}{x+1}$ $(x>a-1)$, 用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是 $\dfrac{y+ac}{y+a}$, 其中 c $(0.8<c<0.99)$ 是该物体初次清洗后的清洁度.

(1) 分别求出方案甲以及 $c=0.95$ 时方案乙的用水量, 并比较哪一种方案用水量较少;

(2) 若采用方案乙, 当 a 为某定值时, 如何安排初次与第二次清洗的用水量, 使总用水量最少? 并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

21. 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 抛物线 $C_2:(y-m)^2=2px$ $(p>0)$, 且 C_1、C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.

(1) 当 $AB\perp x$ 轴时, 求 m、p 的值, 并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上;

(2) 是否存在 m、p 的值, 使抛物线 C_2 的焦点恰在直线 AB 上? 若存在, 求出符合条件的 m、p 的值; 若不存在, 请说明理由.

2006 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{\log_2 x}$ 的定义域是 （ ）

(A) $(0,1]$ (B) $(0,+\infty)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

2. 已知向量 $\vec{a}=(2,t)$, $\vec{b}=(1,2)$, 若 $t=t_1$ 时, $\vec{a}\parallel\vec{b}$; $t=t_2$ 时, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 则 （ ）

(A) $t_1=-4$, $t_2=-1$ (B) $t_1=-4$, $t_2=1$

(C) $t_1=4$, $t_2=-1$ (D) $t_1=4$, $t_2=1$

3. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 80, 则实数 a 的值是 （ ）

(A) -2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt[3]{4}$ (D) 2

4. 过半径为 2 的球 O 表面上一点 A 作球 O 的截面, 若 OA 与该截面所成的角是 60°, 则该截面的面积是 （ ）

(A) π (B) 2π (C) 3π (D) $2\sqrt{3}\pi$

5. “$a=1$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数”的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 在数字 1, 2, 3 与符号 +, − 五个元素的所有全排列中, 任意两个数字都不相邻的全排列个数是 （ ）

(A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 24

7. 圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上的点到直线 $x+y-14=0$ 的最大距离与最小距离的差是 （ ）

(A) 36 (B) 18 (C) $6\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{2}$

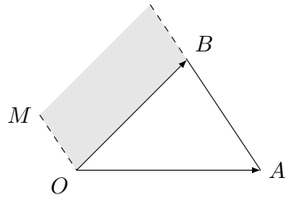
8. 设点 P 是函数 $f(x)=\sin\omega x$ 的图象 C 的一个对称中心, 若点 P 到图象 C 的对称轴上的距离的最小值是 $\frac{\pi}{4}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是 （ ）

(A) 2π (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

9. 过双曲线 $M:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l, 若 l 与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于点 B, C, 且 $|AB|=|BC|$, 则双曲线 M 的离心率是 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{10}$

10. 如图, $OM\parallel AB$, 点 P 由射线 OM、线段 OB 及 AB 的延长线围成的阴影区域内 (不含边界), 且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 则实数对 (x,y) 可以是( )



(A) $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ (B) $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ (D) $\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$

二、填空题

11. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$, $n=1,2,3,\cdots$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$_____.

12. 某高校有甲、乙两个数学建模兴趣班. 其中甲班 40 人, 乙班 50 人. 现分析两个班的一次考试成绩, 算得甲班的平均成绩是 90 分, 乙班的平均成绩是 81 分, 则该校数学建模兴趣班的平均成绩是_____分.

13. 已知 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x-y+1\leqslant 0\\ 2x-y-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 x^2+y^2 的最小值是_____.

14. 过三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的任意两条棱的中点作直线, 其中与平面 ABB_1A_1 平行的直线共有_____条.

15. 若 $f(x)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 是偶函数, 则 $a=$_____.

三、解答题

16. 已知 $\sqrt{3}\sin\theta-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}{\cos(\pi+\theta)}\cdot\cos\theta=1$, $\theta\in(0,\pi)$, 求 θ 的值.

17. 某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查 (简称安检). 若安检不合格, 则必须整改. 若整改后经复查仍不合格, 则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的, 且每家煤矿整改前安检合格的概率是 0.5, 整改后安检合格的概率是 0.8, 计算 (结果精确到 0.01):

(1) 恰好有两家煤矿必须整改的概率;

(2) 某煤矿不被关闭的概率;

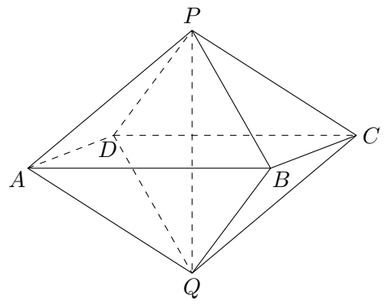
(3) 至少关闭一家煤矿的概率.

18. 如图, 已知两个正四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 的高都是 2, $AB=4$.

(1) 证明: $PQ\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求异面直线 AQ 与 PB 所成的角;

(3) 求点 P 到平面 QAD 的距离.



19. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1-\dfrac{3}{a}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 上两点 A、B 处的切线都与 y 轴垂直, 且线段 AB 与 x 轴有公共点, 求实数 a 的取值范围.

20. 在 m $(m\geqslant 2)$ 个不同数的排列 $P_1P_2\cdots P_m$ 中, 若 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$ 时 $P_i>P_j$ (即前面某数大于后面某数), 则称 P_i 与 P_j 构成一个逆序. 一个排列的全部逆序的总数称为该排列的逆序数. 记排列 $(n+1)n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数为 a_n, 如排列 21 的逆序数 $a_1=1$, 排列 321 的逆序数 $a_2=3$, 排列 4321 的逆序数 $a_3=6$.

(1) 求 a_4、a_5, 并写出 a_n 的表达式;

(2) 令 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, 证明: $2n<b_1+b_2+\cdots b_n<2n+3$, $n=1,2,\cdots$.

21. 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 抛物线 $C_2:(y-m)^2=2px$ $(p>0)$, 且 C_1、C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.

(1) 当 $AB\perp x$ 轴时, 求 m、p 的值, 并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上;

(2) 若 $p=\dfrac{4}{3}$ 且抛物线 C_2 的焦点在直线 AB 上, 求 m 的值及直线 AB 的方程.

2006 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、选择题

1. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\sin x-|a|$, $x \in \mathbf{R}$ 为奇函数, 则 $a=$ （　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) ± 1

2. 圆 $(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=1$ 的切线方程中有一个是 （　）

(A) $x-y=0$　　(B) $x+y=0$　　(C) $x=0$　　(D) $y=0$

3. 某人 5 次上班途中所花的时间 (单位: 分钟) 分别为 x, y, 10, 11, 9. 已知这组数据的平均数为 10, 方差为 2, 则 $|x-y|$ 的值为 （　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

4. 为了得到函数 $y=2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象, 只需把函数 $y=2\sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象上所有的点 （　）

(A) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)

(B) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)

(C) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)

(D) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)

5. $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3x}\right)^{10}$ 的展开式中含 x 的正整数指数幂的项数是 （　）

(A) 0　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 6

6. 已知两点 $M(-2,0)$, $N(2,0)$, 点 P 为坐标平面内的动点, 满足 $\left|\overrightarrow{MN}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MP}\right|+\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP}=0$, 则动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程为 （　）

(A) $y^2=8x$　　(B) $y^2=-8x$　　(C) $y^2=4x$　　(D) $y^2=-4x$

7. 若 A、B、C 为三个集合, $A \cup B=B \cap C$, 则一定有 （　）

(A) $A \subseteq C$　　(B) $C \subseteq A$　　(C) $A \neq C$　　(D) $A \neq \varnothing$

8. 设 a、b、c 是互不相等的正数, 则下列不等式中不恒成立的是 （　）

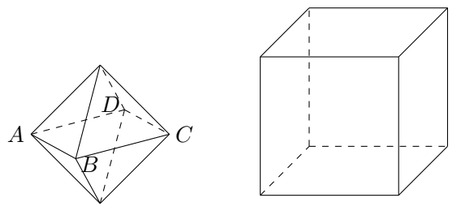
(A) $|a-b| \leqslant |a-c|+|b-c|$

(B) $a^2+\frac{1}{a^2} \geqslant a+\frac{1}{a}$

(C) $|a-b|+\frac{1}{a-b} \geqslant 2$

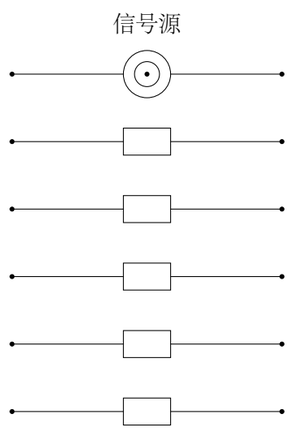
(D) $\sqrt{a+3}-\sqrt{a+1} \leqslant \sqrt{a+2}-\sqrt{a}$

9. 两个相同的正四棱锥组成如图所示的几何体, 可放入棱长为 1 的正方体内, 使正四棱锥的底面 $ABCD$ 与正方体的某一个平面平行, 且各顶点均在正方体的面上, 则这样的几何体体积的可能值有 （　）



(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 无穷多个

10. 图中有一个信号源和五个接收器. 接收器与信号源在同一个串联线路中时, 就能接收到信号, 否则就不能接收到信号. 若将图中左端的六个接线点随机地平均分成三组, 将右端的六个接线点也随机地平均分成三组, 再把所有六组中每组的两个接线点用导线连接, 则这五个接收器能同时接收到信号的概率是 （　）



(A) $\frac{4}{45}$　　(B) $\frac{1}{36}$　　(C) $\frac{4}{15}$　　(D) $\frac{8}{15}$

二、填空题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC=12$, $A=60°$, $B=45°$, 则 $AC=$_____.

12. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x-y \leqslant 2 \\ x-y \geqslant -1 \\ x+y \geqslant 1 \end{cases}$, 则 $z=2x+3y$ 的最大值为_____.

13. 今有 2 个红球, 3 个黄球, 4 个白球, 同色球不加以区分, 将这 9 个球排成一列有种不同的方法_____. (用数字作答)

14. $\cot 20° \cos 10°+\sqrt{3}\sin 10° \tan 70°-2\cos 40°=$_____.

15. 对正整数 n, 设曲线 $y=x^n(1-x)$ 在 $x=2$ 处的切线与 y 轴交点的纵坐标为 a_n, 则数列 $\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$ 的前 n 项和的公式是_____.

16. 不等式 $\log_2\left(x+\frac{1}{x}+6\right) \leqslant 3$ 的解集为_____.

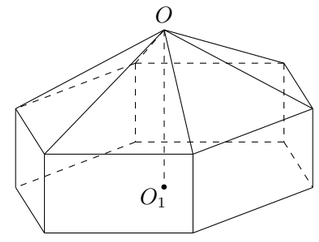
三、解答题

17. 已知三点 $P(5,2)$、$F_1(-6,0)$、$F_2(6,0)$.

(1) 求以 F_1、F_2 为焦点且过点 P 的椭圆的标准方程;

(2) 设点 P、F_1、F_2 关于直线 $y=x$ 的对称点分别为 P'、F_1'、F_2', 求以 F_1'、F_2' 为焦点且过点 P' 的双曲线的标准方程.

18. 请您设计一个帐篷. 它下部的形状是高为 1 m 的正六棱柱, 上部的形状是侧棱长为 3 m 的正六棱锥 (如图所示). 试问当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时, 帐篷的体积最大?



19. 在正三角形 ABC 中, E、F、P 分别是 AB、AC、BC 边上的点, 满足 $AE:EB=CF:FA=CP:PB=1:2$ (如图 1). 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 折起到 $\triangle A_1EF$ 的位置, 使二面角 A_1-EF-B 成直二面角, 连接 A_1B、A_1P (如图 2).

(1) 求证: $A_1E\perp$ 平面 BEP;

(2) 求直线 A_1E 与平面 A_1BP 所成角的大小;

(3) 求二面角 $B-A_1P-F$ 的大小. (用反三角函数表示)

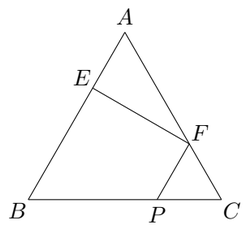


图 1

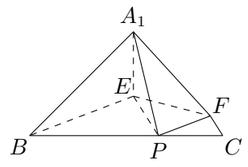


图 2

20. 设 a 为实数, 设函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

(1) 设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$, 求 t 的取值范围, 并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$;

(2) 求 $g(a)$;

(3) 试求满足 $g(a)=g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ 的所有实数 a.

21. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足: $b_n=a_n-a_{n+2}$, $c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$), 证明: $\{a_n\}$ 为等差数列的充分必要条件是 $\{c_n\}$ 为等差数列且 $b_n\leqslant b_{n+1}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$).

2006 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\left\{x\left|\frac{x}{(x-1)^3}\geqslant 0\right.\right\}$, $N=\{y|y=3x^2+1, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N$ 等于 （ ）

(A) $\varnothing$ (B) $\{x|x\geqslant 1\}$

(C) $\{x|x>1\}$ (D) $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$

2. 已知复数 z 满足 $(\sqrt{3}+3\mathrm{i})z=3\mathrm{i}$, 则 z 等于 （ ）

(A) $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (B) $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ (C) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (D) $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

3. 若 $a>0$, $b>0$, 则不等式 $-b<\frac{1}{x}<a$ 等价于 （ ）

(A) $-\frac{1}{b}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{a}$ (B) $-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$

(C) $x<-\frac{1}{a}$ 或 $x>\frac{1}{b}$ (D) $x<-\frac{1}{b}$ 或 $x>\frac{1}{a}$

4. 设 O 为坐标原点, F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, A 为抛物线上的一点, 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AF}=-4$, 则点 A 的坐标为 （ ）

(A) $(2,\pm 2\sqrt{2})$ (B) $(1,\pm 2)$ (C) $(1,2)$ (D) $(2,2\sqrt{2})$

5. 对于 $\mathbf{R}$ 上可导的任意函数 $f(x)$, 若满足 $(x-1)f'(x)\geqslant 0$, 则必有 （ ）

(A) $f(0)+f(2)<2f(1)$ (B) $f(0)+f(2)\leqslant 2f(1)$

(C) $f(0)+f(2)\geqslant 2f(1)$ (D) $f(0)+f(2)>2f(1)$

6. 若不等式 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 对一切 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 成立, 则 a 的最小值为( )

(A) 0 (B) -2 (C) $-\frac{5}{2}$ (D) -3

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$, 且 A、B、C 三点共线 (该直线不过点 O), 则 S_{200} 等于 （ ）

(A) 100 (B) 101 (C) 200 (D) 201

8. 在 $(x-\sqrt{2})^{2006}$ 的二项展开式中, 含 x 的奇次幂的项之和为 S, 当 $x=\sqrt{2}$ 时, S 等于 （ ）

(A) 2^{3008} (B) -2^{3008} (C) 2^{3009} (D) -2^{3009}

9. P 为双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的右支上一点, M、N 分别是圆 $(x+5)^2+y^2=4$ 和 $(x-5)^2+y^2=1$ 上的点, 则 $|PM|-|PN|$ 的最大值为 （ ）

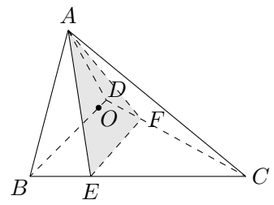
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

10. 将 7 个人 (含甲、乙) 分成三个组, 一组 3 人, 另两组各 2 人, 不同的分组数为 a, 甲、乙分在同一组的概率为 p, 则 a、p 的值分别为 （ ）

(A) $a=105$, $p=\frac{5}{21}$ (B) $a=105$, $p=\frac{4}{21}$

(C) $a=210$, $p=\frac{5}{21}$ (D) $a=210$, $p=\frac{4}{21}$

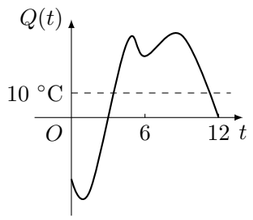
11. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 截面 AEF 经过四面体的内切球 (与四个面都相切的球) 球心 O, 且与 BC、DC 分别截于 E、F. 如果截面将四面体分为体积相等的两部分, 设四棱锥 $A-BEFD$ 与三棱锥 $A-EFC$ 的表面积分别为 S_1、S_2, 则必有 （ ）

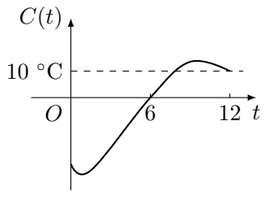


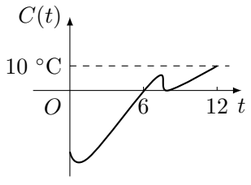
(A) $S_1<S_2$ (B) $S_1>S_2$

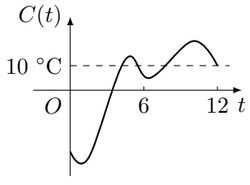
(C) $S_1=S_2$ (D) S_1、S_2 的大小不能确定

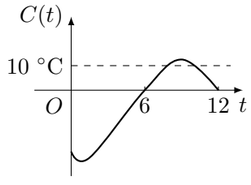
12. 某地一年内的气温 $Q(t)$ (单位: °C) 与时间 t (月份) 之间的关系如图所示, 已知该年的平均气温为 10 °C. 令 $C(t)$ 表示时间段 $[0,t]$ 的平均气温, $C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示, 则正确的是 （ ）



(A)


(B)


(C)


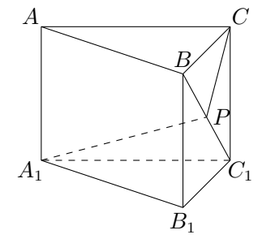
(D)


二、填空题

13. 数列 $\left\{\frac{1}{4n^2-1}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$_____.

14. 设 $f(x)=\log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $[f^{-1}(m)+6]\cdot[f^{-1}(n)+6]=27$, 则 $f(m+n)=$_____.

15. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面为直角三角形, $\angle ACB=90°$, $AC=6$, $BC=CC_1=\sqrt{2}$, P 是 BC_1 上一动点, 则 $CP+PA_1$ 的最小值为_____.



16. 已知圆 $M:(x+\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$, 直线 $l:y=kx$, 下面四个命题:

① 对任意实数 k 和 θ, 直线 l 和圆 M 相切;

② 对任意实数 k 和 θ, 直线 l 和圆 M 有公共点;

③ 对任意实数 θ, 必存在实数 k, 使得直线 l 和圆 M 相切;

④ 对任意实数 k, 必存在实数 θ, 使得直线 l 和圆 M 相切.

其中真命题的代号是_____. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-\frac{2}{3}$ 与 $x=1$ 时都取得极值.

(1) 求 a、b 的值与函数 $f(x)$ 的单调区间;

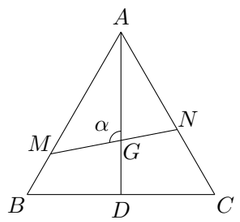
(2) 若对 $x\in[-1,2]$, 不等式 $f(x)<c^2$ 恒成立, 求 c 的取值范围.

18. 某商场举行抽奖促销互动, 抽奖规则是: 从装有 9 个白球、1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球, 记下颜色后放回, 摸出一个红球可获得奖金 10 元; 摸出两个红球可获得奖金 50 元. 现有甲、乙两位顾客, 规定: 甲摸一次, 乙摸两次. 令 ξ 表示甲、乙两人摸球后获得的奖金总额. 求:

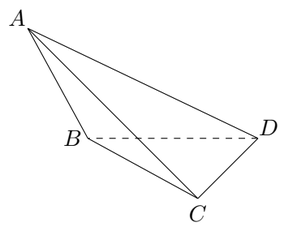
(1) ξ 的分布列;

(2) ξ 的的数学期望.

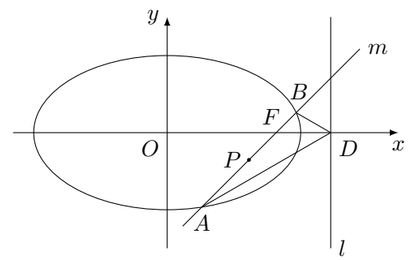
19. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, M、N 分别是边 AB、AC 上的点, 线段 MN 经过 $\triangle ABC$ 的中心 G. 设 $\angle MGA=\alpha\left(\dfrac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
(1) 试将 $\triangle AGM$、$\triangle AGN$ 的面积 (分别记为 S_1 与 S_2) 表示为 α 的函数;
(2) 求 $y=\dfrac{1}{{S_1}^2}+\dfrac{1}{{S_2}^2}$ 的最大值与最小值.



20. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 侧面 ABD、ACD 是全等的直角三角形, AD 是公共的斜边, 且 $AD=\sqrt{3}$, $BD=CD=1$, 另一个侧面 ABC 是正三角形.
(1) 求证: $AD\perp BC$;
(2) 求二面角 $B-AC-D$ 的大小;
(3) 在直线 AC 上是否存在一点 E, 使 ED 与面 BCD 成 30° 角? 若存在, 确定 E 的位置; 若不存在, 说明理由.



21. 如图, 椭圆 $Q:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$, 过点 F 的一动直线 m 绕点 F 转动, 并且交椭圆于 A、B 两点, P 为线段 AB 的中点.
(1) 求点 P 的轨迹 H 的方程;
(2) 在 Q 的方程中, 令 $a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$, $b^2=\sin\theta\ \left(0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$, 确定 θ 的值, 使原点距椭圆的右准线 l 最远, 此时, 设 l 与 x 轴交点为 D, 当直线 m 绕点 F 转动到什么位置时, 三角形 ABD 的面积最大?



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=\dfrac{3}{2}$, 且 $a_n=\dfrac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}\ (n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 证明: 对一切正整数 n, 不等式 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n<2\cdot n!$ 恒成立.

2006 年普通高等学校招生考试（江西卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x|x(x-1)\geqslant 0\}$, $Q=\left\{x\left|\dfrac{1}{x-1}>0\right.\right\}$, 则 $P\cap Q$ 等于(　　)

(A) $\varnothing$　　(B) $\{x|x\geqslant 1\}$

(C) $\{x|x>1\}$　　(D) $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$

2. 函数 $y=4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ 的最小正周期为　　(　　)

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 4π

3. 在各项均不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{n+1}-a_n^2+a_{n-1}=0$ $(n\geqslant 2)$, 则 $S_{2n-1}-4n=$　　(　　)

(A) -2　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

4. 下列四个条件中, p 是 q 的必要不充分条件的是　　(　　)

(A) $p: a>b$, $q: a^2>b^2$

(B) $p: a>b$, $q: 2^a>2^b$

(C) $p: ax^2+by^2=c$ 为双曲线, $q: ab<0$

(D) $p: ax^2+bx+c>0$, $q: \dfrac{c}{x^2}+\dfrac{b}{x}+a>0$

5. 对于 $\mathbf{R}$ 上可导的任意函数 $f(x)$, 若满足 $(x-1)f'(x)\geqslant 0$, 则必有　　(　　)

(A) $f(0)+f(2)<2f(1)$　　(B) $f(0)+f(2)\leqslant 2f(1)$

(C) $f(0)+f(2)\geqslant 2f(1)$　　(D) $f(0)+f(2)>2f(1)$

6. 若不等式 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 对一切 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 成立, 则 a 的最小值为(　　)

(A) 0　　(B) -2　　(C) $-\dfrac{5}{2}$　　(D) -3

7. 在 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 若常数项为 60, 则 n 等于　　(　　)

(A) 3　　(B) 6　　(C) 9　　(D) 12

8. 袋中有 40 个小球, 其中红色球 16 个、蓝色球 12 个、白色球 8 个、黄色球 4 个, 从中随机抽取 10 个球作成一个样本, 则这个样本恰好是按分层抽样方法得到的概率为　　(　　)

(A) $\dfrac{C_4^1C_8^2C_{12}^3C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$　　(B) $\dfrac{C_4^2C_8^1C_{12}^3C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

(C) $\dfrac{C_4^2C_8^3C_{12}^1C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$　　(D) $\dfrac{C_4^1C_8^3C_{12}^4C_{16}^2}{C_{40}^{10}}$

9. 如果四棱锥的四条侧棱都相等, 就称它为“等腰四棱锥”, 四条侧棱称为它的腰. 以下 4 个命题中, 假命题的是　　(　　)

(A) 等腰四棱锥的腰与底面所成的角都相等

(B) 等腰四棱锥的侧面与底面所成的二面角都相等或互补

(C) 等腰四棱锥的底面四边形必存在外接圆

(D) 等腰四棱锥的各顶点必在同一球面上

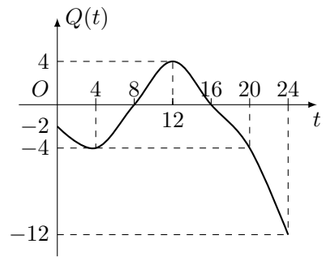
10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$, 且 A、B、C 三点共线 (该直线不过点 O), 则 S_{200} 等于　　(　　)

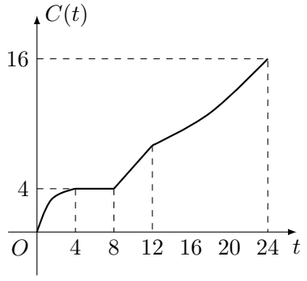
(A) 100　　(B) 101　　(C) 200　　(D) 201

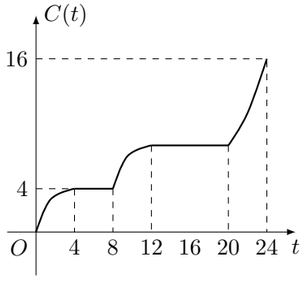
11. P 为双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的右支上一点, M N 分别是圆 $(x+5)^2+y^2=4$ 和 $(x-5)^2+y^2=1$ 上的点, 则 $|PM|-|PN|$ 的最大值为　　(　　)

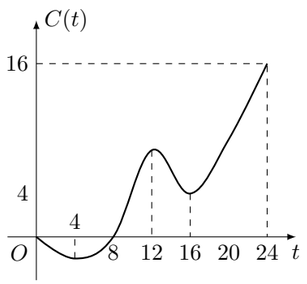
(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

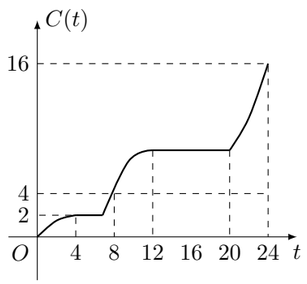
12. 某地一天内的气温 $Q(t)$ (单位: °C) 与时刻 t (单位: 时) 之间的关系如图所示, 令 $C(t)$ 表示时间段 $[0,t]$ 内的温差 (即时间段 $[0,t]$ 内的最高气温与最低气温的差). $C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示, 则正确的图象大致是　　(　　)



(A)


(B)


(C)


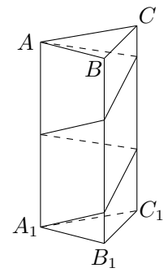
(D)


二、填空题

13. 已知向量 $\vec{a}=(1,\sin\theta)$, $\vec{b}=(1,\cos\theta)$, 则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 的最大值为_____.

14. 设 $f(x)=\log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $[f^{-1}(m)+6]\cdot[f^{-1}(n)+6]=27$, 则 $f(m+n)=$_____.

15. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 1, 高为 8, 一质点自 A 点出发, 沿着三棱柱的侧面绕行两周到达 A_1 点的最短路线长为_____.



16. 已知 F_1、F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0$ 且 $a\neq b)$ 的两个焦点, P 为双曲线右支上异于顶点的任意一点, 点 O 为坐标原点. 下面四个命题:

① $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 $x=a$ 上;

② $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 $x=b$ 上;

③ $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 OP 上;

④ $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆必通过点 $(a,0)$.

其中真命题的代号是_____. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-\dfrac{2}{3}$ 与 $x=1$ 时都取得极值.

(1) 求 a、b 的值与函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对 $x\in[-1,2]$, 不等式 $f(x)<c^2$ 恒成立, 求 c 的取值范围.

18. 某商场举行抽奖促销互动, 抽奖规则是: 从装有 9 个白球、1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球, 记下颜色后放回, 摸出一个红球可获得二等奖; 摸出两个红球可获得一等奖. 现有甲、乙两位顾客, 规定: 甲摸一次, 乙摸两次. 求:

(1) 甲、乙两人都没有中奖的概率;

(2) 甲、两人中至少有一人获二等奖的概率.

19. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 已知 $\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

(1) 求 $\tan^2\dfrac{B+C}{2}+\sin^2\dfrac{A}{2}$ 的值;

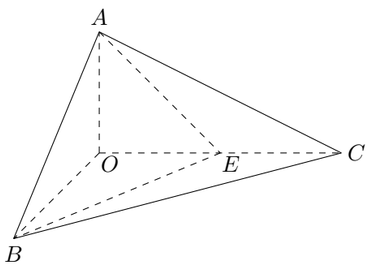
(2) 若 $a=2$, $S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$, 求 b 的值.

20. 如图, 已知三棱锥 $O-ABC$ 的侧棱 OA、OB、OC 两两垂直, 且 $OA=1$, $OB=OC=2$, E 是 OC 的中点.

(1) 求 O 点到面 ABC 的距离;

(2) 求异面直线 BE 与 AC 所成的角;

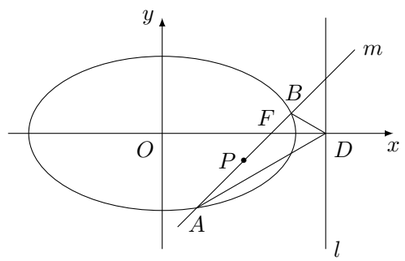
(3) 求二面角 $E-AB-C$ 的大小.



21. 如图, 椭圆 $Q:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$, 过点 F 的一动直线 m 绕点 F 转动, 并且交椭圆于 A、B 两点, P 为线段 AB 的中点.

(1) 求点 P 的轨迹 H 的方程;

(2) 在 Q 的方程中, 令 $a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$, $b^2=\sin\theta$ $\left(0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$, 设轨迹 H 的最高点和最低点分别为 M 和 N. 当 θ 为何值时, $\triangle MNF$ 为一个正三角形?



22. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=3$, 且 $\dfrac{2a_{n+1}-a_n}{2a_n-a_{n+1}}=a_na_{n+1}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$, $T_n=\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}$, 求 S_n+T_n, 并确定最小正整数 n, 使 S_n+T_n 为整数.

2006 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2\}$, 则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 （ ）

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 8

2. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的任意函数, 则下列叙述正确的是 （ ）

(A) $f(x)f(-x)$ 是奇函数 (B) $f(x)|f(-x)|$ 是奇函数

(C) $f(x)-f(-x)$ 是偶函数 (D) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数

3. 给出下列四个命题:

① 垂直于同一直线的两条直线互相平行;

② 垂直于同一平面的两个平面互相平行;

③ 若直线 l_1, l_2 与同一平面所成的角相等, 则 l_1, l_2 互相平行;

④ 若直线 l_1, l_2 是异面直线, 则与 l_1, l_2 都相交的两条直线是异面直线.

其中假命题的个数是 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两条渐近线与直线 $x=3$ 围成一个三角形区域, 表示该区域的不等式组是 （ ）

(A) $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y\geqslant 0\\ 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 0\\ 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ (C) $\begin{cases}x-y\leqslant 0\\ x+y\leqslant 0\\ 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x-y\leqslant 0\\ x+y\geqslant 3\\ 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

5. 设 $\oplus$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个运算, A 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集, 若对任意 a, $b\in A$, 有 $a\oplus b\in A$, 则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法 (除数不等于零) 四则运算都封闭的是 （ ）

(A) 自然数集 (B) 整数集 (C) 有理数集 (D) 无理数集

6. $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C, 所对边的长分别为 a, b, c, 设向量 $\vec{p}=(a+c,b)$、$\vec{q}=(b-a,c-a)$. 若 $\vec{p}\parallel\vec{q}$, 则角 C 的大小为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{2\pi}{3}$

7. 与方程 $y=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}+1$ $(x\geqslant 0)$ 的曲线关于直线 $y=x$ 对称的曲线方程为 （ ）

(A) $y=\ln(1+\sqrt{x})$ (B) $y=\ln(1-\sqrt{x})$

(C) $y=-\ln(1+\sqrt{x})$ (D) $y=-\ln(1-\sqrt{x})$

8. 曲线 $\dfrac{x^2}{10-m}+\dfrac{y^2}{6-m}=1$ $(m<6)$ 与曲线 $\dfrac{x^2}{5-n}+\dfrac{y^2}{9-n}=1$ $(5<n<9)$ 的 （ ）

(A) 焦距相等 (B) 离心率相等 (C) 焦点相同 (D) 准线相同

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, 前 n 项和为 S_n, 若数列 $\{a_n+1\}$ 也是等比数列, 则 S_n 等于 （ ）

(A) $2^{n+1}-2$ (B) $3n$ (C) $2n$ (D) 3^n-1

10. 直线 $y=2k$ 与曲线 $9k^2x^2+y^2=18k^2|x|$ ($k\in\mathbf{R}$, 且 $k\neq 0$) 的公共点的个数为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\dfrac{1}{2}|\sin x-\cos x|$, 则 $f(x)$ 的值域是 （ ）

(A) $[-1,1]$ (B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ (C) $\left[-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (D) $\left[-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

12. 设 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, 点 P 是线段 AB 上的一个动点, $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$, 若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$, 则实数 λ 的取值范围是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$ (B) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$

(C) $\dfrac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

13. 设 $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & x\leqslant 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$, 则 $g\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=$_____.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{6}{7}\right)+\left(\dfrac{4}{5^2}-\dfrac{6}{7^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{4}{5^n}-\dfrac{6}{7^n}\right)}{\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{4}{5}\right)+\left(\dfrac{5}{6^2}-\dfrac{4}{5^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{5}{6^n}-\dfrac{4}{5^n}\right)}=$_____.

15. 5 名乒乓球队员中, 有 2 名老队员和 3 名新队员. 现从中选出 3 名队员排成 1、2、3 号参加团体比赛, 则入选的 3 名队员中至少有 1 名老队员, 且 1、2 号中至少有 1 名新队员的排列方法有_____种. (以数作答)

16. 若一条直线与一个正四棱柱各个面所成的角都为 α, 则 $\cos\alpha=$_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x$, $x\in\mathbf{R}$. 求:

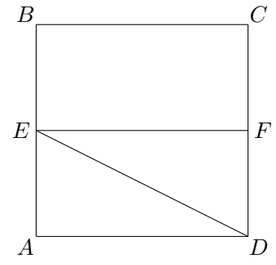
(1) 函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值的自变量 x 的集合;

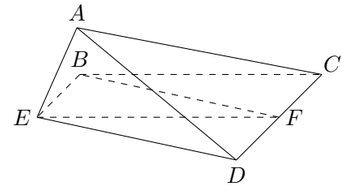
(2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

18. 已知正方形 $ABCD$, E、F 分别是边 AB、CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 如图所示, 记二面角 $A-DE-C$ 的大小为 θ $(0<\theta<\pi)$.

(1) 证明: $BF\parallel$ 平面 ADE;

(2) 若 $\triangle ACD$ 为正三角形, 试判断点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 是否在直线 EF 上, 证明你的结论, 并求角 θ 的余弦值.





19. 现有甲、乙两个项目, 对甲项目每投资十万元, 一年后利润是 1.2 万元、1.18 万元、1.17 万元的概率分别为 $\dfrac{1}{6}$、$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$; 已知乙项目的利润与产品价格的调整有关, 在每次调整中, 价格下降的概率都是 p $(0<p<1)$, 设乙项目产品价格在一年内进行 2 次独立的调整, 记乙项目产品价格在一年内的下降次数为 ξ, 对乙项目每投资十万元, ξ 取 0、1、2 时, 一年后相应利润是 1.3 万元、1.25 万元、0.2 万元. 随机变量 ξ_1、ξ_2 分别表示对甲、乙两项目各投资十万元一年后的利润.

(1) 求 ξ_1、ξ_2 的概率分布和数学期望 $E\xi_1$、$E\xi_2$;

(2) 当 $E\xi_1<E\xi_2$ 时, 求 p 的取值范围.

20. 已知点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ $(x_1,\ x_2\neq 0)$ 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上的两个动点, O 是坐标原点, 向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 满足 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$. 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y=0$.

(1) 证明线段 AB 是圆 C 的直径;

(2) 当圆 C 的圆心到直线 $x-2y=0$ 的距离的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 p 的值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+bx^2+cx+d$, 其中 a, b, c 是以 d 为公差的等差数列, 且 $a>0$, $d>0$. 设 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点. 在 $\left[1-\dfrac{2b}{a},0\right]$ 上, $f'(x)$ 在 x_1 处取得最大值, 在 x_2 处取得最小值. 将 $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f'(x_1))$, $(x_2,f'(x_2))$ 依次记为 A, B, C.

(1) 求 x_o;

(2) 若 $\triangle ABC$ 有一边平行于 x 轴, 且面积为 $2+\sqrt{3}$, 求 a, d 的值.

22. 已知 $f_0(x)=x^n$, $f_k(x)=\dfrac{f'_{k-1}(x)}{f_{k-1}(1)}$, 其中 $k\leqslant n$ $(n,\ k\in\mathbf{N}_+)$, 设 $F(x)=\mathrm{C}_n^0 f_0(x^2)+\mathrm{C}_n^1 f_1(x^2)+\cdots+\mathrm{C}_n^n f_n(x^2)$, $x\in[-1,1]$.

(1) 写出 $f_k(1)$;

(2) 证明: 对任意的 x_1, $x_2\in[-1,1]$, 恒有 $|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant 2^{n-1}(n+2)-n-1$.

2006 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+3\right)$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

2. 设集合 $A=\{1,2\}$, 则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 （ ）

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 8

3. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的任意函数, 则下列叙述正确的是 （ ）

(A) $f(x)f(-x)$ 是奇函数 (B) $f(x)|f(-x)|$ 是奇函数

(C) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数 (D) $f(x)-f(-x)$ 是偶函数

4. $\mathrm{C}_6^1+\mathrm{C}_6^2+\mathrm{C}_6^3+\mathrm{C}_6^4+\mathrm{C}_6^5$ 的值为 （ ）

(A) 61 (B) 62 (C) 63 (D) 64

5. 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两个根可分别作为 （ ）

(A) 一个椭圆和一双曲线的离心率 (B) 两抛物线的离心率

(C) 一个椭圆和一抛物线的离心率 (D) 两椭圆的离心率

6. 给出下列四个命题:

① 垂直于同一直线的两条直线互相平行;

② 垂直于同一平面的两个平面互相平行;

③ 若直线 l_1, l_2 与同一平面所成的角相等, 则 l_1, l_2 互相平行;

④ 若直线 l_1, l_2 是异面直线, 则与 l_1, l_2 都相交的两条直线是异面直线.

其中假命题的个数是 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. 双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两条渐近线与直线 $x=3$ 围成一个三角形区域, 表示该区域的不等式组是 （ ）

(A) $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\geqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ (C) $\begin{cases}x-y\leqslant 0\\x+y\leqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x-y\leqslant 0\\x+y\geqslant 3\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

8. 设 $\oplus$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个运算, A 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集, 若对任意 a, $b\in A$, 有 $a\oplus b\in A$, 则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法 (除数不等于零) 四则运算都封闭的是 （ ）

(A) 自然数集 (B) 整数集 (C) 有理数集 (D) 无理数集

9. $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C, 所对边的长分别为 a, b, c, 设向量 $\vec{p}=(a+c,b)$、$\vec{q}=(b-a,c-a)$. 若 $\vec{p}\parallel\vec{q}$, 则角 C 的大小为 （ ）

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

10. 已知等腰 $\triangle ABC$ 的腰为底的 2 倍, 则顶角 A 的正切值是 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{15}}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{15}}{7}$

11. 与方程 $y=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1$ $(x\geqslant 0)$ 的曲线关于直线 $y=x$ 对称的曲线方程为 （ ）

(A) $y=\ln(1+\sqrt{x})$ (B) $y=\ln(1-\sqrt{x})$

(C) $y=-\ln(1+\sqrt{x})$ (D) $y=-\ln(1-\sqrt{x})$

12. 曲线 $\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{6-m}=1$ $(m<6)$ 与曲线 $\frac{x^2}{5-n}+\frac{y^2}{9-n}=1$ $(5<n<9)$ 的 （ ）

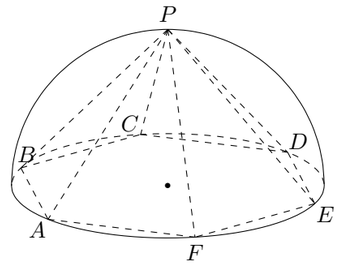
(A) 离心率相等 (B) 焦距相等 (C) 焦点相同 (D) 准线相同

二、填空题

13. 方程 $\log_2(x-1)=2-\log_2(x+1)$ 的解为_____.

14. 设 $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$, 则 $g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$_____.

15. 如图, 半径为 2 的半球内有一内接正六棱锥 $P-ABCDEF$, 则此正六棱锥的侧面积是_____.



16. 5 名乒乓球队员中, 有 2 名老队员和 3 名新队员. 现从中选出 3 名队员排成 1、2、3 号参加团体比赛, 则入选的 3 名队员中至少有 1 名老队员, 且 1、2 号中至少有 1 名新队员的排列方法有_____种. (以数作答)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x$, $x\in\mathbf{R}$. 求:

(1) 函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值的自变量 x 的集合;

(2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

18. 甲、乙两班各派 2 名同学参加年级数学竞赛, 参赛同学成绩及格的概率都为 0.6, 且参赛同学的成绩相互之间没有影响. 求:

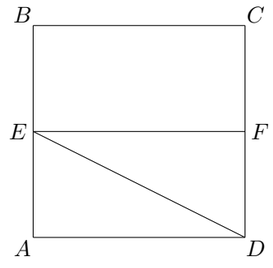
(1) 甲、乙两班参赛同学中各有 1 名同学成绩及格的概率;

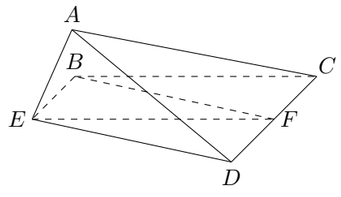
(2) 甲、乙两班参赛同学中至少有 1 名同学成绩及格的概率.

19. 已知正方形 $ABCD$, E、F 分别是边 AB、CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 如图所示, 记二面角 $A-DE-C$ 的大小为 θ $(0<\theta<\pi)$.

(1) 证明: $BF\parallel$ 平面 ADE;

(2) 若 $\triangle ACD$ 为正三角形, 试判断点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 是否在直线 EF 上, 证明你的结论, 并求角 θ 的余弦值.





20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = pn^2 - 2n + q$ ($p,\ q \in \mathbf{R}$), $n \in \mathbf{N}_+$.
(1) 求 q 的值;
(2) 若 a_1 与 a_5 的等差中项为 18, b_n 满足 $a_n = 2\log_2 b_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + (a+d)x^2 + (a+2d)x + d$, $g(x) = ax^2 + 2(a+2d)x + a + 4d$, 其中 $a > 0$, $d > 0$, 设 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点, x_1 为 $g(x)$ 的极值点, $g(x_2) = g(x_3) = 0$, 并且 $x_2 < x_3$. 将点 $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, g(x_1))$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$ 依次记为 A, B, C, D.
(1) 求 x_0 的值;
(2) 若四边形 $APCD$ 为梯形且面积为 1, 求 a, d 的值.

22. 已知点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ ($x_1,\ x_2 \neq 0$) 是抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上的两个动点, O 是坐标原点, 向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 满足 $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right|$. 设圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y = 0$.
(1) 证明线段 AB 是圆 C 的直径;
(2) 当圆 C 的圆心到直线 $x - 2y = 0$ 的距离的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 p 的值.

2006 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$, $N=\{x||x|<2\}$, 则 （ ）

(A) $M\cap N=\varnothing$ (B) $M\cap N=M$ (C) $M\cup N=M$ (D) $M\cup N=\mathbf{R}$

2. 已知函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 （ ）

(A) $f(2x)=\mathrm{e}^{2x}$ $(x\in\mathbf{R})$ (B) $f(2x)=\ln 2\cdot\ln x$ $(x>0)$

(C) $f(2x)=2\mathrm{e}^x$ $(x\in\mathbf{R})$ (D) $f(2x)=\ln x+\ln 2$ $(x>0)$

3. 双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍, 则 $m=$ （ ）

(A) $-\dfrac{1}{4}$ (B) -4 (C) 4 (D) $\dfrac{1}{4}$

4. 如果复数 $(m^2+\mathrm{i})(1+m\mathrm{i})$ 是实数, 则实数 $m=$ （ ）

(A) 1 (B) -1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $-\sqrt{2}$

5. 函数 $f(x)=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为 （ ）

(A) $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbf{Z}$ (B) $(k\pi,(k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left(k\pi-\dfrac{3\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right),\ k\in\mathbf{Z}$ (D) $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right),\ k\in\mathbf{Z}$

6. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 a, b, c 成等比数列, 且 $c=2a$, 则 $\cos B=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

7. 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4, 体积为 16, 则这个球的表面积是 （ ）

(A) 16π (B) 20π (C) 24π (D) 32π

8. 抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是 （ ）

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{7}{5}$ (C) $\dfrac{8}{5}$ (D) 3

9. 设平面向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 的和 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\mathbf{0}$. 如果向量 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ 满足 $|\boldsymbol{b}_i|=2|\boldsymbol{a}_i|$, 且 $\boldsymbol{a}_i$ 顺时针旋转 30° 后与 $\boldsymbol{b}_i$ 同向, 其中 $i=1,2,3$, 则（ ）

(A) $-\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$ (B) $\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$

(C) $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$ (D) $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$

10. 设 a_n 是公差为正数的等差数列, 若 $a_1+a_2+a_3=15$, $a_1a_2a_3=80$, 则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=$ （ ）

(A) 120 (B) 105 (C) 90 (D) 75

11. 用长度分别为 2, 3, 4, 5, 6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 （ ）

(A) $8\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^2$ (B) $6\sqrt{10}\ \mathrm{cm}^2$ (C) $3\sqrt{55}\ \mathrm{cm}^2$ (D) $20\ \mathrm{cm}^2$

12. 设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$. 选择 I 的两个非空子集 A 和 B, 要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则不同的选择方法共有 （ ）

(A) 50 种 (B) 49 种 (C) 48 种 (D) 47 种

二、填空题

13. 已知正四棱锥的体积为 12, 底面对角线长为 $2\sqrt{6}$, 则侧面与底面所成的二面角等于_____.

14. 设 $z=2y-x$, 式中变量 x, y 满足下列条件: $\begin{cases}2x-y\geqslant -1\\ 3x+2y\leqslant 23\\ y\geqslant 1\end{cases}$, 则 z 的最大值为_____.

15. 安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日, 不同的安排方法共有_____种. (用数字作答)

16. 函数 $f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)$ $(0<\varphi<\pi)$. 若 $f(x)+f'(x)$ 是奇函数, 则 $\varphi=$_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C, 求当 A 为何值时, $\cos A+2\cos\dfrac{B+C}{2}$ 取得最大值, 并求出这个最大值.

18. A, B 是治疗同一种疾病的两种药, 用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由 4 只小白鼠组成, 其中 2 只服用 A, 另 2 只服用 B, 然后观察疗效. 若在一个试验组中, 服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多, 就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\dfrac{2}{3}$, 服用 B 有效的概率为 $\dfrac{1}{2}$.

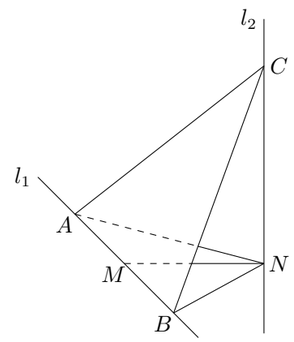
(1) 求一个试验组为甲类组的概率;

(2) 观察 3 个试验组, 用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. 如图, l_1, l_2 是互相垂直的异面直线, MN 是它们的公垂线段. 点 A, B 在 l_1 上, C 在 l_2 上, $AM=MB=MN$.

(1) 证明: $AC\perp NB$;

(2) 若 $\angle ACB=60^\circ$, 求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 有一个以 $F_1(0,-\sqrt{3})$ 和 $F_2(0,\sqrt{3})$ 为焦点, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆, 设椭圆在第一象限的部分为曲线 C, 动点 P 在 C 上, C 在点 P 处的切线与 x, y 轴的交点分别为 A, B, 且向量 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 求:

(1) 点 M 的轨迹方程;

(2) $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ 的最小值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\mathrm{e}^{-ax}$.

(1) 设 $a>0$, 讨论 $y=f(x)$ 的单调性;

(2) 若对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>1$, 求 a 的取值范围.

22. 设数列 a_n 的前 n 项的和 $S_n=\dfrac{4}{3}a_n-\dfrac{1}{3}\times 2^{n+1}+\dfrac{2}{3}$, $n=1,2,3,\cdots$.

(1) 求首项 a_1 与通项 a_n;

(2) 设 $T_n=\dfrac{2^n}{S_n}$, $n=1,2,3,\cdots$, 证明: $\sum\limits_{i=1}^{n}T_i<\dfrac{3}{2}$.

2006 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=4$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

2. 设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$, $N=\{x||x|<2\}$, 则 （ ）

(A) $M\cap N=\varnothing$ (B) $M\cap N=M$ (C) $M\cup N=M$ (D) $M\cup N=\mathbf{R}$

3. 已知函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 （ ）

(A) $f(2x)=\mathrm{e}^{2x}$ $(x\in\mathbf{R})$ (B) $f(2x)=\ln 2\cdot\ln x$ $(x>0)$

(C) $f(2x)=2\mathrm{e}^x$ $(x\in\mathbf{R})$ (D) $f(2x)=\ln x+\ln 2$ $(x>0)$

4. 双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍, 则 $m=$ （ ）

(A) $-\dfrac{1}{4}$ (B) -4 (C) 4 (D) $\dfrac{1}{4}$

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_7=35$, 则 $a_4=$ （ ）

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5

6. 函数 $f(x)=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为 （ ）

(A) $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ (B) $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left(k\pi-\dfrac{3\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ (D) $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

7. 从圆 $x^2-2x+y^2-2y+1=0$ 外一点 $P(3,2)$ 向这个圆作两条切线, 则两切线夹角的余弦值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 0

8. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 a, b, c 成等比数列, 且 $c=2a$, 则 $\cos B=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

9. 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4, 体积为 16, 则这个球的表面积是 （ ）

(A) 16π (B) 20π (C) 24π (D) 32π

10. 在 $\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^{10}$ 的展开式中, x^4 的系数为 （ ）

(A) -120 (B) 120 (C) -15 (D) 15

11. 抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是 （ ）

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{7}{5}$ (C) $\dfrac{8}{5}$ (D) 3

12. 用长度分别为 2, 3, 4, 5, 6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 （ ）

(A) $8\sqrt{5}$ cm^2 (B) $6\sqrt{10}$ cm^2 (C) $3\sqrt{55}$ cm^2 (D) 20 cm^2

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=a-\dfrac{1}{2^x+1}$, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a=$_____.

14. 已知正四棱锥的体积为 12, 底面对角线长为 $2\sqrt{6}$, 则侧面与底面所成的二面角等于_____.

15. 设 $z=2y-x$, 式中变量 x, y 满足下列条件: $\begin{cases}2x-y\geqslant -1\\ 3x+2y\leqslant 23\\ y\geqslant 1\end{cases}$, 则 z 的最大值为_____.

16. 安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日, 不同的安排方法共有_____种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_3=2$, $a_2+a_4=\dfrac{20}{3}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C, 求当 A 为何值时, $\cos A+2\cos\dfrac{B+C}{2}$ 取得最大值, 并求出这个最大值.

19. A, B 是治疗同一种疾病的两种药, 用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由 4 只小白鼠组成, 其中 2 只服用 A, 另 2 只服用 B, 然后观察疗效. 若在一个试验组中, 服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多, 就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\dfrac{2}{3}$, 服用 B 有效的概率为 $\dfrac{1}{2}$.

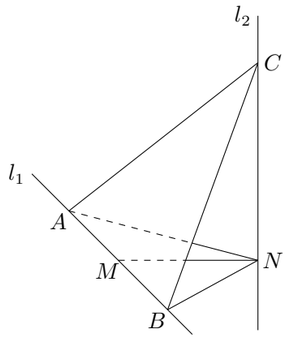
(1) 求一个试验组为甲类组的概率;

(2) 观察 3 个试验组, 求这 3 个试验组中至少有一个甲类组的概率.

20. 如图, l_1, l_2 是互相垂直的异面直线, MN 是它们的公垂线段. 点 A, B 在 l_1 上, C 在 l_2 上, $AM = MB = MN$.

(1) 证明: $AC \perp NB$;

(2) 若 $\angle ACB = 60°$, 求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.



21. 设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ $(a > 1)$ 短轴的一个端点, Q 为椭圆上一个动点, 求 $|PQ|$ 的最大值.

22. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 都是增函数, 求 a 的取值范围.

2006 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|x<3\}$, $N=\{x|\log_2 x>1\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\varnothing$ (B) $\{x|0<x<3\}$ (C) $\{x|1<x<3\}$ (D) $\{x|2<x<3\}$

2. 函数 $y=\sin 2x\cos 2x$ 的最小正周期是 （ ）

(A) 2π (B) 4π (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

3. $\dfrac{3}{(1-\mathrm{i})^2}=$ （ ）

(A) $\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ (B) $-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ (C) i (D) $-\mathrm{i}$

4. 过球的一条半径的中点, 作垂直于该半径的平面, 则所得截面的面积与球的表面积的比为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{16}$ (B) $\dfrac{9}{16}$ (C) $\dfrac{3}{8}$ (D) $\dfrac{9}{32}$

5. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 在椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上, 则 $\triangle ABC$ 的周长是 （ ）

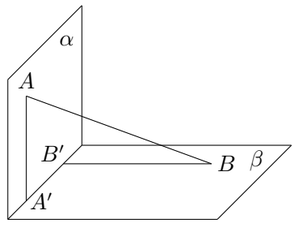
(A) $2\sqrt{3}$ (B) 6 (C) $4\sqrt{3}$ (D) 12

6. 已知函数 $f(x)=\ln x+1$ $(x>0)$, 则 $f(x)$ 的反函数为 （ ）

(A) $y=\mathrm{e}^{x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ (B) $y=\mathrm{e}^{x-1}$ $(x\in\mathbf{R})$

(C) $y=\mathrm{e}^{x+1}$ $(x>1)$ (D) $y=\mathrm{e}^{x-1}$ $(x>1)$

7. 如图, 平面 $\alpha\perp$ 平面 β, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, AB 与两平面 α, β 所成的角分别为 $\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{\pi}{6}$. 过 A, B 分别作两平面交线的垂线, 垂足为 A', B', 则 $AB:A'B'=$ （ ）



(A) 2 : 1 (B) 3 : 1 (C) 3 : 2 (D) 4 : 3

8. 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=\log_2 x$ $(x>0)$ 的图象关于原点对称, 则 $f(x)$ 的表达式为 （ ）

(A) $f(x)=\dfrac{1}{\log_2 x}$ $(x>0)$ (B) $f(x)=\dfrac{1}{\log_2(-x)}$ $(x<0)$

(C) $f(x)=-\log_2 x$ $(x>0)$ (D) $f(x)=-\log_2(-x)$ $(x<0)$

9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{4}{3}x$, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{5}{3}$ (B) $\dfrac{4}{3}$ (C) $\dfrac{5}{4}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

10. 若 $f(\sin x)=3-\cos 2x$, 则 $f(\cos x)=$ （ ）

(A) $3-\cos 2x$ (B) $3-\sin 2x$ (C) $3+\cos 2x$ (D) $3+\sin 2x$

11. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{3}$, 则 $\dfrac{S_6}{S_{12}}=$ （ ）

(A) $\dfrac{3}{10}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{8}$ (D) $\dfrac{1}{9}$

12. 函数 $\sum\limits_{n=1}^{19}|x-n|$ 的最小值为 （ ）

(A) 190 (B) 171 (C) 90 (D) 45

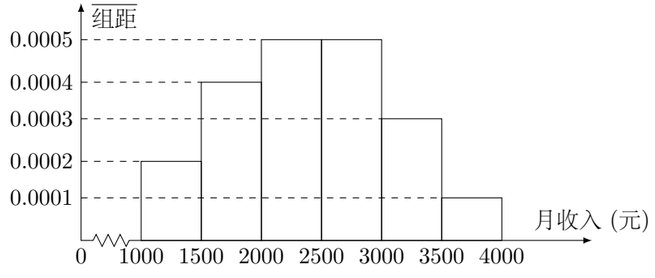
二、填空题

13. 在 $\left(x^4+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中常数项是_____. (用数字作答)

14. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 成等差数列, 且 $AB=1$, $BC=4$, 则边 BC 上的中线 AD 的长为_____.

15. 过点 $(1,\sqrt{2})$ 的直线 l 将圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 分成两段弧, 当劣弧所对的圆心角最小时, 直线 l 的斜率 $k=$_____.

16. 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人, 并根据所得数据画了样本的频率分布直方图 (如图). 为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系, 要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查, 则在 $[2500,3000)$ (元) 月收入段应抽出_____人.



三、解答题

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\theta,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{b}=(1,\cos\theta)$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 求 θ;

(2) 求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最大值.

18. 某批产品成箱包装, 每箱 5 件, 一用户在购进该批产品前先取出 3 箱, 再从每箱中任意取出 2 件产品进行检验. 设取出的第一, 二, 三箱中分别有 0 件, 1 件, 2 件二等品, 其余为一等品.

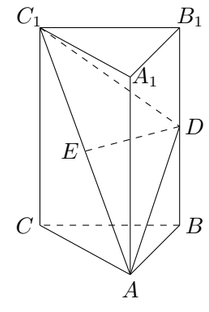
(1) 用 ξ 表示抽检的 6 件产品中二等品的件数, 求 ξ 的分布列及 ξ 的数学期望;

(2) 若抽检的 6 件产品中有 2 件或 2 件以上二等品, 用户就拒绝购买这批产品, 求这批产品被用户拒绝购买的概率.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC$, D, E 分别为 BB_1, AC_1 的中点.

(1) 证明: ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线;

(2) 设 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$, 求二面角 A_1-AD-C_1 的大小.



20. 设函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$. 若对所有的 $x\geqslant 0$, 都有 $f(x)\geqslant ax$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

21. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F, A、B 是抛物线上的两动点, 且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$ $(\lambda>0)$. 过 A、B 两点分别作抛物线的切线, 设其交点为 M.
(1) 证明 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值;
(2) 设 $\triangle ABM$ 的面积为 S, 写出 $S=f(\lambda)$ 的表达式, 并求 S 的最小值.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且方程 $x^2-a_nx-a_n=0$ 有一根为 S_n-1, $n=1,2,3,\cdots$.
(1) 求 a_1, a_2;
(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2006 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,2)$, 向量 $\boldsymbol{b}=(x,3)$, 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $x=$ （ ）

(A) 9 (B) 6 (C) 5 (D) 3

2. 已知集合 $M=\{x|x<3\}$, $N=\{x|\log_2 x>1\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\varnothing$ (B) $\{x|0<x<3\}$ (C) $\{x|1<x<3\}$ (D) $\{x|2<x<3\}$

3. 函数 $y=\sin 2x\cos 2x$ 的最小正周期是 （ ）

(A) 2π (B) 4π (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

4. 如果函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=3-2x$ 的图象关于坐标原点对称, 则 $y=f(x)$ 的表达式为 （ ）

(A) $y=2x-3$ (B) $y=2x+3$ (C) $y=-2x+3$ (D) $y=-2x-3$

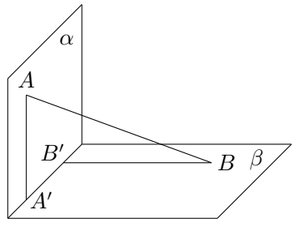
5. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 在椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上, 则 $\triangle ABC$ 的周长是 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$ (B) 6 (C) $4\sqrt{3}$ (D) 12

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=7$, $a_4=15$, 则前 10 项的和 $S_{10}=$ （ ）

(A) 100 (B) 210 (C) 380 (D) 400

7. 如图, 平面 $\alpha\perp$ 平面 β, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, AB 与两平面 α, β 所成的角分别为 $\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{\pi}{6}$. 过 A, B 分别作两平面交线的垂线, 垂足为 A', B', 若 $AB=12$, 则 $A'B'=$ （ ）



(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9

8. 已知函数 $f(x)=\ln x+1$ $(x>0)$, 则 $f(x)$ 的反函数为 （ ）

(A) $y=\mathrm{e}^{x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ (B) $y=\mathrm{e}^{x-1}$ $(x\in\mathbf{R})$

(C) $y=\mathrm{e}^{x+1}$ $(x>1)$ (D) $y=\mathrm{e}^{x-1}$ $(x>1)$

9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{4}{3}x$, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{5}{3}$ (B) $\dfrac{4}{3}$ (C) $\dfrac{5}{4}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

10. 若 $f(\sin x)=3-\cos 2x$, 则 $f(\cos x)=$ （ ）

(A) $3-\cos 2x$ (B) $3-\sin 2x$ (C) $3+\cos 2x$ (D) $3+\sin 2x$

11. 过点 $(-1,0)$ 作抛物线 $y=x^2+x+1$ 的切线, 则其中一条切线为 （ ）

(A) $2x+y+2=0$ (B) $3x-y+3=0$

(C) $x+y+1=0$ (D) $x-y+1=0$

12. 5 名志愿者分到 3 所学校支教, 要求每所学校至少去 1 名志愿者, 则不同的分法共有 （ ）

(A) 150 种 (B) 180 种 (C) 200 种 (D) 280 种

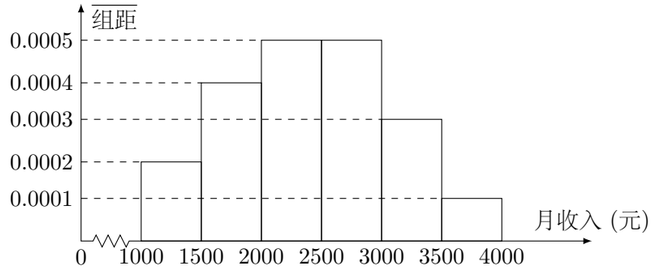
二、填空题

13. 在 $\left(x^4+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中常数项是_____. (用数字作答)

14. 已知圆 O_1 是半径为 R 的球 O 的小圆, 若圆 O_1 的面积与球 O 的表面积的比值为 $\dfrac{2}{9}$, 则线段 OO_1 与 R 的比值为_____.

15. 过点 $(1,\sqrt{2})$ 的直线 l 将圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 分成两段弧, 当劣弧所对的圆心角最小时, 直线 l 的斜率 $k=$_____.

16. 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人, 并根据所得数据画了样本的频率分布直方图 (如图). 为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系, 要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查, 则在 $[2500,3000)$ (元) 月收入段应抽出_____人.



三、解答题

17. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=45^\circ$, $AC=\sqrt{10}$, $\cos C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 BC 边的长;

(2) 记 AB 的中点为 D, 求中线 CD 的长度.

18. 记等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_4=1$, $S_8=17$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19. 某批产品成箱包装, 每箱 5 件, 一用户在购进该批产品前先取出 3 箱, 再从每箱中任意取出 2 件产品进行检验. 设取出的第一, 二, 三箱中分别有 0 件, 1 件, 2 件二等品, 其余为一等品.

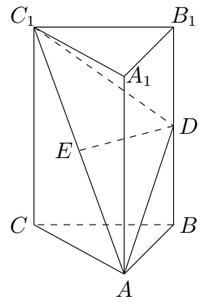
(1) 求抽检的 6 件产品中恰有一件二等品的概率;

(2) 若抽检的 6 件产品中有 2 件或 2 件以上二等品, 用户就拒绝购买这批产品, 求这批产品被用户拒绝购买的概率.

20. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC$, D, E 分别为 BB_1, AC_1 的中点.

(1) 证明: ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线;

(2) 设 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$, 求二面角 A_1-AD-C_1 的大小.



21. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 二次函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$. 设不等式 $f(x)>0$ 的解集为 A, 又知集合 $B=\{x|1<x<3\}$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$, 求 a 的取值范围.

22. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F, A、B 是抛物线上的两动点, 且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$ $(\lambda>0)$. 过 A、B 两点分别作抛物线的切线, 设其交点为 M.

(1) 证明 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值;

(2) 设 $\triangle ABM$ 的面积为 S, 写出 $S=f(\lambda)$ 的表达式, 并求 S 的最小值.

2006 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

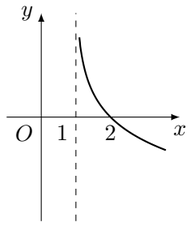
一、选择题

1. 定义集合运算: $A \odot B = \{z|z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$, 设集合 $A=\{0,1\}$, $B=\{2,3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 （ ）

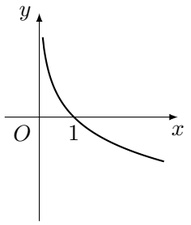
(A) 0 (B) 6 (C) 12 (D) 18

2. 函数 $y = 1 + a^x$ $(0 < a < 1)$ 的反函数的图象大致是 （ ）

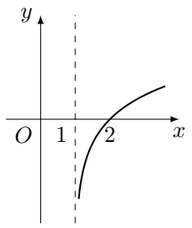
(A)



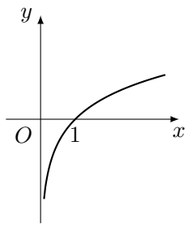
(B)



(C)



(D)



3. 设 $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 2 \\ \log_3(x^2-1), & x \geqslant 2 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) > 2$ 的解集为 （ ）

(A) $(1,2) \cup (3,+\infty)$ (B) $(\sqrt{10},+\infty)$

(C) $(1,2) \cup (\sqrt{10},+\infty)$ (D) $(1,2)$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $A = \frac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, 则 $c =$ （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3}-1$ (D) $\sqrt{3}$

5. 设向量 $\boldsymbol{a} = (1,-2)$, $\boldsymbol{b} = (-2,4)$, $\boldsymbol{c} = (-1,-2)$, 若表示向量 $4\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$, $2(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{d}$ 的有向线段首尾相接能构成四边形, 则向量 $\boldsymbol{d}$ 为 （ ）

(A) $(2,6)$ (B) $(-2,6)$ (C) $(2,-6)$ (D) $(-2,-6)$

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 则 $f(6)$ 的值为 （ ）

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

7. 在给定椭圆中, 过焦点且垂直于长轴的弦长为 $\sqrt{2}$, 焦点到相应准线的距离为 1, 则该椭圆的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

8. 设 $p: x^2 - x - 20 > 0$, $q: \frac{1-x^2}{|x|-2} < 0$, 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 已知集合 $A=\{5\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{1,3,4\}$, 从这三个集合各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标, 则确定的不同点的个数为 （ ）

(A) 33 (B) 34 (C) 35 (D) 36

10. 已知 $\left(x^3 - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中第三项与第五项的系数之比为 $-\frac{3}{14}$, 其中 $\mathrm{i}^2 = -1$, 则展开式中常数项是 （ ）

(A) $-45\mathrm{i}$ (B) $45\mathrm{i}$ (C) -45 (D) 45

11. 某公司招收男职员 x 名, 女职员 y 名, x 和 y 须满足约束条件 $\begin{cases} 5x - 11y \geqslant -22 \\ 2x + 3y \geqslant 9 \\ 2x \leqslant 11 \end{cases}$, 则 $z = 10x + 10y$ 的最大值是 （ ）

(A) 80 (B) 85 (C) 90 (D) 95

12. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB = 2DC = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$, E 为 AB 的中点, 将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 ED、EC 向上折起, 使 A、B 重合于点 P, 则三棱锥 $P-DCE$ 的外接球的体积为 （ ）

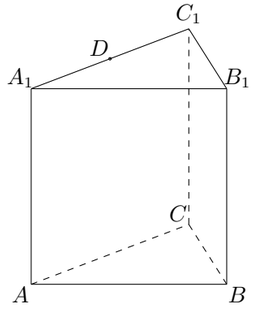
(A) $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ (B) $\frac{\sqrt{6}\pi}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{6}\pi}{24}$

二、填空题

13. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+a} - \sqrt{n})} = 1$, 则常数 $a =$_____.

14. 已知抛物线 $y^2 = 4x$, 过点 $P(4,0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点, 则 $y_1^2 + y_2^2$ 的最小值是_____.

15. 如图, 已知在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等, D 是 A_1C_1 的中点, 则直线 AD 与平面 B_1DC 所成角的正弦值为_____.



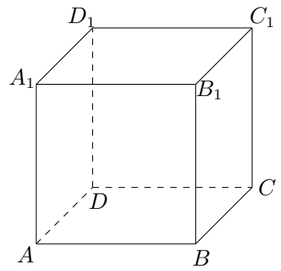
16. 下列四个命题中, 真命题的序号有_____. (写出所有真命题的序号)

① 将函数 $y = |x+1|$ 的图象按向量 $\boldsymbol{v} = (-1,0)$ 平移, 得到的图象对应的函数表达式为 $y = |x|$;

② 圆 $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x$ 相交, 所得弦长为 2;

③ 若 $\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}$, $\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\tan\alpha\cot\beta = 5$;

④ 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, P 为底面 $ABCD$ 内一动点, P 到平面 AA_1D_1D 的距离与到直线 CC_1 的距离相等, 则 P 点的轨迹是抛物线的一部分.



三、解答题

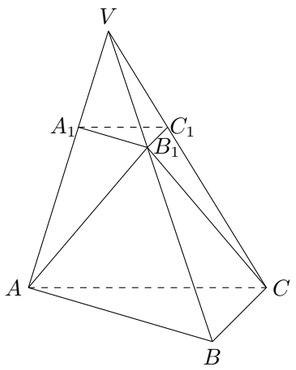
17. 已知函数 $f(x) = A\sin^2(\omega x + \varphi)$ $\left(A > 0,\ \omega > 0,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $y = f(x)$ 的最大值为 2, 其图象相邻两对称轴间的距离为 2, 并过点 $(1,2)$.

(1) 求 φ;

(2) 计算 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2008)$.

18. 设函数 $f(x)=ax-(a+1)\ln(x+1)$, 其中 $a\geqslant -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

19. 如图, 已知平面 $A_1B_1C_1$ 平行于三棱锥 $V-ABC$ 的底面 ABC, 等边 $\triangle AB_1C$ 所在平面与底面 ABC 垂直, 且 $\angle ACB=90^\circ$, 设 $AC=2a$, $BC=a$.
(1) 求证直线 B_1C_1 是异面直线 AB_1 与 A_1C_1 的公垂线;
(2) 求点 A 到平面 VBC 的距离;
(3) 求二面角 $A-VB-C$ 的大小.



20. 袋中装有标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的小球各 2 个, 从袋中任取 3 个小球, 按 3 个小球上最大数字的 9 倍计分, 每小球被取出的可能性都相等, 用 ξ 表示取出的 3 个小球上的最大数字, 求:
(1) 取出的 3 个小球上的数字互不相同的概率;
(2) 随机变量 ξ 的概率分布和数学期望;
(3) 计分介于 20 分到 40 分之间的概率.

21. 双曲线 C 与椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点, 直线 $y=\sqrt{3}x$ 为 C 的一条渐近线.
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 过点 $P(0,4)$ 的直线 l, 交双曲线 C 于 A, B 两点, 交 x 轴于 Q 点 (Q 点与 C 的顶点不重合). 当 $\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\overrightarrow{QA}=\lambda_2\overrightarrow{QB}$, 且 $\lambda_1+\lambda_2=-\dfrac{8}{3}$ 时, 求 Q 点的坐标.

22. 已知 $a_1=2$, 点 (a_n,a_{n+1}) 在函数 $f(x)=x^2+2x$ 的图象上, 其中 $n=1,2,3,\cdots$.
(1) 证明数列 $\{\lg(1+a_n)\}$ 是等比数列;
(2) 设 $T_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$, 求 T_n 及数列 $\{a_n\}$ 的通项;
(3) 记 $b_n=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n+2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 数列的前 n 项和 S_n, 并证明 $S_n+\dfrac{2}{3T_n-1}=1$.

2006 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 定义集合运算: $A \odot B = \{z|z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$, 设集合 $A=\{0,1\}$, $B=\{2,3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 （ ）

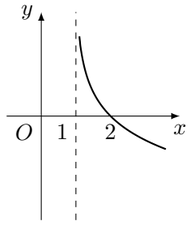
(A) 0 (B) 6 (C) 12 (D) 18

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2e^{x-1}, & x<2\\ \log_3(x^2-1), & x\geqslant 2\end{cases}$, 则 $f(f(2))$ 的值为 （ ）

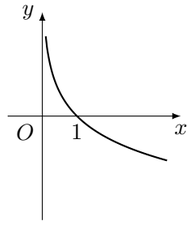
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. 函数 $y=1+a^x$ $(0<a<1)$ 的反函数的图象大致是 （ ）

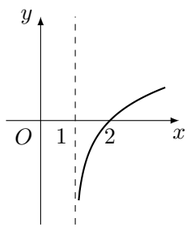
(A)



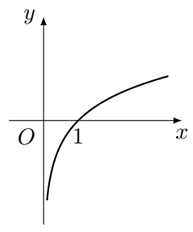
(B)



(C)



(D)



4. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$, $\boldsymbol{b}=(-2,4)$, 若表示向量 $4\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ 的有向线段首尾相接能构成三边形, 则向量 $\boldsymbol{c}$ 为 （ ）

(A) $(1,-1)$ (B) $(-1,1)$ (C) $(-4,6)$ (D) $(4,-6)$

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$, 则 $f(6)$ 的值为 （ ）

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $A=\dfrac{\pi}{3}$, $a=\sqrt{3}$, $b=1$, 则 $c=$ （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3}-1$ (D) $\sqrt{3}$

7. 在给定双曲线中, 过焦点且垂直于实轴的弦长为 $\sqrt{2}$, 焦点到相应准线的距离为 $\dfrac{1}{2}$, 则该双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

8. 正方体的内切球与其外接球的体积之比为 （ ）

(A) $1:\sqrt{3}$ (B) $1:3$ (C) $1:3\sqrt{3}$ (D) $1:9$

9. 设 $p: x^2-x-2<0$, $q: \dfrac{1+x}{|x|-2}<0$, 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

10. 已知 $\left(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中第三项与第五项的系数之比为 $\dfrac{3}{14}$, 则展开式中常数项是 （ ）

(A) -1 (B) 1 (C) -45 (D) 45

11. 已知集合 $A=\{5\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{1,3,4\}$, 从这三个集合各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标, 则确定的不同点的个数为 （ ）

(A) 33 (B) 34 (C) 35 (D) 36

12. 已知 x 和 y 是正整数, 且满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 10\\ x-y\leqslant 2\\ 2x\geqslant 7\end{cases}$, 则 $z=2x+3y$ 的最小值是 （ ）

(A) 24 (B) 14 (C) 13 (D) 11.5

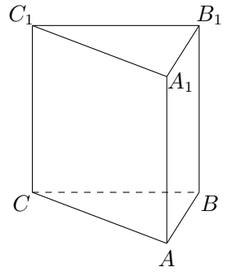
二、填空题

13. 某学校共有师生 2400 人, 现用分层抽样的方法, 从所有师生中抽取一个容量为 160 的样本. 已知从学生中抽取的人数为 150, 那么该学校的教师人数是_____.

14. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_4=14$, $S_{10}-S_7=30$, 则 $S_9=$_____.

15. 已知抛物线 $y^2=4x$, 过点 $P(4,0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点, 则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值是_____.

16. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 所有棱长均为 1, 则点 B_1 到平面 ABC_1 的距离为_____.



三、解答题

17. 设函数 $f(x)=2x^3-3(a-1)x^2+1$, 其中 $a\geqslant 1$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 讨论 $f(x)$ 的极值.

18. 已知函数 $f(x)=A\sin^2(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,\ \omega>0,\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $y=f(x)$ 的最大值为 2, 其图象相邻两对称轴间的距离为 2, 并过点 $(1,2)$.
(1) 求 φ;
(2) 计算 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2008)$.

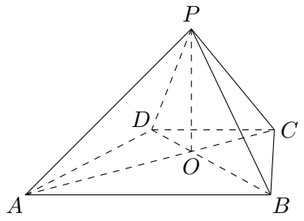
19. 盒中装有标有数字 1, 2, 3, 4 的卡片各 2 张, 从盒中任意抽取 3 张, 每张卡片被取出的可能性都相等, 求:
(1) 抽出的 3 张卡片上最大的数字是 4 的概率;
(2) 抽出的 3 张中有 2 张卡片上的数字是 3 的概率;
(3) 抽出的 3 张卡片上的数字互不相同的概率.

20. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel DC$, $AC \perp BD$, AC 与 BD 相交于点 O, 且顶点 P 在底面上的射影恰为 O 点. 又 $BO=2$, $PO=\sqrt{2}$, $PB \perp PD$.

(1) 求异面直线 PD 与 BC 所成角的余弦值;

(2) 求二面角 $P-AB-C$ 的大小;

(3) 设点 M 在棱 PC 上, 且 $\dfrac{PM}{MC}=\lambda$, 问 λ 为何值时, $PC \perp$ 平面 BMD.



21. 已知椭圆的中心在坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 椭圆的短轴端点和焦点所组成的四边形为正方形, 两准线间的距离为 4.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 直线 l 过点 $P(0,2)$ 且与椭圆相交于 A、B 两点, 当 $\triangle AOB$ 面积取得最大值时, 求直线 l 的方程.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{2}$. 点 $(n, 2a_{n+1}-a_n)$ 在直线 $y=x$ 上, 其中 $n=1, 2, 3, \cdots$.

(1) 令 $b_n=a_{n+1}-a_n-1$, 求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(3) 设 S_n、T_n 分别为数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项和. 是否存在实数 λ, 使得数列 $\left\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\right\}$ 为等差数列? 若存在, 试求出 λ; 若不存在, 则说明理由.

2006 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$, 集合 $Q=\{x\in\mathbf{R}|x^2+x-6\leqslant 0\}$, 则 $P\cap Q$ 等于 （ ）

(A) $\{2\}$ (B) $\{1,2\}$ (C) $\{2,3\}$ (D) $\{1,2,3\}$

2. 复数 $\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}}$ 等于 （ ）

(A) $1-\mathrm{i}$ (B) $1+\mathrm{i}$ (C) $-1+\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})}$ 等于 （ ）

(A) 1 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) 0

4. 设函数 $f(x)=\log_a(x+b)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象过点 $(2,1)$, 其反函数的图象过点 $(2,8)$, 则 $a+b$ 等于 （ ）

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

5. 设直线过点 $(0,a)$, 其斜率为 1, 且与圆 $x^2+y^2=2$ 相切, 则 a 的值为( )

(A) $\pm\sqrt{2}$ (B) ± 2 (C) $\pm 2\sqrt{2}$ (D) ± 4

6. “等式 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$ 成立”是“α, β, γ 成等差数列”的 （ ）

(A) 必要而不充分条件 (B) 充分而不必要条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ $(a>\sqrt{2})$ 的两条渐近线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

8. 已知不等式 $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{y}\right)\geqslant 9$ 对任意正实数 x, y 恒成立, 则正实数 a 的最小值为 （ ）

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

9. 已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 且 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 为 （ ）

(A) 三边均不相等的三角形 (B) 直角三角形

(C) 等腰非等边三角形 (D) 等边三角形

10. 已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4$ $(0<a<3)$. 若 $x_1<x_2$, $x_1+x_2=1-a$, 则 （ ）

(A) $f(x_1)<f(x_2)$ (B) $f(x_1)=f(x_2)$

(C) $f(x_1)>f(x_2)$ (D) $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

11. 已知平面 α 外不共线的三点 A, B, C 到 α 的距离都相等, 则正确的结论是 （ ）

(A) 平面 ABC 必平行于 α

(B) 平面 ABC 必与 α 相交

(C) 平面 ABC 必不垂直于 α

(D) 存在 $\triangle ABC$ 的一条中位线平行于 α 或在 α 内

12. 为确保信息安全, 信息需加密传播, 发送方由明文 $\longrightarrow$ 密文 (加密), 接收方由密文 $\longrightarrow$ 明文 (解密). 已知加密规则为: 明文 a, b, c, d 对应密文 $a+2b$, $2b+c$, $2c+3d$, $4d$. 例如, 明文 1, 2, 3, 4 对应密文 5, 7, 18, 16. 当接收方收到密文 14, 9, 23, 28 时, 则解密得到的明文为 （ ）

(A) 4, 6, 1, 7 (B) 7, 6, 1, 4 (C) 6, 4, 1, 7 (D) 1, 6, 4, 7

二、填空题

13. $\cos 43^\circ\cos 77^\circ+\sin 43^\circ\cos 167^\circ$ 的值为_____.

14. $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ 展开式中 x^{-3} 的系数为_____. (用数字作答)

15. 水平桌面 α 上放有 4 个半径均为 $2R$ 的球, 且相邻的球都相切 (球心的连线构成正方形). 在这 4 个球的上面放 1 个半径为 R 的小球, 它和下面的 4 个球恰好都相切, 则小球的球心到水平桌面 α 的距离是_____.

16. 某校从 8 名教师中选派 4 名教师同时去 4 个边远地区支教 (每地 1 人), 其中甲和乙不同去, 甲和丙只能同去或同不去, 则不同的选派方案共有_____种.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求使函数 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

18. 甲、乙、丙 3 人投篮, 投进的概率分别是 $\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{2}{5}$、$\dfrac{1}{2}$.

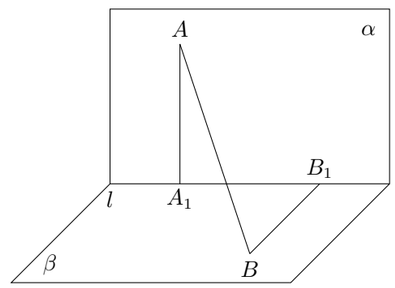
(1) 现 3 人各投篮 1 次, 求 3 人都没有投进的概率;

(2) 用 ξ 表示乙投篮 3 次的进球数, 求随机变量 ξ 的概率分布及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, 点 A 在直线 l 上的射影为 A_1, 点 B 在 l 上的射影为 B_1. 已知 $AB=2$, $AA_1=1$, $BB_1=\sqrt{2}$. 求:

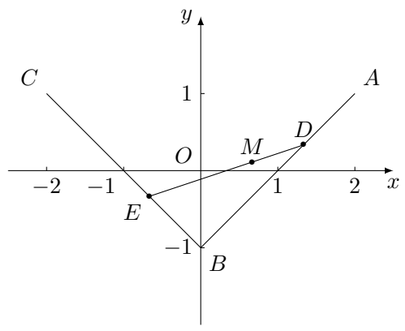
(1) 直线 AB 分别与平面 α, β 所成角的大小;

(2) 二面角 A_1-AB-B_1 的大小.



20. 已知正项数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和 S_n 满足 $10S_n = a_n^2 + 5a_n + 6$, 且 a_1, a_3, a_{15} 成等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

21. 如图, 三定点 $A(2,1)$, $B(0,-1)$, $C(-2,1)$, 三动点 D, E, M 满足 $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = t\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DE}$, $t \in [0,1]$.
(1) 求动直线 DE 斜率的变化范围;
(2) 求动点 M 的轨迹方程.



22. 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$, 且存在 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 使 $f(x_0) = x_0$.
(1) 证明: $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数;
(2) 设 $x_1 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_{n+1} = f(y_n)$, 其中 $n = 1, 2, \cdots$. 证明: $x_n < x_{n+1} < x_0 < y_{n+1} < y_n$;
(3) 证明: $\frac{y_{n+1} - x_{n+1}}{y_n - x_n} < \frac{1}{2}$.

2006 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$, 集合 $Q=\{x\in\mathbf{R}|x^2+x-6=0\}$, 则 $P\cap Q$ 等于 （ ）

(A) $\{2\}$ (B) $\{3\}$ (C) $\{-2,3\}$ (D) $\{-3,2\}$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的值域是 （ ）

(A) $(0,1)$ (B) $(0,1]$ (C) $[0,1)$ (D) $[0,1]$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_8=8$, 则该数列前 9 项和 S_9 等于 （ ）

(A) 18 (B) 27 (C) 36 (D) 45

4. 设函数 $f(x)=\log_a(x+b)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象过点 $(0,0)$, 其反函数的图象过点 $(1,2)$, 则 $a+b$ 等于 （ ）

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

5. 设直线过点 $(0,a)$, 其斜率为 1, 且与圆 $x^2+y^2=2$ 相切, 则 a 的值为( )

(A) $\pm\sqrt{2}$ (B) ± 2 (C) $\pm 2\sqrt{2}$ (D) ± 4

6. “α, β, γ 成等差数列”是“等式 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$ 成立”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 设 x, y 为正数, 则 $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)$ 的最小值为 （ ）

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15

8. 已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 且 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 为 （ ）

(A) 三边均不相等的三角形 (B) 直角三角形

(C) 等腰非等边三角形 (D) 等边三角形

9. 已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4$ $(a>0)$. 若 $x_1<x_2$, $x_1+x_2=0$, 则( )

(A) $f(x_1)<f(x_2)$ (B) $f(x_1)=f(x_2)$

(C) $f(x_1)>f(x_2)$ (D) $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ $(a>\sqrt{2})$ 的两条渐近线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

11. 已知平面 α 外不共线的三点 A, B, C 到 α 的距离都相等, 则正确的结论是 （ ）

(A) 平面 ABC 必平行于 α

(B) 平面 ABC 必与 α 相交

(C) 平面 ABC 必不垂直于 α

(D) 存在 $\triangle ABC$ 的一条中位线平行于 α 或在 α 内

12. 为确保信息安全, 信息需加密传播, 发送方由明文 $\longrightarrow$ 密文 (加密), 接收方由密文 $\longrightarrow$ 明文 (解密). 已知加密规则为: 明文 a, b, c, d 对应密文 $a+2b$, $2b+c$, $2c+3d$, $4d$. 例如, 明文 1, 2, 3, 4 对应密文 5, 7, 18, 16. 当接收方收到密文 14, 9, 23, 28 时, 则解密得到的明文为 （ ）

(A) 1, 6, 4, 7 (B) 4, 6, 1, 7 (C) 7, 6, 1, 4 (D) 6, 4, 1, 7

二、填空题

13. $\cos 43^\circ\cos 77^\circ+\sin 43^\circ\cos 167^\circ$ 的值为_____.

14. $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中的常数项为_____. (用数字作答)

15. 某校从 8 名教师中选派 4 名教师同时去 4 个边远地区支教 (每地 1 人), 其中甲和乙不同去, 则不同的选派方案共有_____种.

16. 水平桌面 α 上放有 4 个半径均为 $2R$ 的球, 且相邻的球都相切 (球心的连线构成正方形). 在这 4 个球的上面放 1 个半径为 R 的小球, 它和下面的 4 个球恰好都相切, 则小球的球心到水平桌面 α 的距离是_____.

三、解答题

17. 甲、乙、丙 3 人投篮, 投进的概率分别是 $\dfrac{2}{5}$、$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{3}{5}$. 现 3 人各投篮 1 次, 求:

(1) 3 人都投进的概率;

(2) 3 人中恰有 2 人投进的概率.

18. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$.

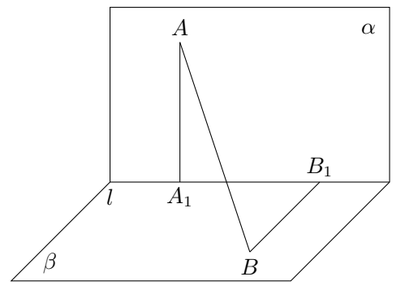
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求使函数 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

19. 如图, $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, 点 A 在直线 l 上的射影为 A_1, 点 B 在 l 上的射影为 B_1. 已知 $AB=2$, $AA_1=1$, $BB_1=\sqrt{2}$. 求:

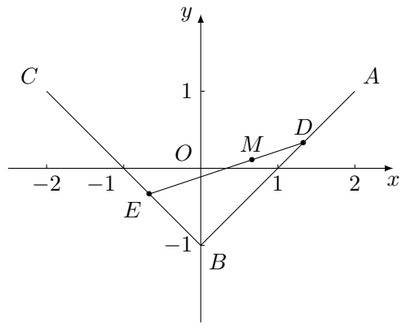
(1) 直线 AB 分别与平面 α, β 所成角的大小;

(2) 二面角 A_1-AB-B_1 的大小.



20. 已知正项数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和 S_n 满足 $10S_n = a_n^2 + 5a_n + 6$, 且 a_1, a_3, a_{15} 成等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

21. 如图, 三定点 $A(2,1)$, $B(0,-1)$, $C(-2,1)$, 三动点 D, E, M 满足 $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = t\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DE}$, $t \in [0,1]$.
(1) 求动直线 DE 斜率的变化范围;
(2) 求动点 M 的轨迹方程.



22. 设函数 $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 1$ $(k \geqslant 0)$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若函数 $f(x)$ 的极小值大于 0, 求 k 的取值范围.

2006 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$, 集合 $B=\{3,m^2\}$, 若 $B\subseteq A$, 则实数 $m=$_____.

2. 已知圆 $x^2-4x-4+y^2=0$ 的圆心是点 P, 则点 P 到直线 $x-y-1=0$ 的距离是_____.

3. 若函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的反函数的图象过点 $(2,-1)$, 则 $a=$_____.

4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{C}_n^3}{n^3+1}=$_____.

5. 若复数 z 同时满足 $z-\overline{z}=2\mathrm{i}$, $\dfrac{\overline{z}}{z}=\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 $z=$_____.

6. 如果 $\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$, 且 α 是第四象限的角, 那么 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$_____.

7. 已知椭圆中心在原点, 一个焦点为 $F(-2\sqrt{3},0)$, 且长轴长是短轴长的 2 倍, 则该椭圆的标准方程是_____.

8. 在极坐标系中, O 是极点, 设点 $A\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$, $B\left(5,-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. 则 $\triangle OAB$ 的面积是_____.

9. 两部不同的长篇小说各由第一、二、三、四卷组成, 每卷 1 本, 共 8 本. 将它们任意地排成一排, 左边 4 本恰好都属于同一部小说的概率是_____. (结果用分数表示)

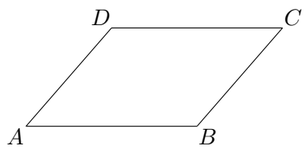
10. 如果一条直线与一个平面垂直, 那么, 称此直线与平面构成一个“正交线面对”. 在一个正方体中, 由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是_____.

11. 若曲线 $y^2=|x|+1$ 与直线 $y=kx+b$ 没有公共点, 则 k, b 分别应满足的条件是_____.

12. 三个同学对问题”关于 x 的不等式 $x^2+25+|x^3-5x^2|\geqslant ax$ 在 $[1,12]$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围”提出各自的解题思路.
甲说: “只须不等式左边的最小值不小于右边的最大值”.
乙说: “把不等式变形为左边含变量 x 的函数, 右边仅含常数, 求函数的最值”.
丙说: “把不等式两边看成关于 x 的函数, 作出函数图象”.
参考上述解题思路, 你认为他们所讨论的问题的正确结论, 即 a 的取值范围是_____.

二、选择题

13. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 下列结论中错误的是 （ ）



(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$　　(B) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$　　(D) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

14. 若空间中有四个点, 则“这四个点中有三点在同一条直线上”是“这四个点在同一个平面上”的 （ ）

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

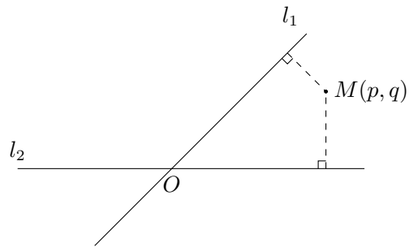
(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

15. 若关于 x 的不等式 $(1+k^2)x\leqslant k^4+4$ 的解集是 M, 则对任意实常数 k, 总有 （ ）

(A) $2\in M$, $0\in M$　　(B) $2\notin M$, $0\notin M$

(C) $2\in M$, $0\notin M$　　(D) $2\notin M$, $0\in M$

16. 如图, 平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O, 对于平面上任意一点 M, 若 p, q 分别是 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离, 则称有序非负实数对 (p,q) 是点 M 的“距离坐标”. 已知常数 $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, 给出下列命题:
① 若 $p=q=0$, 则“距离坐标”为 $(0,0)$ 的点有且仅有 1 个;
② 若 $pq=0$, 且 $p+q\neq 0$, 则“距离坐标”为 (p,q) 的点有且仅有 2 个;
③ 若 $pq\neq 0$, 则“距离坐标”为 (p,q) 的点有且仅有 4 个.
上述命题中, 正确命题的个数是 （ ）

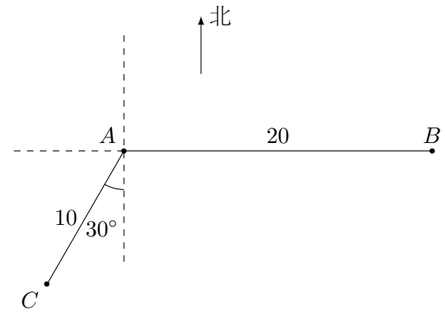


(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

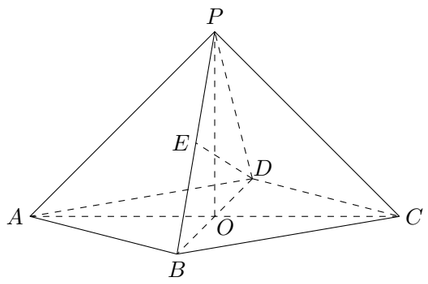
三、解答题

17. 求函数 $y=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin 2x$ 的值域和最小正周期.

18. 如图, 当甲船位于 A 处时获悉, 在其正东方向相距 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援, 同时把消息告知在甲船的南偏西 30°, 相距 10 海里 C 处的乙船, 试问乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援? (角度精确到 1°)



19. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是边长为 2 的菱形, $\angle DAB=60°$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O, $PO\perp$ 平面 $ABCD$, PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60°.
(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;
(2) 若 E 是 PB 的中点, 求异面直线 DE 与 PA 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A, B 两点.
(1) 求证: “如果直线 l 过点 $T(3,0)$, 那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$”是真命题;
(2) 写出 (1) 中命题的逆命题, 判断它是真命题还是假命题, 并说明理由.

21. 已知有穷数列 $\{a_n\}$ 共有 $2k$ 项 (整数 $k\geqslant 2$), 首项 $a_1=2$. 设该数列的前 n 项和为 S_n, 且 $a_{n+1}=(a-1)S_n+2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 2k-1)$, 其中常数 $a>1$.
(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;
(2) 若 $a=2^{\frac{2}{2k-1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 2k)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(3) 若 (2) 中的数列 $\{b_n\}$ 满足不等式 $\left|b_1-\dfrac{3}{2}\right|+\left|b_2-\dfrac{3}{2}\right|+\cdots+\left|b_{2k-1}-\dfrac{3}{2}\right|+\left|b_{2k}-\dfrac{3}{2}\right|\leqslant 4$, 求 k 的值.

22. 已知函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 有如下性质: 如果常数 $a>0$, 那么该函数在 $(0,\sqrt{a}]$ 上是减函数, 在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上是增函数.
(1) 如果函数 $y=x+\dfrac{2^b}{x}$ $(x>0)$ 的值域为 $[6,+\infty)$, 求 b 的值;
(2) 研究函数 $y=x^2+\dfrac{c}{x^2}$ (常数 $c>0$) 在定义域内的单调性, 并说明理由;
(3) 对函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 和 $y=x^2+\dfrac{a}{x^2}$ (常数 $a>0$) 作出推广, 使它们都是你所推广的函数的特例. 研究推广后的函数的单调性 (只须写出结论, 不必证明), 并求函数 $F(x)=\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n+\left(\dfrac{1}{x^2}+x\right)^n$ (n 是正整数) 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上的最大值和最小值. (可利用你的研究结论)

2006 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,3,m\}$, 集合 $B=\{3,4\}$. 若 $B\subseteq A$, 则实数 $m=$_____.

2. 已知两条直线 $l_1: ax+3y-3=0$, $l_2: 4x+6y-1=0$. 若 $l_1 /\!/ l_2$, 则 $a=$_____.

3. 若函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的反函数的图象过点 $(2,-1)$, 则 $a=$_____.

4. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n^2+1)}{6n^3+1}=$_____.

5. 若复数 $z=(m-2)+(m+1)\mathrm{i}$ 为纯虚数 (i 为虚数单位), 其中 $m\in\mathbf{R}$, 则 $|z|=$_____.

6. 函数 $y=\sin x\cos x$ 的最小正周期是_____.

7. 已知双曲线的中心在原点, 一个顶点的坐标是 $(3,0)$, 且焦距与虚轴长之比为 $5:4$, 则双曲线的标准方程是_____.

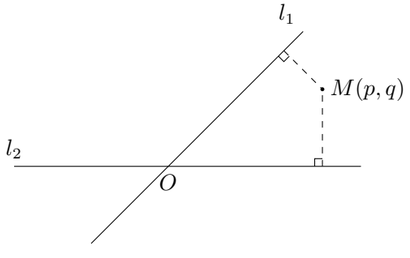
8. 方程 $\log_3(x^2-10)=1+\log_3 x$ 的解是_____.

9. 已知实数 x、y 满足 $\begin{cases}x+y-3\geqslant 0\\ x+2y-5\leqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $y-2x$ 的最大值是_____.

10. 在一个小组中有 8 名女同学和 4 名男同学, 从中任意地挑选 2 名同学担任交通安全宣传志愿者, 那么选到的两名都是女同学的概率是_____. (结果用分数表示)

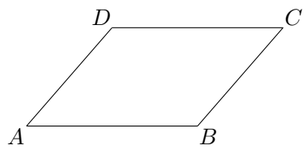
11. 若曲线 $|y|=2^x+1$ 与直线 $y=b$ 没有公共点, 则 b 的取值范围是_____.

12. 如图, 平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O. 对于平面上任意一点 M, 若 p、q 分别是 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离, 则称有序非负实数对 (p,q) 是点 M 的“距离坐标”. 根据上述定义, “距离坐标”是 $(1,2)$ 的点的个数是_____.



二、选择题

13. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 下列结论中错误的是 （ ）



(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$　(B) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$　(D) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

14. 如果 $a<0$, $b>0$, 那么, 下列不等式中正确的是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　(B) $\sqrt{-a}<\sqrt{b}$　(C) $a^2<b^2$　(D) $|a|>|b|$

15. 若空间中有两条直线, 则“这两条直线为异面直线”是“这两条直线没有公共点”的 （ ）

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既非充分又非必要条件

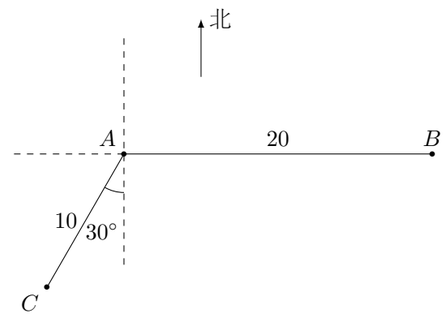
16. 如果一条直线与一个平面垂直, 那么, 称此直线与平面构成一个“正交线面对”. 在一个正方体中, 由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是 （ ）

(A) 48　(B) 18　(C) 24　(D) 36

三、解答题

17. 已知 α 是第一象限的角, 且 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$, 求 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos(2\alpha+4\pi)}$ 的值.

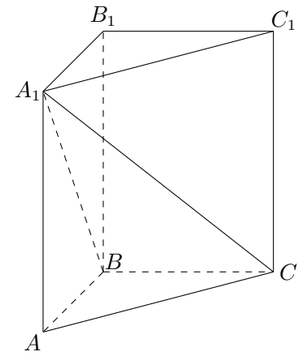
18. 如图, 当甲船位于 A 处时获悉, 在其正东方向相距 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援, 同时把消息告知在甲船的南偏西 $30°$, 相距 10 海里 C 处的乙船, 试问乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援? (角度精确到 $1°$)



19. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=90°$, $AB=BC=1$.

(1) 求异面直线 B_1C_1 与 AC 所成角的大小;

(2) 若 A_1C 与平面 ABC 所成角为 $45°$, 求三棱锥 A_1-ABC 的体积.



20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且对任意正整数 n, $a_n + S_n = 4096$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设数列 $\{\log_2 a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 对数列 $\{T_n\}$, 从第几项起 $T_n < -509$?

21. 已知在平面直角坐标系 xOy 中的一个椭圆, 它的中心在原点, 左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$, 且右顶点为 $D(2, 0)$, 设点 A 的坐标是 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
(1) 求该椭圆的标准方程;
(2) 若 P 是椭圆上的动点, 求线段 PA 中点 M 的轨迹方程;
(3) 过原点 O 的直线交椭圆于点 B、C, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

22. 已知函数 $y = x + \frac{a}{x}$ 有如下性质: 如果常数 $a > 0$, 那么该函数在 $(0, \sqrt{a}]$ 上是减函数, 在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 上是增函数.
(1) 如果函数 $y = x + \frac{2^b}{x}$ $(x > 0)$ 在 $(0, 4]$ 上是减函数, 在 $[4, +\infty)$ 上是增函数, 求 b 的值;
(2) 设常数 $c \in [1, 4]$, 求函数 $f(x) = x + \frac{c}{x}$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$ 的最大值和最小值;
(3) 当 n 是正整数时, 研究函数 $g(x) = x^n + \frac{c}{x^n}$ $(c > 0)$ 的单调性, 并说明理由.

2006 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+6\leqslant 0\}$, 集合 $B=\{x||2x-1|>3\}$, 则集合 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$　　(B) $\{x|2\leqslant x<3\}$

(C) $\{x|2<x\leqslant 3\}$　　(D) $\{x|-1<x<3\}$

2. 复数 $(1-\mathrm{i})^3$ 的虚部为 （　）

(A) 3　　(B) -3　　(C) 2　　(D) -2

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$, 下面结论正确的是 （　）

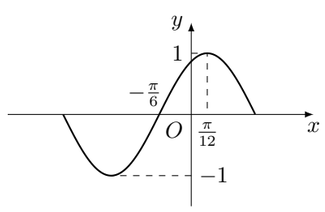
(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续　　(B) $f(1)=5$

(C) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$　　(D) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=5$

4. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $60°$, m、n 为异面直线, 且 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, 则 m、n 所成的角为 （　）

(A) $30°$　　(B) $60°$　　(C) $90°$　　(D) $120°$

5. 下列函数中, 图象的一部分如图所示的是 （　）



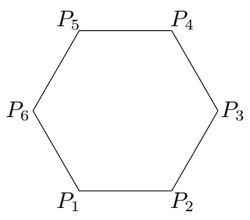
(A) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(B) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　(D) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

6. 已知两定点 $A(-2,0)$、$B(1,0)$, 如果动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$, 则点 P 的轨迹所包围的图形的面积等于 （　）

(A) π　　(B) 4π　　(C) 8π　　(D) 9π

7. 如图, 已知正六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, 下列向量的数量积中最大的是 （　）



(A) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}$　　(B) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}$　　(C) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_5}$　　(D) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_6}$

8. 某厂生产甲产品每千克需用原料 A 和原料 B 分别为 a_1、b_1 千克, 生产乙产品每千克需用原料 A 和原料 B 分别为 a_2、b_2 千克. 甲、乙产品每千克可获利润分别为 d_1、d_2 元. 月初一次性购进本月用原料 A、B 各 c_1、c_2 千克. 要计划本月生产甲产品和乙产品各多少千克才能使月利润总额达到最大. 在这个问题中, 设全月生产甲、乙两种产品分别为 x 千克、y 千克, 月利润总额为 z 元, 那么, 用于求使总利润 $z=d_1x+d_2y$ 最大的数学模型中, 约束条件为 （　）

(A) $\begin{cases}a_1x+a_2y\geqslant c_1\\ b_1x+b_2y\geqslant c_2\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}a_1x+b_1y\leqslant c_1\\ a_2x+b_2y\leqslant c_2\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}a_1x+a_2y\leqslant c_1\\ b_1x+b_2y\leqslant c_2\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}a_1x+a_2y=c_1\\ b_1x+b_2y=c_2\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$

9. 直线 $y=x-3$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A、B 两点, 过 A、B 两点向抛物线的准线作垂线, 垂足分别为 P、Q, 则梯形 $APQB$ 的面积为 （　）

(A) 48　　(B) 56　　(C) 64　　(D) 72

10. 已知球 O 的半径是 1, A、B、C 三点都在球面上, A、B 两点和 A、C 两点的球面距离都是 $\dfrac{\pi}{4}$, B、C 两点的球面距离是 $\dfrac{\pi}{3}$, 则二面角 $B-OA-C$ 的大小是 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

11. 设 a、b、c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 所对的边, 则 $a^2=b(b+c)$ 是 $A=2B$ 的 （　）

(A) 充要条件　　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

12. 从 0 到 9 这 10 个数字中任取 3 个数字组成一个没有重复数字的三位数, 这个数不能被 3 整除的概率为 （　）

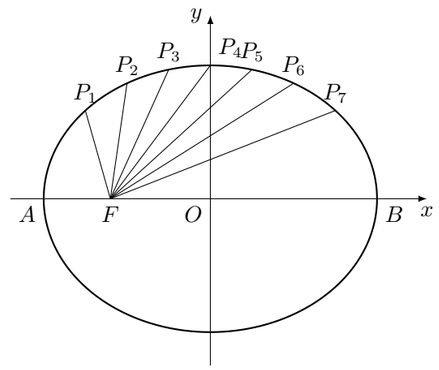
(A) $\dfrac{19}{54}$　　(B) $\dfrac{35}{54}$　　(C) $\dfrac{38}{54}$　　(D) $\dfrac{41}{60}$

二、填空题

13. 在三棱锥 $O-ABC$ 中, 三条棱 OA、OB、OC 两两互相垂直, 且 $OA=OB=OC$, M 是 AB 边的中点, 则 OM 与平面 ABC 所成角的大小是_____. (用反三角函数表示)

14. 设离散型随机变量 ξ 可能取的值为 1, 2, 3, 4. $P(\xi=k)=ak+b$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4$). 又 ξ 的数学期望 $E\xi=3$, 则 $a+b=$_____.

15. 如图, 把椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的长轴 AB 分成 8 等分, 过每个分点作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于 P_1、P_2、$\cdots$、P_7 七个点, F 是椭圆的一个焦点, 则 $|P_1F|+|P_2F|+\cdots+|P_7F|=$_____.



16. 非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足: (1) 对任意 a、$b\in G$, 都有 $a\oplus b\in G$; (2) 存在 $e\in G$, 使得对一切 $a\in G$, 都有 $a\oplus e=e\oplus a=a$, 则称 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”. 现给出下列集合和运算:

① $G=${非负整数}, $\oplus$ 为整数的加法;

② $G=${偶数}, $\oplus$ 为整数的乘法;

③ $G=${平面向量}, $\oplus$ 为平面向量的加法;

④ $G=${二次三项式}, $\oplus$ 为多项式的加法;

⑤ $G=${虚数}, $\oplus$ 为复数的乘法.

其中 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”的是_____. (写出所有“融洽集”的序号)

三、解答题

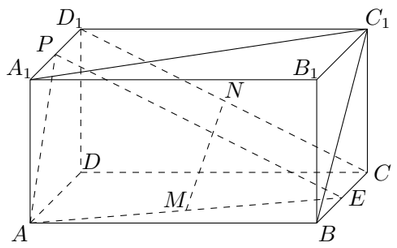
17. 已知 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 三内角, 向量 $\boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$, 且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$.

(1) 求角 A;

(2) 若 $\dfrac{1+\sin 2B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$, 求 $\tan C$.

18. 某课程考核分理论和实验两部分进行, 每部分考核成绩只记“合格”与“不合格”, 两部分考核都“合格”则该课程考核“合格”. 甲、乙、丙三人在理论考核中合格的概率分别为 0.9、0.8、0.7; 在实验考核中合格的概率分别为 0.8、0.7、0.9. 所有考核是否合格互相之间没有影响.
(1) 求甲、乙、丙三人在理论考核中至少有两人合格的概率;
(2) 求这三人该课程考核都合格的概率. (结果保留三位小数)

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、P 分别是 BC、A_1D_1 的中点, M N 分别是 AE CD_1 的中点, $AD=AA_1=a$, $AB=2a$.
(1) 求证: $MN\parallel$ 面 ADD_1A_1;
(2) 求二面角 $P-AE-D$ 的大小;
(3) 求三棱锥 $P-DEN$ 的体积.



20. 已知数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_1=1$, $a_2=3$, $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 数列 $\{\ln S_n\}$ 的前 n 项和为 U_n.
(1) 求 U_n;
(2) 设 $F_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{U_n}}{2n(n!)^2}x^{2n}$ $(x>0)$, $T_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}F_k'(x)$ (其中 $F_k'(x)$ 为 $F_k(x)$ 的导函数), 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{T_n(x)}{T_{n+1}(x)}$.

21. 已知两定点 $F_1(-\sqrt{2},0)$, $F_2(\sqrt{2},0)$, 满足条件 $\left|\overrightarrow{PF_2}\right|-\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=2$ 的点 P 的轨迹是曲线 E, 直线 $y=kx-1$ 与曲线 E 交于 A、B 两点. 如果 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6\sqrt{3}$, 且曲线 E 上存在点 C, 使 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OC}$, 求 m 的值和 $\triangle ABC$ 的面积 S.

22. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}+a\ln x$ $(x>0)$, $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$. 对任意两个不相等的正数 x_1、x_2, 证明:
(1) 当 $a\leqslant 0$ 时, $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$;
(2) 当 $a\leqslant 4$ 时, $|f'(x_1)-f'(x_2)|>|x_1-x_2|$.

2006 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+6\leqslant 0\}$, 集合 $B=\{x||2x-1|>3\}$, 则集合 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$　(B) $\{x|2\leqslant x<3\}$

(C) $\{x|2<x\leqslant 3\}$　(D) $\{x|-1<x<3\}$

2. 函数 $f(x)=\ln(x-1)\ (x>1)$ 的反函数是 （　）

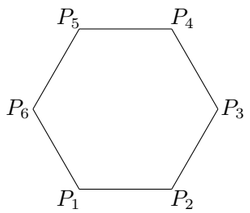
(A) $f^{-1}(x)=\mathrm{e}^x+1\ (x\in\mathbf{R})$　(B) $f^{-1}(x)=10^x+1\ (x\in\mathbf{R})$

(C) $f^{-1}(x)=10^x+1\ (x>1)$　(D) $f^{-1}(x)=\mathrm{e}^x+1\ (x>1)$

3. 曲线 $y=4x-x^3$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程是 （　）

(A) $y=7x+4$　(B) $y=7x+2$　(C) $y=x-4$　(D) $y=x-2$

4. 如图, 已知正六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, 下列向量的数量积中最大的是 （　）



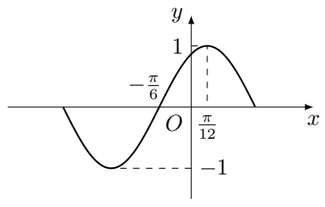
(A) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}$　(B) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}$　(C) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_5}$　(D) $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_6}$

5. 甲校有 3600 名学生, 乙校有 5400 名学生, 丙校有 1800 名学生, 为统计三校学生某方面的情况, 计划采用分层抽样法, 抽取一个容量为 90 人的样本, 应在这三校分别抽取学生 （　）

(A) 30 人, 30 人, 30 人　(B) 30 人, 45 人, 15 人

(C) 20 人, 30 人, 10 人　(D) 30 人, 50 人, 10 人

6. 下列函数中, 图象的一部分如图所示的是 （　）



(A) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　(B) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　(D) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

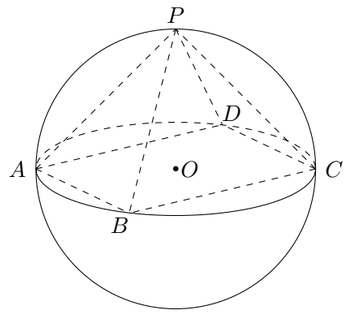
7. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 60°, m、n 为异面直线, 且 $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, 则 m、n 所成的角为 （　）

(A) 30°　(B) 60°　(C) 90°　(D) 120°

8. 已知两定点 $A(-2,0)$、$B(1,0)$, 如果动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$, 则点 P 的轨迹所包围的图形的面积等于 （　）

(A) 9π　(B) 8π　(C) 4π　(D) π

9. 如图, 正四棱锥 $P-ABCD$ 底面的四个顶点 A、B、C、D 在球 O 的同一个大圆上, 点 P 在球面上, 如果 $V_{P-ABCD}=\dfrac{16}{3}$, 则球 O 的表面积是（　）



(A) 4π　(B) 8π　(C) 12π　(D) 16π

10. 直线 $y=x-3$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A、B 两点, 过 A、B 两点向抛物线的准线作垂线, 垂足分别为 P、Q, 则梯形 $APQB$ 的面积为 （　）

(A) 36　(B) 48　(C) 56　(D) 64

11. 设 a、b、c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 所对的边, 则 $a^2=b(b+c)$ 是 $A=2B$ 的 （　）

(A) 充要条件　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

12. 从 0 到 9 这 10 个数字中任取 3 个数字组成一个没有重复数字的三位数, 这个数不能被 3 整除的概率为 （　）

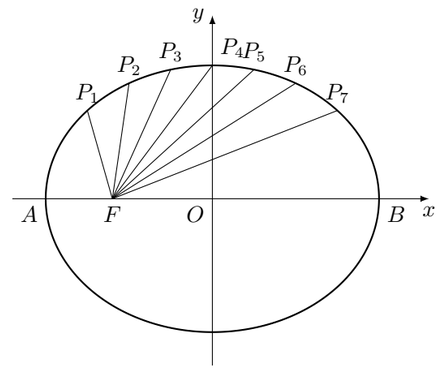
(A) $\dfrac{41}{60}$　(B) $\dfrac{38}{54}$　(C) $\dfrac{35}{54}$　(D) $\dfrac{19}{54}$

二、填空题

13. $(1-2x)^{10}$ 展开式中的 x^3 的系数为_____. (用数字作答)

14. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ y\geqslant\dfrac{1}{2}x\\ 2x+y\leqslant 10\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最小值为_____.

15. 如图, 把椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的长轴 AB 分成 8 等分, 过每个分点作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于 P_1、P_2、$\cdots$、P_7 七个点, F 是椭圆的一个焦点, 则 $|P_1F|+|P_2F|+\cdots+|P_7F|=$_____.



16. m、n 是空间两条不同直线, α、β 是两个不同平面, 下面有四个命题:

① $m\perp\alpha$, $n\parallel\beta$, $\alpha\parallel\beta\Rightarrow m\perp n$;

② $m\perp n$, $\alpha\parallel\beta$, $m\perp\alpha\Rightarrow n\parallel\beta$;

③ $m\perp n$, $\alpha\parallel\beta$, $m\parallel\alpha\Rightarrow n\perp\beta$;

④ $m\perp\alpha$, $m\parallel n$, $\alpha\parallel\beta\Rightarrow n\perp\beta$.

其中真命题的编号是_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n, $a_1=1$, $a_{n+1}=2S_n+1\ (n\geqslant 1)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的的通项公式;

(2) 等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正, 其前 n 项和为 T_n, 且 $T_3=15$, 又 a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 成等比数列, 求 T_n.

18. 已知 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 三内角, 向量 $\boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$, 且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$.

(1) 求角 A;

(2) 若 $\dfrac{1+\sin 2B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$, 求 $\tan C$.

19. 某课程考核分理论和实验两部分进行, 每部分考核成绩只记“合格”与“不合格”, 两部分考核都“合格”则该课程考核“合格”. 甲、乙、丙三人在理论考核中合格的概率分别为 0.9、0.8、0.7; 在实验考核中合格的概率分别为 0.8、0.7、0.9. 所有考核是否合格互相之间没有影响.

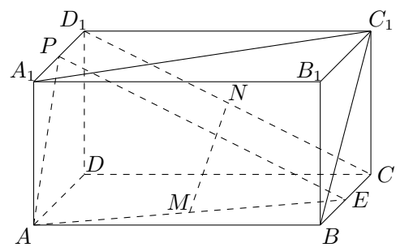
(1) 求甲、乙、丙三人在理论考核中至少有两人合格的概率;

(2) 求这三人该课程考核都合格的概率. (结果保留三位小数)

20. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、P 分别是 BC、A_1D_1 的中点, M N 分别是 AE CD_1 的中点, $AD=AA_1=a$, $AB=2a$.

(1) 求证: $MN\parallel$ 面 ADD_1A_1;

(2) 求二面角 $P-AE-D$ 的大小.



21. 已知函数 $f(x)=x^3+3ax-1$, $g(x)=f(x)-ax-5$, 其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

(1) 对满足 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 的一切 a 的值, 都有 $g(x)<0$, 求实数 x 的取值范围;

(2) 设 $a=-m^2$, 当实数 m 在什么范围内变化时, 函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=3$ 只有一个公共点.

22. 已知两定点 $F_1(-\sqrt{2},0)$, $F_2(\sqrt{2},0)$, 满足条件 $\left|\overrightarrow{PF_2}\right|-\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=2$ 的点 P 的轨迹是曲线 E, 直线 $y=kx-1$ 与曲线 E 交于 A、B 两点.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 如果 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6\sqrt{3}$, 且曲线 E 上存在点 C, 使 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OC}$, 求 m 的值和 $\triangle ABC$ 的面积 S.

2006 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位，$\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(B) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(C) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 如果双曲线的两个焦点分别为 $F_1(-3,0)$、$F_2(3,0)$，一条渐近线方程为 $y=\sqrt{2}x$，那么它的两条渐近线间的距离是 （　）

(A) $6\sqrt{3}$　(B) 4　(C) 2　(D) 1

3. 设变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant x \\ x+y\geqslant 2 \\ y\geqslant 3x-6 \end{cases}$，则目标函数 $z=2x+y$ 的最小值为 （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 9

4. 设集合 $M=\{x|0<x\leqslant 3\}$，$N=\{x|0<x\leqslant 2\}$，那么“$a\in M$”是“$a\in N$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 将 4 个颜色互不相同的球全部放入编号为 1 和 2 的两个盒子里，使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒子的编号，则不同的放球方法有 （　）

(A) 10 种　(B) 20 种　(C) 36 种　(D) 52 种

6. 设 m、n 是两条不同的直线，α、β 是两个不同的平面. 考查下列命题，其中正确的命题是 （　）

(A) $m\perp\alpha$，$n\subset\beta$，$m\perp n\Rightarrow\alpha\perp\beta$

(B) $\alpha\parallel\beta$，$m\perp\alpha$，$n\parallel\beta\Rightarrow m\perp n$

(C) $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$n\parallel\beta\Rightarrow m\perp n$

(D) $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\perp m\Rightarrow n\perp\beta$

7. 已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是公差为 1 的等差数列，其首项分别为 a_1、b_1，且 $a_1+b_1=5$，a_1，$b_1\in\mathbf{N}^*$. 设 $C_n=a_{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{C_n\}$ 的前 10 项和等于 （　）

(A) 55　(B) 70　(C) 85　(D) 100

8. 已知函数 $f(x)=a\sin x-b\cos x$（a、b 为常数，$a\neq 0$，$x\in\mathbf{R}$）在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处取得最小值，则函数 $y=f\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)$ 是 （　）

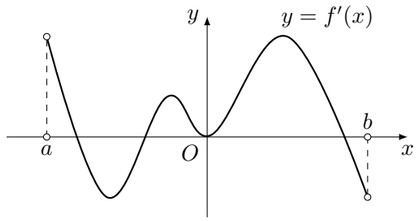
(A) 偶函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

(B) 偶函数且它的图象关于点 $\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$ 对称

(C) 奇函数且它的图象关于点 $\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$ 对称

(D) 奇函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

9. 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a,b)，导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图像如图所示，则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有极小值点 （　）



(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

10. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，记 $g(x)=f(x)[f(x)+f(2)-1]$. 若 $y=g(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是 （　）

(A) $[2,+\infty)$　(B) $(0,1)\cup(1,2)$

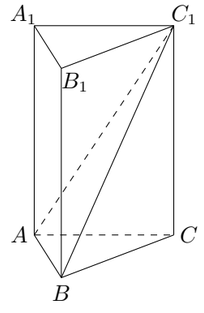
(C) $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　(D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

二、填空题

11. $\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的二项展开式中 x 的系数是_____. (用数字作答)

12. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，且 $\boldsymbol{a}=(3,3)$，$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,1)$，则 $\cos\theta=$_____.

13. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=1$. 若二面角 $C-AB-C_1$ 的大小为 $60°$，则点 C 到平面 ABC_1 的距离为_____.



14. 设直线 $ax-y+3=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 A、B 两点，且弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$，则 $a=$_____.

15. 某公司一年购买某种货物 400 吨，每次都购买 x 吨，运费为 4 万元/次，一年的总存储费用为 $4x$ 万元，要使一年的总运费与总存储费用之和最小，则 $x=$_____吨.

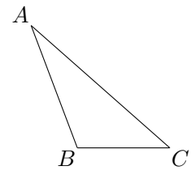
16. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，点 A_0 表示坐标原点，点 $A_n(n,f(n))$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 若向量 $\vec{a_n}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$，$\theta_n$ 是 $\vec{a_n}$ 与 $\vec{i}$ 的夹角（其中 $\vec{i}=(1,0)$），设 $S_n=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$_____.

三、解答题

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$BC=1$，$\cos C=\dfrac{3}{4}$.

(1) 求 AB 的值；

(2) 求 $\sin(2A+C)$ 的值.



18. 某射手进行射击训练，假设每次射击击中目标的概率为 $\dfrac{3}{5}$，且每次射击的结果互不影响.

(1) 求射手在 3 次射击中，至少有两次连续击中目标的概率 (用数字作答)；

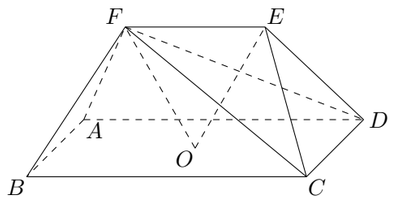
(2) 求射手第 3 次击中目标时，恰好射击了 4 次的概率 (用数字作答)；

(3) 设随机变量 ξ 表示射手第 3 次击中目标时已射击的次数，求 ξ 的分布列.

19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线的交点, 面 CDE 是等边三角形, 棱 $EF \parallel BC$ 且 $EF = \dfrac{1}{2}BC$.

(1) 证明: $FO \parallel$ 平面 CDE;

(2) 设 $BC = \sqrt{3}CD$, 证明: $EO \perp$ 平面 CDF.



20. 已知函数 $f(x) = 4x^3 - 3x^2\cos\theta + \dfrac{3}{16}\cos\theta$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, θ 为参数, 且 $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

(1) 当 $\cos\theta = 0$ 时, 判断函数 $f(x)$ 是否有极值;

(2) 要使函数 $f(x)$ 的极小值大于零, 求参数 θ 的取值范围;

(3) 若对 (2) 中所求的取值范围内的任意参数 θ, 函数 $f(x)$ 在区间 $(2a-1, a)$ 内都是增函数, 求实数 a 的取值范围.

21. 已知数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足 $x_1 = x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 2$, 并且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$, $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} \geqslant \lambda\dfrac{y_n}{y_{n-1}}$ (λ 为非零参数, $n = 2, 3, 4, \cdots$).

(1) 若 x_1, x_3, x_5 成等比数列, 求参数 λ 的值;

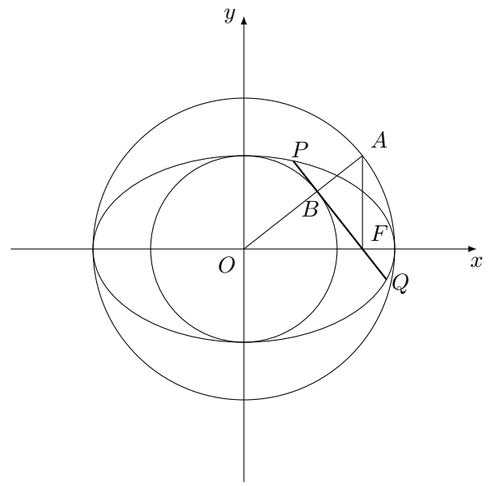
(2) 当 $\lambda > 0$ 时, 证明: $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leqslant \dfrac{x_n}{y_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$);

(3) 当 $\lambda > 1$, 证明: $\dfrac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2} + \dfrac{x_2 - y_2}{x_3 - y_3} + \cdots + \dfrac{x_n - y_n}{x_{n+1} - y_{n+1}} < \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

22. 如图, 以椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的中心 O 为圆心, 分别以 a 和 b 为半径作大圆和小圆. 过椭圆右焦点 $F(c, o)$ ($c > b$) 作垂直于 x 轴的直线交大圆于第一象限内的点 A. 连结 OA 交小圆于点 B. 设直线 BF 是小圆的切线.

(1) 证明 $c^2 = ab$, 并求直线 BF 与 y 轴的交点 M 的坐标;

(2) 设直线 BF 交椭圆于 P、Q 两点, 证明: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \dfrac{1}{2}b^2$.



2006 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$, $B=\{x||x|\leqslant 2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$　(B) $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

(C) $\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$　(D) $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$

2. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1+a_3+a_5=9$, $a_6=9$, 则这个数列的前 6 项和等于 （　）

(A) 12　(B) 24　(C) 36　(D) 48

3. 设变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant x\\ x+y\geqslant 2\\ y\geqslant 3x-6\end{cases}$, 则目标函数 $z=2x+y$ 的最小值为 （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 9

4. 设 $P=\log_2 3$, $Q=\log_3 2$, $R=\log_2(\log_3 2)$, 则 （　）

(A) $R<Q<P$　(B) $P<R<Q$　(C) $Q<R<P$　(D) $R<P<Q$

5. 设 α、$\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 那么“$\alpha<\beta$”是“$\tan\alpha<\tan\beta$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

6. 函数 $y=\sqrt{x^2+1}+1$ $(x<0)$ 的反函数是 （　）

(A) $y=\sqrt{x^2-2x}$ $(x<0)$　(B) $y=-\sqrt{x^2-2x}$ $(x<0)$

(C) $y=\sqrt{x^2-2x}$ $(x>2)$　(D) $y=-\sqrt{x^2-2x}$ $(x>2)$

7. 若 l 为一条直线, α、β、γ 为三个互不重合的平面, 给出下面三个命题:
① $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma\Rightarrow\alpha\perp\beta$;
② $\alpha\perp\gamma$, $\beta\parallel\gamma\Rightarrow\alpha\perp\beta$;
③ $l\parallel\alpha$, $l\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$.
其中正确的命题有 （　）

(A) 0 个　(B) 1 个　(C) 2 个　(D) 3 个

8. 椭圆的中心为点 $E(-1,0)$, 它的一个焦点为 $F(-3,0)$, 相应于焦点 F 的准线方程为 $x=-\frac{7}{2}$, 则这个椭圆的方程是 （　）

(A) $\frac{2(x-1)^2}{21}+\frac{2y^2}{3}=1$　(B) $\frac{2(x+1)^2}{21}+\frac{2y^2}{3}=1$

(C) $\frac{(x-1)^2}{5}+y^2=1$　(D) $\frac{(x+1)^2}{5}+y^2=1$

9. 已知函数 $f(x)=a\sin x-b\cos x$ (a、b 为常数, $a\neq 0$, $x\in\mathbf{R}$) 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称, 则函数 $y=f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$ 是 （　）

(A) 偶函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

(B) 偶函数且它的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ 对称

(C) 奇函数且它的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ 对称

(D) 奇函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

10. 如果函数 $f(x)=a^x(a^x-3a^2-1)$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数, 那么实数 a 的取值范围是 （　）

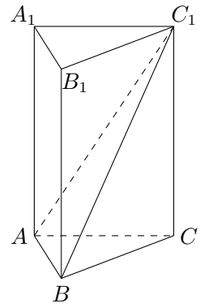
(A) $\left(0,\frac{2}{3}\right]$　(B) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$　(C) $(1,\sqrt{3}]$　(D) $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

二、填空题

11. $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的二项展开式中 x 的系数是_____. (用数字作答)

12. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 且 $\boldsymbol{a}=(3,3)$, $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,1)$, 则 $\cos\theta=$_____.

13. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=1$. 若二面角 $C-AB-C_1$ 的大小为 60°, 则点 C 到平面 ABC_1 的距离为_____.



14. 若半径为 1 的圆分别与 y 轴的正半轴和射线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ $(x\geqslant 0)$ 相切, 则这个圆的方程为_____.

15. 某公司一年购买某种货物 400 吨, 每次都购买 x 吨, 运费为 4 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元, 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 $x=$_____吨.

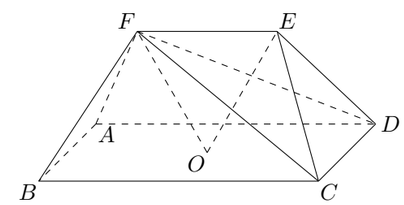
16. 用数字 0、1、2、3、4 组成没有重复数字的五位数, 则其中数字 1、2 相邻的偶数有_____个. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知 $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{5}{2}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, 求 $\cos 2\alpha$ 和 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

18. 甲、乙两台机床相互没有影响地生产某种产品, 甲机床产品的正品率是 0.9, 乙机床产品的正品率是 0.95.
(1) 从甲机床生产的产品中任取 3 件, 求其中恰有 2 件正品的概率 (用数字作答);
(2) 从甲、乙两台机床生产的产品中各任取 1 件, 求其中至少有 1 件正品的概率 (用数字作答).

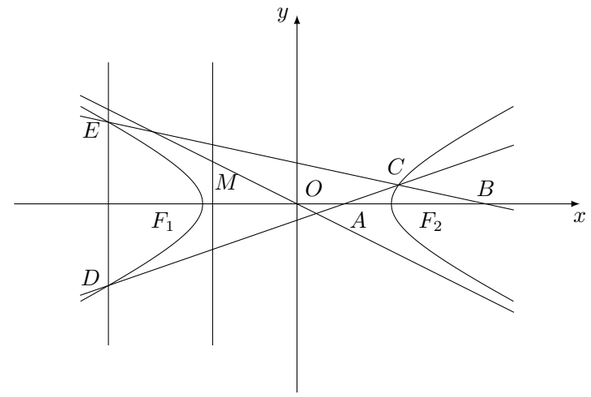
19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线的交点, 面 CDE 是等边三角形, 棱 $EF\parallel BC$ 且 $EF=\frac{1}{2}BC$.
(1) 证明: $FO\parallel$ 平面 CDE;
(2) 设 $BC=\sqrt{3}CD$, 证明: $EO\perp$ 平面 CDF.



20. 已知函数 $f(x)=4x^3-3x^2\cos\theta+\dfrac{1}{32}$, 其中 $x\in\mathbf{R}$, θ 为参数, 且 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.
(1) 当 $\cos\theta=0$ 时, 判断函数 $f(x)$ 是否有极值;
(2) 要使函数 $f(x)$ 的极小值大于零, 求参数 θ 的取值范围;
(3) 若对 (2) 中所求的取值范围内的任意参数 θ, 函数 $f(x)$ 在区间 $(2a-1,a)$ 内都是增函数, 求实数 a 的取值范围.

21. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=x_2=1$, 并且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ (λ 为非零参数, $n=2,3,4,\cdots$).
(1) 若 x_1,x_3,x_5 成等比数列, 求参数 λ 的值;
(2) 设 $0<\lambda<1$, 常数 $k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant3$, 证明: $\dfrac{x_{1+k}}{x_1}+\dfrac{x_{2+k}}{x_2}+\cdots+\dfrac{x_{n+k}}{x_n}<\dfrac{\lambda^k}{1-\lambda^k}$ ($n\in\mathbf{N}^*$).

22. 如图, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, F_1、F_2 分别为左、右焦点, M 为左准线与渐近线在第二象限内的交点, 且 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=-\dfrac{1}{4}$.
(1) 求双曲线的方程;
(2) 设 $A(m,0)$ 和 $B\left(\dfrac{1}{m},0\right)$ ($0<m<1$) 是 x 轴上的两点. 过点 A 作斜率不为 0 的直线 l, 使得 l 交双曲线于 C、D 两点, 作直线 BC 交双曲线于另一点 E. 证明: 直线 DE 垂直于 x 轴.



2006 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $[0,2]$　(B) $[1,2]$　(C) $[0,4]$　(D) $[1,4]$

2. 已知 $\dfrac{m}{1+\mathrm{i}}=1-n\mathrm{i}$, 其中 m, n 是实数, i 是虚数单位, 则 $m+n\mathrm{i}=$ （　）

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) $2+\mathrm{i}$　(D) $2-\mathrm{i}$

3. 已知 $0<a<1$, $\log_a m<\log_a n<0$, 则 （　）

(A) $1<n<m$　(B) $1<m<n$　(C) $m<n<1$　(D) $n<m<1$

4. 在平面直角坐标系中, 不等式组 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x-y+2\geqslant 0\\ x\leqslant 2\end{cases}$, 表示的平面区域的面积是 （　）

(A) $4\sqrt{2}$　(B) 4　(C) $2\sqrt{2}$　(D) 2

5. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-y^2=1$ 上的点到左准线的距离是到左焦点距离的 $\dfrac{1}{3}$, 则 $m=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{1}{8}$　(D) $\dfrac{9}{8}$

6. 函数 $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x$, $x\in\mathbf{R}$ 的值域是 （　）

(A) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$　(B) $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

(C) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right]$　(D) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\right]$

7. “$a>b>0$”是“$ab<\dfrac{a^2+b^2}{2}$”的 （　）

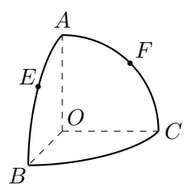
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

8. 若多项式 $x^2+x^{10}=a_0+a_1(x+1)+\cdots+a_9(x+1)^9+a_{10}(x+1)^{10}$, 则 $a_9=$ （　）

(A) 9　(B) 10　(C) -9　(D) -10

9. 如图, O 是半径为 1 的球心, 点 A, B, C 在球面上, OA, OB, OC 两两垂直, E, F 分别是大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点, 则点 E, F 在该球面上的球面距离是 （　）



(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$

10. 函数 $f:|1,\ 2,\ 3|\to|1,\ 2,\ 3|$ 满足 $f(f(x))=f(x)$, 则这样的函数个数共有 （　）

(A) 1 个　(B) 4 个　(C) 8 个　(D) 10 个

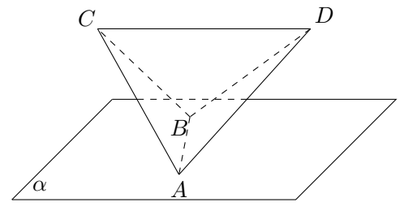
二、填空题

11. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_5=10$, $S_{10}=-5$, 则公差为_____. (用数字作答)

12. 对 a, $b\in\mathbf{R}$, 记 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a, a\geqslant b\\ b, a<b\end{cases}$, 函数 $f(x)=\max\{|x+1|,|x-2|\}$ ($x\in\mathbf{R}$) 的最小值是_____.

13. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 若 $|\boldsymbol{a}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2$ 的值是_____.

14. 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1, 棱 $AB\parallel$ 平面 α, 则正四面体上的所有点在平面 α 内的射影构成的图形面积的取值范围是_____.

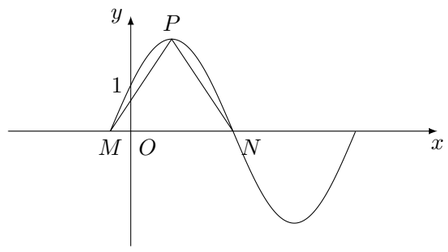


三、解答题

15. 如图, 函数 $y=2\sin(\pi x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, $\left(\text{其中 } 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0,1)$.

(1) 求 φ 的值;

(2) 设 P 是图象上的最高点, M, N 是图象与 x 轴的交点, 求 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角.



16. 设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$. 若 $a+b+c=0$, $f(0)>0$, $f(1)>0$, 求证:

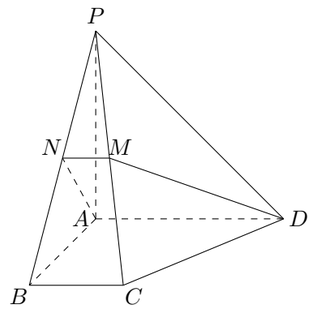
(1) $a>0$ 且 $-2<\dfrac{b}{a}<-1$;

(2) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有两个实根.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面为直角梯形, $AD\parallel BC$, $\angle BAD=90^\circ$, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=AD=AB=2BC$, M, N 分别为 PC, PB 的中点.

(1) 求证: $PB\perp DM$;

(2) 求 CD 与平面 $ADMN$ 所成的角.



18. 甲, 乙两袋装有大小相同的红球和白球, 甲袋装有 2 个红球, 2 个白球, 乙袋装有 2 个红球, n 个白球. 现从甲, 乙两袋中各任取 2 个球.

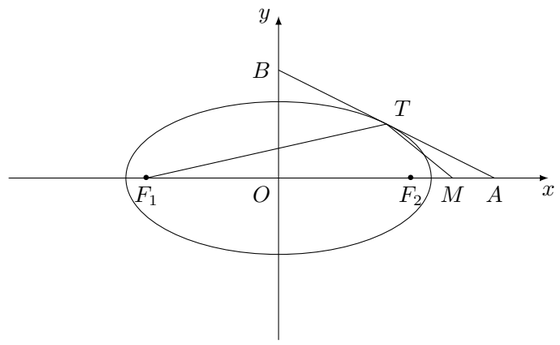
(1) 若 $n=3$, 求取到的 4 个球全是红球的概率;

(2) 若取到的 4 个球中至少有 2 个红球的概率为 $\dfrac{3}{4}$, 求 n.

19. 如图, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 与过点 A $(2,0)$, B $(0,1)$ 的直线有且只有一个公共点 T, 且椭圆的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆方程;

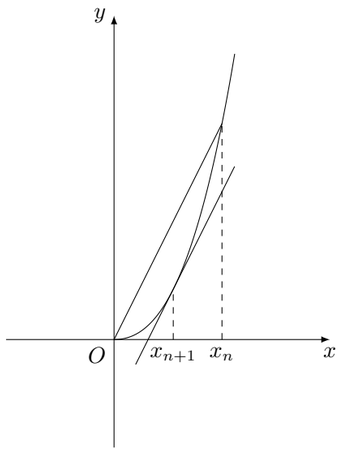
(2) 设 F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, M 为线段 AF_1 的中点, 求证: $\angle ATM=\angle AF_1T$.



20. 已知函数 $f(x)=x^3+x^2$, 数列 $\{x_n\}$ $(x_n>0)$ 的第一项 $x_1=1$, 以后各项按如下方式取定: 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_{n+1},f(x_{n+1}))$ 处的切线与经过 $(0,0)$ 和 $(x_n,f(x_n))$ 两点的直线平行 (如图). 求证: 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,

(1) $x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\leqslant x_n\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.



2006 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $[0,2]$ (B) $[1,2]$ (C) $[0,4]$ (D) $[1,4]$

2. 在二项式 $(x+1)^6$ 的展开式中, 含 x^3 的项的系数是 （ ）

(A) 15 (B) 20 (C) 30 (D) 40

3. 抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程是 （ ）

(A) $x=-2$ (B) $x=-4$ (C) $y=-2$ (D) $y=-4$

4. 已知 $\log_{\frac{1}{2}}m<\log_{\frac{1}{2}}n<0$, 则 （ ）

(A) $n<m<1$ (B) $m<n<1$ (C) $1<m<n$ (D) $1<n<m$

5. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}=2$, 则 $|\boldsymbol{c}|^2=$ （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5

6. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值是 （ ）

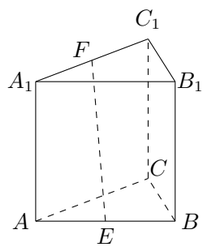
(A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 4

7. “$a>0$, $b>0$”是“$ab>0$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都 2, E, F 分别是 AB, A_1C_1 的中点, 则 EF 的长是 （ ）



(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{7}$

9. 在平面直角坐标系中, 不等式组 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x-y+2\geqslant 0\\ x\leqslant 2\end{cases}$, 表示的平面区域的面积是 （ ）

(A) $4\sqrt{2}$ (B) 4 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2

10. 对 a, $b\in\mathbf{R}$, 记 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a, & a\geqslant b\\ b, & a<b\end{cases}$, 函数 $f(x)=\max\{|x+1|,|x-2|\}$ ($x\in\mathbf{R}$) 的最小值是 （ ）

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3

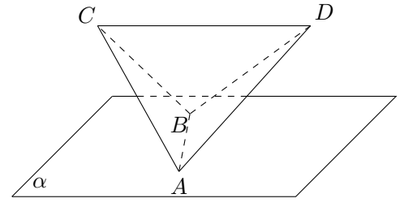
二、填空题

11. 不等式 $\frac{x+1}{x-2}>0$ 的解集是_____.

12. 函数 $y=2\sin x\cos x-1$, $x\in\mathbf{R}$ 的值域是_____.

13. 双曲线 $\frac{x^2}{m}-y^2=1$ 上的点到左焦点的距离与到左准线的距离的比是 3, 则 m 等于_____.

14. 如图, 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1, 平面 α 过棱 AB, 且 $CD\parallel\alpha$, 则正四面体上的所有点在平面 α 内的射影构成的图形面积是_____.



三、解答题

15. 若 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列.

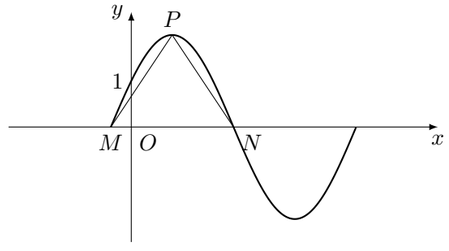
(1) 求数列 S_1, S_2, S_4 的公比;

(2) 若 $S_2=4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

16. 如图, 函数 $y=2\sin(\pi x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, $\left(\text{其中 } 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0,1)$.

(1) 求 φ 的值;

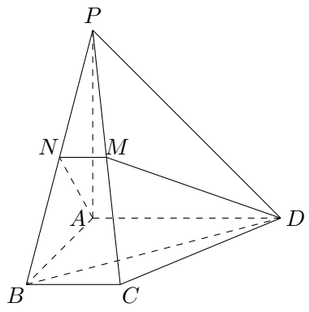
(2) 设 P 是图象上的最高点, M, N 是图象与 x 轴的交点, 求 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角.



17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面为直角梯形, $AD\parallel BC$, $\angle BAD=90^\circ$, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=AD=AB=2BC$, M, N 分别为 PC, PB 的中点.

(1) 求证: $PB\perp DM$;

(2) 求 BD 与平面 $ADMN$ 所成的角.



18. 甲, 乙两袋装有大小相同的红球和白球, 甲袋装有 2 个红球, 2 个白球, 乙袋装有 2 个红球, n 个白球. 现从甲, 乙两袋中各任取 2 个球.

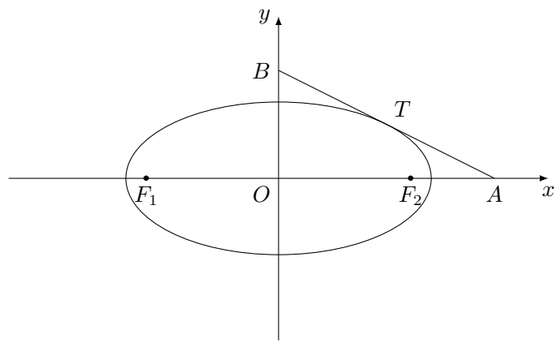
(1) 若 $n=3$, 求取到的 4 个球全是红球的概率;

(2) 若取到的 4 个球中至少有 2 个红球的概率为 $\dfrac{3}{4}$, 求 n.

19. 如图, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1$ $(a>b>0)$ 与过点 A $(2,0)$, B $(0,1)$ 的直线有且只有一个公共点 T, 且椭圆的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆方程;

(2) 设 F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, 求证: $|AT|^2=\dfrac{1}{2}|AF_1|\cdot|AF_2|$.



20. 设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$, 若 $a+b+c=0$, $f(0)f(1)>0$, 求证:

(1) 方程 $f(x)=0$ 有实根;

(2) $-2<\dfrac{b}{a}<-1$;

(3) 设 x_1, x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个实根, 则 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|x_1-x_2|<\dfrac{2}{3}$.

2007 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

1. 下列函数中, 反函数是其自身的函数为 （ ）

(A) $f(x)=x^2,\ x\in[0,+\infty)$　　(B) $f(x)=x^3,\ x\in(-\infty,+\infty)$

(C) $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in(-\infty,+\infty)$　　(D) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$

2. 设 l, m, n 均为直线, 其中 m, n 在平面 α 内, "$l\perp\alpha$"是"$l\perp m$ 且 $l\perp n$" 的 （ ）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

3. 若对任意 $x\in\mathbf{R}$, 不等式 $|x|\geqslant ax$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 （ ）

(A) $a<-1$　　(B) $|a|\leqslant 1$　　(C) $|a|<1$　　(D) $a\geqslant 1$

4. 若 a 为实数, $\dfrac{2+a\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}\mathrm{i}}=-\sqrt{2}\mathrm{i}$, 则 a 等于 （ ）

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $-\sqrt{2}$　　(C) $2\sqrt{2}$　　(D) $-2\sqrt{2}$

5. 若 $A=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,2\leqslant 2^{2-x}<8\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\,||\log_2 x|>1\}$, 则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$ 的元素个数为 （ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

6. 函数 $f(x)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象为 C,

① 图象 C 关于直线 $x=\dfrac{11}{12}\pi$ 对称;

② 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 内是增函数;

③ 由 $y=3\sin 2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度可以得到图象 C.

以上三个论断中, 正确论断的个数是 （ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

7. 如果点 P 在平面区域 $\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0\\ x-2y+1\leqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\end{cases}$ 上, 点 Q 在曲线 $x^2+(y+2)^2=1$ 上, 那么 $|PQ|$ 的最小值为 （ ）

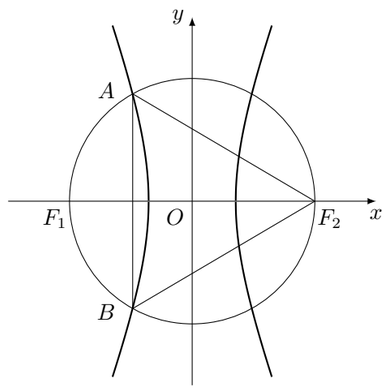
(A) $\sqrt{5}-1$　　(B) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}-1$　　(C) $2\sqrt{2}-1$　　(D) $\sqrt{2}-1$

8. 半径为 1 的球面上的四点 A, B, C, D 是正四面体的顶点, 则 A 与 B 两点间的球面距离为 （ ）

(A) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　(B) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

(C) $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$　　(D) $\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

9. 如图, F_1 和 F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{r^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两个焦点, A 和 B 是以 O 为圆心, 以 $|OF_1|$ 为半径的圆与该双曲线左支的两个交点, 且 $\triangle F_2AB$ 是等边三角形, 则双曲线的离心率为 （ ）



(A) $\sqrt{3}$　　(B) $\sqrt{5}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(D) $1+\sqrt{3}$

10. 以 $\Phi(x)$ 表示标准正态总体在区间 $(-\infty,x)$ 内取值的概率, 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则概率 $P(|\xi-\mu|<\sigma)$ 等于 （ ）

(A) $\Phi(\mu+\sigma)-\Phi(\mu-\sigma)$　　(B) $\Phi(1)-\Phi(-1)$

(C) $\Phi\left(\dfrac{1-\mu}{\sigma}\right)$　　(D) $2\Phi(\mu+\sigma)$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数, T 是它的一个正周期. 若将方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-T,T]$ 上的根的个数记为 n, 则 n 可能为 （ ）

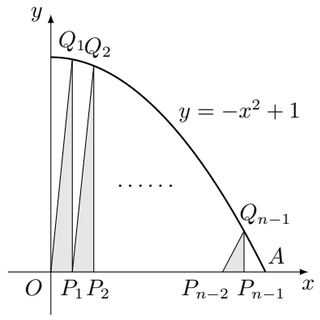
(A) 0　　(B) 1　　(C) 3　　(D) 5

二、填空题

12. 若 $\left(2x^3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中含有常数项, 则最小的正整数 n 等于_____.

13. 在四面体 $O-ABC$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, D 为 BC 的中点, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{OE}=$_____. (用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表示)

14. 如图, 抛物线 $y=-x^2+1$ 与 x 轴的正半轴交于点 A, 将线段 OA 的 n 等分点从左至右依次记为 P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1}, 过这些分点分别作 x 轴的垂线, 与抛物线的交点依次为 Q_1, Q_2, $\cdots$, Q_{n-1}, 从而得到 $n-1$ 个直角三角形 $\triangle Q_1OP_1$, $\triangle Q_2P_1P_2$, $\cdots$, $\triangle Q_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$. 当 $n\to\infty$ 时, 这些三角形的面积之和的极限为_____.



15. 在正方体上任意选择 4 个顶点, 它们可能是如下各种几何形体的 4 个顶点, 这些几何形体是_____. (写出所有正确结论的编号)

① 矩形;

② 不是矩形的平行四边形;

③ 有三个面为等腰直角三角形, 有一个面为等边三角形的四面体;

④ 每个面都是等边三角形的四面体;

⑤ 每个面都是直角三角形的四面体.

三、解答题

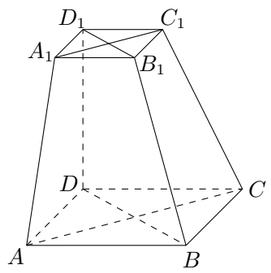
16. 已知 $0<a<\dfrac{\pi}{4}$, β 为 $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的最小正周期, $\boldsymbol{a}=\left(\tan\left(a+\dfrac{1}{4}\beta\right),-1\right)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,2)$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m$. 求 $\dfrac{2\cos^2\alpha+\sin 2(\alpha+\beta)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ 的值.

17. 如图, 在六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是边长为 1 的正方形, $DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$, $DD_1=2$.

(1) 求证: A_1C_1 与 AC 共面, B_1D_1 与 BD 共面;

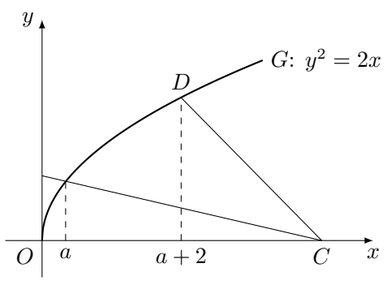
(2) 求证: 平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 B_1BDD_1;

(3) 求二面角 $A-BB_1-C$ 的大小. (用反三角函数值表示)



18. 设 $a \geqslant 0$, $f(x)=x-1-\ln^2 x+2a\ln x$ $(x>0)$.
(1) 令 $F(x)=xf'(x)$, 讨论 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性并求极值;
(2) 求证: 当 $x>1$ 时, 恒有 $x>\ln^2 x-2a\ln x+1$.

19. 如图, 曲线 G 的方程为 $y^2=2x$ $(y\geqslant 0)$. 以原点为圆心, 以 t $(t>0)$ 为半径的圆分别与曲线 G 和 y 轴的正半轴相交于点 A 与点 B. 直线 AB 与 x 轴相交于点 C.
(1) 求点 A 的横坐标 a 与点 C 的横坐标 c 的关系式;
(2) 设曲线 G 上点 D 的横坐标为 $a+2$, 求证: 直线 CD 的斜率为定值.



20. 在医学生物学试验中, 经常以果蝇作为试验对象, 一个关有 6 只果蝇的笼子里, 不慎混入了两只苍蝇 (此时笼内共有 8 只蝇子: 6 只果蝇和 2 只苍蝇), 只好把笼子打开一个小孔, 让蝇子一只一只地往外飞, 直到两只苍蝇都飞出, 再关闭小孔. 以 ξ 表示笼内还剩下的果蝇的只数.
(1) 写出 ξ 的分布列 (不要求写出计算过程);
(2) 求数学期望 $E\xi$;
(3) 求概率 $P(\xi\geqslant E\xi)$.

21. 某国采用养老储备金制度. 公民在就业的第一年就交纳养老储备金, 数目为 a_1, 以后每年交纳的数目均比上一年增加 d $(d>0)$, 因此, 历年所交纳的储务金数目 a_1, a_2, $\cdots$ 是一个公差为 d 的等差数列, 与此同时, 国家给予优惠的计息政策, 不仅采用固定利率, 而且计算复利. 这就是说, 如果固定年利率为 r $(r>0)$, 那么, 在第 n 年末, 第一年所交纳的储备金就变为 $a_1(1+r)^{n-1}$, 第二年所交纳的储备金就变为 $a_2(1+r)^{n-2}$, $\cdots$. 以 T_n 表示到第 n 年末所累计的储备金总额.
(1) 写出 T_n 与 T_{n-1} $(n\geqslant 2)$ 的递推关系式;
(2) 求证: $T_n=A_n+B_n$, 其中 $\{A_n\}$ 是一个等比数列, $\{B_n\}$ 是一个等差数列.

2007 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

1. 若 $A=\{x|x^2=1\}$, $B=\{x|x^2-2x-3=0\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{3\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\varnothing$ (D) $\{-1\}$

2. 椭圆 $x^2+4y^2=1$ 的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_2=1$, $a_3=3$, $S_4=$ （ ）

(A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) 6

4. 下列函数中, 反函数是其自身的函数为 （ ）

(A) $f(x)=x^2$, $x\in[0,+\infty)$ (B) $f(x)=x^3$, $x\in(-\infty,+\infty)$

(C) $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ (D) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

5. 若圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 的圆心到直线 $x-y+a=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则 a 的值为 （ ）

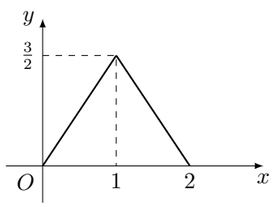
(A) -2 或 2 (B) $\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$ (C) 2 或 0 (D) -2 或 0

6. 设 l, m, n 均为直线, 其中 m, n 在平面 α 内, "$l\perp\alpha$"是"$l\perp m$ 且 $l\perp n$" 的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 图中的图象所表示的函数的解析式为 （ ）



(A) $y=\dfrac{3}{2}|x-1|$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ (B) $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}|x-1|$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

(C) $y=\dfrac{3}{2}-|x-1|$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ (D) $y=1-|x-1|$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

8. 设 $a>1$, 且 $m=\log_a(a^2+1)$, $n=\log_a(a-1)$, $p=\log_a(2a)$, 则 m, n, p 的大小关系为 （ ）

(A) $n>m>p$ (B) $m>p>n$ (C) $m>n>p$ (D) $p>m>n$

9. 如果点 P 在平面区域 $\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\\ 2y-1\geqslant 0\end{cases}$ 上, 点 Q 在曲线 $x^2+(y+2)^2=1$ 上, 那么 $|PQ|$ 的最小值为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}-1$ (C) $2\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{2}-1$

10. 把边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角, 折成直二面角后, 在 A, B, C, D 四点所在的球面上, B 与 D 两点之间的球面距离为 （ ）

(A) $\sqrt{2}\pi$ (B) π (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{3}$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数, T 是它的一个正周期. 若将方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-T,T]$ 上的根的个数记为 n, 则 n 可能为 （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5

二、填空题

12. 已知 $(1-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$, 则 $(a_0+a_2+a_4)(a_1+a_3+a_5)$ 的值等于_____.

13. 在四面体 $O-ABC$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, D 为 BC 的中点, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{OE}=$_____. (用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表示)

14. 在正方体上任意选择两条棱, 则这两条棱相互平行的概率为_____.

15. 函数 $f(x)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象为 C, 如下结论中正确的是_____. (写出所有正确结论的编号)

① 图象 C 关于直线 $x=\dfrac{11}{12}\pi$ 对称;

② 图象 C 关于点 $\left(\dfrac{2\pi}{3},0\right)$ 对称;

③ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 内是增函数;

④ 由 $y=3\sin 2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度可以得到图象 C.

三、解答题

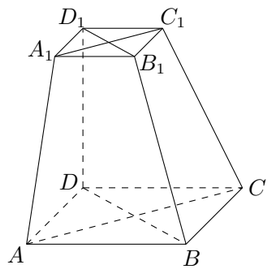
16. 解不等式: $(|3x-1|-1)(\sin x-2)>0$.

17. 如图, 在六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是边长为 1 的正方形, $DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$, $DD_1=2$.

(1) 求证: A_1C_1 与 AC 共面, B_1D_1 与 BD 共面;

(2) 求证: 平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 B_1BDD_1;

(3) 求二面角 $A-BB_1-C$ 的大小. (用反三角函数值表示)



18. 设 F 是抛物线 G: $x^2=4y$ 的焦点.

(1) 过点 $P(0,-4)$ 作抛物线 G 的切线, 求切线方程;

(2) 设 A, B 为抛物线 G 上异于原点的两点, 且满足 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$, 延长 AF, BF 分别交抛物线 G 于点 C, D, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

19. 在医学生物学试验中, 经常以果蝇作为试验对象, 一个关有 6 只果蝇的笼子里, 不慎混入了两只苍蝇 (此时笼内共有 8 只蝇子: 6 只果蝇和 2 只苍蝇), 只好把笼子打开一个小孔, 让蝇子一只一只地往外飞, 直到两只苍蝇都飞出, 再关闭小孔.
(1) 求笼内恰好剩下 1 只果蝇的概率;
(2) 求笼内至少剩下 5 只果蝇的概率.

20. 设函数 $f(x)=-\cos^2 x-4t\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+4t^3+t^2-3t+4$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $|t|\leqslant 1$. 将 $f(x)$ 的最小值记为 $g(t)$.
(1) 求 $g(t)$ 的表达式;
(2) 讨论 $g(t)$ 在区间 $(-1,1)$ 内的单调性并求极值.

21. 某国采用养老储备金制度. 公民在就业的第一年就交纳养老储备金, 数目为 a_1, 以后每年交纳的数目均比上一年增加 d ($d>0$), 因此, 历年所交纳的储务金数目 a_1, a_2, $\cdots$ 是一个公差为 d 的等差数列, 与此同时, 国家给予优惠的计息政策, 不仅采用固定利率, 而且计算复利. 这就是说, 如果固定年利率为 r ($r>0$), 那么, 在第 n 年末, 第一年所交纳的储备金就变为 $a_1(1+r)^{n-1}$, 第二年所交纳的储备金就变为 $a_2(1+r)^{n-2}$, $\cdots$. 以 T_n 表示到第 n 年末所累计的储备金总额.
(1) 写出 T_n 与 T_{n-1} ($n\geqslant 2$) 的递推关系式;
(2) 求证: $T_n=A_n+B_n$, 其中 $\{A_n\}$ 是一个等比数列, $\{B_n\}$ 是一个等差数列.

2007 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$, 那么角 θ 是 （ ）

(A) 第一或第二象限角　(B) 第二或第三象限角

(C) 第三或第四象限角　(D) 第一或第四象限角

2. 函数 $f(x)=3^x$ $(0<x\leqslant 2)$ 的反函数的定义域为 （ ）

(A) $(0,+\infty)$　(B) $(1,9]$　(C) $(0,1)$　(D) $[9,+\infty)$

3. 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β 的一个充分条件是 （ ）

(A) 存在一条直线 a, $a\parallel\alpha$, $a\parallel\beta$

(B) 存在一条直线 a, $a\subset\alpha$, $a\parallel\beta$

(C) 存在两条平行直线 a, b, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel\beta$, $b\parallel\alpha$

(D) 存在两条异面直线 a, b, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel\beta$, $b\parallel\alpha$

4. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, D 为 BC 边中点, 且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, 那么 （ ）

(A) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$　(B) $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$　(C) $\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{OD}$　(D) $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

5. 记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照, 要求排成一排, 2 位老人相邻但不排在两端, 不同的排法共有 （ ）

(A) 1440 种　(B) 960 种　(C) 720 种　(D) 480 种

6. 若不等式组 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ 2x+y\leqslant 2\\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a\end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $a\geqslant\dfrac{4}{3}$　(B) $0<a\leqslant 1$

(C) $1\leqslant a\leqslant\dfrac{4}{3}$　(D) $0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\dfrac{4}{3}$

7. 如果正数 a, b, c, d 满足 $a+b=cd=4$, 那么 （ ）

(A) $ab\leqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一

(B) $ab\geqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一

(C) $ab\leqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一

(D) $ab\geqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一

8. 对于函数① $f(x)=\lg(|x-2|+1)$, ② $f(x)=(x-2)^2$, ③ $f(x)=\cos(x+2)$, 判断如下三个命题的真假:

命题甲: $f(x+2)$ 是偶函数;

命题乙: $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是减函数, 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数;

命题丙: $f(x+2)-f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.

能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是 （ ）

(A) ①③　(B) ①②　(C) ③　(D) ②

二、填空题

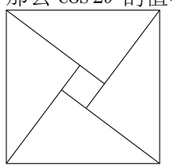
9. $\dfrac{2}{(1+\mathrm{i})^2}=$_____.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-10n$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则此数列的通项公式为_____; 数列 $\{na_n\}$ 中数值最小的项是第_____项.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A=\dfrac{1}{3}$, $C=150^\circ$, $BC=1$, 则 $AB=$_____.

12. 已知集合 $A=\{x||x-a|\leqslant 1\}$, $B=\{x|x^2-5x+4\geqslant 0\}$. 若 $A\bigcap B=\varnothing$, 则实数 a 的取值范围是_____.

13. 2002 年在北京召开的国际数学家大会, 会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的. 弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形 (如图). 如果小正方形的面积为 1, 大正方形的面积为 25, 直角三角形中较小的锐角为 θ, 那么 $\cos 2\theta$ 的值等于_____.



14. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为_____; 满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的 x 的值是_____.

三、解答题

15. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+cn$ (c 是常数, $n=1,2,3,\cdots$), 且 a_1, a_2, a_3 成公比不为 1 的等比数列.

(1) 求 c 的值;

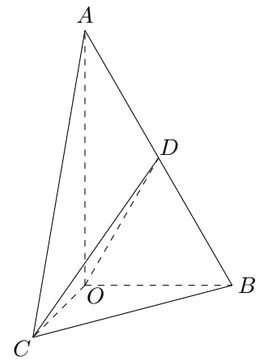
(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

16. 如图, 在 Rt$\triangle AOB$ 中, $\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$, 斜边 $AB=4$. Rt$\triangle AOC$ 可以通过 Rt$\triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到, 且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角. 动点 D 的斜边 AB 上.

(1) 求证: 平面 $COD\perp$ 平面 AOB;

(2) 当 D 为 AB 的中点时, 求异面直线 AO 与 CD 所成角的大小;

(3) 求 CD 与平面 AOB 所成角的最大值.



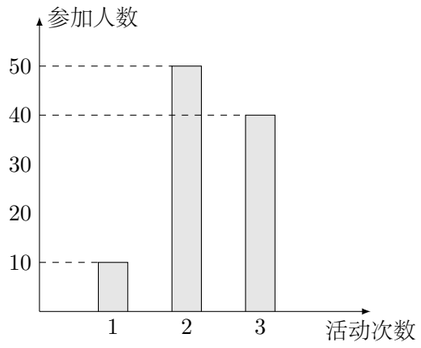
17. 矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $M(2,0)$, AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$, 点 $T(-1,1)$ 在 AD 边所在直线上.

(1) 求 AD 边所在直线的方程;

(2) 求矩形 $ABCD$ 外接圆的方程;

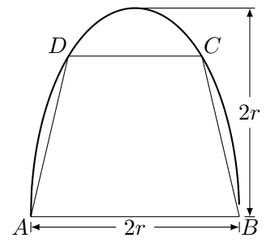
(3) 若动圆 P 过点 $N(-2,0)$, 且与矩形 $ABCD$ 的外接圆外切, 求动圆 P 的圆心的轨迹方程.

18. 某中学号召学生在今年春节期间至少参加一次社会公益活动 (以下简称活动). 该校合唱团共有 100 名学生, 他们参加活动的次数统计如图所示.



(1) 求合唱团学生参加活动的人均次数;
(2) 从合唱团中任意选两名学生, 求他们参加活动次数恰好相等的概率;
(3) 从合唱团中任选两名学生, 用 ξ 表示这两人参加活动次数之差的绝对值, 求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, 有一块半椭圆形钢板, 其半轴长为 $2r$, 短半轴长为 r, 计划将此钢板切割成等腰梯形的形状, 下底 AB 是半椭圆的短轴, 上底 CD 的端点在椭圆上, 记 $CD=2x$, 梯形面积为 S.
(1) 求面积 S 以 x 为自变量的函数式, 并写出其定义域;
(2) 求面积 S 的最大值.



20. 已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ $(k\geqslant 2)$, 其中 $a_i\in\mathbf{Z}$ $(i=1,2,\cdots,k)$. 由 A 中的元素构成两个相应的集合: $S=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a+b\in A\}$; $T=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a-b\in A\}$, 其中 (a,b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n. 若对于任意的 $a\in A$, 总有 $-a\notin A$, 则称集合 A 具有性质 P.
(1) 检验集合 $\{0,1,2,3\}$ 与 $\{-1,2,3\}$ 是否具有性质 P, 并对其中具有性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T;
(2) 对任何具有性质 P 的集合 A, 证明: $n\leqslant\dfrac{k(k-1)}{2}$;
(3) 判断 m 和 n 的大小关系, 并证明你的结论.

2007 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$, 那么角 θ 是 （ ）

(A) 第一或第二象限角　(B) 第二或第三象限角

(C) 第三或第四象限角　(D) 第一或第四象限角

2. 函数 $f(x)=3^x$ $(0<x\leqslant 2)$ 的反函数的定义域为 （ ）

(A) $(0,+\infty)$　(B) $(1,9]$　(C) $(0,1)$　(D) $[9,+\infty)$

3. 函数 $f(x)=\sin 2x-\cos 2x$ 的最小正周期是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) π　(C) 2π　(D) 4π

4. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦点为 F_1, F_2, 两条准线与 x 轴的交点分别为 M, N. 若 $|MN|\leqslant 2|F_1F_2|$, 则该椭圆离心率的取值范围是 （ ）

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　(B) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　(C) $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　(D) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

5. 某城市的汽车牌照号码由 2 个英文字母后接 4 个数字组成, 其中 4 个数字互不相同的牌照号码共有 （ ）

(A) $(C_{26}^1)^2A_{10}^4$ 个　(B) $A_{26}^2A_{10}^4$ 个　(C) $(C_{26}^1)^2 10^4$ 个　(D) $A_{26}^2 10^4$ 个

6. 若不等式组 $\begin{cases}x-y+5\geqslant 0\\ y\geqslant a\\ 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $a<5$　(B) $a\geqslant 7$　(C) $5\leqslant a<7$　(D) $a<5$ 或 $a\geqslant 7$

7. 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β 的一个充分条件是 （ ）

(A) 存在一条直线 a, $a\parallel\alpha$, $a\parallel\beta$

(B) 存在一条直线 a, $a\subset\alpha$, $a\parallel\beta$

(C) 存在两条平行直线 a, b, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel\beta$, $b\parallel\alpha$

(D) 存在两条异面直线 a, b, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel\beta$, $b\parallel\alpha$

8. 对于函数① $f(x)=|x+2|$, ② $f(x)=(x-2)^2$, ③ $f(x)=\cos(x-2)$, 判断如下两个命题的真假:

命题甲: $f(x+2)$ 是偶函数;

命题乙: $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是减函数, 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数;

能使命题甲、乙均为真的所有函数的序号是 （ ）

(A) ①②　(B) ①③　(C) ②　(D) ③

二、填空题

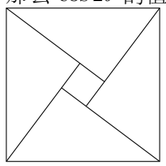
9. $f'(x)$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+2x+1$ 的导函数, 则 $f'(-1)$ 的值是_____.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-10n$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则此数列的通项公式为_____.

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$, $\boldsymbol{b}=(1,1)$. 若向量 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$, 则实数 λ 的值是_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A=\dfrac{1}{3}$, $C=150^\circ$, $BC=1$, 则 $AB=$_____.

13. 2002 年在北京召开的国际数学家大会, 会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的. 弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形 (如图). 如果小正方形的面积为 1, 大正方形的面积为 25, 直角三角形中较小的锐角为 θ, 那么 $\cos 2\theta$ 的值等于_____.



14. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	2	1	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为_____; 当 $g[f(x)]=2$ 时, $x=$_____.

三、解答题

15. 记关于 x 的不等式 $\dfrac{x-a}{x+1}<0$ 的解集为 P, 不等式 $|x-1|\leqslant 1$ 的解集为 Q.

(1) 若 $a=3$, 求 P;

(2) 若 $Q\subseteq P$, 求正数 a 的取值范围.

16. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+cn$ (c 是常数, $n=1,2,3,\cdots$), 且 a_1, a_2, a_3 成公比不为 1 的等比数列.

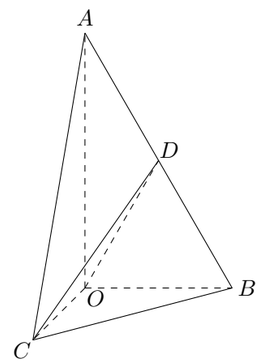
(1) 求 c 的值;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

17. 如图, 在 Rt$\triangle AOB$ 中, $\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$, 斜边 $AB=4$. Rt$\triangle AOC$ 可以通过 Rt$\triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到, 且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角. D 是 AB 的中点.

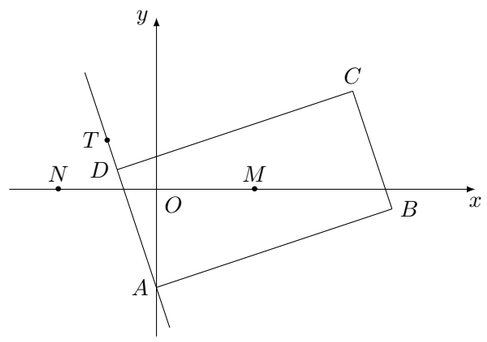
(1) 求证: 平面 $COD\perp$ 平面 AOB;

(2) 求异面直线 AO 与 CD 所成角的大小.



18. 某条公共汽车线路沿线共有 11 个车站 (包括起点站和终点站). 在起点站开出的一辆公共汽车上有 6 位乘客, 假设每位乘客在起点站之外的各个车站下车是等可能的. 求:
(1) 这 6 位乘客在互不相同的车站下车的概率;
(2) 这 6 位乘客中恰有 3 人在终点站下车的概率;

19. 如图, 矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $M(2,0)$, AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$, 点 $T(-1,1)$ 在 AD 边所在直线上.
(1) 求 AD 边所在直线的方程;
(2) 求矩形 $ABCD$ 外接圆的方程;
(3) 若动圆 P 过点 $N(-2,0)$, 且与矩形 $ABCD$ 的外接圆外切, 求动圆 P 的圆心的轨迹方程.



20. 已知函数 $y=kx$ 与 $y=x^2+2$ $(x\geqslant 0)$ 的图象相交于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$. l_1, l_2 分别是 $y=x^2+2$ $(x\geqslant 0)$ 的图象在 A, B 两点的切线, M, N 分别是 l_1, l_2 与 x 轴的交点.
(1) 求 k 的取值范围;
(2) 设 t 为点 M 的横坐标, 当 $x_1<x_2$ 时, 写出 t 以 x_1 为自变量的函数式, 并求其定义域和值域;
(3) 试比较 $|OM|$ 与 $|ON|$ 的大小, 并说明理由 (O 是坐标原点).

2007 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和 $S_3=9$ 且 $a_1=1$, 则 a_2 等于 （ ）

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

2. 命题“若 $x^2<1$, 则 $-1<x<1$”的逆否命题是 （ ）

(A) 若 $x^2\geqslant 1$, 则 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$ (B) 若 $-1<x<1$, 则 $x^2<1$

(C) 若 $x>1$ 或 $x<-1$, 则 $x^2>1$ (D) 若 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$, 则 $x^2\geqslant 1$

3. 若三个平面两两相交, 且三条交线互相平行, 则这三个平面把空间分成( )

(A) 5 部分 (B) 6 部分 (C) 7 部分 (D) 8 部分

4. 若 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 64, 则展开式的常数项为（ ）

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 120

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{3}$, $A=45°$, $C=75°$, 则 $BC=$ （ ）

(A) $3-\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $3+\sqrt{3}$

6. 从 5 张 100 元, 3 张 200 元, 2 张 300 元的奥运预赛门票中任取 3 张, 则所取 3 张中至少有 2 张价格相同的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{79}{120}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{23}{24}$

7. 若 a 是 $1+2b$ 与 $1-2b$ 的等比中项, 则 $\dfrac{2ab}{|a|+2|b|}$ 的最大值为 （ ）

(A) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

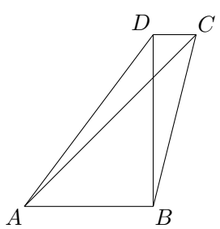
8. 设正数 a, b 满足 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax-b)=4$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}+ab^{n-1}}{a^{n-1}+2b^n}=$ （ ）

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

9. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 上为减函数, 且函数 $y=f(x+8)$ 为偶函数, 则 （ ）

(A) $f(6)>f(7)$ (B) $f(6)>f(9)$ (C) $f(7)>f(9)$ (D) $f(7)>f(10)$

10. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|=4$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|=4$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$, 则 $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为（ ）



(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$

二、填空题

11. 复数 $\dfrac{2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}^3}$ 的虚部为_____.

12. 已知 x, y 满足 $\begin{cases}x-y\leqslant 1\\ 2x+y\leqslant 4\\ x\geqslant 1\end{cases}$, 则函数 $z=x+3y$ 的最大值是_____.

13. 若函数 $f(x)=\sqrt{2^{x^2+2ax-a}-1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围为_____.

14. 设 $\{a_n\}$ 为公比 $q>1$ 的等比数列, 若 a_{2004} 和 a_{2006} 是方程 $4x^2-8x+3=0$ 的两根, 则 $a_{2006}+a_{2007}=$_____.

15. 某校要求每位学生从 7 门课程中选修 4 门, 其中甲、乙两门课程不能都选, 则不同的选课方案有_____种. (用数字作答)

16. 过双曲线 $x^2-y^2=4$ 的右焦点 F 作倾斜角为 $105°$ 的直线, 交双曲线于 P、Q 两点, 则 $|FP|\cdot|FQ|$ 的值为_____.

三、解答题

17. 设 $f(x)=6\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值及最小正周期;

(2) 若锐角 α 满足 $f(\alpha)=3-2\sqrt{3}$, 求 $\tan\dfrac{4}{5}\alpha$ 的值.

18. 某单位有三辆汽车参加某种事故保险. 单位年初向保险公司缴纳每辆 900 元的保险金. 对在一年内发生此种事故的每辆汽车, 单位可获 9000 元的赔偿 (假设每辆车最多只赔偿一次). 设这三辆车在一年内发生此种事故的概率分别为 $\dfrac{1}{9}$、$\dfrac{1}{10}$、$\dfrac{1}{11}$, 且各车是否发生事故相互独立. 求一年内该单位在此保险中:

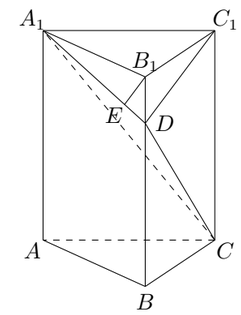
(1) 获赔的概率;

(2) 获赔金额 ξ 的分布列与期望.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=2$, $AB=1$, $\angle ABC=90°$; 点 D、E 分别在 BB_1、A_1D 上, 且 $B_1E\perp A_1D$, 四棱锥 $C-ABDA_1$ 与直三棱柱的体积之比为 $3:5$.

(1) 求异面直线 DE 与 B_1C_1 的距离;

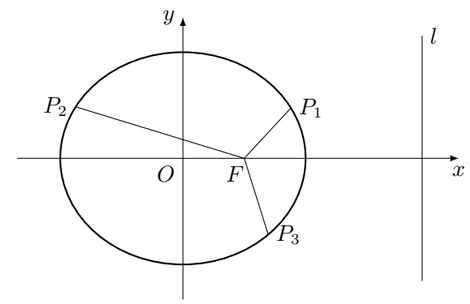
(2) 若 $BC=\sqrt{2}$, 求二面角 $A_1-DC_1-B_1$ 的平面角的正切值.



20. 已知函数 $f(x)=ax^4\ln x+bx^4-c\ (x>0)$ 在 $x=1$ 处取得极值 $-3-c$, 其中 a, b, c 为常数.
(1) 试确定 a, b 的值;
(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;
(3) 若对任意 $x>0$, 不等式 $f(x)\geqslant -2c^2$ 恒成立, 求 c 的取值范围.

21. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_1>1$, 且 $6S_n=(a_n+1)(a_n+2)$, $n\in\mathbf{N}_+$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n\left(2^{b_n}-1\right)=1$, 并记 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $3T_n+1>\log_2(a_n+3)$, $n\in\mathbf{N}_+$.

22. 如图, 中心在原点 O 的椭圆的右焦点为 $F(3,0)$, 右准线 l 的方程为: $x=12$.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 在椭圆上任取三个不同点 P_1、P_2、P_3, 使 $\angle P_1FP_2=\angle P_2FP_3=\angle P_3FP_1$, 证明 $\dfrac{1}{|FP_1|}+\dfrac{1}{|FP_2|}+\dfrac{1}{|FP_3|}$ 为定值, 并求此定值.



2007 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=8$, $a_1=64$, 则公比 q 为 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8

2. 设全集 $U=\{a,b,c,d\}$, $A=\{a,c\}$, $B=\{b\}$, 则 $A\cap(\complement_U B)=$ （ ）

(A) $\varnothing$ (B) $\{a\}$ (C) $\{c\}$ (D) $\{a,c\}$

3. 垂直于同一平面的两条直线 （ ）

(A) 平行 (B) 垂直 (C) 相交 (D) 异面

4. $(2x-1)^6$ 展开式中 x^2 的系数为 （ ）

(A) 15 (B) 60 (C) 120 (D) 240

5. “$-1<x<1$”是“$x^2<1$”的 （ ）

(A) 充分必要条件 (B) 充分但不必要条件

(C) 必要但不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 下列各式中, 值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的是 （ ）

(A) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$ (B) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$

(C) $2\sin^2 15^\circ-1$ (D) $\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ$

7. 从 5 张 100 元, 3 张 200 元, 2 张 300 元的奥运预赛门票中任取 3 张, 则所取 3 张中至少有 2 张价格相同的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{79}{120}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{23}{24}$

8. 若直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 P、Q 两点, 且 $\angle POQ=120^\circ$ (其中 O 为原点), 则 k 的值为 （ ）

(A) $-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$

9. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(4,6)$, $\overrightarrow{OB}=(3,5)$, 且 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{OB}$, 则向量 $\overrightarrow{OC}=$ （ ）

(A) $\left(-\dfrac{3}{7},\dfrac{2}{7}\right)$ (B) $\left(-\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{21}\right)$ (C) $\left(\dfrac{3}{7},-\dfrac{2}{7}\right)$ (D) $\left(\dfrac{2}{7},-\dfrac{4}{21}\right)$

10. 设 $P(3,1)$ 为二次函数 $f(x)=ax^2-2ax+b$ $(x\geqslant 1)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象的一个交点, 则 （ ）

(A) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{5}{2}$ (B) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{5}{2}$

(C) $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{5}{2}$ (D) $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{5}{2}$

11. 设 $\sqrt{3}b$ 是 $1-a$ 和 $1+a$ 的等比中项, 则 $a+3b$ 的最大值为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 已知以 $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ 为焦点的椭圆与直线 $x+\sqrt{3}y+4=0$ 有且仅有一个交点, 则椭圆的长轴长为 （ ）

(A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{6}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $4\sqrt{2}$

二、填空题

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1$, $BC=2$, $B=60^\circ$, 则 $AC=$_____.

14. 已知 $\begin{cases}2x+3y\leqslant 6\\ x-y\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-y$ 的最大值为_____.

15. 要排出某班一天中语文、数学、政治、英语、体育、艺术 6 门课各一节的课程表, 要求数学课排在前 3 节, 英语课不排在第 6 节, 则不同的排法种数为_____. (以数字作答)

16. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x}+2^{\sqrt{x^2-5x+4}}$ 的最小值为_____.

三、解答题

17. 设甲、乙两人每次射击命中目标的概率分别为 $\dfrac{3}{4}$ 和 $\dfrac{4}{5}$, 且各次射击相互独立.

(1) 若甲、乙各射击一次, 求甲命中但乙未命中目标的概率;

(2) 若甲、乙各射击两次, 求两人命中目标的次数相等的概率.

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

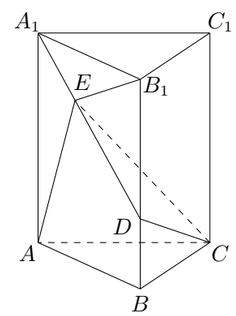
(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 若角 α 在第一象限且 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, 求 $f(\alpha)$.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=1$, $BC=\dfrac{3}{2}$, $AA_1=2$; 点 D 在棱 BB_1 上, $BD=\dfrac{1}{3}BB_1$; $B_1E\perp A_1D$, 垂足为 E. 求:

(1) 求异面直线 A_1D 与 B_1C_1 的距离;

(2) 四棱锥 $C-ABDE$ 的体积.

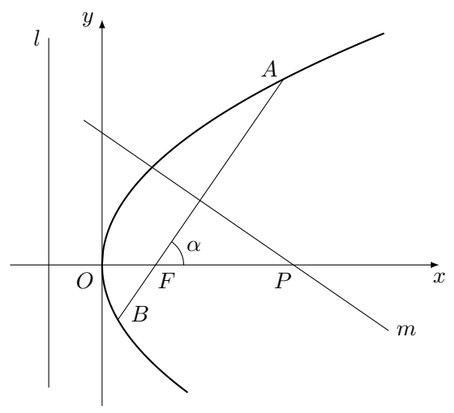


20. 用长为 18 m 的钢条围成一个长方体形状的框架, 要求长方体的长与宽之比为 $2:1$, 问该长方体的长、宽、高各为多少时, 其体积最大? 最大体积是多少?

21. 如图, 倾斜角为 α 的直线经过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点 F, 且与抛物线交于 A、B 两点.

(1) 求抛物线的焦点 F 的坐标及准线 l 方程;

(2) 若 α 为锐角, 作线段 AB 的垂直平分线 m 交 x 轴于点 P, 证明 $|FP|-|FP|\cos 2\alpha$ 为定值, 并求此定值.



22. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_1>1$, 且 $6S_n=(a_n+1)(a_n+2)$, $n\in\mathbf{N}_+$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n\left(2^{b_n}-1\right)=1$, 并记 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $3T_n+1>\log_2(a_n+3)$, $n\in\mathbf{N}_+$.

2007 年普通高等学校招生考试（大纲卷 I）

理科数学

一、选择题

1. α 是第四象限角, $\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$, 则 $\sin\alpha=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{5}{13}$ (D) $-\dfrac{5}{13}$

2. 设 a 是实数, 且 $\dfrac{a}{1+\mathrm{i}}+\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ 是实数, 则 $a=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-5,6)$, $\boldsymbol{b}=(6,5)$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ （ ）

(A) 垂直 (B) 不垂直也不平行

(C) 平行且同向 (D) 平行且反向

4. 已知双曲线的离心率为 2, 焦点是 $(-4,0)$, $(4,0)$, 则双曲线方程为 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{6}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{10}=1$

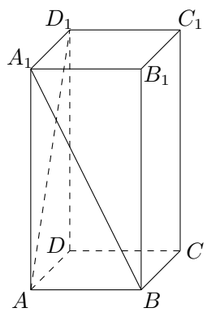
5. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$, 则 $b-a=$ （ ）

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

6. 下面给出的四个点中, 到直线 $x-y+1=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且位于 $\begin{cases}x+y-1<0\\x-y+1>0\end{cases}$ 表示的平面区域内的点是 （ ）

(A) $(1,1)$ (B) $(-1,1)$ (C) $(-1,-1)$ (D) $(1,-1)$

7. 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, 则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 （ ）



(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{2}{5}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

8. 设 $a>1$, 函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\dfrac{1}{2}$, 则 $a=$ （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4

9. $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $h(x)=f(x)+g(x)$, 则“$f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数”是“$h(x)$ 为偶函数”的 （ ）

(A) 充要条件 (B) 充分而不必要的条件

(C) 必要而不充分的条件 (D) 既不充分也不必要的条件

10. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中, 常数项为 15, 则 $n=$ （ ）

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

11. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l, 经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A, $AK\perp l$, 垂足为 K, 且 $\triangle AKF$ 的面积是 （ ）

(A) 4 (B) $3\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 8

12. 函数 $f(x)=\cos^2x-2\cos^2\dfrac{x}{2}$ 的一个单调增区间是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ (D) $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$

二、填空题

13. 从班委会 5 名成员中选出 3 名, 分别担任班级学习委员、文娱委员与体育委员, 其中甲、乙二人不能担任文娱委员, 则不同的选法共有_____种. (用数字作答)

14. 函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\log_3 x$ $(x>0)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 则 $f(x)=$_____.

15. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n, 已知 S_1, $2S_2$, $3S_3$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比为_____.

16. 一个等腰直角三角形的三个顶点分别在正三棱柱的三条侧棱上. 已知正三棱柱的底面边长为 2, 则该三角形的斜边长为_____.

三、解答题

17. 设锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $a=2b\sin A$.

(1) 求 B 的大小;

(2) 求 $\cos A+\sin C$ 的取值范围.

18. 某商场经销某商品, 根据以往资料统计, 顾客采用的付款期为 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4	5
P	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

商场经销一件该商品, 采用 1 期付款, 基利润为 200 元; 分 2 期或 3 期付款, 基利润为 250 元; 分 4 期或 5 期付款, 其利润为 300 元. η 表示经销一件该商品的利润.

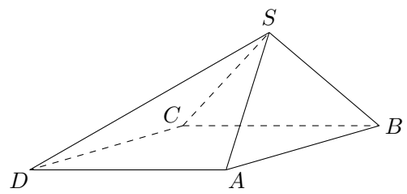
(1) 求事件 A: “购买该商品的 3 位顾客中, 至少有 1 件位采用 1 期付款的概率 $P(A)$;

(2) 求 η 的分布列及期望 $E\eta$.

19. 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, 侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$. 已知 $\angle ABC=45^\circ$, $AB=2$, $BC=2\sqrt{2}$, $SA=SB=\sqrt{3}$.

(1) 证明: $SA\perp BC$;

(2) 求直线 SD 与平面 SAB 所成角的大小.



20. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$.

(1) 证明: $f(x)$ 的导数 $f'(x)\geqslant 2$;

(2) 若对所有 $x\geqslant 0$ 都有 $f(x)\geqslant ax$, 求 a 的取值范围.

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^{2}}{3}+\dfrac{y^{2}}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_{1}、F_{2}, 过 F_{1} 的直线交椭圆于 B、D 两点, 过 F_{2} 的直线交椭圆于 A、C 两点, 且 $AC\perp BD$, 垂足为 P.

(1) 设 P 点的坐标为 (x_{0},y_{0}), 证明: $\dfrac{x_{0}^{2}}{3}+\dfrac{y_{0}^{2}}{2}<1$;

(2) 求四过形 $ABCD$ 的面积的最小值.

22. 已知数列 $\{a_{n}\}$ 中 $a_{1}=2$, $a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)(a_{n}+2)$, $n=1,2,3,\cdots$.

(1) 求 $\{a_{n}\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_{n}\}$ 中 $b_{1}=2$, $b_{n+1}=\dfrac{3b_{n}+4}{2b_{n}+3}$, $n=1,2,3,\cdots$, 证明: $\sqrt{2}<b_{n}\leqslant a_{4n-3}$, $n=1,2,3,\cdots$.

2007 年普通高等学校招生考试（大纲卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 设 $S=\{x|2x+1>0\}$, $T=\{x|3x-5<0\}$, 则 $S\cap T=$ （ ）

(A) $\varnothing$ (B) $\left\{x|x<-\frac{1}{2}\right\}$

(C) $\left\{x|x>\frac{5}{3}\right\}$ (D) $\left\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}\right\}$

2. α 是第四象限角, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, 则 $\sin\alpha=$ （ ）

(A) $\frac{5}{13}$ (B) $-\frac{5}{13}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $-\frac{5}{12}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-5,6)$, $\boldsymbol{b}=(6,5)$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ （ ）

(A) 垂直 (B) 不垂直也不平行

(C) 平行且同向 (D) 平行且反向

4. 已知双曲线的离心率为 2, 焦点是 $(-4,0)$, $(4,0)$, 则双曲线方程为 （ ）

(A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ (B) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ (C) $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ (D) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{10}=1$

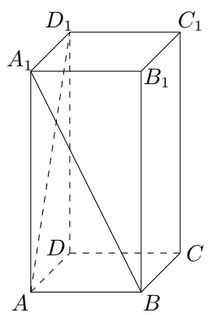
5. 甲、乙、丙 3 位同学选修课程, 从 4 门课程中, 甲选修 2 门, 乙、丙各选修 3 门, 则不同的选修方案共有 （ ）

(A) 36 种 (B) 48 种 (C) 96 种 (D) 192 种

6. 下面给出的四个点中, 位于 $\begin{cases}x+y-1<0\\x-y+1>0\end{cases}$ 表示的平面区域内的点是 （ ）

(A) $(0,2)$ (B) $(-2,0)$ (C) $(0,-2)$ (D) $(2,0)$

7. 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, 则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 （ ）



(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

8. 设 $a>1$, 函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$, 则 $a=$ （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4

9. $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $h(x)=f(x)+g(x)$, 则“$f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数”是“$h(x)$ 为偶函数”的 （ ）

(A) 充要条件 (B) 充分而不必要的条件

(C) 必要而不充分的条件 (D) 既不充分也不必要的条件

10. 函数 $y=2\cos^2 x$ 的一个单调增区间是 （ ）

(A) $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

11. 曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+x$ 在点 $\left(1,\frac{4}{3}\right)$ 处的切线与坐标轴围成的三角形面积为( )

(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

12. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l, 经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A, $AK\perp l$, 垂足为 K, 且 $\triangle AKF$ 的面积是 （ ）

(A) 4 (B) $3\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 8

二、填空题

13. 从某自动包装机包装的食盐中, 随机抽取 20 袋, 测得各袋的质量分别为(单位: g):

492	496	494	495	498	497	501	502	504	496
497	503	506	508	507	492	496	500	501	499

根据频率分布估计总体分布的原理, 该自动包装机包装的袋装食盐质量在 497.5 g ~ 501.5 g 之间的概率约为_____.

14. 函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\log_3 x$ $(x>0)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 则 $f(x)=$_____.

15. 正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长和各测棱长都为 $\sqrt{2}$, 点 S、A、B、C、D 都在同一个球面上, 则该球的体积为_____.

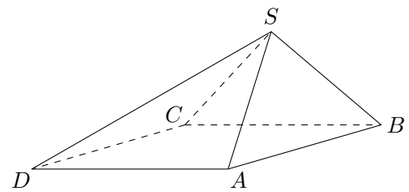
16. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n, 已知 S_1, $2S_2$, $3S_3$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比为_____.

三、解答题

17. 设锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $a=2b\sin A$.
(1) 求 B 的大小;
(2) 若 $a=3\sqrt{3}$, $c=5$, 求 b.

18. 某商场经销某商品, 顾客可采用一次性付款或分期付款购买. 根据以往资料统计, 顾客采用一次性付款的概率是 0.6. 经销一件该商品, 若顾客采用一次性付款, 商场获得利润 200 元; 若顾客采用分期付款, 商场获得利润 250 元.
(1) 求 3 位购买该商品的顾客中至少有 1 位采用一次性付款的概率;
(2) 求 3 位顾客每人购买 1 件该商品, 商场获得利润不超过 650 元的概率.

19. 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, 侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$. 已知 $\angle ABC=45^\circ$, $AB=2$, $BC=2\sqrt{2}$, $SA=SB=\sqrt{3}$.
(1) 证明: $SA\perp BC$;
(2) 求直线 SD 与平面 SAB 所成角的大小.



20. 设函数 $f(x)=2x^3+3ax^2+3bx+8c$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 时取得极值.
(1) 求 a、b 的值;
(2) 若对于任意的 $x\in[0,3]$, 都有 $f(x)<c^2$ 成立, 求 c 的取值范围.

21. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是各项都为正数的等比数列, 且 $a_1=b_1=1$, $a_3+b_5=21$, $a_5+b_3=13$.
(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

22. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 过 F_1 的直线交椭圆于 B、D 两点, 过 F_2 的直线交椭圆于 A、C 两点, 且 $AC\perp BD$, 垂足为 P.
(1) 设 P 点的坐标为 (x_0,y_0), 证明: $\dfrac{x_0^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{2}<1$;
(2) 求四过形 $ABCD$ 的面积的最小值.

2007 年普通高等学校招生考试（大纲卷 II）

理科数学

一、选择题

1. $\sin 210^\circ =$ （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $-\dfrac{1}{2}$

2. 函数 $f(x)=|\sin x|$ 的一个单调递增区间是 （　）

(A) $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$　(B) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$　(C) $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$　(D) $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$

3. 设复数 z 满足 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}$, 则 $z=$ （　）

(A) $-2+\mathrm{i}$　(B) $-2-\mathrm{i}$　(C) $2-\mathrm{i}$　(D) $2+\mathrm{i}$

4. 以下四个数中的最大者是 （　）

(A) $(\ln 2)^2$　(B) $\ln(\ln 2)$　(C) $\ln\sqrt{2}$　(D) $\ln 2$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda=$ （　）

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $-\dfrac{1}{3}$　(D) $-\dfrac{2}{3}$

6. 不等式 $\dfrac{x-1}{x^2-4}>0$ 的解集为 （　）

(A) $(-2,1)$　(B) $(2,+\infty)$

(C) $(-2,1)\cup(2,+\infty)$　(D) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

7. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长与底面边长相等, 则 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦等于 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}-3\ln x$ 的一条切线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$, 则切点的横坐标为（　）

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) $\dfrac{1}{2}$

9. 把函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$ 平移, 得到 $y=f(x)$ 的图象, 则 $f(x)=$ （　）

(A) $\mathrm{e}^{x-3}+2$　(B) $\mathrm{e}^{x+3}-2$　(C) $\mathrm{e}^{x-2}+3$　(D) $\mathrm{e}^{x+2}-3$

10. 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期五有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有 （　）

(A) 40 种　(B) 60 种　(C) 100 种　(D) 120 种

11. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点. 若双曲线上存在点 A, 使 $\angle F_1AF_2=90^\circ$, 且 $|AF_1|=3|AF_2|$, 则双曲线离心率为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　(D) $\sqrt{5}$

12. 设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, A、B、C 为该抛物线上三点. 若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\boldsymbol{0}$, 则 $|FA|+|FB|+|FC|=$ （　）

(A) 9　(B) 6　(C) 4　(D) 3

二、填空题

13. $(1+2x^2)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为_____. (用数字作答)

14. 在某项测量中, 测量结果 ξ 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$. 若 ξ 在 $(0,1)$ 内取值的概率为 0.4, 则 ξ 在 $(0,2)$ 内取值的概率为_____.

15. 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2 cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1 cm, 那么该棱柱的表面积为_____cm^2.

16. 已知数列的通项 $a_n=-5n+2$, 其前 n 项和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=$_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知内角 $A=\dfrac{\pi}{3}$, 边 $BC=2\sqrt{3}$, 设内角 $B=x$, 周长为 y.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式和定义域;

(2) 求 y 的最大值.

18. 从某批产品中, 有放回地抽取产品二次, 每次随机抽取 1 件, 假设事件 A: “取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率 $P(A)=0.96$.

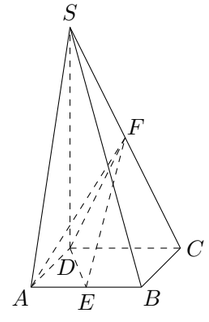
(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率 p;

(2) 若该批产品共有 100 件, 从中任意抽取 2 件, ξ 表示取出的 2 件产品中二等品的件数, 求 ξ 的分布列.

19. 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱 $SD\perp$ 底面 $ABCD$, E、F 分别是 AB、SC 的中点.

(1) 求证: $EF\parallel$ 平面 SAD;

(2) 设 $SD=2CD$, 求二面角 $A-EF-D$ 的大小.



20. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 相切.
(1) 求圆 O 的方程;
(2) 圆 O 与 x 轴相交于 A、B 两点, 圆内的动点 P 使 $|PA|$、$|PO|$、$|PB|$ 成等比数列, 求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

21. 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1\in(0,1)$, $a_n=\dfrac{3-a_{n-1}}{2}$, $n=2,3,4,\cdots$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n=a_n\sqrt{3-2a_n}$, 证明 $b_n<b_{n+1}$, 其中 n 为正整数.

22. 已知函数 $f(x)=x^3-x$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t,f(t))$ 处的切线方程;
(2) 设 $a>0$, 如果过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线, 证明: $-a<b<f(a)$.

2007 年普通高等学校招生考试（大纲卷 II）

文科数学

一、选择题

1. $\cos 330^\circ =$ （ ）

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设集合 $U=\{1,2,3,4\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{2,4\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ （ ）

(A) $\{2\}$ (B) $\{3\}$ (C) $\{1,2,4\}$ (D) $\{1,4\}$

3. 函数 $f(x)=|\sin x|$ 的一个单调递增区间是 （ ）

(A) $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ (C) $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

4. 以下四个数中的最大者是 （ ）

(A) $(\ln 2)^2$ (B) $\ln(\ln 2)$ (C) $\ln\sqrt{2}$ (D) $\ln 2$

5. 不等式 $\frac{x-2}{x+3}>0$ 的解集是 （ ）

(A) $(-3,2)$ (B) $(2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$ (D) $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda=$ （ ）

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{2}{3}$

7. 已知正三棱锥的侧棱长与底面边长的 2 倍, 则侧棱与底面所成角的余弦值等于 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知曲线 $y=\frac{x^2}{4}$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9. 把函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=(2,0)$ 平移, 得到 $y=f(x)$ 的图象, 则 $f(x)=$ （ ）

(A) e^x+2 (B) e^x-2 (C) e^{x-2} (D) e^{x+2}

10. 5 位同学报名参加两上课外活动小组, 每位同学限报其中的一个小组, 则不同的报名方法共有 （ ）

(A) 10 种 (B) 20 种 (C) 25 种 (D) 32 种

11. 已知椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍, 则椭圆的离心率为 （ ）

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点, 若点 P 在双曲线上, 且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$, 则 $\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|=$ （ ）

(A) $\sqrt{10}$ (B) $2\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{5}$

二、填空题

13. 一个总体含有 100 个个体, 以简单随机抽样方式从该总体中抽取一个容量为 5 的样本, 则指定的某个个体被抽到的概率为_____.

14. 已知数列的通项 $a_n=-5n+2$, 则其前 n 项和为 $S_n=$_____.

15. 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2 cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1 cm, 那么该棱柱的表面积为_____cm^2.

16. $(1+2x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为_____. (用数字作答)

三、解答题

17. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q<1$, 前 n 项和为 S_n. 已知 $a_3=2$, $S_4=5S_2$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

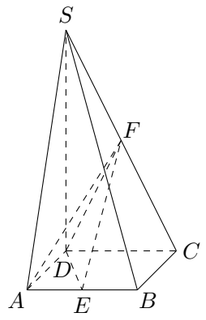
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知内角 $A=\frac{\pi}{3}$, 边 $BC=2\sqrt{3}$, 设内角 $B=x$, 周长为 y.
(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式和定义域;
(2) 求 y 的最大值.

19. 从某批产品中, 有放回地抽取产品二次, 每次随机抽取 1 件, 假设事件 A: “取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率 $P(A)=0.96$.
(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率 p;
(2) 若该批产品共有 100 件, 从中任意抽取 2 件, 求事件 B: “取出的 2 件产品中至少有一件二等品”的概率 $P(B)$.

20. 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱 $SD\perp$ 底面 $ABCD$, E、F 分别是 AB、SC 的中点.

(1) 求证: $EF\parallel$ 平面 SAD;

(2) 设 $SD=2CD$, 求二面角 $A-EF-D$ 的大小.



21. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 相切.

(1) 求圆 O 的方程;

(2) 圆 O 与 x 轴相交于 A、B 两点, 圆内的动点 P 使 $|PA|$、$|PO|$、$|PB|$ 成等比数列, 求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3-bx^2+(2-b)x+1$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值, 在 $x=x_2$ 处取得极小值, 且 $0<x_1<1<x_2<2$.

(1) 证明 $a>0$;

(2) 若 $z=a+2b$, 求 z 的取值范围.

2007 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (D) $-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$, 则 S_5 等于 （ ）

(A) 1 (B) $\dfrac{5}{6}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{30}$

3. 已知集合 $A=\{x|x<a\}$, $B=\{x|1<x<2\}$, 且 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 （ ）

(A) $a\leqslant 1$ (B) $a<1$ (C) $a\geqslant 2$ (D) $a>2$

4. 对于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ, 下列命题中真命题的是 （ ）

(A) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ (B) 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

(C) 若 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ (D) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

5. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π, 则该函数的图象 （ ）

(A) 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称 (B) 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

(C) 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 对称 (D) 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称

6. 以双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的右焦点为圆心, 且与其渐近线相切的圆的方程是 （ ）

(A) $x^2+y^2-10x+9=0$ (B) $x^2+y^2-10x+16=0$

(C) $x^2+y^2+10x+16=0$ (D) $x^2+y^2+10x+9=0$

7. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则满足 $f\left(\left|\dfrac{1}{x}\right|\right)<f(1)$ 的实数 x 的取值范围是 （ ）

(A) $(-1,1)$ (B) $(0,1)$

(C) $(-1,0)\cup(0,1)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

8. 已知 m、n 为两条不同的直线, α、β 为两个不同的平面, 则下列命题中正确的是 （ ）

(A) $m\subset\alpha$, $n\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\beta\Rightarrow\alpha\parallel\beta$

(B) $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta\Rightarrow m\parallel n$

(C) $m\perp\alpha$, $m\perp n\Rightarrow n\parallel\alpha$

(D) $n\parallel m$, $n\subset\alpha\Rightarrow m\perp\alpha$

9. 把 $1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n$ 展开成关于 x 的多项式, 其各项系数和为 a_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-1}{a_n+1}$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

10. 顶点在同一球面上的正四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB=1$, $AA'=\sqrt{2}$, 则 A、C 两点间的球面距离为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

11. 已知对任意实数 x, 有 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$, 且 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $g'(x)>0$, 则 $x<0$ 时, （ ）

(A) $f'(x)>0$, $g'(x)>0$ (B) $f'(x)>0$, $g'(x)<0$

(C) $f'(x)<0$, $g'(x)>0$ (D) $f'(x)<0$, $g'(x)<0$

12. 如图, 三行三列的方阵中有 9 个数 a_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$, 从中任取三个数, 则至少有两个数位于同行或同列的概率是 （ ）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(A) $\dfrac{3}{7}$ (B) $\dfrac{4}{7}$ (C) $\dfrac{1}{14}$ (D) $\dfrac{13}{14}$

二、填空题

13. 已知实数 x、y 满足 $\begin{cases} x+y\geqslant 2 \\ x-y\leqslant 2 \\ 0\leqslant y\leqslant 3 \end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的取值范围是_____.

14. 已知正方形 $ABCD$, 则以 A、B 为焦点, 且过 C、D 两点的椭圆的离心率为_____.

15. 两封信随机投入 A、B、C 三个空邮箱, 则 A 邮箱的信件数 ξ 的数学期望 $E\xi=$_____.

16. 中学数学中存在许多关系, 比如“相等关系”、“平行关系”等等. 如果集合 A 中元素之间的一个关系“$\sim$”满足以下三个条件:

① 自反性: 对于任意 $a\in A$, 都有 $a\sim a$;

② 对称性: 对于 a, $b\in A$, 若 $a\sim b$, 则有 $b\sim a$;

③ 传递性: 对于 a, b, $c\in A$, 若 $a\sim b$, $b\sim c$, 则有 $a\sim c$.

则称“$\sim$”是集合 A 的一个等价关系. 例如: “数的相等”是等价关系, 而“直线的平行”不是等价关系 (自反性不成立). 请你再列出三个等价关系: _____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A=\dfrac{1}{4}$, $\tan B=\dfrac{3}{5}$.

(1) 求角 C 的大小;

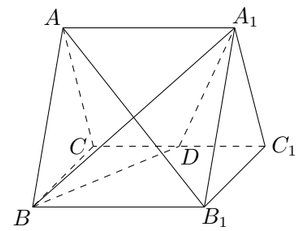
(2) 若 AB 边的长为 $\sqrt{17}$, 求 BC 边的长.

18. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2, D 为 CC_1 中点.

(1) 求证: $AB_1\perp$ 平面 A_1BD;

(2) 求二面角 $A-AD_1-B$ 的大小;

(3) 求点 C 到平面 A_1BD 的距离.



19. 某分公司经销某种品牌产品, 每件产品的成本为 3 元, 并且每件产品需向总公司交 a 元 $(3\leqslant a\leqslant 5)$ 的管理费, 预计当每件产品的售价为 x 元 $(9\leqslant x\leqslant 11)$ 时, 一年的销售量为 $(12-x)^2$ 万件.

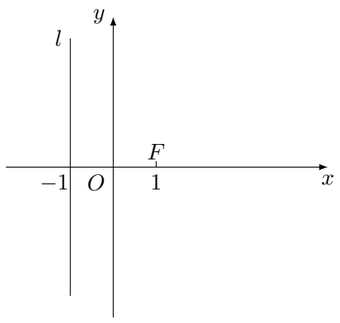
(1) 求分公司一年的利润 L (万元) 与每件产品的售价 x 的函数关系式;

(2) 当每件产品的售价为多少元时, 分公司一年的利润 L 最大? 并求出 L 的最大值 $Q(a)$.

20. 如图, 已知点 $F(1,0)$, 直线 l: $x=-1$, P 为平面上的动点, 过 P 作直线 l 的垂线, 垂足为点 Q, 且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$.

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 F 的直线交轨迹 C 于 A、B 两点, 交直线 l 于点 M, 已知 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$, 求 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值.



21. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1+\sqrt{2}$, $S_3=9+3\sqrt{2}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 与前 n 项和为 S_n;

(2) 设 $b_n=\dfrac{S_n}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 中任意不同的三项都不可能成为等比数列.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-kx$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $k=\mathrm{e}$, 试确定函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $k>0$, 且对于任意 $x\in\mathbf{R}$, $f(|x|)>0$ 恒成立, 试确定实数 k 的取值范围;

(3) 设函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$, 求证: $F(1)F(2)\cdots F(n)>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2007 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 且 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{1,2\}$, 则 $A\cap(\complement_U B)$ 等于 （ ）

(A) $\{2\}$　(B) $\{5\}$　(C) $\{3,4\}$　(D) $\{2,3,4,5\}$

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4=4$, 则 $a_2\cdot a_6$ 等于 （ ）

(A) 4　(B) 8　(C) 16　(D) 32

3. $\sin 15^\circ\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\sin 105^\circ$ 等于 （ ）

(A) 0　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D) 1

4. “$|x|<2$”是“$x^2-x-6<0$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

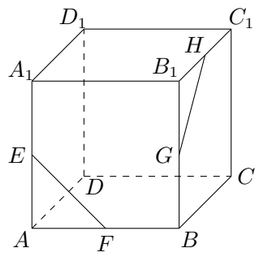
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 （ ）

(A) 关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称　(B) 关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

(C) 关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称　(D) 关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

6. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F、G、H 分别为 AA_1、AB、BB_1、B_1C_1 的中点, 则异面直线 EF 与 GH 所成的角等于 （ ）



(A) 45°　(B) 60°　(C) 90°　(D) 120°

7. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则满足 $f\left(\frac{1}{x}\right)>f(1)$ 的实数 x 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,1)$　(B) $(1,+\infty)$

(C) $(-\infty,0)\cup(0,1)$　(D) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

8. 对于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ, 下列命题中真命题的是 （ ）

(A) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　(B) 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

(C) 若 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$　(D) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

9. 已知 m、n 为两条不同的直线, α、β 为两个不同的平面, 则下列命题中正确的是 （ ）

(A) $m\subset\alpha$, $n\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\parallel\beta\Rightarrow\alpha\parallel\beta$

(B) $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta\Rightarrow m\parallel n$

(C) $m\perp\alpha$, $m\perp n\Rightarrow n\parallel\alpha$

(D) $n\parallel m$, $n\subset\alpha\Rightarrow m\perp\alpha$

10. 以双曲线 $x^2-y^2=2$ 的右焦点为圆心, 且与其右准线相切的圆的方程是 （ ）

(A) $x^2+y^2-4x-3=0$　(B) $x^2+y^2-4x+3=0$

(C) $x^2+y^2+4x-5=0$　(D) $x^2+y^2+4x+5=0$

11. 已知对任意实数 x, 有 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$, 且 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $g'(x)>0$, 则 $x<0$ 时, （ ）

(A) $f'(x)>0$, $g'(x)>0$　(B) $f'(x)>0$, $g'(x)<0$

(C) $f'(x)<0$, $g'(x)>0$　(D) $f'(x)<0$, $g'(x)<0$

12. 某通讯公司推出一组手机号码, 卡号的前七位数字固定, 从“×××××××0000”到“×××××××9999”共 10000 个号码. 公司规定: 凡卡号的后四位带有数字“4”或“7”的一律作为“优惠卡”, 则这组号码中“优惠卡”的个数为( )

(A) 2000　(B) 4096　(C) 5904　(D) 8320

二、填空题

13. $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项是_____. (用数字作答)

14. 已知实数 x、y 满足 $\begin{cases}x+y\geqslant 2\\ x-y\leqslant 2\\ 0\leqslant y\leqslant 3\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的取值范围是_____.

15. 已知长方形 $ABCD$, $AB=4$, $BC=3$, 则以 A、B 为焦点, 且过 C、D 两点的椭圆的离心率为_____.

16. 中学数学中存在许多关系, 比如“相等关系”、“平行关系”等等. 如果集合 A 中元素之间的一个关系“$\sim$”满足以下三个条件:

① 自反性: 对于任意 $a\in A$, 都有 $a\sim a$;

② 对称性: 对于 a, $b\in A$, 若 $a\sim b$, 则有 $b\sim a$;

③ 传递性: 对于 a, b, $c\in A$, 若 $a\sim b$, $b\sim c$, 则有 $a\sim c$.

则称“$\sim$”是集合 A 的一个等价关系. 例如: “数的相等”是等价关系, 而“直线的平行”不是等价关系 (自反性不成立). 请你再列出两个等价关系: _____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A=\frac{1}{4}$, $\tan B=\frac{3}{5}$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 AB 边的长为 $\sqrt{17}$, 求 BC 边的长.

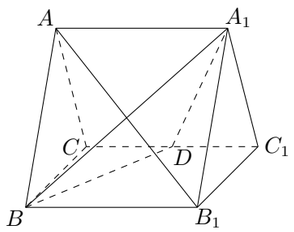
18. 甲、乙两名跳高运动员一次试跳 2 米高度成功的概率分别为 0.7、0.6, 且每次试跳成功与否相互之间没有影响, 求:

(1) 甲试跳三次, 第三次才成功的概率;

(2) 甲、乙两人在第一次试跳中至少有一人成功的概率;

(3) 甲、乙各试跳两次, 甲比乙的成功次数恰好多一次的概率.

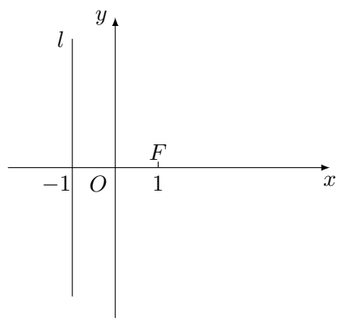
19. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2, D 为 CC_1 中点.
(1) 求证: $AB_1\perp$ 平面 A_1BD;
(2) 求二面角 $A-AD_1-B$ 的大小.



20. 设函数 $f(x)=tx^2+2t^2x+t-1$ ($x\in\mathbf{R}$, $t>0$).
(1) 求 $f(x)$ 的最小值 $h(t)$;
(2) 若 $h(t)<-2t+m$ 对 $t\in(0,2)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

21. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1$, $a_{n+1}=2S_n$ ($n\in\mathbf{N}^*$).
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n;
(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 如图, 已知点 $F(1,0)$, 直线 l: $x=-1$, P 为平面上的动点, 过 P 作直线 l 的垂线, 垂足为点 Q, 且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$.
(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;
(2) 过点 F 的直线交轨迹 C 于 A、B 两点, 交直线 l 于点 M.
① 已知 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$, 求 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值;
② 求 $\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MB}\right|$ 的最小值.



2007 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域为 M, $g(x)=\ln(1+x)$ 的定义域为 N, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{x|x>-1\}$　　(B) $\{x|x<1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　　(D) $\varnothing$

2. 若复数 $(1+b\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$ 是纯虚数 (i 是虚数单位, b 是实数), 则 $b=$ （ ）

(A) 2　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $-\dfrac{1}{2}$　　(D) -2

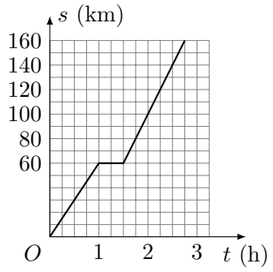
3. 若函数 $f(x)=\sin^2 x-\dfrac{1}{2}$ ($x\in\mathbf{R}$), 则 $f(x)$ 是 （ ）

(A) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇函数　　(B) 最小正周期为 π 的奇函数

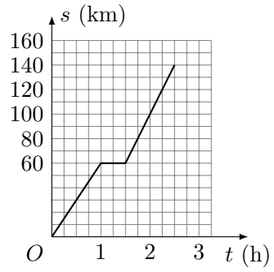
(C) 最小正周期为 2π 的偶函数　　(D) 最小正周期为 π 的偶函数

4. 客车从甲地以 60 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达乙地, 在乙地停留了半小时, 然后以 80 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达丙地. 下列描述客车从甲地出发, 经过乙地, 最后到达丙地所经过的路程 s 与时间 t 之间关系的图象中, 正确的是 （ ）

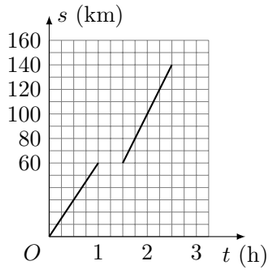
(A)



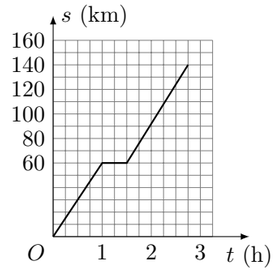
(B)



(C)



(D)



5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-9n$, 第 k 项满足 $5<a_k<8$, 则 $k=$ （ ）

(A) 9　　(B) 8　　(C) 7　　(D) 6

6. 图 1 是某县参加 2007 年高考的学生身高条形统计图, 从左到右的各条形表示的学生人数依次记为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{10} (如 A_2 表示身高 (单位: cm) 在 $[150,155)$ 内的学生人数). 图 2 是统计图 1 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图. 现要统计身高在 160 ~ 180 cm (含 160 cm, 不含 180 cm) 的学生人数, 那么在流程图中的判断框内应填写的条件是 （ ）

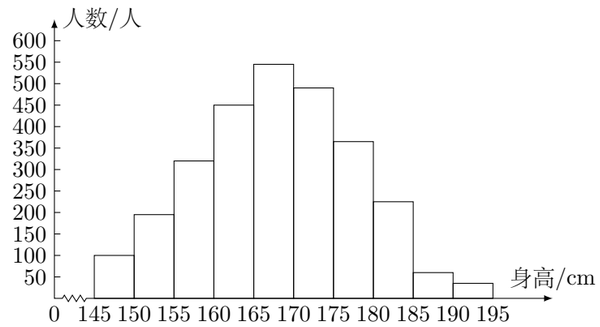


图 1

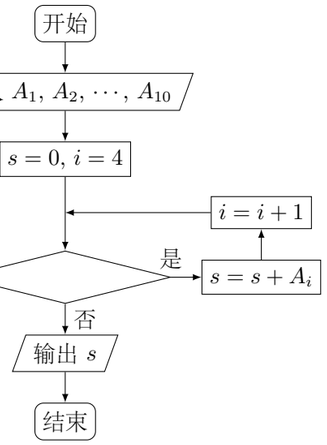
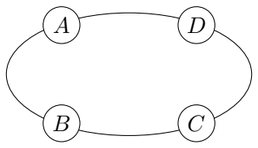


图 2

(A) $i<6$　　(B) $i<7$　　(C) $i<8$　　(D) $i<9$

7. 如图是某汽车维修公司的维修点环形分布图. 公司在年初分配给 A, B, C, D 四个维修点某种配件各 50 件. 在使用前发现需将 A, B, C, D 四个维修点的这批配件分别调整为 40, 45, 54, 61 件, 但调整只能在相邻维修点之间进行, 那么要完成上述调整, 最少的调动件次 (n 件配件从一个维修点调整到相邻维修点的调动件次为 n) 为 （ ）



(A) 15　　(B) 16　　(C) 17　　(D) 18

8. 设 S 是至少含有两个元素的集合. 在 S 上定义了一个二元运算“$*$”(即对任意的 a, $b\in S$, 对于有序元素对 (a,b), 在 S 中有唯一确定的元素 $a*b$ 与之对应). 若对任意的 a, $b\in S$, 有 $a*(b*a)=b$, 则对任意的 a, $b\in S$, 下列等式中不恒成立的是 （ ）

(A) $(a*b)*a=a$　　(B) $[a*(b*a)]*(a*b)=a$

(C) $b*(b*b)=b$　　(D) $(a*b)*[b*(a*b)]=b$

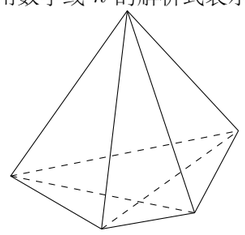
二、填空题

9. 甲, 乙两个袋中装有红, 白两种颜色的小球, 这些小球除颜色外完全相同. 其中甲袋装有 4 个红球, 2 个白球, 乙袋装有 1 个红球, 5 个白球. 现分别从甲, 乙两袋中各随机取出一个球, 则取出的两球是红球的概率为_____. (答案用分数表示)

10. 若向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 有一定点 $A(2,1)$. 若线段 OA 的垂直平分线过抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点, 则该抛物线的准线方程是_____.

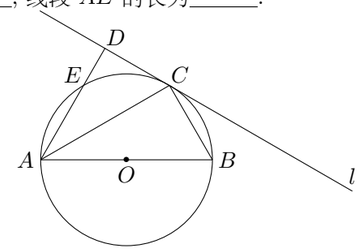
12. 如果一个凸多面体是 n 棱锥, 那么这个凸多面体的所有顶点所确定的直线共有_____条. 这些直线中共有 $f(n)$ 对异面直线, 则 $f(4)=$_____; $f(n)=$_____. (答案用数字或 n 的解析式表示)



13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+3\\y=3-t\end{cases}$ (参数 $t\in\mathbf{R}$), 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta+2\end{cases}$ (参数 $\theta\in[0,2\pi]$), 则圆 C 的圆心坐标为_____, 圆心到直线 l 的距离为_____.

14. 设函数 $f(x)=|2x-1|+x+3$, 则 $f(-2)=$_____; 若 $f(x)\leqslant 5$, 则 x 的取值范围是_____.

15. 如图所示, 圆 O 的直径 $AB=6$, C 为圆周上一点, $BC=3$. 过点 C 作圆的切线 l, 过 A 做 l 的垂线 AD, AD 分别与直线 l, 圆交于点 D, E, 则 $\angle DAC=$_____, 线段 AE 的长为_____.



三、解答题

16. 已知 $\triangle ABC$ 顶点的直角坐标分别为 $A(3,4)$, $B(0,0)$, $C(c,0)$.
(1) 若 $c=5$, 求 $\sin\angle A$ 的值;
(2) 若 $\angle A$ 是钝角, 求 c 的取值范围.

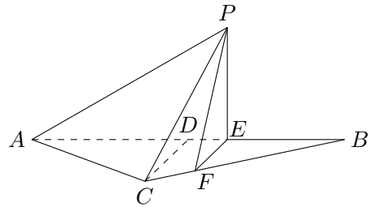
17. 下表提供了某厂节能降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x (吨) 与相应的生产能耗 y (吨标准煤) 的几组对照数据.

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

(1) 请画出上表的散点图;
(2) 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y=\widehat{b}x+\widehat{a}$;
(3) 已知该厂技改前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤. 试根据 (2) 求出的线性回归方程, 预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低多少吨标准煤?
(参考数值: $3\times2.5+4\times3+5\times4+6\times4.5=66.5$)

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆心在第二象限, 半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆 C 与直线 $y=x$ 相切于坐标原点 O. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与圆 C 的一个交点到椭圆两点的距离之和为 10.
(1) 求圆 C 的方程;
(2) 试探求 C 上是否存在异于原点的点 Q, 使 Q 到椭圆右焦点 F 的距离等于线段 OF 的长. 若存在, 请求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

19. 如图所示, 等腰 $\triangle ABC$ 的底边 $AB=6\sqrt{6}$, 高 $CD=3$, 点 E 是线段 BD 上异于点 B, D 的动点, 点 F 在 BC 边上, 且 $EF\perp AB$, 现沿 EF 将 $\triangle BEF$ 折起到 $\triangle PEF$ 的位置, 使 $PE\perp AC$, 记 $BE=x$, $V(x)$ 表示四棱锥 $P-ACFE$ 的体积.
(1) 求 $V(x)$ 的表达式;
(2) 当 x 为何值时, $V(x)$ 取得最大值?
(3) 当 $V(x)$ 取得最大值时, 求异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值.



20. 已知 a 是实数, 函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点, 求 a 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=x^2+x-1$, α, β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根 ($\alpha>\beta$), $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数, 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$.
(1) 求 α, β 的值;
(2) 证明: 对任意的正整数 n, 都有 $a_n>\alpha$;
(3) 记 $b_n=\ln\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ $(n=1,2,\cdots)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

2007 年普通高等学校招生考试（广东卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|1+x>0\}$, $N=\left\{x|\dfrac{1}{1-x}>0\right\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{x|-1\leqslant x<1\}$　　(B) $\{x|x>1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　　(D) $\{x|x\geqslant -1\}$

2. 若复数 $(1+b\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$ 是纯虚数 (i 是虚数单位, b 是实数), 则 $b=$ （ ）

(A) -2　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 2

3. 若函数 $f(x)=x^3$ ($x\in\mathbf{R}$), 则函数 $y=f(-x)$ 在其定义域上是 （ ）

(A) 单调递减的偶函数　　(B) 单调递减的奇函数

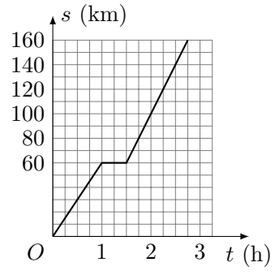
(C) 单调递增的偶函数　　(D) 单调递增的奇函数

4. 若向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$（ ）

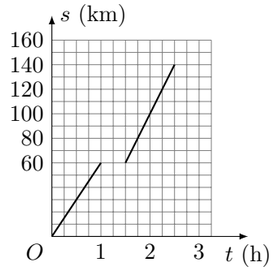
(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) 2

5. 客车从甲地以 60 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达乙地, 在乙地停留了半小时, 然后以 80 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达丙地. 下列描述客车从甲地出发, 经过乙地, 最后到达丙地所经过的路程 s 与时间 t 之间关系的图象中, 正确的是 （ ）

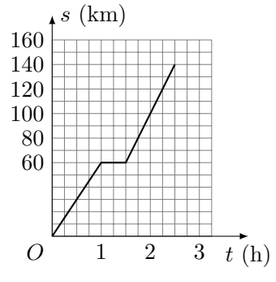
(A)



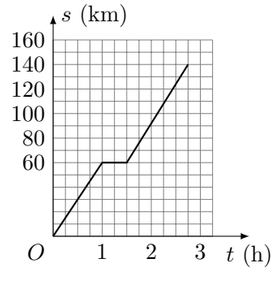
(B)



(C)



(D)



6. 若 l, m, n 是互不相同的空间直线, α, β 是不重合的平面, 则下列命题中为真命题的是 （ ）

(A) 若 $\alpha\parallel\beta$, $l\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 $l\parallel n$　　(B) 若 $\alpha\perp\beta$, $l\subset\alpha$, 则 $l\perp\beta$

(C) 若 $l\perp n$, $m\perp n$, 则 $l\parallel m$　　(D) 若 $l\perp\alpha$, $l\parallel\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

7. 图 1 是某县参加 2007 年高考的学生身高条形统计图, 从左到右的各条形表示的学生人数依次记为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{10} (如 A_2 表示身高 (单位: cm) 在 $[150,155)$ 内的学生人数). 图 2 是统计图 1 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图. 现要统计身高在 160 ~ 180 cm (含 160 cm, 不含 180 cm) 的学生人数, 那么在流程图中的判断框内应填写的条件是 （ ）

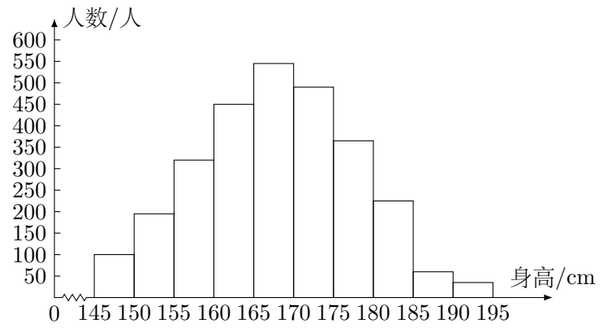


图 1

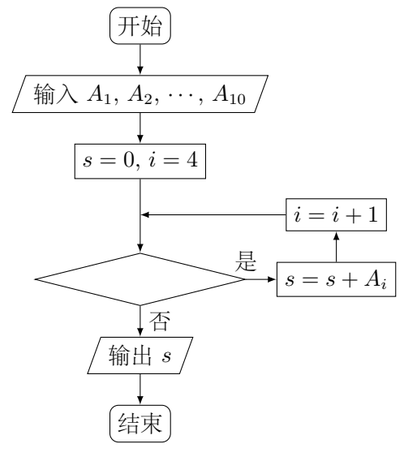


图 2

(A) $i<9$　　(B) $i<8$　　(C) $i<7$　　(D) $i<6$

8. 在一个袋子中装有分别标注数字 1, 2, 3, 4, 5 的五个小球, 这些小球除标注的数字外完全相同. 现从中随机取出 2 个小球, 则取出的小球标注的数字之和为 3 或 6 的概率是 （ ）

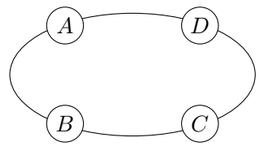
(A) $\dfrac{3}{10}$　　(B) $\dfrac{1}{5}$　　(C) $\dfrac{1}{10}$　　(D) $\dfrac{1}{12}$

9. 已知简谐运动 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\varphi\right)$ $\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过点 $(0,1)$, 则该简谐运动的最小正周期 T 和初相 φ 分别为 （ ）

(A) $T=6$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $T=6$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

(C) $T=6\pi$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　　(D) $T=6\pi$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

10. 如图是某汽车维修公司的维修点环形分布图. 公司在年初分配给 A, B, C, D 四个维修点某种配件各 50 件. 在使用前发现需将 A, B, C, D 四个维修点的这批配件分别调整为 40, 45, 54, 61 件, 但调整只能在相邻维修点之间进行, 那么要完成上述调整, 最少的调动件次 (n 件配件从一个维修点调整到相邻维修点的调动件次为 n) 为 （ ）



(A) 18　　(B) 17　　(C) 16　　(D) 15

二、填空题

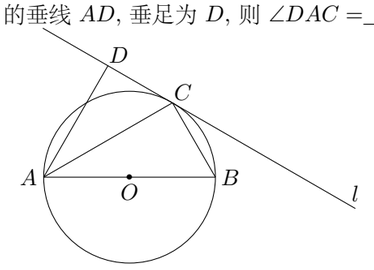
11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线关于 x 轴对称, 顶点在原点 O, 且过点 $P(2,4)$, 则该抛物线的方程是_____.

12. 函数 $f(x)=x\ln x$ ($x>0$) 的单调递增区间是_____.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-9n$, 则其通项 $a_n=$_____; 若它的第 k 项满足 $5<a_k<8$, 则 $k=$_____.

14. 在极坐标系中, 直线 l 的方程为 $\rho\sin\theta=3$, 则点 $\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 到直线 l 的距离为_____.

15. 如图所示, 圆 O 的直径 $AB=6$, C 为圆周上一点, $BC=3$ 过 C 作圆的切线 l, 过 A 作 l 的垂线 AD, 垂足为 D, 则 $\angle DAC=$_____.



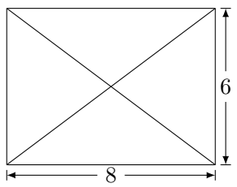
三、解答题

16. 已知 $\triangle ABC$ 顶点的直角坐标分别为 $A(3,4)$, $B(0,0)$, $C(c,0)$.

(1) 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, 求 c 的值;

(2) 若 $c=5$, 求 $\sin\angle A$ 的值.

17. 已知某几何体的俯视图是如图所示的矩形, 正视图 (或称主视图) 是一个底边长为 8, 高为 4 的等腰三角形, 侧视图 (或称左视图) 是一个底边长为 6, 高为 4 的等腰三角形.
(1) 求该几何体的体积 V;
(2) 求该几何体的侧面积 S.



18. 下表提供了某厂节能降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x (吨) 与相应的生产能耗 y (吨标准煤) 的几组对照数据.

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

(1) 请画出上表的散点图;
(2) 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y=\widehat{b}x+\widehat{a}$;
(3) 已知该厂技改前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤. 试根据 (2) 求出的线性回归方程, 预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低多少吨标准煤?
(参考数值: $3\times2.5+4\times3+5\times4+6\times4.5=66.5$)

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆心在第二象限, 半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆 C 与直线 $y=x$ 相切于坐标原点 O. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与圆 C 的一个交点到椭圆两点的距离之和为 10.
(1) 求圆 C 的方程;
(2) 试探求 C 上是否存在异于原点的点 Q, 使 Q 到椭圆右焦点 F 的距离等于线段 OF 的长. 若存在, 请求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

20. 已知函数 $f(x)=x^2+x-1$, α, β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根 ($\alpha>\beta$), $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数, 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ ($n=1,2,\cdots$).
(1) 求 α, β 的值;
(2) 已知对任意的正整数 n, 都有 $a_n>\alpha$, 记 $b_n=\ln\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ ($n=1,2,\cdots$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21. 已知 a 是实数, 函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点, 求 a 的取值范围.

2007 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 如果 $\left(3x^2-\frac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式中含有非零常数项, 则正整数 n 的最小值为 （ ）

(A) 3　(B) 5　(C) 6　(D) 10

2. 将 $y=2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=\left(-\frac{\pi}{4},-2\right)$ 平移, 则平移后所得图象的解析式为 （ ）

(A) $y=2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-2$　(B) $y=2\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+2$

(C) $y=2\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{12}\right)-2$　(D) $y=2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{12}\right)+2$

3. 设 P 和 Q 是两个集合, 定义集合 $P-Q=\{x|\in P$, 且 $x\notin Q\}$, 如果 $P=\{x|\log_2 x<1\}$, $Q=\{x||x-2|<1\}$, 那么 $P-Q$ 等于 （ ）

(A) $\{x|0<x<1\}$ (B) $\{x|0<x\leqslant 1\}$ (C) $\{x|1\leqslant x<2\}$ (D) $\{x|2\leqslant x<3\}$

4. 平面 α 外有两条直线 m 和 n, 如果 m 和 n 在平面 α 内的射影分别是 m' 和 n', 给出下列四个命题:

① $m'\perp n'\Rightarrow m\perp n$;

② $m\perp n\Rightarrow m'\perp n'$;

③ m' 与 n' 相交 $\Rightarrow$ m 与 n 相交或重合;

④ m' 与 n' 平行 $\Rightarrow$ m 与 n 平行或重合.

其中不正确的命题个数是 （ ）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

5. 已知 p 和 q 是两个不相等的正整数, 且 $q\geqslant 2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^q-1}=$ （ ）

(A) 0　(B) 1　(C) $\frac{p}{q}$　(D) $\frac{p-1}{q-1}$

6. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=p$ (p 为正常数, $n\in\mathbf{N}^*$), 则称 $\{a_n\}$ 为“等方比数列”. 甲: 数列 $\{a_n\}$ 是等方比数列; 乙: 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则（ ）

(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

7. 双曲线 C_1: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的左准线为 l, 左焦点和右焦点分别为 F_1 和 F_2; 抛物线 C_2 的准线为 l, 焦点为 F_2; C_1 与 C_2 的一个交点为 M, 则 $\frac{|F_1F_2|}{|MF_1|}-\frac{|MF_1|}{|MF_2|}$ 等于 （ ）

(A) -1　(B) 1　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{2}$

8. 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项分别为 A_n 和 B_n, 且 $\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+45}{n+3}$, 则使得 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数是 （ ）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

9. 连掷两次骰子得到的点数分别为 m 和 n, 记向量 $\boldsymbol{a}=(m,n)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$ 的夹角为 θ, 则 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的概率是 （ ）

(A) $\frac{5}{12}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{7}{12}$　(D) $\frac{5}{6}$

10. 已知直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (a, b 是非零常数) 与圆 $x^2+y^2=100$ 有公共点, 且公共点的横坐标均为整数, 那么这样的直线共有 （ ）

(A) 60 条　(B) 66 条　(C) 72 条　(D) 78 条

二、填空题

11. 已知函数 $y=2x-a$ 的反函数是 $y=bx+3$, 则 $a=$_____; $b=$_____.

12. 复数 $z=a+b\mathrm{i}$, a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $b\neq 0$, 若 z^2-4bz 是实数, 则有序实数对 (a,b) 可以是_____. (写出一个有序实数对即可)

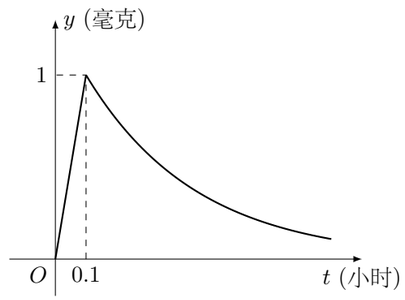
13. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+3\geqslant 0\\ x+y\geqslant 0\\ -2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$, 则目标函数 $2x+y$ 的最小值为_____.

14. 某男运动员在三分线投球的命中率是 $\frac{1}{2}$, 他投球 10 次, 恰好投进 3 个球的概率_____. (用数值作答)

15. 为了预防流感, 某学校对教室用药薰消毒法进行消毒. 已知药物释放过程中, 室内每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 成正比; 药物释放完毕后, y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$ (a 为常数), 如图所示. 据图中提供的信息, 回答下列问题:

(1) 从药物释放开始, 每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 之间的函数关系式为_____;

(2) 据测定, 当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时, 学生方可进教室, 那么药物释放开始, 至少需要经过_____小时后, 学生才能回到教室.



三、解答题

16. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 且满足 $0\leqslant\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leqslant 6$, 设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ.

(1) 求 θ 的取值范围;

(2) 求函数 $f(\theta)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sqrt{3}\cos 2\theta$ 的最大值与最小值.

17. 在生产过程中, 测得纤维产品的纤度 (表示纤维粗细的一种量) 共有 100 个数据, 将数据分组如下表:

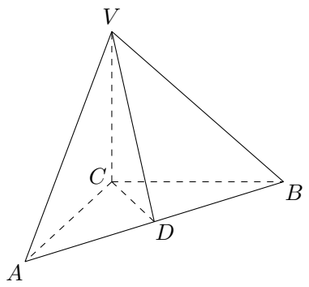
分组	频数	频率
$[1.30,1.34)$	4	
$[1.34,1.38)$	25	
$[1.38,1.42)$	30	
$[1.42,1.46)$	29	
$[1.46,1.50)$	10	
$[1.50,1.54)$	2	
合计	100	

(1) 补全频率分布表, 并画出频率分布直方图;

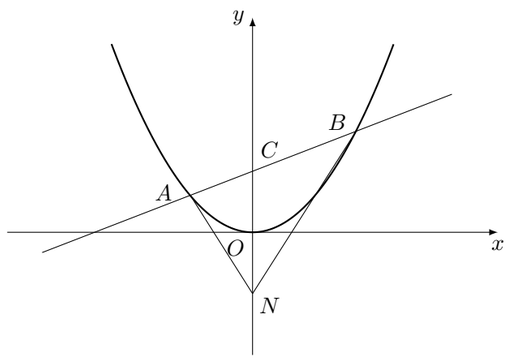
(2) 估计纤度落在 $[1.38,1.50)$ 中的概率及纤度小于 1.40 的概率是多少?

(3) 统计方法中, 同一组数据常用该组区间的中点值 (例如区间 $[1.30,1.34)$ 的中点值是 1.32) 作为代表. 据此, 估计纤度的期望.

18. 如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, $VC\perp$ 底面 ABC, $AC\perp BC$, D 是 AB 的中点, 且 $AC=BC=a$, $\angle VDC=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.
(1) 求证: 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD;
(2) 当角 θ 变化时, 求直线 BC 与平面 VAB 所成的角的取值范围.



19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过定点 $C(0,p)$ 作直线与抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 相交于 A, B 两点.
(1) 若点 N 是点 C 关于坐标原点 O 的对称点, 求 $\triangle ANB$ 面积的最小值;
(2) 是否存在垂直于 y 轴的直线 l, 使得 l 被以 AC 为直径的圆截得的弦长恒为定值? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 说明理由.



20. 已知定义在正实数集上的函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax$, $g(x)=3a^2\ln x+b$, 其中 $a>0$. 设两曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 有公共点, 且在该点处的切线相同.
(1) 用 a 表示 b, 并求 b 的最大值;
(2) 求证: $f(x)\geqslant g(x)$ $(x>0)$.

21. 已知 m, n 为正整数.
(1) 用数学归纳法证明: 当 $x>-1$ 时, $(1+x)^m\geqslant 1+mx$;
(2) 对于 $n\geqslant 6$, 已知 $\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^n<\dfrac{1}{2}$, 求证 $\left(1-\dfrac{m}{n+3}\right)^m<\dfrac{1}{2}$, $m=1,2,\cdots,n$;
(3) 求满足等式 $3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n=(n+3)^n$ 的所有正整数 n.

2007 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. $\tan 690^\circ$ 的值为 （ ）

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $-\sqrt{3}$

2. 如果 $U=\{x \mid x$ 是小于 9 的正整数 $\}$, $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, 那么 $\complement_U A \cap \complement_U B=$ （ ）

(A) $\{1,2\}$ (B) $\{3,4\}$ (C) $\{5,6\}$ (D) $\{7,8\}$

3. 如果 $\left(3x^2-\dfrac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式中含有非零常数项, 则正整数 n 的最小值为 （ ）

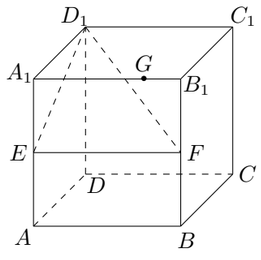
(A) 10 (B) 6 (C) 5 (D) 3

4. 函数 $y=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$ $(x<0)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}$ $(x<-1)$ (B) $y=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}$ $(x>1)$

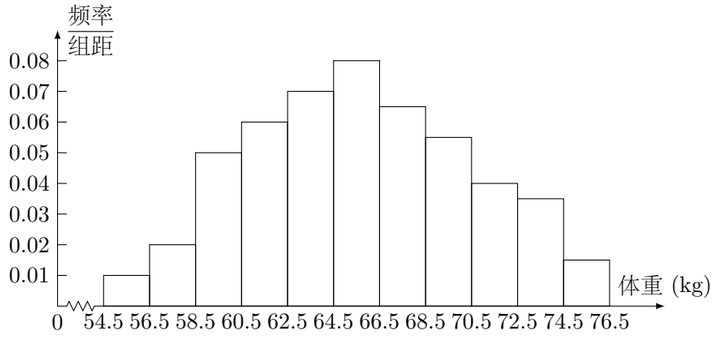
(C) $y=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}$ $(x<-1)$ (D) $y=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}$ $(x>1)$

5. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别为棱 AA_1、BB_1 的中点, G 为棱 A_1B_1 上的一点, 且 $A_1G=\lambda$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$, 则点 G 到平面 D_1EF 的距离为 （ ）



(A) $\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}\lambda}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

6. 为了了解某学校学生的身体发育情况, 抽查了该校 100 名高中男生的体重情况, 根据所得数据画出样本的频率分布直方图如图所示. 根据此图, 估计该校 2000 名高中男生中体重大于 70.5 公斤的人数为 （ ）



(A) 300 (B) 360 (C) 420 (D) 450

7. 将 5 本不同的书全发给 4 名同学, 每名同学至少有一本书的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{15}{64}$ (B) $\dfrac{15}{128}$ (C) $\dfrac{24}{125}$ (D) $\dfrac{48}{125}$

8. 由直线 $y=x+1$ 上的一点向圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 引切线, 则切线长的最小值为 （ ）

(A) 1 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) 3

9. 设 $\boldsymbol{a}=(4,3)$, $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, $\boldsymbol{b}$ 在 x 轴上的投影为 2, 且 $|\boldsymbol{b}|\leqslant 14$, 则 $\boldsymbol{b}$ 为 （ ）

(A) $(2,14)$ (B) $\left(2,-\dfrac{2}{7}\right)$ (C) $\left(-2,\dfrac{2}{7}\right)$ (D) $(2,8)$

10. 已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件, q 是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 现有下列命题:

① s 是 q 的充要条件;

② p 是 q 的充分条件而不是必要条件;

③ r 是 q 的必要条件而不是充分条件;

④ $\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件;

⑤ r 是 s 的充分条件而不是必要条件.

则正确命题的序号是 （ ）

(A) ①④⑤ (B) ①②④ (C) ②③⑤ (D) ②④⑤

二、填空题

11. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+3\geqslant 0\\ x+y\geqslant 0\\ -2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$, 则目标函数 $2x+y$ 的最小值为_____.

12. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 左焦点 F_1 的直线交双曲线的左支于 M、N 两点, F_2 为其右焦点, 则 $|MF_2|+|NF_2|-|MN|$ 的值为_____.

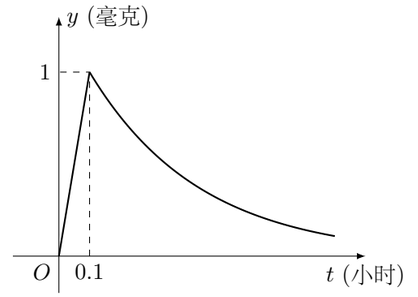
13. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $M(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=\dfrac{1}{2}x+2$, 则 $f(1)+f'(1)=$_____.

14. 某男运动员在三分线投球的命中率是 $\dfrac{1}{2}$, 他投球 10 次, 恰好投进 3 个球的概率_____. (用数值作答)

15. 为了预防流感, 某学校对教室用药薰消毒法进行消毒. 已知药物释放过程中, 室内每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 成正比; 药物释放完毕后, y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{t-a}$ (a 为常数), 如图所示. 据图中提供的信息, 回答下列问题:

(1) 从药物释放开始, 每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 之间的函数关系式为_____;

(2) 据测定, 当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时, 学生方可进教室, 那么药物释放开始, 至少需要经过_____小时后, 学生才能回到教室.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

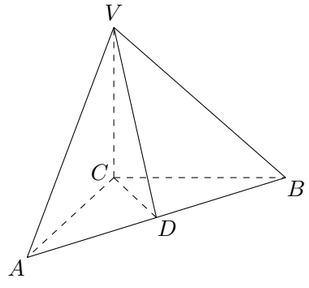
(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(2) 若不等式 $|f(x)-m|<2$ 在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

17. 如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, $VC\perp$ 底面 ABC, $AC\perp BC$, D 是 AB 的中点, 且 $AC=BC=a$, $\angle VDC=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 求证: 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD;

(2) 试确定角 θ 的值, 使得直线 BC 与平面 VAB 所成的角的为 $\dfrac{\pi}{6}$.

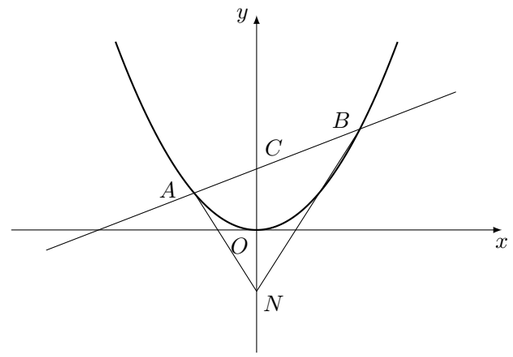


18. 某商品每件成本 9 元, 售价 30 元, 每星期卖出 432 件. 如果降低价格, 销售量可以增加, 且每星期多卖出的商品件数与商品单价的降低值 x (单位: 元, $0 \leqslant x \leqslant 30$) 的平方成正比. 已知商品单价降低 2 元时, 一星期多卖出 24 件.
(1) 将一个星期的商品销售利润表示成 x 的函数;
(2) 如何定价才能使一个星期的商品销售利润最大?

19. 设二次函数 $f(x)=x^2+ax+a$, 方程 $f(x)-x=0$ 的两根 x_1 和 x_2 满足 $0<x_1<x_2<1$.
(1) 求实数 a 的取值范围;
(2) 试比较 $f(0)f(1)-f(0)$ 与 $\dfrac{1}{16}$ 的大小, 并说明理由.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n>0$, $b_n=\sqrt{a_n a_{n+1}}$ ($n\in\mathbf{N}^*$), 且 $\{b_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列.
(1) 证明: $a_{n+2}=a_n q^2$;
(2) 若 $c_n=a_{2n-1}+2a_{2n}$, 证明数列 $\{c_n\}$ 是等比数列;
(3) 求和: $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-1}}+\dfrac{1}{a_{2n}}$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过定点 $C(0,p)$ 作直线与抛物线 $x^2=2py$ ($p>0$) 相交于 A, B 两点.
(1) 若点 N 是点 C 关于坐标原点 O 的对称点, 求 $\triangle ANB$ 面积的最小值;
(2) 是否存在垂直于 y 轴的直线 l, 使得 l 被以 AC 为直径的圆截得的弦长恒为定值? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 说明理由.



2007 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\left(\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2$ 等于 （ ）

(A) $4\mathrm{i}$ (B) $-4\mathrm{i}$ (C) $2\mathrm{i}$ (D) $-2\mathrm{i}$

2. 不等式 $\dfrac{x-2}{x+1}\leqslant 0$ 的解集是 （ ）

(A) $(-\infty,-1)\cup(-1,2]$ (B) $[-1,2]$

(C) $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$ (D) $(-1,2]$

3. 设 M, N 是两个集合, 则“$M\cup N\neq\varnothing$”是“$M\cap N\neq\varnothing$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

4. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是非零向量, 若函数 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b})$ 的图象是一条直线, 则必有 （ ）

(A) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ (B) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ (C) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ (D) $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$

5. 设随机变量 ξ 服从标准正态分布 $N(0,1)$. 已知 $\Phi(-1.96)=0.025$, 则 $P(|\xi|<1.96)=$ （ ）

(A) 0.025 (B) 0.050 (C) 0.950 (D) 0.975

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}4x-4, & x\leqslant 1\\ x^2-4x+3, & x>1\end{cases}$ 的图象和函数 $g(x)=\log_2 x$ 的图象的交点个数是 （ ）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

7. 下列四个命题中, 不正确的是 （ ）

(A) 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$

(B) 函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ 的不连续点是 $x=2$ 和 $x=-2$

(C) 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$

(D) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

8. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点都在球 O 的表面上, E、F 分别是棱 AA_1、DD_1 的中点, 则直线 EF 被球 O 截得的线段长为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 1 (C) $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

9. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, 若在其右准线上存在 P, 使线段 PF_1 的中垂线过点 F_2, 则椭圆离心率的取值范围是 （ ）

(A) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (B) $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ (C) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ (D) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$

10. 设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$, S_1、S_2、$\cdots$、S_k 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$, $S_j=\{a_j,b_j\}$ $(i\neq j,i,j\in\{1,2,3,\cdots,k\})$, 都有 $\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\dfrac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\dfrac{a_j}{b_j},\dfrac{b_j}{a_j}\right\}$ ($\min\{x,y\}$ 表示两个数 x、y 中的较小者). 则 k 的最大值是 （ ）

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

二、填空题

11. 圆心为 $(1,1)$ 且与直线 $x+y=4$ 相切的圆的方程是_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 若 $a=1$, $b=\sqrt{7}$, $c=\sqrt{3}$, 则 $B=$_____.

13. 函数 $f(x)=12x-x^3$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最小值是_____.

14. 设集合 $A=\left\{(x,y)\,|\,y\geqslant\dfrac{1}{2}|x-2|\right\}$, $B=\{(x,y)\,|\,y\leqslant-|x|+b\}$, $A\cap B\neq\varnothing$.

(1) b 的取值范围是_____;

(2) 若 $(x,y)\in A\cap B$, 且 $x+2y$ 的最大值为 9, 则 b 的值是_____.

15. 将杨辉三角中的奇数换成 1, 偶数换成 0, 得到如图所示的 $0-1$ 三角数表, 从上往下数, 第 1 次全行的数都为 1 的是第 1 行, 第 2 次全行的数都为 1 的是第 3 行, $\cdots$, 第 n 次全行的数都为 1 的是第_____行; 第 61 行中 1 的个数是_____.

第 1 行 1 1

第 2 行 1 0 1

第 3 行 1 1 1 1

第 4 行 1 0 0 0 1

第 5 行 1 1 0 0 1 1

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$, $g(x)=1+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

(1) 设 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴, 求 $g(x_0)$ 的值;

(2) 求函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的单调递增区间.

17. 某地区为下岗人员免费提供财会和计算机培训, 以提高下岗人员的再就业能力. 每名下岗人员可以选择参加一项培训、参加两项培训或不参加培训, 已知参加过财会培训的有 60%, 参加过计算机培训的有 75%. 假设每个人对培训项目的选择是相互独立的, 且各人的选择相互之间没有影响.

(1) 任选 1 名下岗人员, 求该人参加过培训的概率;

(2) 任选 3 名下岗人员, 记 ξ 为 3 人中参加过培训的人数, 求 ξ 的分布列和期望.

18. 如图 1, E, F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB, CD 的中点, G 是 EF 上的一点, 将 $\triangle GAB$, $\triangle GCD$ 分别沿 AB, CD 翻折成 $\triangle G_1AB$, $\triangle G_2CD$, 并连接 G_1G_2, 使得平面 $G_1AB\perp$ 平面 $ABCD$, $G_1G_2\parallel AD$, 且 $G_1G_2<AD$, 连接 BG_2, 如图 2.

(1) 证明: 平面 $G_1AB\perp$ 平面 G_1ADG_2;

(2) 当 $AB=12$, $BC=25$, $EG=8$ 时, 求直线 BG_2 和平面 G_1ADG_2 所成的角.

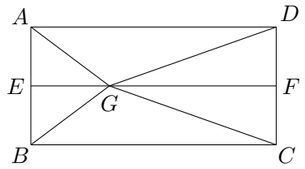


图 1

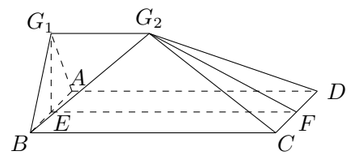


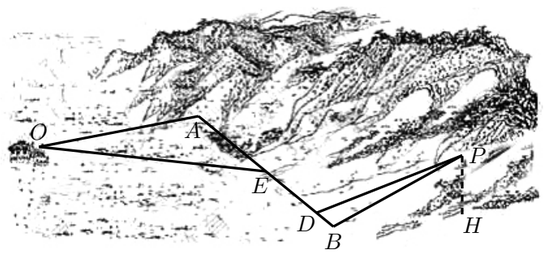
图 2

19. 如图, 某地为了开发旅游资源, 欲修建一条连接风景点 P 和居民区 O 的公路, 点 P 所在的山坡面与山脚所在水平面 α 所成的二面角为 θ ($0° < \theta < 90°$), 且 $\sin\theta = \dfrac{2}{5}$, 点 P 到平面 α 的距离 $PH = 0.4$ (km). 沿山脚原有一段笔直的公路 AB 可供利用, 从点 O 到山脚修路的造价为 a 万元/km, 原有公路改建费用为 $\dfrac{a}{2}$ 万元/km, 当山坡上公路长度为 l km ($1 \leqslant l \leqslant 2$) 时, 其造价为 $(l^2+1)a$ 万元, 已知 $OA \perp AB$, $PB \perp AB$, $AB = 1.5$ (km), $OA = \sqrt{3}$ (km).

(1) 在 AB 上求一点 D, 使沿折线 $PDAO$ 修建公路的总造价最小;

(2) 对于 (1) 中得到的点 D, 在 DA 上求一点 E, 使沿折线 $PDEO$ 修建公路的总造价最小;

(3) 在 AB 上是否存在两个不同的点 D', E', 使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价小于 (2) 中得到的最小总造价, 证明你的结论.



20. 已知双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过点 F_2 的动直线与双曲线相交于 A, B 两点.

(1) 若动点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M} = \overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B} + \overrightarrow{F_1O}$ (其中 O 为坐标原点), 求点 M 的轨迹方程;

(2) 在 x 轴上是否存在定点 C, 使 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 为常数? 若存在, 求出点 C 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

21. 已知 $A_n(a_n, b_n)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 是曲线 $y = \mathrm{e}^x$ 上的点, $a_1 = a$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $S_n^2 = 3n^2a_n + S_{n-1}^2$, $a_n \neq 0$, $n = 2, 3, 4, \cdots$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\dfrac{b_{n+2}}{b_n}\right\}$ ($n \geqslant 2$) 是常数数列;

(2) 确定 a 的取值集合 M, 使 $a \in M$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;

(3) 证明: 当 $a \in M$ 时, 弦 A_nA_{n+1} ($n \in \mathbf{N}^*$) 的斜率随 n 单调递增.

2007 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 不等式 $x^2 > x$ 的解集是 （ ）

(A) $(-\infty, 0)$　　(B) $(0, 1)$

(C) $(1, +\infty)$　　(D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

2. 若 O, E, F 是不共线的任意三点, 则以下各式中成立的是 （ ）

(A) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$　　(B) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$

(C) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$　　(D) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$

3. 设 p: $b^2 - 4ac > 0$ $(a \neq 0)$, q: 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ 有实根, 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

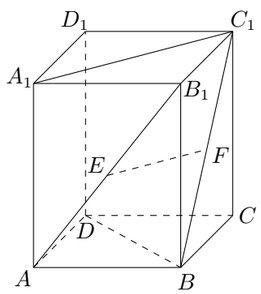
4. 在等比数列 $\{a_n\}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 中, 若 $a_1 = 1$, $a_4 = \dfrac{1}{8}$, 则该数列的前 10 项和为 （ ）

(A) $2 - \dfrac{1}{2^8}$　　(B) $2 - \dfrac{1}{2^9}$　　(C) $2 - \dfrac{1}{2^{10}}$　　(D) $2 - \dfrac{1}{2^{11}}$

5. 在 $(1+x)^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 的二项展开式中, 若只有 x^5 的系数最大, 则 $n =$（ ）

(A) 8　　(B) 9　　(C) 10　　(D) 11

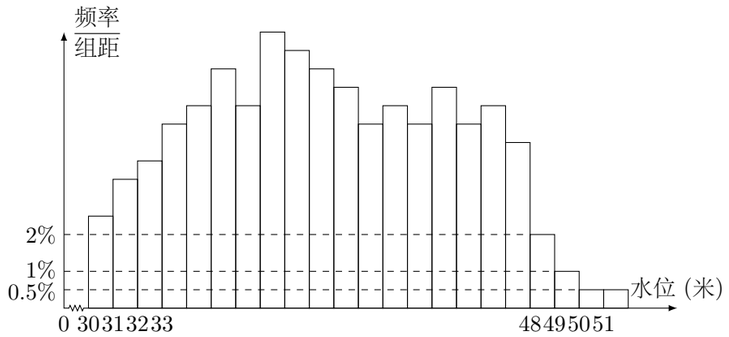
6. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别是 AB_1、BC_1 的中点, 则以下结论中不成立的是 （ ）



(A) EF 与 BB_1 垂直　　(B) EF 与 BD 垂直

(C) EF 与 CD 异面　　(D) EF 与 A_1C_1 异面

7. 根据某水文观测点的历史统计数据, 得到某条河流水位的频率分布直方图(如图), 从图中可以看出, 该水文观测点平均至少一百年才遇到一次的洪水的最低水位是 （ ）



(A) 48 米　　(B) 49 米　　(C) 50 米　　(D) 51 米

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} 4x - 4, & x \leqslant 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x > 1 \end{cases}$ 的图象和函数 $g(x) = \log_2 x$ 的图象的交点个数是 （ ）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

9. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 1)$ 的左、右焦点, P 是其右准线上纵坐标为 $\sqrt{3}c$ (c 为半焦距) 的点, 且 $|F_1F_2| = |F_2P|$, 则椭圆的离心率是 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 设集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, S_1、S_2、$\cdots$、S_k 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的 $S_i = \{a_i, b_i\}$, $S_j = \{a_j, b_j\}$ $(i \neq j, i、j \in \{1, 2, 3, \cdots, k\})$, 都有 $\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i}, \dfrac{b_i}{a_i}\right\} \neq \min\left\{\dfrac{a_j}{b_j}, \dfrac{b_j}{a_j}\right\}$ ($\min\{x, y\}$ 表示两个数 x、y 中的较小者). 则 k 的最大值是 （ ）

(A) 10　　(B) 11　　(C) 12　　(D) 13

二、填空题

11. 圆心为 $(1, 1)$ 且与直线 $x + y = 4$ 相切的圆的方程是_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 若 $a = 1$, $c = \sqrt{3}$, $C = \dfrac{\pi}{3}$, 则 $A =$_____.

13. 若 $a > 0$, $a^{\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{9}$, 则 $\log_{\frac{2}{3}} a =$_____.

14. 设集合 $A = \{(x, y) \mid y \geqslant |x - 2|, x \geqslant 0\}$, $B = \{(x, y) \mid y \leqslant -x + b\}$, $A \cap B \neq \varnothing$.
(1) b 的取值范围是_____;
(2) 若 $(x, y) \in A \cap B$, 且 $x + 2y$ 的最大值为 9, 则 b 的值是_____.

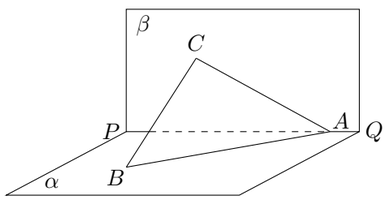
15. 棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点都在球 O 的表面上, 则球 O 的表面积是_____; 设 E、F 分别是该正方体的棱 AA_1、DD_1 的中点, 则直线 EF 被球 O 截得的线段长为_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = 1 - 2\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$. 求:
(1) 函数 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

17. 某地区为下岗人员免费提供财会和计算机培训, 以提高下岗人员的再就业能力. 每名下岗人员可以选择参加一项培训、参加两项培训或不参加培训, 已知参加过财会培训的有 60%, 参加过计算机培训的有 75%. 假设每个人对培训项目的选择是相互独立的, 且各人的选择相互之间没有影响.
(1) 任选 1 名下岗人员, 求该人参加过培训的概率;
(2) 任选 3 名下岗人员, 求这 3 人中至少有 2 人参加过培训的概率.

18. 如图, 已知直二面角 $\alpha - PQ - \beta$, $A \in PQ$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $CA = CB$, $\angle BAP = 45°$, 直线 CA 和平面 α 所成的角为 $30°$.
(1) 证明: $BC \perp PQ$;
(2) 求二面角 $B - AC - P$ 的大小.



19. 已知双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 的右焦点为 F, 过点 F 的动直线与双曲线相交于 A, B 两点, 点 C 的坐标是 $(1, 0)$.
(1) 证明: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 为常数;
(2) 若动点 M 满足 $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CO}$ (其中 O 为坐标原点), 求点 M 的轨迹方程.

20. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和, $a_1 = a$, 且 $S_n^2 = 3n^2 a_n + S_{n-1}^2$, $a_n \neq 0$, $n = 2, 3, 4, \cdots$.
(1) 证明: 数列 $\{a_{n+2} - a_n\}$ $(n \geqslant 2)$ 是常数数列;
(2) 试找出一个奇数 a, 使以 18 为首项, 7 为公比的等比数列 $\{b_n\}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 中的所有项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 并指出 b_n 是数列 $\{a_n\}$ 中的第几项.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$ 在区间 $[-1, 1)$, $(1, 3]$ 内各有一个极值点.
(1) 求 $a^2 - 4b$ 的最大值;
(2) 当 $a^2 - 4b = 8$ 时, 设函数 $y = f(x)$ 在点 $A(1, f(1))$ 处的切线为 l, 若 l 在点 A 处穿过 $y = f(x)$ 的图象 (即动点在点 A 附近沿曲线 $y = f(x)$ 运动, 经过点 A 时, 从 l 的一侧进入另一侧), 求函数 $f(x)$ 的表达式.

2007 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、选择题

1. 下列函数中, 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的是 （ ）

(A) $y=\sin\frac{x}{2}$　(B) $y=\sin 2x$　(C) $y=\cos\frac{x}{4}$　(D) $y=\cos 4x$

2. 已知全集 $U=\mathbf{Z}$, $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x|x^2=x\}$, 则 $A\cap\complement_U B$ 为（ ）

(A) $\{-1,2\}$　(B) $\{-1,0\}$　(C) $\{0,1\}$　(D) $\{1,2\}$

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线的中心在坐标原点, 焦点在 y 轴上, 一条渐近线方程为 $x-2y=0$, 则它的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{5}$　(B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

4. 已知两条直线 m, n, 两个平面 α, β, 给出下面四个命题:
① $m\parallel n$, $m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\alpha$;
② $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta\Rightarrow m\parallel n$;
③ $m\parallel n$, $m\parallel\alpha\Rightarrow n\parallel\alpha$;
④ $\alpha\parallel\beta$, $m\parallel n$, $m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\beta$.
其中正确命题的序号是 （ ）

(A) ①③　(B) ②④　(C) ①④　(D) ②③

5. 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ $(x\in[-\pi,0])$ 的单调递增区间是 （ ）

(A) $\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]$　(B) $\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right]$　(C) $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$　(D) $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$

6. 设函数 $f(x)$ 定义在实数集上, 它的图象关于直线 $x=1$ 对称, 且当 $x\geqslant 1$ 时, $f(x)=3^x-1$, 则有 （ ）

(A) $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)$　(B) $f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)$

(C) $f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)$　(D) $f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)$

7. 若对于任意实数 x, 有 $x^3=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+a_3(x-2)^3$, 则 a_2 的值为 （ ）

(A) 3　(B) 6　(C) 9　(D) 12

8. 设 $f(x)=\lg\left(\frac{2}{1-x}+a\right)$ 是奇函数, 则使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $(-1,0)$　(B) $(0,1)$

(C) $(-\infty,0)$　(D) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

9. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的导数为 $f'(x)$, $f'(0)>0$, 对于任意实数 x 都有 $f(x)\geqslant 0$, 则 $\frac{f(1)}{f'(0)}$ 的最小值为 （ ）

(A) 3　(B) $\frac{5}{2}$　(C) 2　(D) $\frac{3}{2}$

10. 在平面直角坐标系 xOy, 已知平面区域 $A=\{(x,y)|x+y\leqslant 1,\ 且\ x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, 则平面区域 $B=\{(x+y,x-y)|(x,y)\in A\}$ 的面积为 （ ）

(A) 2　(B) 1　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{4}$

二、填空题

11. 若 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$, 则 $\tan\alpha\tan\beta=$_____.

12. 某校开设 9 门课程供学生选修, 其中 A, B, C 三门由于上课时间相同, 学校规定, 每位同学选修 4 门, 共有_____种不同的选修方案. (用数值作答)

13. 已知函数 $f(x)=x^3-12x+8$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最大值与最小值分别为 M, m, 则 $M-m=$_____.

14. 正三棱锥 $P-ABC$ 高为 2, 侧棱与底面 ABC 成 45°, 则点 A 到侧面 PBC 的距离为_____.

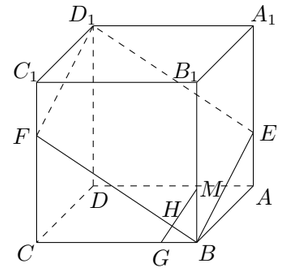
15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $\triangle ABC$ 顶点 $A(-4,0)$ 和 $C(4,0)$, 顶点 B 在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上, 则 $\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=$_____.

16. 某时钟的秒针端点 A 到中心点 O 的距离为 5 cm, 秒针均匀地绕点 O 旋转, 当时间 $t=0$ 时, 点 A 与钟面上标 12 的点 B 重合, 将 A, B 两点的距离 d (cm) 表示成 $t(s)$ 的函数, 则 $d=$_____.

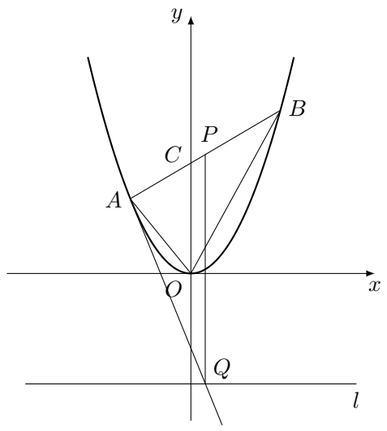
三、解答题

17. 某气象站天气预报的准确率为 80%, 计算 (结果保留到小数点后面第 2 位)
(1) 5 次预报中恰有 2 次准确的概率;
(2) 5 次预报中至少有 2 次准确的概率;
(3) 5 次预报中恰有 2 次准确, 且其中第 3 次预报准确的概率.

18. 如图, 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 3 的正方体, 点 E 在 AA_1 上, 点 F 在 CC_1 上, 且 $AE=FC_1=1$.
(1) 求证: E, B, F, D_1 四点共面;
(2) 若点 G 在 BC 上, $BG=\frac{2}{3}$, 点 M 在 BB_1 上, $GM\perp BF$, 垂足为 H, 求证: $EM\perp$ 面 BCC_1B_1;
(3) 用 θ 表示截面 $EBFD_1$ 和面 BCC_1B_1 所成锐二面角大小, 求 $\tan\theta$



19. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线, 与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A, B 两点, 一条垂直于 x 轴的直线, 分别与线段 AB 和直线 l: $y=-c$ 交于 P, Q.
(1) 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$, 求 c 的值;
(2) 若 P 为线段 AB 的中点, 求证: QA 为此抛物线的切线;
(3) 试问 (2) 的逆命题是否成立? 说明理由.



20. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $a_1=b_1$, $a_2=b_2\neq a_1$, 记 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.
(1) 若 $b_k=a_m$ (m, k 是大于 2 正整数), 求证: $S_{k-1}=(m-1)a_1$;
(2) 若 $b_3=a_i$ (i 是某一正整数), 求证: q 是整数, 且数列 $\{b_n\}$ 中每一项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项;
(3) 是否存在这样的正数 q, 使等比数列 $\{b_n\}$ 中有三项成等差数列? 若存在, 写出一个 q 的值, 并加以说明; 若不存在, 请说明理由.

21. 已知 a, b, c,d 是不全为零的实数, 函数 $f(x)=bx^2+cx+d$, $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. 方程 $f(x)=0$ 有实数根, 且 $f(x)=0$ 的实数根都是 $g(f(x))=0$ 的根; 反之, $g(f(x))=0$ 的实数根都是 $f(x)=0$ 的根.
(1) 求 d 的值;
(2) 若 $a=0$, 求 c 的取值范围;
(3) 若 $a=1$, $f(1)=0$, 求 c 的取值范围.

2007 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 化简 $\dfrac{2+4\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$ 的结果是 （ ）

(A) $2+\mathrm{i}$ (B) $-2+\mathrm{i}$ (C) $2-\mathrm{i}$ (D) $-2-\mathrm{i}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$ （ ）

(A) 等于 0 (B) 等于 1 (C) 等于 3 (D) 不存在

3. 若 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=3$, 则 $\cot\alpha$ 等于 （ ）

(A) -2 (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 2

4. 已知 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式中, 各项系数的和与其各项二项式系数的和之比为 64, 则 n 等于 （ ）

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

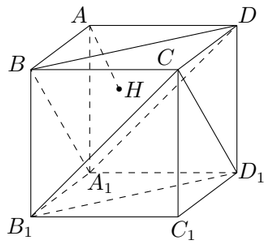
5. 若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则下列命题中正确的是 （ ）

(A) $\sin x<\dfrac{3}{\pi}x$ (B) $\sin x>\dfrac{3}{\pi}x$ (C) $\sin x<\dfrac{4}{\pi^2}x^2$ (D) $\sin x>\dfrac{4}{\pi^2}x^2$

6. 若集合 $M=\{0,1,2\}$, $N=\{(x,y)|x-2y+1\geqslant 0 \text{ 且 } x-2y-1\leqslant 0, x,y\in M\}$, 则 N 中元素的个数为 （ ）

(A) 9 (B) 6 (C) 4 (D) 2

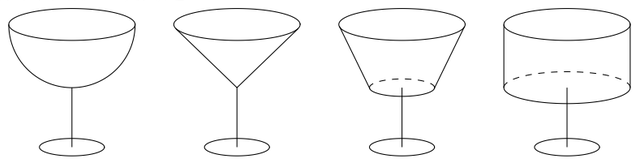
7. 如图, 正方体 AC_1 的棱长为 1, 过点 A 作平面 A_1BD 的垂线, 垂足为点 H. 则以下命题中, 错误的是 （ ）



(A) 点 H 是 $\triangle A_1BD$ 的垂心 (B) AH 垂直平面 CB_1D_1

(C) AH 的延长线经过点 C_1 (D) 直线 AH 和 BB_1 所成的角为 45°

8. 四位好朋友在一次聚会上, 他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯, 如图所示, 盛满酒后他们约定: 先各自饮杯中酒的一半. 设剩余酒的高度从左到右依次为 h_1, h_2, h_3, h_4, 则它们的大小关系正确的是 （ ）



(A) $h_2>h_1>h_4$ (B) $h_1>h_2>h_3$ (C) $h_3>h_2>h_4$ (D) $h_2>h_4>h_1$

9. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\dfrac{1}{2}$, 右焦点为 $F(c,0)$, 方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2, 则点 $P(x_1,x_2)$ （ ）

(A) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 内 (B) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 上

(C) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 外 (D) 以上三种情形都有可能

10. 将一个骰子连续抛掷三次, 它落地时向上的点数依次成等差数列的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{9}$ (B) $\dfrac{1}{12}$ (C) $\dfrac{1}{15}$ (D) $\dfrac{1}{18}$

11. 设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上以 5 为周期的可导偶函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=5$ 处的切线的斜率为 （ ）

(A) $-\dfrac{1}{5}$ (B) 0 (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) 5

12. 设 p: $f(x)=\mathrm{e}^x+\ln x+2x^2+mx+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, q: $m\geqslant -5$, 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

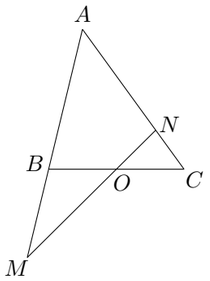
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

二、填空题

13. 设函数 $y=4+\log_2(x-1)$ $(x\geqslant 3)$, 则其反函数的定义域为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 对于任意 p, $q\in\mathbf{N}^*$, 有 $a_p+a_q=a_{p+q}$, 若 $a_1=\dfrac{1}{9}$, 则 $a_{36}=$_____.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 的中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB、AC 于不同的两点 M、N, 若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$, 则 $m+n$ 的值为_____.



16. 设有一组圆 C_1: $(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4$ $(k\in\mathbf{N}^*)$. 下面四个命题:

A. 存在一条定直线与所有的圆均相切;

B. 存在一条定直线与所有的圆均相交;

C. 存在一条定直线与所有的圆均不相交;

D. 所有的圆均不经过原点.

其中真命题的代号是_____. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}cx+1, & 0<x<c\\ 2^{-\frac{x}{c^2}}+k, & c\leqslant x<1\end{cases}$ 在区间 $(0,1)$ 内连续, 且 $f(c^2)=\dfrac{9}{8}$.

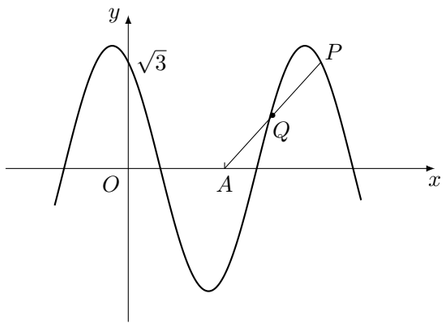
(1) 求实数 k 和 c 的值;

(2) 解不等式 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$.

18. 如图, 函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$ $\left(x\in\mathbf{R},\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0,\sqrt{3})$, 且在该点处切线的斜率为 -2.

(1) 求 θ 和 ω 的值;

(2) 已知点 $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$, 点 P 是该函数图象上的一点, 点 $Q(x_0,y_0)$ 是 PA 的中点, 当 $y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_0\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时, 求 x_0 的值.



19. 某陶瓷厂准备烧制甲、乙、丙三件不同的工艺品, 制作过程中必须先后经过两次烧制, 当第一次烧制合格后可进入第二次烧制, 两次烧制过程相互独立. 根据该厂现有的技术水平, 经过第一次烧制后, 甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.5, 0.6, 0.4. 经过第二次烧制后, 甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.6, 0.5, 0.75.

(1) 求第一次烧制后恰有一件产品合格的概率;

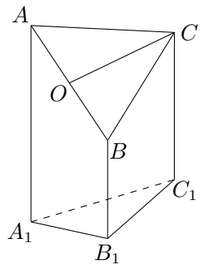
(2) 经过前后两次烧制后, 合格工艺品的个数为 ξ, 求随机变量 ξ 的期望.

20. 如图是一个直三棱柱 (以 $A_1B_1C_1$ 为底面) 被一平面所截得到的几何体, 截面为 ABC. 已知 $A_1B_1 = B_1C_1 = 1$, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$, $AA_1 = 4$, $BB_1 = 2$, $CC_1 = 3$.

(1) 设点 O 是 AB 的中点, 证明: OC // 平面 $A_1B_1C_1$;

(2) 求二面角 $B - AC - A_1$ 的大小;

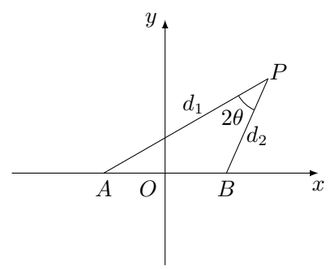
(3) 求此几何体的体积.



21. 设动点 P 到点 $A(-1,0)$ 和 $B(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2, $\angle APB = 2\theta$. 且存在常数 λ $(0 < \lambda < 1)$, 使得 $d_1 d_2 \sin^2\theta = \lambda$.

(1) 证明: 动点 P 的轨迹 C 为双曲线, 并求出 C 的方程;

(2) 过点 B 作直线交双曲线 C 的右支于 M、N 两点, 试确定 λ 的范围, 使 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$, 其中点 O 为坐标原点.



22. 设正整数数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_2 = 4$, 且对于任何 $n \in \mathbf{N}^*$, 有 $2 + \dfrac{1}{a_{n+1}} < \dfrac{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+1}}}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}} < 2 + \dfrac{1}{a_n}$.

(1) 求 a_1, a_3;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

2007 年普通高等学校招生考试（江西卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $M=\{0,1\}$, $I=\{0,1,2,3,4,5\}$, 则 $\complement_I M$ 为 （ ）

(A) $\{0,1\}$ (B) $\{2,3,4,5\}$ (C) $\{0,2,3,4,5\}$ (D) $\{1,2,3,4,5\}$

2. 函数 $y=5\tan(2x+1)$ 的最小正周期为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

3. 函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{x-4}$ 的定义域为 （ ）

(A) $(1,4)$ (B) $[1,4)$

(C) $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$ (D) $(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$

4. 若 $\tan\alpha=3$, $\tan\beta=\dfrac{4}{3}$, 则 $\tan(\alpha-\beta)$ 等于 （ ）

(A) -3 (B) $-\dfrac{1}{3}$ (C) 3 (D) $\dfrac{1}{3}$

5. 设 $(x^2+1)(2x+1)^9=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_{11}(x+2)^{11}$, 则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}$ 的值为 （ ）

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

6. 一袋中装有大小相同, 编号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的八个球, 从中有放回地每次取一个球, 共取 2 次, 则取得两个球的编号和不小于 15 的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{32}$ (B) $\dfrac{1}{64}$ (C) $\dfrac{3}{32}$ (D) $\dfrac{3}{64}$

7. 连接抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 与点 $M(1,0)$ 所得的线段与抛物线交于点 A, 设点 O 为坐标原点, 则三角形 OAM 的面积为 （ ）

(A) $-1+\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$ (C) $1+\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$

8. 若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则下列命题正确的是 （ ）

(A) $\sin x<\dfrac{2}{\pi}x$ (B) $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$ (C) $\sin x<\dfrac{3}{\pi}x$ (D) $\sin x>\dfrac{3}{\pi}x$

9. 四面体 $ABCD$ 外接球球心在 CD 上, 且 $CD=2$, $AB=\sqrt{3}$, 在外接球面上两点 A、B 间的球面距离是 （ ）

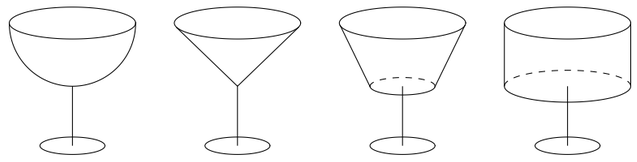
(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{6}$

10. 设 p: $f(x)=x^3+2x^2+mx+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增, q: $m\geqslant\dfrac{4}{3}$, 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

11. 四位好朋友在一次聚会上, 他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯, 如图所示, 盛满酒后他们约定: 先各自饮杯中酒的一半. 设剩余酒的高度从左到右依次为 h_1, h_2, h_3, h_4, 则它们的大小关系正确的是 （ ）



(A) $h_2>h_1>h_4$ (B) $h_1>h_2>h_3$ (C) $h_3>h_2>h_4$ (D) $h_2>h_4>h_1$

12. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\dfrac{1}{2}$, 右焦点为 $F(c,0)$, 方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2, 则点 $P(x_1,x_2)$ （ ）

(A) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 上 (B) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 外

(C) 必在圆 $x^2+y^2=2$ 内 (D) 以上三种情形都有可能

二、填空题

13. 在平面直角坐标系中, 正方形 $OABC$ 的对角线 OB 的两端点分别为 $O(0,0)$, $B(1,1)$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_{12}=21$, 则 $a_2+a_5+a_8+a_{11}=$_____.

15. 已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$, 若函数 $y=f(1+x)$ 的图像经过点 $(3,1)$, 则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象必经过点_____.

16. 如图, 正方体 AC_1 的棱长为 1, 过点 A 作平面 A_1BD 的垂线, 垂足为点 H. 有下列四个命题:

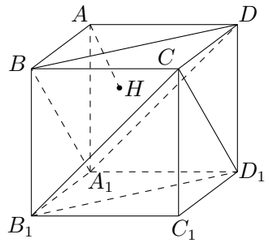
A. 点 H 是 $\triangle A_1BD$ 的垂心;

B. AH 垂直平面 CB_1D_1;

C. 二面角 $C-B_1D_1-C_1$ 的正切值为 $\sqrt{2}$;

D. 点 H 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离为 $\dfrac{3}{4}$.

其中真命题的代号是_____. (写出所有真命题的代号)



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}cx+1, & 0<x<c\\ 2^{-\frac{x}{c^2}}+1, & c\leqslant x<1\end{cases}$ 在区间 $(0,1)$ 内连续, 且 $f(c^2)=\dfrac{9}{8}$.

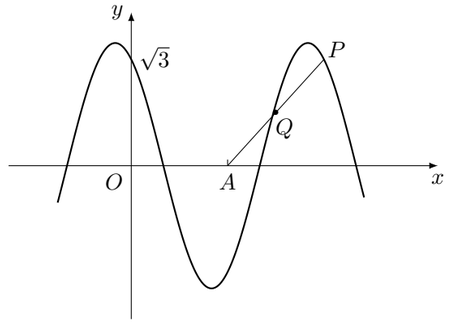
(1) 求常数 c 的值;

(2) 解不等式 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$.

18. 如图, 函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$ $\left(x\in\mathbf{R},\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0,\sqrt{3})$, 且在该点处切线的斜率为 -2.

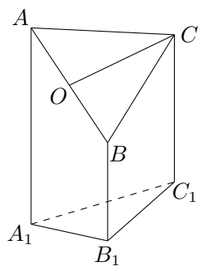
(1) 求 θ 和 ω 的值;

(2) 已知点 $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$, 点 P 是该函数图象上的一点, 点 $Q(x_0,y_0)$ 是 PA 的中点, 当 $y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_0\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时, 求 x_0 的值.



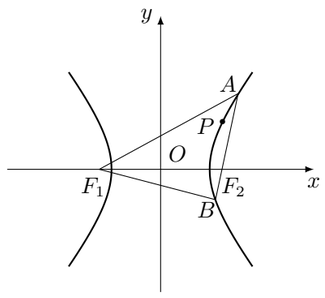
19. 栽培甲、乙两种果树, 先要培育成苗, 然后再进行移栽. 已知甲、乙两种果树成苗的概率分别为 0.6, 0.5, 移栽后成活的概率分别为 0.7, 0.9.
(1) 求甲、乙两种果树至少有一种果树成苗的概率;
(2) 求恰好一种果树能栽培成苗且移栽成活的概率.

20. 如图是一个直三棱柱 (以 $A_1B_1C_1$ 为底面) 被一平面所截得到的几何体, 截面为 ABC. 已知 $A_1B_1=B_1C_1=1$, $\angle A_1B_1C_1=90^\circ$, $AA_1=4$, $BB_1=2$, $CC_1=3$.
(1) 设点 O 是 AB 的中点, 证明: OC // 平面 $A_1B_1C_1$;
(2) 求 AB 与平面 AA_1C_1C 所成的角的大小;
(3) 求此几何体的体积.



21. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_1=1$, $a_2=3$.
(1) 求最小的自然数 n, 使 $a_n\geqslant 2007$;
(2) 求和: $T_{2n}=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{3}{a_3}-\cdots-\dfrac{2n}{a_{2n}}$.

22. 设动点 P 到两定点 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2, $\angle F_1PF_2=2\theta$, 且存在常数 λ $(0<\lambda<1)$, 使得 $d_1d_2\sin^2\theta=\lambda$.
(1) 证明: 动点 P 的轨迹 C 为双曲线, 并求出 C 的方程;
(2) 如图, 过点 F_2 的直线与双曲线 C 的右支交于 A、B 两点. 问: 是否存在 λ, 使 $\triangle F_1AB$ 是以点 B 为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.



2007 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$ （ ）

(A) $\{1\}$　(B) $\{5\}$　(C) $\{2,4\}$　(D) $\{1,2,4,5\}$

2. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数图象过点 $(1,5)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象必过点 （ ）

(A) $(1,1)$　(B) $(1,5)$　(C) $(5,1)$　(D) $(5,5)$

3. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$, 且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\right)\boldsymbol{b}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 （ ）

(A) 0　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

4. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_3=9$, $S_6=36$, 则 $a_7+a_8+a_9=$ （ ）

(A) 63　(B) 45　(C) 36　(D) 27

5. 若 $\theta\in\left(\dfrac{3}{4}\pi,\dfrac{5}{4}\pi\right)$, 则复数 $(\cos\theta+\sin\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{i}$ 在复平面内所对应的点在 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

6. 若函数 $y=f(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后, 得到函数 $y=f(x+1)-2$ 的图象, 则向量 $\boldsymbol{a}=$ （ ）

(A) $(-1,-2)$　(B) $(1,-2)$　(C) $(-1,2)$　(D) $(1,2)$

7. 若 m、n 是两条不同的直线, α、β、γ 是三个不同的平面, 则下列命题中的真命题是 （ ）

(A) 若 $m\subset\beta$, $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp\alpha$

(B) 若 $\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(C) 若 $m\perp\beta$, $m\parallel\alpha$, 则 $\alpha\perp\beta$

(D) 若 $\alpha\perp\gamma$, $\alpha\perp\beta$, 则 $\beta\perp\gamma$

8. 已知变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\leqslant 0\\ x\geqslant 1\\ x+y-7\leqslant 0\end{cases}$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是（ ）

(A) $\left[\dfrac{9}{5},6\right]$　(B) $\left(-\infty,\dfrac{9}{5}\right]\cup[6,+\infty)$

(C) $(-\infty,3]\cup[6,+\infty)$　(D) $[3,6]$

9. 一个坛子里有编号为 1, 2, $\cdots$, 12 的 12 个大小相同的球, 其中 1 到 6 号球是红球, 其余的是黑球. 若从中任取两个球, 则取到的都是红球, 且至少有 1 个球的号码是偶数的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{22}$　(B) $\dfrac{1}{11}$　(C) $\dfrac{3}{22}$　(D) $\dfrac{2}{11}$

10. 设 p、q 是两个命题, p: $\log_{\frac{1}{2}}(|x|-3)>0$, q: $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}>0$, 则 p 是 q 的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

11. 设 P 为双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上的一点, F_1、F_2 是该双曲线的两个焦点. 若 $|P_1F|:|PF_2|=3:2$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 （ ）

(A) $6\sqrt{3}$　(B) 12　(C) $12\sqrt{3}$　(D) 24

12. 已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 仅当 $x=0$ 时的函数值为 0, 且 $f(x)\geqslant g(x)$, 那么下列情形不可能出现的是 （ ）

(A) 0 是 $f(x)$ 的极大值, 也是 $g(x)$ 的极大值

(B) 0 是 $f(x)$ 的极小值, 也是 $g(x)$ 的极小值

(C) 0 是 $f(x)$ 的极大值, 但不是 $g(x)$ 的极值

(D) 0 是 $f(x)$ 的极小值, 但不是 $g(x)$ 的极值

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a\cos x, & x\geqslant 0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a=$_____.

14. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点 P 到左准线的距离为 10, F 是该椭圆的左焦点. 若点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}\right)$, 则 $\left|\overrightarrow{OM}\right|=$_____.

15. 若一个底面边长为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 侧棱长为 $\sqrt{6}$ 的正六棱柱的所有顶点都在一个球的面上, 则此球的体积为_____.

16. 将数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 排成一列, 记第 i 个数为 a_i ($i=1,2,\cdots,6$). 若 $a_1\neq 1$, $a_3\neq 3$, $a_5\neq 5$, $a_1<a_3<a_5$, 则不同的排列方法共有_____种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\dfrac{\omega x}{2}$, $x\in\mathbf{R}$ (其中 $\omega>0$).

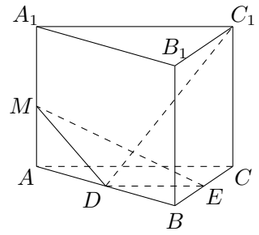
(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若对任意的 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $y=f(x)$, $x\in(a,a+\pi]$ 的图象与直线 $y=-1$ 有且仅有两个不同的交点, 试确定 ω 的值 (不必证明), 并求函数 $y=f(x)$, $x\in\mathbf{R}$ 的单调增区间.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=a$, D、E 分别为棱 AB、BC 的中点, M 为棱 AA_1 上的点, 二面角 $M-DE-A$ 为 30°.

(1) 证明: $A_1B_1\perp C_1D$;

(2) 求 MA 的长, 并求点 C 到平面 MDE 的距离.



19. 某企业准备投产一批特殊型号的产品, 已知该种产品的成本 C 与产量 q 的函数关系式为 $C=\dfrac{q^3}{3}-3q^2+20q+10$ ($q>0$). 该种产品的市场前景无法确定, 有三种可能出现的情形, 各种情形发生的概率及产品价格 p 与产量 q 的函数关系如下表所示:

市场情形	概率	价格 p 与产量 q 的函数关系式
好	0.4	$p=164-3q$
中	0.4	$p=101-3q$
差	0.2	$p=70-3q$

设 L_1、L_2、L_3 分别表示市场情形好、中、差时的利润, 随机变量 ξ_q 表示当产量为 q 而市场前景无法确定时的利润.

(1) 分别求利润 L_1、L_2、L_3 与产量 q 的函数关系式;

(2) 当产量 q 确定时, 求期望 $E\xi_q$;

(3) 试问产量 q 取何值时, $E\xi_q$ 取得最大值.

20. 已知正三角形 OAB 的三个顶点都在抛物线 $y^2=2x$ 上, 其中 O 为坐标原点, 设圆 C 是 $\triangle OAB$ 的外接圆 (点 C 为圆心).
(1) 求圆 C 的方程;
(2) 设圆 M 的方程为 $(x-4-7\cos\theta)^2+(y-7\sin\theta)^2=1$, 过圆 M 上任意一点 P 分别作圆 C 的两条切线 PE、PF, 切点为 E、F, 求 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的最大值和最小值.

21. 已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 与函数 $f(x)$、$g(x)$, $x\in\mathbf{R}$ 满足条件: $b_1=b$, $a_n=f(b_n)=g(b_{n+1})$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 若 $f(x)=tx+1$ $(t\neq 0,\,t\neq 2)$, $g(x)=2x$, $f(b)\neq g(b)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 求 t 的取值范围, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ (用 t 表示);
(2) 若函数 $y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $g(x)=f^{-1}(x)$, $b=1$, $f(1)<1$, 证明对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_{n+1}<a_n$.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-2t(\mathrm{e}^x+x)+x^2+2t^2+1$, $g(x)=\dfrac{1}{2}f'(x)$.
(1) 证明: 当 $t<2\sqrt{2}$ 时, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数;
(2) 对于给定的闭区间 $[a,b]$, 试说明存在实数 k, 当 $t>k$ 时, $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是减函数;
(3) 证明: $f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$.

2007 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{1,3\}$, $N=\{2,3,4\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{1\}$　(B) $\{2\}$　(C) $\{3\}$　(D) $\{1,2,3,4\}$

2. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数图象过点 $(1,5)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象必过点 （　）

(A) $(5,1)$　(B) $(1,5)$　(C) $(1,1)$　(D) $(5,5)$

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点坐标为 （　）

(A) $(-\sqrt{7},0)$、$(\sqrt{7},0)$　(B) $(0,-\sqrt{7})$、$(0,\sqrt{7})$

(C) $(-5,0)$、$(5,0)$　(D) $(0,-5)$、$(0,5)$

4. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$, 且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\right)\boldsymbol{b}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 （　）

(A) 0　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

5. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_3=9$, $S_6=36$, 则 $a_7+a_8+a_9=$ （　）

(A) 63　(B) 45　(C) 36　(D) 27

6. 若 m、n 是两条不同的直线, α、β、γ 是三个不同的平面, 则下列命题中的真命题是 （　）

(A) 若 $m\subset\beta$, $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp\alpha$

(B) 若 $m\perp\beta$, $m/\!/\alpha$, 则 $\alpha\perp\beta$

(C) 若 $\alpha\perp\gamma$, $\alpha\perp\beta$, 则 $\beta\perp\gamma$

(D) 若 $\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$, $m/\!/n$, 则 $\alpha/\!/\beta$

7. 若函数 $y=f(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后, 得到函数 $y=f(x-1)-2$ 的图象, 则向量 $\boldsymbol{a}=$ （　）

(A) $(1,-2)$　(B) $(1,2)$　(C) $(-1,-2)$　(D) $(-1,2)$

8. 已知变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\leqslant 0\\ x\geqslant 1\\ x+y-7\leqslant 0\end{cases}$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是（　）

(A) $\left[\dfrac{9}{5},6\right]$　(B) $\left(-\infty,\dfrac{9}{5}\right]\cup[6,+\infty)$

(C) $(-\infty,3]\cup[6,+\infty)$　(D) $[3,6]$

9. 函数 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)$ 的单调减区间为 （　）

(A) $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$　(B) $(3,+\infty)$　(C) $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$　(D) $(-\infty,2)$

10. 一个坛子里有编号为 1, 2, $\cdots$, 12 的 12 个大小相同的球, 其中 1 到 6 号球是红球, 其余的是黑球. 若从中任取两个球, 则取到的都是红球, 且至少有 1 个球的号码是偶数的概率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{22}$　(B) $\dfrac{1}{11}$　(C) $\dfrac{3}{22}$　(D) $\dfrac{2}{11}$

11. 设 p、q 是两个命题, p: $|x|-3>0$, q: $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}>0$, 则 p 是 q 的（　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

12. 将数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 排成一列, 记第 i 个数为 a_i ($i=1,2,\cdots,6$). 若 $a_1\neq 1$, $a_3\neq 3$, $a_5\neq 5$, $a_1<a_3<a_5$, 则不同的排列方法种数为 （　）

(A) 18　(B) 30　(C) 36　(D) 48

二、填空题

13. 已知函数 $y=f(x)$ 为奇函数, 若 $f(3)-f(2)=1$, 则 $f(-2)-f(-3)=$_____.

14. $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^8$ 展开式中含有 x 的整数次幂的项的系数之和为_____. (用数字作答)

15. 若一个底面边长为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 侧棱长为 $\sqrt{6}$ 的正六棱柱的所有顶点都在一个球的面上, 则此球的体积为_____.

16. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点 P 到左准线的距离为 10, F 是该椭圆的左焦点. 若点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}\right)$, 则 $\left|\overrightarrow{OM}\right|=$_____.

三、解答题

17. 某公司在过去几年内使用某种型号的灯管 1000 支, 该公司对这些灯管的使用寿命 (单位: 小时) 进行了统计, 统计结果如下表所示:

分组	$[500,900)$	$[900,1100)$	$[1100,1300)$	$[1300,1500)$
频数	48	121	208	223
频率				
分组	$[1500,1700)$	$[1700,1900)$	$[1900,+\infty)$	
频数	193	165	42	
频率				

(1) 将各组的频率填入表中;

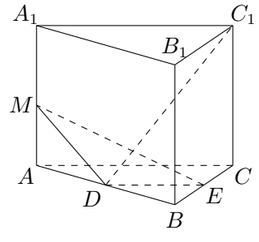
(2) 根据上述统计结果, 计算灯管使用寿命不足 1500 小时的频率;

(3) 该公司某办公室新安装了这种型号的灯管 3 支, 若将上述频率作为概率, 试求至少有 2 支灯管的寿命不足 1500 小时的概率.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=a$, D、E 分别为棱 AB、BC 的中点, M 为棱 AA_1 上的点, 二面角 $M-DE-A$ 为 30°.

(1) 证明: $A_1B_1\perp C_1D$;

(2) 求 MA 的长, 并求点 C 到平面 MDE 的距离.



19. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\dfrac{\omega x}{2}$, $x\in\mathbf{R}$ (其中 $\omega>0$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-1$ 的两个相邻交点间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$, 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

20. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1=2$, $b_1=1$, 且 $\begin{cases} a_n=\dfrac{3}{4}a_{n-1}+\dfrac{1}{4}b_{n-1}+1 \\ b_n=\dfrac{1}{4}a_{n-1}+\dfrac{3}{4}b_{n-1}+1 \end{cases}$ $(n\geqslant 2)$.

(1) 令 $c_n=a_n+b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和.

21. 已知正三角形 OAB 的三个顶点都在抛物线 $y^2=2x$ 上, 其中 O 为坐标原点, 设圆 C 是 $\triangle OAB$ 的外接圆 (点 C 为圆心).

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 设圆 M 的方程为 $(x-4-7\cos\theta)^2+(y-7\sin\theta)^2=1$, 过圆 M 上任意一点 P 分别作圆 C 的两条切线 PE、PF, 切点为 E、F, 求 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的最大值和最小值.

22. 已知函数 $f(x)=x^2-9x^2\cos\alpha+48x\cos\beta+18\sin^2\alpha$, $g(x)=f'(x)$, 且对任意的实数 t 均有 $g(1+\cos t)\geqslant 0$, $g(3+\sin t)\leqslant 0$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若对任意的 $m\in[-26,6]$, 恒有 $f(x)\geqslant x^2-mx-11$, 求 x 的取值范围.

2007 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知命题 p: $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin x \leqslant 1$, 则 （ ）

(A) $\neg p$: $\exists x \in \mathbf{R}$, $\sin x \geqslant 1$　　(B) $\neg p$: $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin x \geqslant 1$

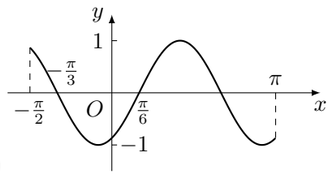
(C) $\neg p$: $\exists x \in \mathbf{R}$, $\sin x > 1$　　(D) $\neg p$: $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin x > 1$

2. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1)$, 则向量 $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}=$ （ ）

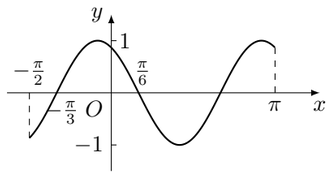
(A) $(-2,-1)$　　(B) $(-2,1)$　　(C) $(-1,0)$　　(D) $(-1,2)$

3. 函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 的简图是 （ ）

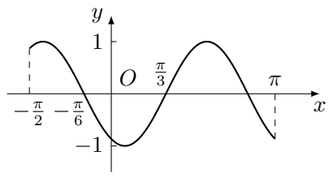
(A)



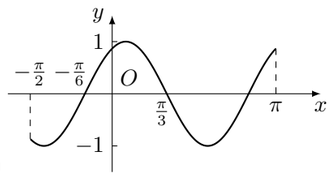
(B)



(C)



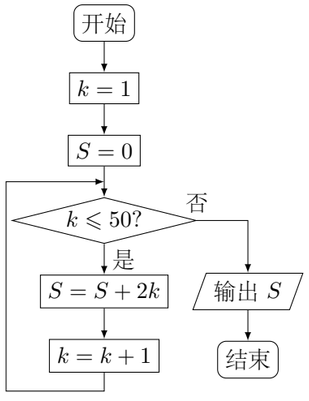
(D)



4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_{10}=10$, 其前 10 项和 $S_{10}=70$, 则其公差 $d=$（ ）

(A) $-\frac{2}{3}$　　(B) $-\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{2}{3}$

5. 如果执行下面的程序框图, 那么输出的 $S=$ （ ）



(A) 2450　　(B) 2500　　(C) 2550　　(D) 2652

6. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$ 在抛物线上, 且 $2x_2=x_1+x_3$, 则有 （ ）

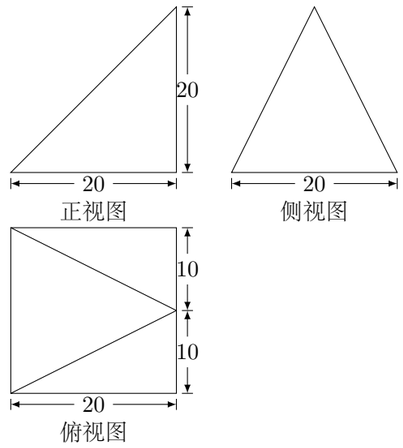
(A) $|FP_1|+|FP_2|=|FP_3|$　　(B) $|FP_1|^2+|FP_2|^2=|FP_3|^2$

(C) $2|FP_2|=|FP_1|+|FP_3|$　　(D) $|FP_2|^2=|FP_1|\cdot|FP_3|$

7. 已知 $x>0$, $y>0$, x, a, b, y 成等差数列, x, c, d, y 成等比数列, 则 $\frac{(a+b)^2}{cd}$ 的最小值是 （ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

8. 已知某个几何体的三视图如下, 根据图中标出的尺寸 (单位: cm), 可得这个几何体的体积是 （ ）



(A) $\frac{4000}{3}\text{cm}^3$　　(B) $\frac{8000}{3}\text{cm}^3$　　(C) 2000cm^3　　(D) 4000cm^3

9. 若 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\cos\alpha+\sin\alpha$ 的值为 （ ）

(A) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

10. 曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ 在点 $(4,\mathrm{e}^2)$ 处的切线与坐标轴所围三角形的面积为 （ ）

(A) $\frac{9}{2}\mathrm{e}^2$　　(B) $4\mathrm{e}^2$　　(C) $2\mathrm{e}^2$　　(D) e^2

11. 甲、乙、丙三名射箭运动员在某次测试中各射箭 20 次, 三人的测试成绩如下表

甲的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	5	5	5	5

乙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	6	4	4	6

丙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	4	6	6	4

s_1、s_2、s_3 分别表示甲、乙、丙三名运动员这次测试成绩的标准差, 则有（ ）

(A) $s_3>s_1>s_2$　(B) $s_2>s_1>s_3$　(C) $s_1>s_2>s_3$　(D) $s_2>s_3>s_1$

12. 一个四棱锥和一个三棱锥恰好可以拼接成一个三棱柱, 这个四棱锥的底面为正方形, 且底面边长与各侧棱长相等, 这个三棱锥的底面边长与各侧棱长也都相等. 设四棱锥、三棱锥、三棱柱的高分别为 h_1, h_2, h, 则 $h_1:h_2:h=$ （ ）

(A) $\sqrt{3}:1:1$　　(B) $\sqrt{3}:2:2$　　(C) $\sqrt{3}:2:\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{3}:2:\sqrt{3}$

二、填空题

13. 已知双曲线的顶点到渐近线的距离为 2, 焦点到渐近线的距离为 6, 则该双曲线的离心率为_____.

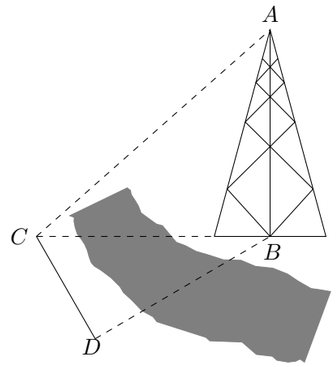
14. 设函数 $f(x)=\frac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数, 则 $a=$_____.

15. i 是虚数单位, $\frac{-5+10\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=$_____. (用 $a+b\mathrm{i}$ 的形式表示, a, $b\in\mathbf{R}$)

16. 某校安排 5 个班到 4 个工厂进行社会实践, 每个班去一个工厂, 每个工厂至少安排一个班, 不同的安排方法共有_____种. (用数字作答)

三、解答题

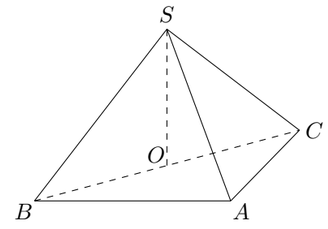
17. 如图, 测量河对岸的塔高 AB 时, 可以选与塔底 B 在同一水平面内的两个测点 C 与 D. 现测得 $\angle BCD=\alpha$, $\angle BDC=\beta$, $CD=s$, 并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ, 求塔高 AB.



18. 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 侧面 SAB 与侧面 SAC 均为等边三角形, $\angle BAC=90^\circ$, O 为 BC 中点.

(1) 证明: $SO\perp$ 平面 ABC;

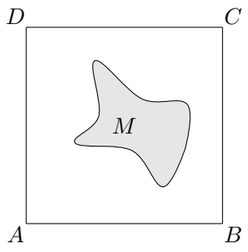
(2) 求二面角 $A-SC-B$ 的余弦值.



19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 经过点 $\left(0,\sqrt{2}\right)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 有两个不同的交点 P 和 Q.
(1) 求 k 的取值范围;
(2) 设椭圆与 x 轴正半轴、y 轴正半轴的交点分别为 A、B, 是否存在常数 k, 使得向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线? 如果存在, 求 k 值; 如果不存在, 请说明理由.

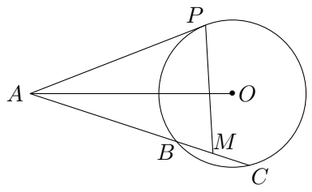
20. 如图, 面积为 S 的正方形 $ABCD$ 中有一个不规则的图形 M, 可按下面方法估计 M 的面积: 在正方形 $ABCD$ 中随机投掷 n 个点, 若 n 个点中有 m 个点落入 M 中, 则 M 的面积的估计值为 $\frac{m}{n}S$. 假设正方形 $ABCD$ 的边长为 2, M 的面积为 1, 并向正方形 $ABCD$ 中随机投掷 10000 个点, 以 X 表示落入 M 中的点的数目.
(1) 求 X 的均值 EX;
(2) 求用以上方法估计 M 的面积时, M 的面积的估计值与实际值之差在区间 $(-0.03,0.03)$ 内的概率.
附表: $P(k)=\sum\limits_{i=0}^{k}\mathrm{C}_{10000}^{i}\times 0.25^{i}\times 0.75^{10000-i}$

k	2424	2425	2574	2575
$P(k)$	0.0403	0.0423	0.9570	0.9590



21. 设函数 $f(x)=\ln(x+a)+x^2$.
(1) 若当 $x=-1$ 时, $f(x)$ 取得极值, 求 a 的值, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x)$ 存在极值, 求 a 的取值范围, 并证明所有极值之和大于 $\ln\frac{\mathrm{e}}{2}$.

22. 如图, 已知 AP 是 $\odot O$ 的切线, P 为切点, AC 是 $\odot O$ 的割线, 与 $\odot O$ 交于 B、C 两点, 圆心 O 在 $\angle PAC$ 的内部, 点 M 是 BC 的中点.
(1) 证明 A, P, O, M 四点共圆;
(2) 求 $\angle OAM+\angle APM$ 的大小.



23. $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的极坐标方程分别为 $\rho=4\cos\theta$, $\rho=-4\sin\theta$.
(1) 把 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的极坐标方程化为直角坐标方程;
(2) 求经过 $\odot O_1$, $\odot O_2$ 交点的直线的直角坐标方程.

24. 设函数 $f(x)=|2x+1|-|x-4|$.
(1) 解不等式 $f(x)>2$;
(2) 求函数 $y=f(x)$ 的最小值.

2007 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|x>-1\}$, $B=\{x|-2<x<2\}$, 则 $A\bigcup B=$ （　）

(A) $\{x|x>-2\}$　(B) $\{x|x>-1\}$

(C) $\{x|-2<x<-1\}$　(D) $\{x|-1<x<2\}$

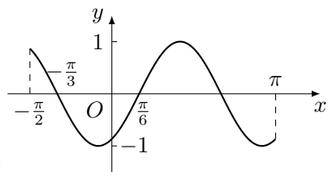
2. 已知命题 p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x\leqslant 1$, 则 （　）

(A) $\neg p$: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x\geqslant 1$　(B) $\neg p$: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x\geqslant 1$

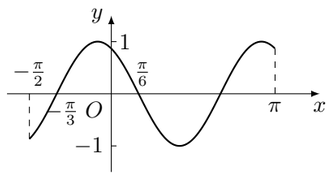
(C) $\neg p$: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x>1$　(D) $\neg p$: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\sin x>1$

3. 函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 的简图是 （　）

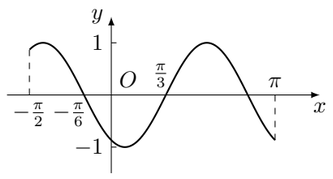
(A)



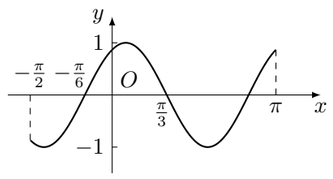
(B)



(C)



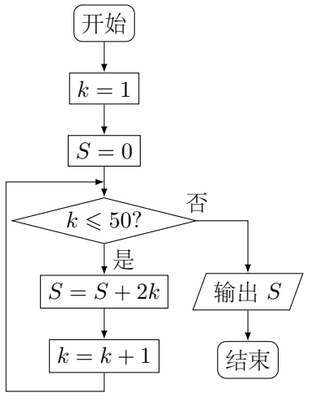
(D)



4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1)$, 则向量 $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}=$ （　）

(A) $(-2,-1)$　(B) $(-2,1)$　(C) $(-1,0)$　(D) $(-1,2)$

5. 如果执行下面的程序框图, 那么输出的 $S=$ （　）



(A) 2450　(B) 2500　(C) 2550　(D) 2652

6. 已知 a, b, c, d 成等比数列, 且曲线 $y=x^2-2x+3$ 的顶点是 (b,c), 则 ad 等于 （　）

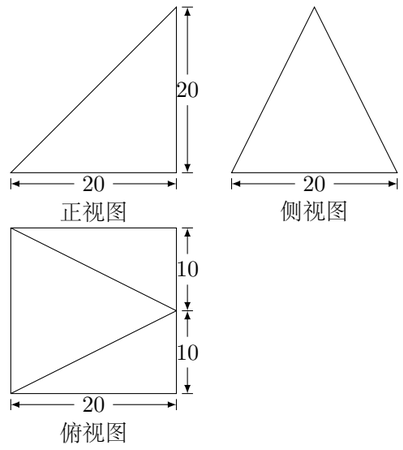
(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) -2

7. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$ 在抛物线上, 且 $2x_2=x_1+x_3$, 则有 （　）

(A) $|FP_1|+|FP_2|=|FP_3|$　(B) $|FP_1|^2+|FP_2|^2=|FP_3|^2$

(C) $2|FP_2|=|FP_1|+|FP_3|$　(D) $|FP_2|^2=|FP_1|\cdot|FP_3|$

8. 已知某个几何体的三视图如下, 根据图中标出的尺寸 (单位: cm), 可得这个几何体的体积是 （　）



(A) $\dfrac{4000}{3}\text{cm}^3$　(B) $\dfrac{8000}{3}\text{cm}^3$　(C) 2000cm^3　(D) 4000cm^3

9. 若 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\cos\alpha+\sin\alpha$ 的值为 （　）

(A) $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

10. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 $(2,\mathrm{e}^2)$ 处的切线与坐标轴所围三角形的面积为 （　）

(A) $\dfrac{9}{4}\mathrm{e}^2$　(B) $2\mathrm{e}^2$　(C) e^2　(D) $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$

11. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的各顶点都在一个半径为 r 的球面上, 球心 O 在 AB 上, $SO\perp$ 底面 ABC, $AC=\sqrt{2}r$, 则球的体积与三棱锥体积之比是 （　）

(A) π　(B) 2π　(C) 3π　(D) 4π

12. 甲、乙、丙三名射箭运动员在某次测试中各射箭 20 次, 三人的测试成绩如下表

甲的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	5	5	5	5

乙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	6	4	4	6

丙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	4	6	6	4

s_1、s_2、s_3 分别表示甲、乙、丙三名运动员这次测试成绩的标准差, 则有（　）

(A) $s_3>s_1>s_2$　(B) $s_2>s_1>s_3$　(C) $s_1>s_2>s_3$　(D) $s_2>s_3>s_1$

二、填空题

13. 已知双曲线的顶点到渐近线的距离为 2, 焦点到渐近线的距离为 6, 则该双曲线的离心率为_____.

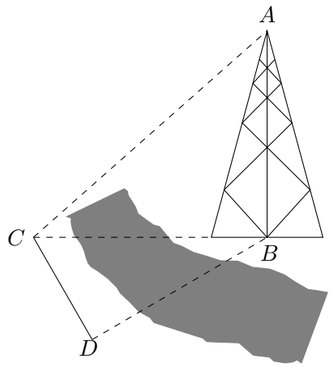
14. 设函数 $f(x)=(x+1)(x+a)$ 为偶函数, 则 $a=$_____.

15. i 是虚数单位, $\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2+3\mathrm{i}^3+\cdots+8\mathrm{i}^8=$_____. (用 $a+b\mathrm{i}$ 的形式表示, a, $b\in\mathbf{R}$)

16. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_4+a_6=6$, 其前 5 项和 $S_5=10$, 则其公差 $d=$_____.

三、解答题

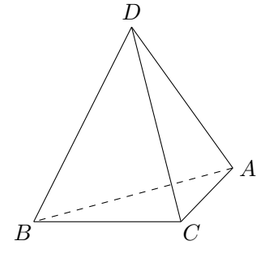
17. 如图, 测量河对岸的塔高 AB 时, 可以选与塔底 B 在同一水平面内的两个测点 C 与 D. 现测得 $\angle BCD=\alpha$, $\angle BDC=\beta$, $CD=s$, 并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ, 求塔高 AB.



18. 如图, A, B, C, D 为空间四点. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=BC=\sqrt{2}$, 等边三角形 ADB 以 AB 为轴运动.

(1) 当平面 $ADB\perp$ 平面 ABC 时, 求 CD;

(2) 当 $\triangle ADB$ 转动时, 是否总有 $AB\perp CD$? 证明你的结论.



19. 设函数 $f(x)=\ln(2x+3)+x^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$ 的最大值和最小值.

20. 设有关于 x 的一元二次方程 $x^2+2ax+b^2=0$.

(1) 若 a 是从 0, 1, 2, 3 四个数中任取的一个数, b 是从 0, 1, 2 三个数中任取的一个数, 求上述方程有实根的概率;

(2) 若 a 是从区间 $[0,3]$ 任取的一个数, b 是从区间 $[0,2]$ 任取的一个数, 求上述方程有实根的概率.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $x^2+y^2-12x+32=0$ 的圆心为 Q, 过点 $P(0,2)$ 且斜率为 k 的直线与圆 Q 相交于不同的交点 A、B.

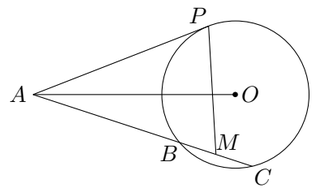
(1) 求 k 的取值范围;

(2) 是否存在常数 k, 使得向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 共线? 如果存在, 求 k 值; 如果不存在, 请说明理由.

22. 如图, 已知 AP 是 $\odot O$ 的切线, P 为切点, AC 是 $\odot O$ 的割线, 与 $\odot O$ 交于 B、C 两点, 圆心 O 在 $\angle PAC$ 的内部, 点 M 是 BC 的中点.

(1) 证明 A, P, O, M 四点共圆;

(2) 求 $\angle OAM+\angle APM$ 的大小.



23. $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的极坐标方程分别为 $\rho=4\cos\theta$, $\rho=-4\sin\theta$.

(1) 把 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 求经过 $\odot O_1$, $\odot O_2$ 交点的直线的直角坐标方程.

24. 设函数 $f(x)=|2x+1|-|x-4|$.

(1) 解不等式 $f(x)>2$;

(2) 求函数 $y=f(x)$ 的最小值.

2007 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

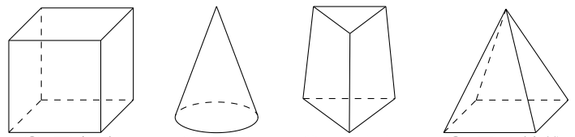
1. 若 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ (i 为虚数单位), 则 $z^2=-1$ 的 θ 值可能是 （ ）

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

2. 已知集合 $M=\{-1,1\}$, $N=\left\{x\middle|\frac{1}{2}<2^{x+1}<4, x\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 $M\cap N=$（ ）

(A) $\{-1,1\}$ (B) $\{-1\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{-1,0\}$

3. 下列几何体各自的三视图中, 有且仅有两个视图相同的是 （ ）



① 正方体 ② 圆锥 ③ 三棱台 ④ 正四棱锥

(A) ①② (B) ①③ (C) ①④ (D) ②④

4. 设 $a\in\left\{-1,1,\frac{1}{2},3\right\}$, 则使函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数的所有 α 值为 （ ）

(A) 1, 3 (B) −1, 1 (C) −1, 3 (D) −1, 1, 3

5. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期和最大值分别为（ ）

(A) π, 1 (B) π, $\sqrt{2}$ (C) 2π, 1 (D) 2π, $\sqrt{2}$

6. 给出下列三个等式: $f(xy)=f(x)+f(y)$, $f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. 下列函数中不满足其中任何一个等式的是 （ ）

(A) $f(x)=3^x$ (B) $f(x)=\sin x$ (C) $f(x)=\log_2 x$ (D) $f(x)=\tan x$

7. 命题“对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$”的否定是 （ ）

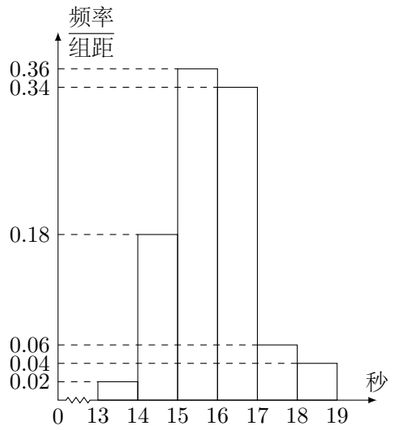
(A) 不存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$

(B) 存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$

(C) 存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1>0$

(D) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1>0$

8. 某班 50 名学生在一次百米测试中, 成绩全部介于 13 秒与 19 秒之间, 将测试结果按如下方式分成六组: 第一组, 成绩大于等于 13 秒且小于 14 秒; 第二组, 成绩大于等于 14 秒且小于 15 秒; $\cdots$; 第六组, 成绩大于等于 18 秒且小于 19 秒. 如图是按上述分组方法得到的频率分布直方图. 设成绩小于 17 秒的学生人数占全班总人数的百分比为 x, 成绩大于等于 15 秒且小于 17 秒的学生人数为 y, 则从频率分布直方图中可分析出 x 和 y 分别为（ ）



(A) 0.9, 35 (B) 0.9, 45 (C) 0.1, 35 (D) 0.1, 45

9. 下列各小题中, p 是 q 的充要条件的是 （ ）

① p: $m<2$ 或 $m>6$; q: $y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同的零点.

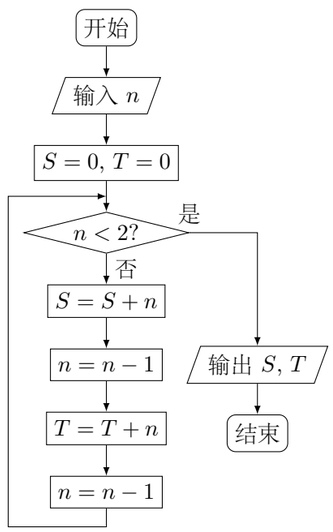
② p: $\frac{f(-x)}{f(x)}=1$; q: $y=f(x)$ 是偶函数.

③ p: $\cos\alpha=\cos\beta$; q: $\tan\alpha=\tan\beta$.

④ p: $A\cap B=A$; q: $\complement_U B\subseteq\complement_U A$.

(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ①④

10. 阅读如图的程序框图, 若输入的 n 是 100, 则输出的变量 S 和 T 的值依次是 （ ）



(A) 2500, 2500 (B) 2550, 2550 (C) 2500, 2550 (D) 2550, 2500

11. 在直角 $\triangle ABC$ 中, CD 是斜边 AB 上的高, 则下列等式不成立的是（ ）

(A) $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

(B) $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(C) $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$

(D) $\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\frac{\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)\times\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}$

12. 位于坐标原点的一个质点 P 按下述规则移动: 质点每次移动一个单位; 移动的方向为向上或向右, 并且向上、向右移动的概率都是 $\frac{1}{2}$. 质点 P 移动 5 次后位于点 $(2,3)$ 的概率为 （ ）

(A) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (B) $\mathrm{C}_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $\mathrm{C}_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (D) $\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5$

二、填空题

13. 设 O 是坐标原点, F 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, A 是抛物线上的一点, $\overrightarrow{FA}$ 与 x 轴正向的夹角为 60°, 则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 为_____.

14. 设 D 是不等式组 $\begin{cases}x+2y\leqslant 10\\ 2x+y\geqslant 3\\ 0\leqslant x\leqslant 4\\ y\geqslant 1\end{cases}$ 表示的平面区域, 则 D 中的点 $P(x,y)$ 到直线 $x+y=10$ 距离的最大值是_____.

15. 与直线 $x+y-2=0$ 和曲线 $x^2+y^2-12x-12y+54=0$ 都相切的半径最小的圆的标准方程是_____.

16. 函数 $y=\log_a(x+3)-1$ $(a>0, a\neq 1)$ 的图象恒过定点 A, 若点 A 在直线 $mx+ny+1=0$ 上, 其中 $mn>0$, 则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为_____.

三、解答题

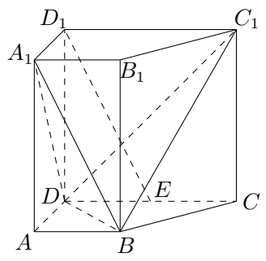
17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=\frac{n}{3}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

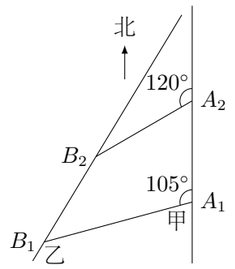
(2) 设 $b_n=\frac{n}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 设 b 和 c 分别是先后抛掷一枚骰子得到的点数, 用随机变量 ξ 表示方程 $x^2+bx+c=0$ 实根的个数 (重根按一个计).
(1) 求方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率;
(2) 求 ξ 的分布列和数学期望;
(3) 求在先后两次出现的点数中有 5 的条件下, 方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率.

19. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$, $AD\perp DC$, $AB\parallel DC$.
(1) 设 E 是 DC 的中点, 求证: $D_1E\parallel$ 平面 A_1BD;
(2) 求二面角 A_1-BD-C_1 的余弦值.



20. 如图, 甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方向航行, 乙船按固定方向匀速直线航行. 当甲船位于 A_1 处时, 乙船位于甲船的北偏西 105° 方向的 B_1 处, 此时两船相距 20 海里. 当甲船航行 20 分钟到达 A_2 处时, 乙船航行到甲船的北偏西 120° 方向的 B_2 处, 此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里. 问乙船每小时航行多少海里?



21. 已知椭圆 C 的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 3, 最小值为 1.
(1) 求椭圆 C 的标准方程;
(2) 若直线 l: $y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (A, B 不是左右顶点), 且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点. 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.

22. 设函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+1)$, 其中 $b\neq 0$.
(1) 当 $b>\dfrac{1}{2}$ 时, 判断函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性;
(2) 求函数 $f(x)$ 的极值点;
(3) 证明对任意的正整数 n, 不等式 $\ln\left(\dfrac{1}{n}+1\right)>\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}$ 都成立.

2007 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

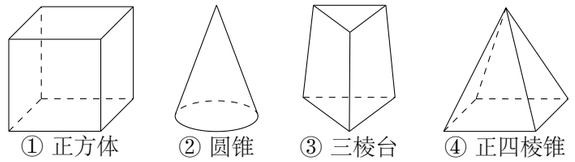
1. 复数 $\dfrac{4+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的实部是 （ ）

(A) -2 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 已知集合 $M=\{-1,1\}$, $N=\left\{x|\dfrac{1}{2}<2^{x+1}<4, x\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 $M\cap N=$（ ）

(A) $\{-1,1\}$ (B) $\{-1\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{-1,0\}$

3. 下列几何体各自的三视图中, 有且仅有两个视图相同的是 （ ）



① 正方体 ② 圆锥 ③ 三棱台 ④ 正四棱锥

(A) ①② (B) ①③ (C) ①④ (D) ②④

4. 要得到函数 $y=\sin x$ 的图象, 只需将函数 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象 （ ）

(A) 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位 (B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位 (D) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,n)$, $\boldsymbol{b}=(-1,n)$, 若 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直, 则 $|\boldsymbol{a}|=$ （ ）

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 4

6. 给出下列三个等式: $f(xy)=f(x)+f(y)$, $f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. 下列函数中不满足其中任何一个等式的是 （ ）

(A) $f(x)=3^x$ (B) $f(x)=\sin x$ (C) $f(x)=\log_2 x$ (D) $f(x)=\tan x$

7. 命题“对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$”的否定是 （ ）

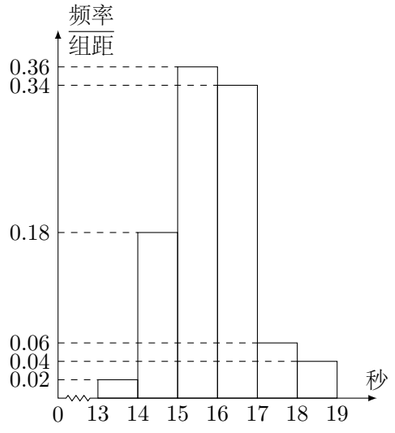
(A) 不存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$

(B) 存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$

(C) 存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1>0$

(D) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1>0$

8. 某班 50 名学生在一次百米测试中, 成绩全部介于 13 秒与 19 秒之间, 将测试结果按如下方式分成六组: 第一组, 成绩大于等于 13 秒且小于 14 秒; 第二组, 成绩大于等于 14 秒且小于 15 秒; $\cdots$; 第六组, 成绩大于等于 18 秒且小于 19 秒. 如图是按上述分组方法得到的频率分布直方图. 设成绩小于 17 秒的学生人数占全班总人数的百分比为 x, 成绩大于等于 15 秒且小于 17 秒的学生人数为 y, 则从频率分布直方图中可分析出 x 和 y 分别为（ ）

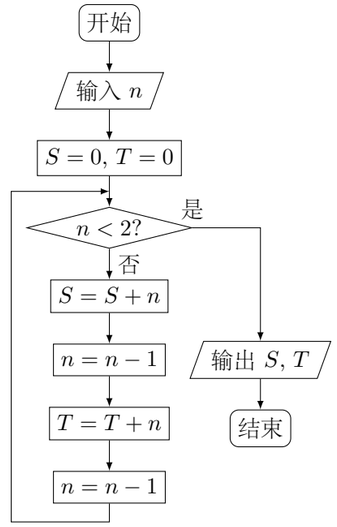


(A) 0.9, 35 (B) 0.9, 45 (C) 0.1, 35 (D) 0.1, 45

9. 设 O 是坐标原点, F 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, A 是抛物线上的一点, $\overrightarrow{FA}$ 与 x 轴正向的夹角为 $60°$, 则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 为 （ ）

(A) $\dfrac{21p}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{21}p}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{13}}{6}p$ (D) $\dfrac{13}{36}p$

10. 阅读如图的程序框图, 若输入的 n 是 100, 则输出的变量 S 和 T 的值依次是 （ ）



(A) 2550, 2500 (B) 2550, 2550 (C) 2500, 2500 (D) 2500, 2550

11. 设函数 $y=x^3$ 与 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的图象的交点为 (x_0,y_0), 则 x_0 所在的区间是 （ ）

(A) $(0,1)$ (B) $(1,2)$ (C) $(2,3)$ (D) $(3,4)$

12. 设集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$, 分别从集合 A 和 B 中随机取一个数 a 和 b, 确定平面上的一个点 $P(a,b)$, 记“点 $P(a,b)$ 落在直线 $x+y=n$ 上”为事件 C_n $(2\leqslant n\leqslant 5, n\in\mathbf{N})$, 若事件 C_n 的概率最大, 则 n 的所有可能值为 （ ）

(A) 3 (B) 4 (C) 2 和 5 (D) 3 和 4

二、填空题

13. 设函数 $f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $f_2(x)=x^{-1}$, $f_3(x)=x^2$, 则 $f_1(f_2(f_3(2007)))=$_____.

14. 函数 $y=a^{1-x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象恒过定点 A, 若点 A 在直线 $mx+ny-1=0$ $(mn>0)$ 上, 则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值为_____.

15. 当 $x\in(1,2)$ 时, 不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立, 则 m 的取值范围是_____.

16. 与直线 $x+y-2=0$ 和曲线 $x^2+y^2-12x-12y+54=0$ 都相切的半径最小的圆的标准方程是_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $\tan C=3\sqrt{7}$.

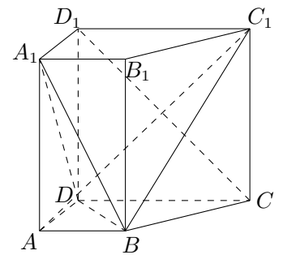
(1) 求 $\cos C$;

(2) 若 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\dfrac{5}{2}$, 且 $a+b=9$, 求 c.

18. 设 $\{a_n\}$ 是公比大于 1 的等比数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_3=7$, 且 a_1+3, $3a_2$, a_3+4 构成等差数列.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;
(2) 令 $b_n=\ln a_{3n+1}$, $n=1$, 2, $\cdots$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 本公司计划 2008 年在甲、乙两个电视台做总时间不超过 300 分钟的广告, 广告总费用不超过 9 万元, 甲、乙电视台的广告收费标准分别为 500 元/分钟和 200 元/分钟. 规定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告, 能给公司事来的收益分别为 0.3 万元和 0.2 万元. 问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间, 才能使公司的收益最大, 最大收益是多少万元?

20. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$, $AD\perp DC$, $AB/\!/DC$.
(1) 求证: $D_1C\perp AC_1$;
(2) 设 E 是 DC 上一点, 试确定 E 的位置, 使 $D_1E/\!/$ 平面 A_1BD, 并说明理由.



21. 设函数 $f(x)=ax^2+b\ln x$, 其中 $ab\neq 0$. 证明: 当 $ab>0$ 时, 函数 $f(x)$ 没有极值点; 当 $ab<0$ 时, 函数 $f(x)$ 有且只有一个极值点, 并求出极值.

22. 已知椭圆 C 的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 3, 最小值为 1.
(1) 求椭圆 C 的标准方程;
(2) 若直线 l: $y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (A, B 不是左右顶点), 且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点. 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.

2007 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

理科数学

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $z=\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}$ 对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}||x-3|<2\}$, 则集合 $\complement_U A$ 等于 （ ）

(A) $\{1,2,3,4\}$　(B) $\{2,3,4\}$　(C) $\{1,5\}$　(D) $\{5\}$

3. 抛物线 $y=x^2$ 的准线方程是 （ ）

(A) $4y+1=0$　(B) $4x+1=0$　(C) $2y+1=0$　(D) $2x+1=0$

4. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为 （ ）

(A) $-\dfrac{1}{5}$　(B) $-\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{3}{5}$

5. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $S_n=2$, $S_{3n}=14$, 则 S_{4n} 等于 （ ）

(A) 80　(B) 30　(C) 26　(D) 16

6. 一个正三棱锥的四个顶点都在半径为 1 的球面上, 其中底面的三个顶点在该球的一个大圆上, 则该正三棱锥的体积是 （ ）

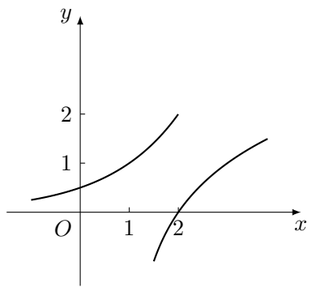
(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

7. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$, 以 C 的右焦点为圆心且与 C 的渐近线相切的圆的半径是 （ ）

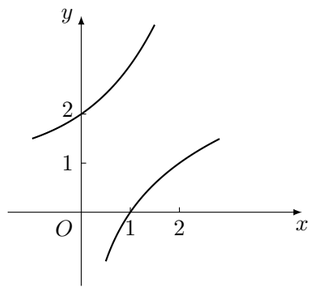
(A) $\sqrt{ab}$　(B) $\sqrt{a^2+b^2}$　(C) a　(D) b

8. 若函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$, 则函数 $f(x-1)$ 与 $f^{-1}(x-1)$ 的图象可能是 （ ）

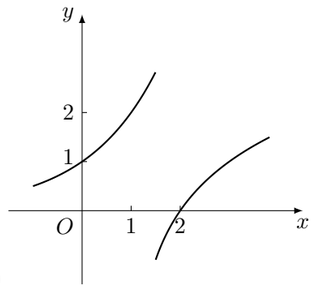
(A)



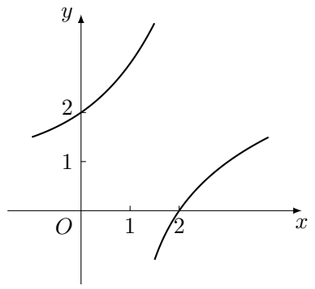
(B)



(C)



(D)



9. 给出如下三个命题:
① 四个非零实数 a, b, c, d 依次成等比数列的充要条件是 $ad=bc$;
② 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $ab\neq 0$, 若 $\dfrac{a}{b}<1$, 则 $\dfrac{b}{a}>1$;
③ 若 $f(x)=\log_2 x$, 则 $f(|x|)$ 是偶函数.
其中不正确的序号是 （ ）

(A) ①②③　(B) ①②　(C) ②③　(D) ①③

10. 已知平面 $\alpha\parallel$ 平面 β, 直线 $m\subset\alpha$, 直线 $n\subset\beta$, 点 $A\in m$, 点 $B\in n$, 记点 A、B 之间的距离为 a, 点 A 到直线 n 的距离为 b, 直线 m 和 n 的距离为 c, 则 （ ）

(A) $b\leqslant c\leqslant a$　(B) $a\leqslant c\leqslant b$　(C) $c\leqslant a\leqslant b$　(D) $c\leqslant b\leqslant a$

11. $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x)+f(x)\leqslant 0$. 对任意正数 a, b, 若 $a<b$, 则必有 （ ）

(A) $af(b)\leqslant bf(a)$ (B) $bf(a)\leqslant af(b)$ (C) $af(a)\leqslant f(b)$　(D) $bf(b)\leqslant f(a)$

12. 设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, 在 S 上定义运算 $\oplus$ 为: $A_i\oplus A_j=A_k$, 其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数, i, $j=0$, 1, 2, 3. 则满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 x $(x\in S)$ 的个数为 （ ）

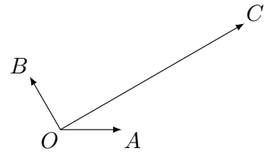
(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

二、填空题

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x-1}\right)=$_____.

14. 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0\\2x+y-2\geqslant 0\\3x-y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最大值为_____.

15. 如图, 平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, 其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120°, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30°, 且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2\sqrt{3}$. 若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbf{R})$, 则 $\lambda+\mu$ 的值为_____.



16. 安排 3 名支教教师去 6 所学校任教, 每校至多 2 人, 则不同的分配方案共有_____. 种. (用数字作答)

三、解答题

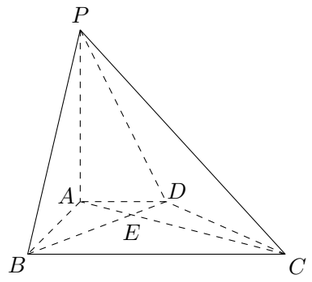
17. 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 其中向量 $\boldsymbol{a}=(m,\cos 2x)$, $\boldsymbol{b}=(1+\sin 2x,1)$, $x\in\mathbf{R}$, 且函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4},2\right)$.
(1) 求实数 m 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值及此时 x 值的集合.

18. 某项选拔共有三轮考核, 每轮设有一个问题, 能正确回答问题者进入下一轮考核, 否则即被淘汰. 已知某选手能正确回答第一、二、三轮的问题的概率分别为 $\dfrac{4}{5}$、$\dfrac{3}{5}$、$\dfrac{2}{5}$, 且各轮问题能否正确回答互不影响.
(1) 求该选手被淘汰的概率;
(2) 该选手在选拔中回答问题的个数记为 ξ, 求随机变量 ξ 的分布列与数学期望.

19. 如图, 在底面为直角梯形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC=90^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=4$, $AD=2$, $AB=2\sqrt{3}$, $BC=6$.

(1) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC;

(2) 求二面角 $A-PC-D$ 的大小.



20. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+ax+a}$, 其中 a 为实数.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 时, 求 $f(x)$ 的单调减区间.

21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

22. 已知各项全不为零的数列 $\{a_k\}$ 的前 k 项和为 S_k, 且 $S_k=\dfrac{1}{2}a_ka_{k+1}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$, 其中 $a_1=1$.

(1) 求数列 $\{a_k\}$ 的通项公式;

(2) 对任意给定的正整数 n $(n\geqslant 2)$, 数列 $\{b_k\}$ 满足 $\dfrac{b_{k+1}}{b_k}=\dfrac{k-n}{a_{k+1}}$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$, $b_1=1$. 求 $b_1+b_2+\cdots+b_n$.

2007 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, 集合 $A=\{2,3,6\}$, 则集合 $\complement_U A$ 等于（　）

(A) $\{1,4\}$　(B) $\{4,5\}$　(C) $\{1,4,5\}$　(D) $\{2,3,6\}$

2. 函数 $f(x)=\lg\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为（　）

(A) $[0,1]$　(B) $(-1,1)$

(C) $[-1.1]$　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

3. 抛物线 $x^2=y$ 的准线方程是（　）

(A) $4x+1=0$　(B) $4y+1=0$　(C) $2x+1=0$　(D) $2y+1=0$

4. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为（　）

(A) $-\dfrac{3}{5}$　(B) $-\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{3}{5}$

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_2=2$, $S_4=10$, 则 S_6 等于（　）

(A) 12　(B) 18　(C) 24　(D) 42

6. 某商场有四类食品, 其中粮食类、植物油类、动物性食品类以及果蔬类分别有 40 种、10 种、30 种、20 种, 现从中抽取一个容量为 20 的样本进行食品安全检测. 若采用分层抽样的方法抽取样本, 则抽取的植物油类与果蔬类食品种数之和是（　）

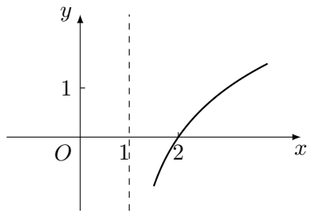
(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

7. Rt$\triangle ABC$ 的三个顶点在半径为 13 的球面上, 直角边的长分别为 6 和 8, 则球心到平面 ABC 的距离是（　）

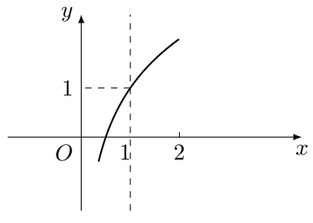
(A) 5　(B) 6　(C) 10　(D) 12

8. 设函数 $f(x)=2^x+1$ ($x\in\mathbf{R}$) 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是（　）

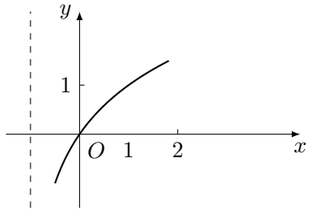
(A)



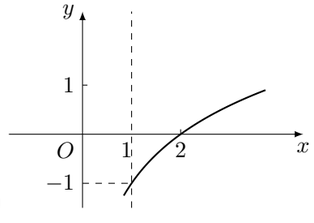
(B)



(C)



(D)



9. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$), 以 C 的右焦点为圆心且与 C 的渐近线相切的圆的半径是（　）

(A) a　(B) b　(C) $\sqrt{ab}$　(D) $\sqrt{a^2+b^2}$

10. 已知 P 为平面 α 外一点, 直线 $l\subset\alpha$, 点 $Q\in l$, 记点 P 到平面 α 的距离为 a, 点 P 到直线 l 的距离为 b, 点 P、Q 之间的距离为 c, 则（　）

(A) $a\leqslant b\leqslant c$　(B) $c\leqslant a\leqslant b$　(C) $a\leqslant c\leqslant b$　(D) $b\leqslant c\leqslant a$

11. 给出如下三个命题:

① 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $ab\neq0$, 若 $\dfrac{b}{a}>1$, 则 $\dfrac{a}{b}<1$;

② 四个非零实数 a, b, c, d 依次成等比数列的充要条件是 $ad=bc$;

③ 若 $f(x)=\log_2 x$, 则 $f(|x|)$ 是偶函数.

其中正确命题的序号是（　）

(A) ①②　(B) ②③　(C) ①③　(D) ①②③

12. 某生物生长过程中, 在三个连续时段内的增长量都相等, 在各时段内平均增长速度分别为 v_1、v_2、v_3, 该生物在所讨论的整个时段内的平均增长速度为（　）

(A) $\dfrac{v_1+v_2+v_3}{3}$　(B) $\dfrac{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}{3}$

(C) $\sqrt[3]{v_1v_2v_3}$　(D) $\dfrac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}$

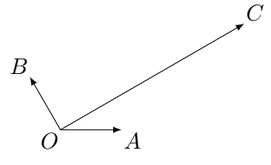
二、填空题

13. $(1+2x)^5$ 的展开式中 x^2 项的系数是_____. (用数字作答)

14. 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant0\\3x-y-3\leqslant0\\x\geqslant0,\ y\geqslant0\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最大值为_____.

15. 安排 3 名支教教师去 4 所学校任教, 每校至多 2 人, 则不同的分配方案共有_____种. (用数字作答)

16. 如图, 平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, 其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120°, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30°, 且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2\sqrt{3}$. 若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ (λ, $\mu\in\mathbf{R}$), 则 $\lambda+\mu$ 的值为_____.



三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 其中向量 $\boldsymbol{a}=(m,\cos x)$, $\boldsymbol{b}=(1+\sin x,1)$, $x\in\mathbf{R}$, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

(1) 求实数 m 的值;

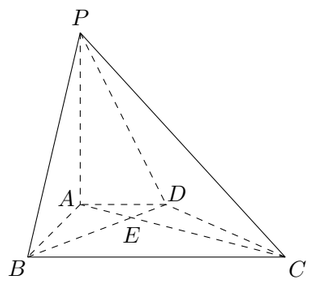
(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值.

18. 某项选拔共有四轮考核, 每轮设有一个问题, 能正确回答问题者进入下一轮考核, 否则即被淘汰. 已知某选手能正确回答第一、二、三、四轮的问题的概率分别为 $\dfrac{4}{5}$、$\dfrac{3}{5}$、$\dfrac{2}{5}$、$\dfrac{1}{5}$, 且各轮问题能否正确回答互不影响.

(1) 求该选手进入第四轮才被淘汰的概率;

(2) 求该选手至多进入第三轮考核的概率.

19. 如图, 在底面为直角梯形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=3$, $AD=2$, $AB=2\sqrt{3}$, $BC=6$.
(1) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC;
(2) 求二面角 $P-BD-A$ 的大小.



20. 已知实数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其中 $a_7=1$, 且 a_4, a_5+1, a_6 成等差数列.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n, 证明: $S_n<128$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$.

21. 已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在区间 $[0,1]$ 上是增函数, 在区间 $(-\infty,0)$, $(1,+\infty)$ 上是减函数. 又 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 若在区间 $[0,m]$ $(m>0)$ 上恒有 $f(x) \leqslant x$ 成立, 求 m 的取值范围.

22. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

2007 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\lg(4-x)}{x-3}$ 的定义域是_____.

2. 若直线 l_1: $2x+my+1=0$ 与直线 l_2: $y=3x-1$ 平行, 则 $m=$_____.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

4. 方程 $9^x-6\cdot 3^x-7=0$ 的解是_____.

5. 若 $x,y\in\mathbf{R}^+$, 且 $x+4y=1$, 则 $x\cdot y$ 的最大值是_____.

6. 函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期 $T=$_____.

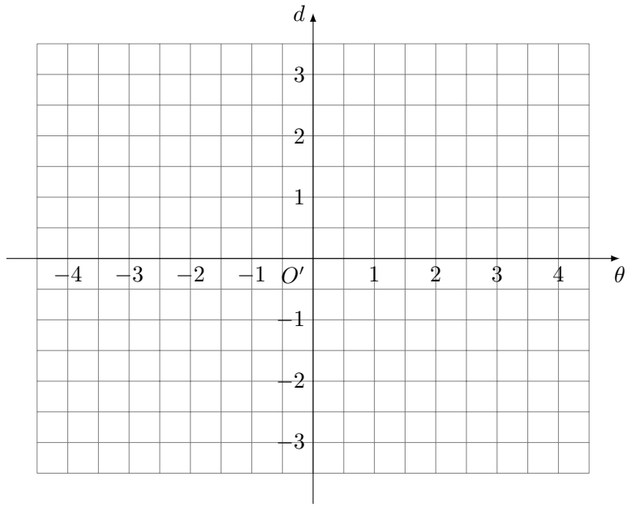
7. 在五个数字 1, 2, 3, 4, 5 中, 若随机取出三个数字, 则剩下两个数字都是奇数的概率是_____. (结果用数值表示)

8. 以双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的中心为焦点, 且以该双曲线的左焦点为顶点的抛物线方程是_____.

9. 对于非零实数 a, b, 以下四个命题都成立: ① $a+\dfrac{1}{a}\neq 0$; ② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; ③ 若 $|a|=|b|$, 则 $a=\pm b$; ④ 若 $a^2=ab$, 则 $a=b$. 那么, 对于非零复数 a, b, 仍然成立的命题的所有序号是_____.

10. 在平面上, 两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种. 已知 α, β 是两个相交平面, 空间两条直线 l_1, l_2 在 α 上的射影是直线 s_1, s_2, l_1, l_2 在 β 上的射影是直线 t_1, t_2. 用 s_1 与 s_2, t_1 与 t_2 的位置关系, 写出一个总能确定 l_1 与 l_2 是异面直线的充分条件: _____.

11. 已知 P 为圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点 (原点 O 除外), 直线 OP 的倾斜角为 θ 弧度, 记 $d=|OP|$. 在右侧的坐标系中, 画出以 (θ,d) 为坐标的点的轨迹的大致图形为



二、选择题

12. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $2+a\mathrm{i}$, $b+\mathrm{i}$ (i 是虚数单位) 是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根, 那么 p, q 的值分别是 ( )

(A) $p=-4$, $q=5$ (B) $p=-4$, $q=3$

(C) $p=4$, $q=5$ (D) $p=4$, $q=3$

13. 设 a, b 是非零实数, 若 $a<b$, 则下列不等式成立的是 ( )

(A) $a^2<b^2$ (B) $ab^2<a^2b$ (C) $\dfrac{1}{ab^2}<\dfrac{1}{a^2b}$ (D) $\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$

14. 直角坐标系 xOy 中, $\vec{i}$, $\vec{j}$ 分别是与 x, y 轴正方向同向的单位向量. 在直角三角形 ABC 中, 若 $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+k\vec{j}$, 则 k 的可能值个数是 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

15. 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数, 且 $f(x)$ 满足: "当 $f(k)\geqslant k^2$ 成立时, 总可推出 $f(k+1)\geqslant(k+1)^2$ 成立". 那么, 下列命题总成立的是 ( )

(A) 若 $f(3)\geqslant 9$ 成立, 则当 $k\geqslant 1$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

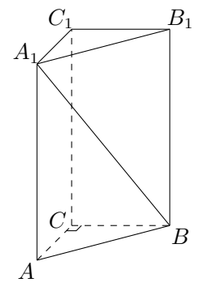
(B) 若 $f(5)\geqslant 25$ 成立, 则当 $k\leqslant 5$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

(C) 若 $f(7)<49$ 成立, 则当 $k\geqslant 8$ 时, 均有 $f(k)<k^2$ 成立

(D) 若 $f(4)=25$ 成立, 则当 $k\geqslant 4$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

三、解答题

16. 如图, 在体积为 1 的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=1$, 求直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角. (结果用反三角函数值表示)



17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是三个内角 A, B, C 的对边. 若 $a=2$, $C=\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

18. 近年来, 太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002 年全球太阳电池的年生产量达到 670 兆瓦, 年生产量的增长率为 34 %. 以后四年中, 年生产量的增长率逐年递增 2 % (如, 2003 年的年生产量的增长率为 36 %).
(1) 求 2006 年全球太阳电池的年生产量 (结果精确到 0.1 兆瓦);
(2) 目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量, 2006 年的实际安装量为 1420 兆瓦. 假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在 42 %, 到 2010 年, 要使年安装量与年生产量基本持平 (即年安装量不少于年生产量的 95 %), 这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少 (结果精确到 0.1 %)?

19. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ ($x\neq 0$, 常数 $a\in\mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 上为增函数, 求 a 的取值范围.

20. 如果有穷数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n (n 为正整数) 满足条件 $a_1=a_n$, $a_2=a_{n-1}$, $\cdots$, $a_n=a_1$, 即 $a_i=a_{n-i+1}$ ($i=1,2,\cdots,n$), 我们称其为"对称数列". 例如, 由组合数组成的数列 C_m^0, C_m^1, $\cdots$, C_m^m 就是"对称数列".

(1) 设 $\{b_n\}$ 是项数为 7 的"对称数列", 其中 b_1, b_2, b_3, b_4 是等差数列, 且 $b_1=2$, $b_4=11$. 依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项;

(2) 设 $\{c_n\}$ 是项数为 $2k-1$ (k 正整数, $k>1$) 的"对称数列", 其中 c_k, c_{k+1}, $\cdots$, c_{2k-1} 是首项为 50, 公差为 -4 的等差数列. 记 $\{c_n\}$ 各项的和为 S_{2k-1}. 当 k 为何值时, S_{2k-1} 取得最大值? 并求出 S_{2k-1} 的最大值;

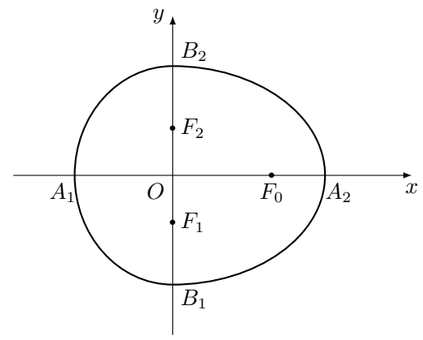
(3) 对于确定的正整数 $m>1$, 写出所有项数不超过 $2m$ 的"对称数列", 使得 1, 2, 2^2, $\cdots$, 2^{m-1} 依次是该数列中连续的项; 当 $m>1500$ 时, 求其中一个"对称数列"前 2008 项的和 S_{2008}.

21. 我们把由半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($x\geqslant 0$) 与半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ ($x\leqslant 0$) 合成的曲线称作"果圆", 其中 $a^2=b^2+c^2$, $a>0$, $b>c>0$. 如图, 设点 F_0, F_1, F_2 是相应椭圆的焦点, A_1, A_2 和 B_1, B_2 分别是"果圆"与 x, y 轴的交点.

(1) 若 $\triangle F_0F_1F_2$ 是边长为 1 的等边三角形, 求"果圆"的方程;

(2) 当时 $|A_1A_2|>|B_1B_2|$ 时, 求 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围;

(3) 连接"果圆"上任意两点的线段称为"果圆"的弦. 试研究: 是否存在实数 k, 使斜率为 k 的"果圆"平行弦的中点轨迹总是落在某个椭圆上? 若存在, 求出所有可能的 k 值; 若不存在, 说明理由.



2007 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 方程 $3^{x-1}=\dfrac{1}{9}$ 的解是_____.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

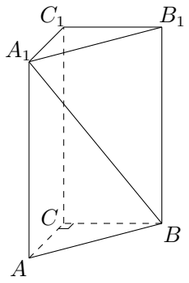
3. 直线 $4x+y-1=0$ 的倾斜角 $\theta=$_____.

4. 函数 $y=\sec x\cdot\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期 $T=$_____.

5. 以双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的中心为顶点, 且以该双曲线的右焦点为焦点的抛物线方程是_____.

6. 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $60°$, $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$, 则 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$_____.

7. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90°$, $AA_1=2$, $AC=BC=1$, 则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的大小是_____. (结果用反三角函数值表示)

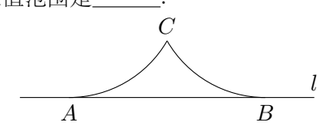


8. 某工程由 A, B, C, D 四道工序组成, 完成它们需用时间依次为 2, 5, x, 4 天. 四道工序的先后顺序及相互关系是: A, B 可以同时开工; A 完成后, C 可以开工; BC 完成后, D 可以开工. 若该工程总时数为 9 天, 则完成工序 C 需要的天数 x 最大是_____.

9. 在五个数字 1, 2, 3, 4, 5 中, 若随机取出三个数字, 则剩下两个数字都是奇数的概率是_____. (结果用数值表示)

10. 对于非零实数 a, b, 以下四个命题都成立: ① $a+\dfrac{1}{a}\neq 0$; ② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; ③ 若 $|a|=|b|$, 则 $a=\pm b$; ④ 若 $a^2=ab$, 则 $a=b$. 那么, 对于非零复数 a, b, 仍然成立的命题的所有序号是_____.

11. 如图, AB 是直线 l 上的两点, 且 $AB=2$. 两个半径相等的动圆分别与 l 相切于 AB 点, C 是这两个圆的公共点, 则圆弧 AC, CB 与线段 AB 围成图形面积 S 的取值范围是_____.



二、选择题

12. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $2+a\mathrm{i}$, $b+3\mathrm{i}$ (i 是虚数单位) 是一个实系数一元二次方程的两个根, 那么 a, b 的值分别是 (　　)

(A) $a=-3$, $b=2$　　(B) $a=3$, $b=-2$

(C) $a=-3$, $b=-2$　　(D) $a=3$, $b=2$

13. 圆 $x^2+y^2-2x-1=0$ 关于直线 $2x-y+3=0$ 对称的圆的方程是(　　)

(A) $(x+3)^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{2}$　　(B) $(x-3)^2+(y+2)^2=\dfrac{1}{2}$

(C) $(x+3)^2+(y-2)^2=2$　　(D) $(x-3)^2+(y+2)^2=2$

14. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, & 1\leqslant n\leqslant 1000\\ \dfrac{n^2}{n^2-2n}, & n\geqslant 1001\end{cases}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的极限值 (　　)

(A) 等于 0　　(B) 等于 1　　(C) 等于 0 或 1　　(D) 不存在

15. 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数, 且 $f(x)$ 满足: "当 $f(k)\geqslant k^2$ 成立时, 总可推出 $f(k+1)\geqslant(k+1)^2$ 成立". 那么, 下列命题总成立的是 (　　)

(A) 若 $f(1)<1$ 成立, 则 $f(10)<100$ 成立

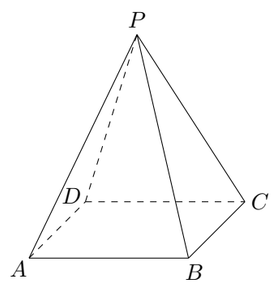
(B) 若 $f(2)<4$ 成立, 则 $f(1)\geqslant 1$ 成立

(C) 若 $f(3)\geqslant 9$ 成立, 则当 $k\geqslant 1$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

(D) 若 $f(4)\geqslant 25$ 成立, 则当 $k\geqslant 4$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

三、解答题

16. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA=2$, 直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$, 求正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 V.



17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是三个内角 A, B, C 的对边. 若 $a=2$, $C=\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

18. 近年来, 太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002 年全球太阳电池的年生产量达到 670 兆瓦, 年生产量的增长率为 34 %. 以后四年中, 年生产量的增长率逐年递增 2 %(如, 2003 年的年生产量的增长率为 36 %).

(1) 求 2006 年全球太阳电池的年生产量 (结果精确到 0.1 兆瓦);

(2) 目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量, 2006 年的实际安装量为 1420 兆瓦. 假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在 42 %, 到 2010 年, 要使年安装量与年生产量基本持平 (即年安装量不少于年生产量的 95 %), 这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少 (结果精确到 0.1 %)?

19. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ ($x\neq 0$, 常数 $a\in\mathbf{R}$).

(1) 当 $a=2$ 时, 解不等式 $f(x)-f(x-1)>2x-1$;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

20. 如果有穷数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_m (m 为正整数) 满足条件 $a_1=a_m$, $a_2=a_{m-1}$, $\cdots$, $a_m=a_1$, 即 $a_i=a_{m-i+1}$ ($i=1, 2, \cdots, m$), 我们称其为“对称数列”. 例如, 数列 1, 2, 5, 2, 1 与数列 8, 4, 2, 2, 4, 8 都是“对称数列”.

(1) 设 $\{b_n\}$ 是项数为 7 的“对称数列”, 其中 b_1, b_2, b_3, b_4 是等差数列, 且 $b_1=2$, $b_4=11$. 依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项;

(2) 设 $\{c_n\}$ 是 49 项的“对称数列”, 其中 c_{25}, c_{26}, $\cdots$, c_{49} 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 求 $\{c_n\}$ 各项的和 S;

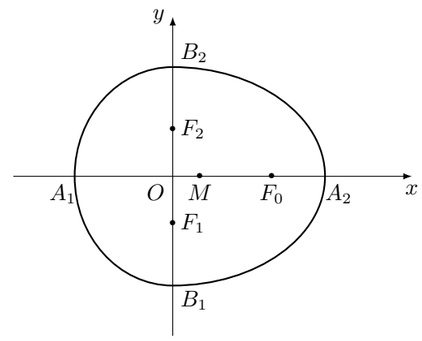
(3) 设 $\{d_n\}$ 是 100 项的“对称数列”, 其中 d_{51}, d_{52}, $\cdots$, d_{100} 是首项为 2, 公差为 3 的等差数列. 求 $\{d_n\}$ 前 n 项的和 S_n ($n=1, 2, \cdots, 100$).

21. 我们把由半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($x\geqslant 0$) 与半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ ($x\leqslant 0$) 合成的曲线称作“果圆”, 其中 $a^2=b^2+c^2$, $a>0$, $b>c>0$. 如图, 设点 F_0, F_1, F_2 是相应椭圆的焦点, A_1, A_2 和 B_1, B_2 分别是“果圆”与 x, y 轴的交点, M 是线段 A_1A_2 的中点.

(1) 若 $\triangle F_0F_1F_2$ 是边长为 1 的等边三角形, 求该“果圆”的方程;

(2) 设 P 是“果圆”的半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ ($x\leqslant 0$) 上任意一点. 求证: 当 $|PM|$ 取得最小值时, P 在点 B_1, B_2 或 A_1 处;

(3) 若 P 是“果圆”上任意一点, 求 $|PM|$ 取得最小值时点 P 的横坐标.



2007 年普通高等学校招生考试（四川卷）

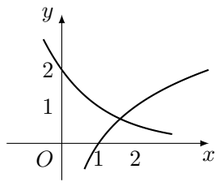
理科数学

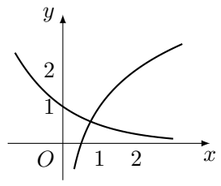
一、选择题

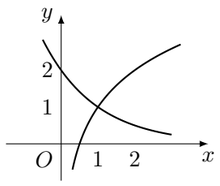
1. 复数 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}^3$ 的值是 （ ）

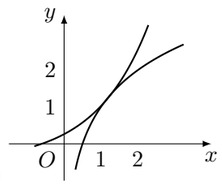
(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 1

2. 函数 $f(x)=1+\log_2 x$ 与 $g(x)=2^{-x+1}$ 在同一直角坐标系下的图象大致是 （ ）

(A) 

(B) 

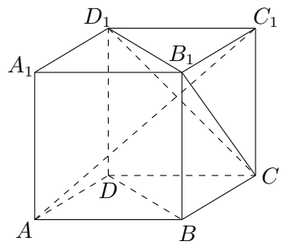
(C) 

(D) 

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$ （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

4. 如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 下面结论错误的是 （ ）



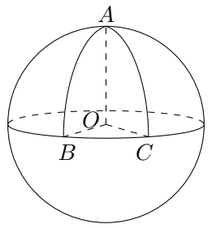
(A) $BD\parallel$ 平面 CB_1D_1 (B) $AC_1\perp BD$

(C) $AC_1\perp$ 平面 CB_1D_1 (D) 异面直线 AD 与 CB_1 角为 60°

5. 如果双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 2, 那么点 P 到 y 轴的距离是 （ ）

(A) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (C) $2\sqrt{6}$ (D) $2\sqrt{3}$

6. 设球 O 的半径是 1, A、B、C 是球面上三点, 已知 A 到 B、C 两点的球面距离都是 $\dfrac{\pi}{2}$, 且二面角 $B-OA-C$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则从 A 点沿球面经 B、C 两点再回到 A 点的最短距离是 （ ）



(A) $\dfrac{7\pi}{6}$ (B) $\dfrac{5\pi}{4}$ (C) $\dfrac{4\pi}{3}$ (D) $\dfrac{3\pi}{2}$

7. 设 $A(a,1)$, $B(2,b)$, $C(4,5)$ 为坐标平面上三点, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的投影相同, 则 a 与 b 满足的关系式为 （ ）

(A) $4a-5b=3$ (B) $5a-4b=3$ (C) $4a+5b=14$ (D) $5a+4b=14$

8. 已知抛物线 $y=-x^2+3$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点 A、B, 则 $|AB|$ 等于 （ ）

(A) 3 (B) 4 (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$

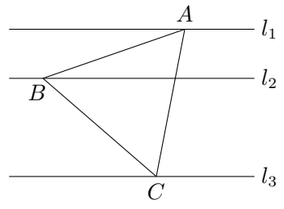
9. 某公司有 60 万元资金, 计划投资甲、乙两个项目, 按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\dfrac{2}{3}$ 倍, 且对每个项目的投资不能低于 5 万元, 对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润, 对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润, 该公司正确规划投资后, 在这两个项目上共可获得的最大利润为 （ ）

(A) 36 万元 (B) 31.2 万元 (C) 30.4 万元 (D) 24 万元

10. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成没有重复数字, 并且比 20000 大的五位偶数共有 （ ）

(A) 288 个 (B) 240 个 (C) 144 个 (D) 126 个

11. 如图, l_1、l_2、l_3 是同一平面内的三条平行直线, l_1 与 l_2 间的距离是 1, l_2 与 l_3 间的距离是 2, 正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1、l_2、l_3 上, 则 $\triangle ABC$ 的边长是 （ ）



(A) $2\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ (C) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{4}$ (D) $\dfrac{2-\sqrt{21}}{3}$

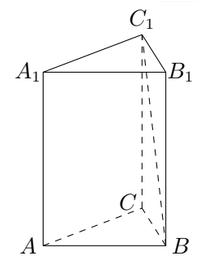
12. 已知一组抛物线 $y=\dfrac{1}{2}ax^2+bx+1$, 其中 a 为 2, 4, 6, 8 中任取的一个数, b 为 1, 3, 5, 7 中任取的一个数, 从这些抛物线中任意抽取两条, 它们在与直线 $x=1$ 交点处的切线相互平行的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{12}$ (B) $\dfrac{7}{60}$ (C) $\dfrac{6}{25}$ (D) $\dfrac{5}{25}$

二、填空题

13. 若函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-(x-u)^2}$ (e 是自然对数的底数) 的最大值是 m, 且 $f(x)$ 是偶函数, 则 $m+u=$_____.

14. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 底面三角形的边长为 1, 则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角是_____.



15. 已知 $\odot O$ 的方程是 $x^2+y^2-2=0$, $\odot O'$ 的方程是 $x^2+y^2-8x+10=0$, 由动点 P 向 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 所引的切线长相等, 则动点 P 的轨迹方程是_____.

16. 下面有五个命题:

① 函数 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ 的最小正周期是 π;

② 终边在 y 轴上的角的集合是 $\left\{\alpha\middle|\alpha=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$;

③ 在同一坐标系中, 函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有三个公共点;

④ 把函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 得到 $y=3\sin 2x$ 的图象;

⑤ 函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上是减函数.

其中真命题的序号是_____. (写出所有)

三、解答题

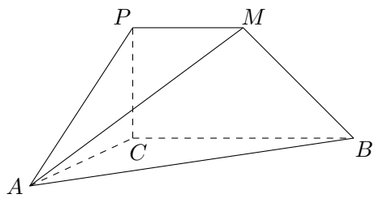
17. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{14}$, 且 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求 $\tan 2\alpha$ 的值;

(2) 求 β.

18. 厂家在产品出厂前, 需对产品做检验, 厂家将一批产品发给商家时, 商家按合同规定也需随机抽取一定数量的产品做检验, 以决定是否接收这批产品.
(1) 若厂家库房中的每件产品合格的概率为 0.8, 从中任意取出 4 件进行检验. 求至少有 1 件是合格品的概率;
(2) 若厂家发给商家 20 件产品, 其中有 3 件不合格, 按合同规定该商家从中任取 2 件, 都进行检验, 只有 2 件都合格时才接收这批产品, 否则拒收. 求该商家可能检验出不合格产品数 ξ 的分布列及期望 $E\xi$, 并求该商家拒收这批产品的概率.

19. 如图, $PCBM$ 是直角梯形, $\angle PCB=90^\circ$, $PM\parallel BC$, $PM=1$, $BC=2$, 又 $AC=1$, $\angle ACB=120^\circ$, $AB\perp PC$, 直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60°.
(1) 求证: 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC;
(2) 求二面角 $M-AC-B$ 的大小;
(3) 求三棱锥 $P-MAC$ 的体积.



20. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点.
(1) 若 P 是该椭圆上的一个动点, 求 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值和最小值;
(2) 设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A、B, 且 $\angle AOB$ 为锐角 (其中 O 为坐标原点), 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=x^2-4$, 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1},0)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中 x_1 为正实数.
(1) 用 x_n 表示 x_{n+1};
(2) 求证: 对一切正整数 n, $x_{n+1}\leqslant x_n$ 的充要条件是 $x_1\geqslant 2$;
(3) 若 $x_1=4$, 记 $a_n=\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 成等比数列, 并求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

22. 设函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n\in\mathbf{N}^*$, 且 $n>1$, $x\in\mathbf{N})$.
(1) 当 $x=6$ 时, 求 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的展开式中二项式系数最大的项;
(2) 对任意的实数 x, 证明 $\dfrac{f(2x)+f(2)}{2}>f'(x)$ ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数);
(3) 是否存在 $a\in\mathbf{N}$, 使得 $an<\sum\limits_{k-1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)<(a+1)n$ 恒成立? 若存在, 试证明你的结论并求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

2007 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

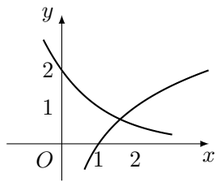
一、选择题

1. 设集合 $M=\{4,5,6,8\}$, 集合 $N=\{3,5,7,8\}$, 那么 $M\cup N=$　　（　）

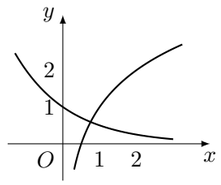
(A) $\{3,4,5,6,7,8\}$(B) $\{5,8\}$　　(C) $\{3,5,7,8\}$　　(D) $\{4,5,6,8\}$

2. 函数 $f(x)=1+\log_2 x$ 与 $g(x)=2^{-x+1}$ 在同一直角坐标系下的图象大致是　　（　）

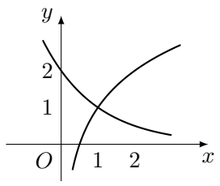
(A)



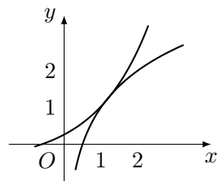
(B)



(C)



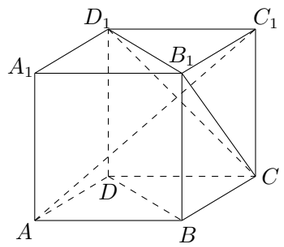
(D)



3. 某商场买来一车苹果, 从中随机抽取了 10 个苹果, 其重量 (单位: 克) 分别为: 150, 152, 153, 149, 148, 146, 151, 150, 152, 147, 由此估计这车苹果单个重量的期望值是　　（　）

(A) 150.2 克　　(B) 149.8 克　　(C) 149.4 克　　(D) 147.8 克

4. 如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 下面结论错误的是　　（　）



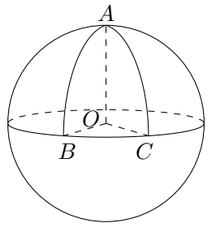
(A) $BD\parallel$ 平面 CB_1D_1　　(B) $AC_1\perp BD$

(C) $AC_1\perp$ 平面 CB_1D_1　　(D) 异面直线 AD 与 CB_1 角为 60°

5. 如果双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 2, 那么点 P 到 y 轴的距离是　　（　）

(A) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　(C) $2\sqrt{6}$　　(D) $2\sqrt{3}$

6. 设球 O 的半径是 1, A、B、C 是球面上三点, 已知 A 到 B、C 两点的球面距离都是 $\dfrac{\pi}{2}$, 且二面角 $B-OA-C$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则从 A 点沿球面经 B、C 两点再回到 A 点的最短距离是　　（　）



(A) $\dfrac{7\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{5\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{4\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{3\pi}{2}$

7. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_3+a_5=14$, 其前 n 项和 $S_n=100$, 则 $n=$(　)

(A) 9　　(B) 10　　(C) 11　　(D) 12

8. 设 $A(a,1)$, $B(2,b)$, $C(4,5)$ 为坐标平面上三点, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的投影相同, 则 a 与 b 满足的关系式为　　（　）

(A) $4a-5b=3$　(B) $5a-4b=3$　(C) $4a+5b=14$　(D) $5a+4b=14$

9. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 可以组成没有重复数字, 并且比 20000 大的五位偶数共有　　（　）

(A) 48 个　　(B) 36 个　　(C) 24 个　　(D) 18 个

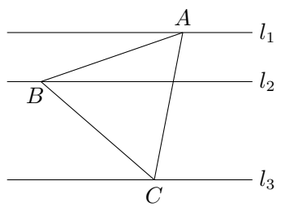
10. 已知抛物线 $y=-x^2+3$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点 A、B, 则 $|AB|$ 等于　　（　）

(A) 3　　(B) 4　　(C) $3\sqrt{2}$　　(D) $4\sqrt{2}$

11. 某公司有 60 万元资金, 计划投资甲、乙两个项目, 按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\dfrac{2}{3}$ 倍, 且对每个项目的投资不能低于 5 万元, 对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润, 对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润, 该公司正确规划投资后, 在这两个项目上共可获得的最大利润为　　（　）

(A) 36 万元　　(B) 31.2 万元　　(C) 30.4 万元　　(D) 24 万元

12. 如图, l_1、l_2、l_3 是同一平面内的三条平行直线, l_1 与 l_2 间的距离是 1, l_2 与 l_3 间的距离是 2, 正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1、l_2、l_3 上, 则 $\triangle ABC$ 的边长是　　（　）

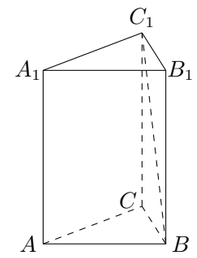


(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　　(C) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{4}$　　(D) $\dfrac{2-\sqrt{21}}{3}$

二、填空题

13. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中的第 5 项为常数项, 那么正整数 n 的值是_____.

14. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 底面三角形的边长为 1, 则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角是_____.



15. 已知 $\odot O$ 的方程是 $x^2+y^2-2=0$, $\odot O'$ 的方程是 $x^2+y^2-8x+10=0$, 由动点 P 向 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 所引的切线长相等, 则动点 P 的轨迹方程是_____.

16. 下面有五个命题:

① 函数 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$, 的最小正周期是 π;

② 终边在 y 轴上的角的集合是 $\left\{\alpha\middle|\alpha=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$;

③ 在同一坐标系中, 函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有三个公共点;

④ 把函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 得到 $y=3\sin 2x$ 的图象;

⑤ 角 θ 为第一象限角的充要条件是 $\sin\theta>0$.

其中真命题的序号是_____. (写出所有)

三、解答题

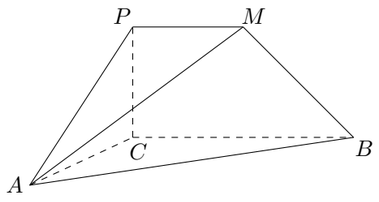
17. 厂家在产品出厂前, 需对产品做检验, 厂家对一般产品致冷商家的, 商家符合规定拾取一定数量的产品做检验, 以决定是否验收这些产品.

(1) 若厂家库房中的每件产品合格的概率为 0.3, 从中任意取出 4 种进行检验, 求至少要 1 件是合格产品的概率;

(2) 若厂家发给商家 20 件产品, 其中有 3 件不合格, 按合同规定该商家从中任取 2 件, 来进行检验, 只有 2 件产品合格时才接收这些产品, 否则拒收, 分别求出该商家计算出不合格产品为 1 件和 2 件的概率, 并求该商家拒收这些产品的概率.

18. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{14}$, 且 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.
(1) 求 $\tan 2\alpha$ 的值;
(2) 求 β.

19. 如图, $PCBM$ 是直角梯形, $\angle PCB=90^\circ$, $PM\parallel BC$, 直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60°, 又 $AC=1$, $BC=2PM=2$, $\angle ACB=90^\circ$.
(1) 求证: $AC\perp BM$;
(2) 求二面角 $M-AB-C$ 的大小;
(3) 求多面体 $PMABC$ 的体积.



20. 设函数 $f(x)=ax^3+bx+c$ $(a\neq 0)$ 为奇函数, 其图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-6y-7=0$ 垂直, 导函数 $f'(x)$ 的最小值为 -12.
(1) 求 a, b, c 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间, 并求函数 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上的最大值和最小值.

21. 已知 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2-1$ 的左、右焦点.
(1) 若 P 是第一象限内该椭圆上的一点, 且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=-\dfrac{5}{4}$, 求点 P 的坐标;
(2) 设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A、B, 且 $\angle AOB$ 为锐角 (其中 O 为作标原点), 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x)=x^2-4$, 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1},0)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中 x_1 为正实数.
(1) 用 x_n 表示 x_{n+1};
(2) 若 $x_1=4$, 记 $a_n=\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 成等比数列, 并求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;
(3) 若 $x_1=4$, $b_n=x_n-2$, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 证明 $T_n<3$.

2007 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{2\mathrm{i}^3}{1-\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $-1+\mathrm{i}$　(C) $1-\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geqslant -1 \\ x+y\geqslant 1 \\ 3x-y\leqslant 3 \end{cases}$, 则目标函数 $z=4x+y$ 的最大值为 （ ）

(A) 4　(B) 11　(C) 12　(D) 14

3. “$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$”是“$\tan\theta=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 且它的一条准线与抛物线 $y^2=4x$ 的准线重合, 则此双曲线的方程为 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{24}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{48}-\dfrac{y^2}{96}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2y^2}{3}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$

5. 函数 $y=\log_2(\sqrt{x+4}+2)$ $(x>0)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=4^x-2^{x+1}$ $(x>2)$　(B) $y=4^x-2^{x+1}$ $(x>1)$

(C) $y=4^x-2^{x+2}$ $(x>2)$　(D) $y=4^x-2^{x+2}$ $(x>1)$

6. 设 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面. 下列四个命题中, 正确的命题是( )

(A) 若 a, b 与 α 所成的角相等, 则 $a\parallel b$

(B) 若 $a\parallel\alpha$, $b\parallel\beta$, $\alpha\parallel\beta$, 则 $a\parallel b$

(C) 若 $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel b$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(D) 若 $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$, $\alpha\perp\beta$, 则 $a\perp b$

7. 在 $\mathbf{R}$ 上定义的函数 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x)=f(2-x)$. 若 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数, 则 $f(x)$ （ ）

(A) 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数, 在区间 $[3,4]$ 上是增函数

(B) 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数, 在区间 $[3,4]$ 上是减函数

(C) 在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数, 在区间 $[3,4]$ 上是增函数

(D) 在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数, 在区间 $[3,4]$ 上是减函数

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, $a_1=9d$. 若 a_k 是 a_1 与 a_{2k} 的等比中项, 则 $k=$ （ ）

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

9. 设 a, b, c 均为正数, 且 $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=\log_{\frac{1}{2}}b$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^c=\log_2 c$. 则( )

(A) $a<b<c$　(B) $c<b<a$　(C) $c<a<b$　(D) $b<a<c$

10. 设两个向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda+2,\lambda^2-\cos^2\alpha)$ 和 $\boldsymbol{b}=\left(m,\dfrac{m}{2}+\sin\alpha\right)$, 其中 λ, m, α 为实数. 若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$, 则 $\dfrac{\lambda}{m}$ 的取值范围是 （ ）

(A) $[-6,1]$　(B) $[4,8]$　(C) $(-\infty,1]$　(D) $[-1,6]$

二、填空题

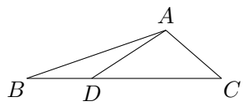
11. 若 $\left(x^2+\dfrac{1}{ax}\right)^6$ 的二项展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{5}{2}$, 则 $a=$_____. (用数字作答)

12. 一个长方体的各顶点均在同一球的球面上, 且一个顶点上的三条棱的长分别为 1, 2, 3, 则此球的表面积为_____.

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 是 2, 前 n 项的和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-n^2}{S_n}=$_____.

14. 已知两圆 $x^2+y^2=10$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ 相交于 A, B 两点, 则直线 AB 的方程是_____.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=120^\circ$, $AB=2AC=1$, D 是边 BC 上一点, $DC=2BD$, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$_____.



16. 如图, 用 6 种不同的颜色给图中的 4 个格子涂色, 每个格子涂一种颜色. 要求最多使用 3 种颜色且相邻的两个格子颜色不同, 则不同的涂色方法共有_____种. (用数字作答)



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\cos x(\sin x-\cos x)+1$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值和最大值.

18. 已知甲盒内有大小相同的 1 个红球和 3 个黑球, 乙盒内有大小相同的 2 个红球和 4 个黑球. 现从甲、乙两个盒内各任取 2 个球.

(1) 求取出的 4 个球均为黑球的概率;

(2) 求取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率;

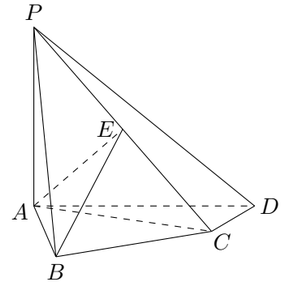
(3) 设 ξ 为取出的 4 个球中红球的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\perp AD$, $AC\perp CD$, $\angle ABC=60^\circ$, $PA=AB=BC$, E 是 PC 的中点.

(1) 证明 $CD\perp AE$;

(2) 证明 $PD\perp$ 平面 ABE;

(3) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2ax-a^2+1}{x^2+1}$ $(x\in\mathbf{R})$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程;
(2) 当 $a\neq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

21. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中 $\lambda>0$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;
(3) 证明存在 $k\in\mathbf{N}^*$, 使得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 均成立.

22. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, A 是椭圆上的一点, $AF_2\perp F_1F_2$, 原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\dfrac{1}{3}|OF_1|$.
(1) 证明 $a=\sqrt{2}b$;
(2) 设 Q_1, Q_2 为椭圆上的两个动点, $OQ_1\perp OQ_2$, 过原点 O 作直线 Q_1Q_2 的垂线 OD, 垂足为 D, 求点 D 的轨迹方程.

2007 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $S=\{x\in\mathbf{R}|x+1\geqslant 2\}$, $T=\{-2,-1,0,1,2\}$, 则 $S\cap T=$（　）

(A) $\{2\}$　(B) $\{1,2\}$　(C) $\{0,1,2\}$　(D) $\{-1,0,1,2\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant -1\\ x+y\leqslant 4\\ y\geqslant 2\end{cases}$, 则目标函数 $z=2x+4y$ 的最大值为（　）

(A) 10　(B) 12　(C) 13　(D) 14

3. “$a=2$”是“直线 $ax+2y=0$ 平行于直线 $x+y=1$”的（　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 设 $a=\log_{\frac{1}{2}}3$, $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.2}$, $c=2^{\frac{1}{3}}$, 则（　）

(A) $a<b<c$　(B) $c<b<a$　(C) $c<a<b$　(D) $b<a<c$

5. 函数 $y=\log_2(x+4)$ $(x>0)$ 的反函数是（　）

(A) $y=2^x+4$ $(x>2)$　(B) $y=2^x+4$ $(x>0)$

(C) $y=2^x-4$ $(x>2)$　(D) $y=2^x-4$ $(x>0)$

6. 设 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面. 下列四个命题中, 正确的命题是（　）

(A) 若 a, b 与 α 所成的角相等, 则 $a\parallel b$

(B) 若 $a\parallel\alpha$, $b\parallel\beta$, $\alpha\parallel\beta$, 则 $a\parallel b$

(C) 若 $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel b$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(D) 若 $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$, $\alpha\perp\beta$, 则 $a\perp b$

7. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 且它的一条准线与抛物线 $y^2=4x$ 的准线重合, 则此双曲线的方程为（　）

(A) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$　(B) $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{96}=1$　(C) $\frac{x^2}{3}-\frac{2y^2}{3}=1$　(D) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, $a_1=9d$. 若 a_k 是 a_1 与 a_{2k} 的等比中项, 则 $k=$（　）

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

9. 设函数 $f(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$ $(x\in\mathbf{R})$, 则 $f(x)$（　）

(A) 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$ 上是增函数　(B) 在区间 $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数

(C) 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数　(D) 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上是减函数

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=x^2$. 若对任意的 $x\in[t,t+2]$, 不等式 $f(x+t)\geqslant 2f(x)$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是（　）

(A) $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$　(B) $[2,+\infty)$

(C) $(0,2]$　(D) $\left[-\sqrt{2},-1\right]\bigcup\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$

二、填空题

11. 从一堆苹果中任取了 20 只, 并得到它们的质量 (单位: 克) 数据分布表如下:

分组	[90, 100)	[100, 110)	[110, 120)	[120, 130)	[130140)	[140, 150)
频数	1	2	3	10	3	1

则这堆苹果中, 质量不小于 120 克的苹果数约占苹果总数的_____%.

12. $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^9$ 的二项展开式中常数项是_____. (用数字作答)

13. 一个长方体的各顶点均在同一球的球面上, 且一个顶点上的三条棱的长分别为 1, 2, 3, 则此球的表面积为_____.

14. 已知两圆 $x^2+y^2=10$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ 相交于 A, B 两点, 则直线 AB 的方程是_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=3$, D 是边 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$_____.

16. 如图, 用 6 种不同的颜色给图中的 4 个格子涂色, 每个格子涂一种颜色. 要求相邻的两个格子颜色不同, 且两端的格子的颜色也不同, 则不同的涂色方法共有_____种. (用数字作答)



三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AC=2$, $BC=3$, $\cos A=-\frac{4}{5}$.

(1) 求 $\sin B$ 的值;

(2) 求 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

18. 已知甲盒内有大小相同的 3 个红球和 4 个黑球, 乙盒内有大小相同的 5 个红球和 4 个黑球. 现从甲、乙两个盒内各任取 2 个球.

(1) 求取出的 4 个球均为红球的概率;

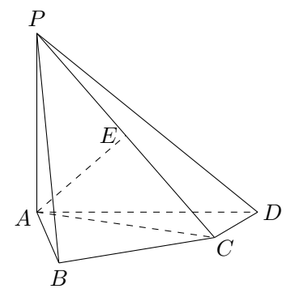
(2) 求取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率;

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\perp AD$, $AC\perp CD$, $\angle ABC=60^\circ$, $PA=AB=BC$, E 是 PC 的中点.

(1) 求 PB 和平面 PAD 所成的角的大小;

(2) 证明 $AE\perp$ 平面 PCD;

(3) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



20. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=4a_n-3n+1$, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 证明数列 $\{a_n-n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;
(3) 证明不等式 $S_{n+1}\leqslant 4S_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 皆成立.

21. 设函数 $f(x)=-x(x-a)^2$ ($x\in\mathbf{R}$), 其中 $a\in\mathbf{R}$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程;
(2) 当 $a\neq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极大值和极小值;
(3) 当 $a>3$ 时, 证明存在 $k\in[-1,0]$, 使得不等式 $f(k-\cos x)\geqslant f(k^2-\cos^2 x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

22. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, A 是椭圆上的一点, $AF_2\perp F_1F_2$, 原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\dfrac{1}{3}|OF_1|$.
(1) 证明 $a=\sqrt{2}b$;
(2) 求 $t\in(0,b)$ 使得下述命题成立: 设圆 $x^2+y^2=t^2$ 上任意点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线交椭圆于 Q_1, Q_2 两点, 则 $OQ_1\perp OQ_2$.

2007 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

1. “$x>1$” 是 “$x^2>x$” 的 （　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

2. 若函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$ (其中 $\omega>0$, $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$) 的最小正周期是 π, 且 $f(0)=\sqrt{3}$, 则 （　）

(A) $\omega=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\omega=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

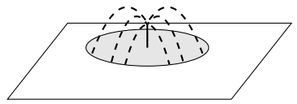
(C) $\omega=2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　　(D) $\omega=2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

3. 直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是 （　）

(A) $x+2y-1=0$　　(B) $2x+y-1=0$

(C) $2x+y-3=0$　　(D) $x+2y-3=0$

4. 要在边长为 16 米的正方形草坪上安装喷水龙头, 使整个草坪都能喷洒到水. 假设每个喷水龙头的喷洒范围都是半径为 6 米的圆面, 则需安装这种喷水龙头的个数最少是 （　）



(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

5. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$, $P(\xi\leqslant 4)=0.84$, 则 $P(\xi\leqslant 0)=$ （　）

(A) 0.16　　(B) 0.32　　(C) 0.68　　(D) 0.84

6. 若 P 是两条异面直线 l, m 外的任意一点, 则 （　）

(A) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都平行

(B) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都垂直

(C) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都相交

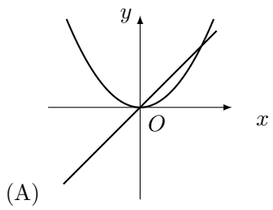
(D) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都异面

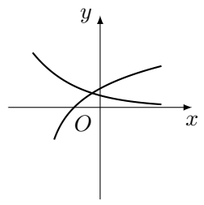
7. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$, 则 （　）

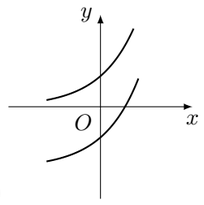
(A) $|2\boldsymbol{a}|>|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$　　(B) $|2\boldsymbol{a}|<|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$

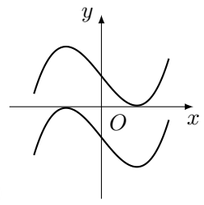
(C) $|2\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$　　(D) $|2\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$

8. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 将 $y=f(x)$ 和 $y=f'(x)$ 的图象画在同一个直角坐标系中, 不可能正确的是 （　）

(A)


(B)


(C)


(D)


9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2, P 是准线上一点, 且 $PF_1\perp PF_2$, $|PF_1|\cdot|PF_2|=4ab$, 则双曲线的离心率是 （　）

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 2　　(D) 3

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\geqslant 1\\ x, & |x|<1\end{cases}$, 若 $f(g(x))$ 的值域是 $[0,+\infty)$, 则函数 $g(x)$ 的值域是 （　）

(A) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　(B) $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

(C) $[0,+\infty)$　　(D) $[1,+\infty)$

二、填空题

11. 已知复数 $z_1=1-\mathrm{i}$, $z_1\cdot z_2=1+\mathrm{i}$, 则复数 $z_2=$_____.

12. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$, 且 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$, 则 $\cos 2\theta$ 的值是_____.

13. 不等式 $|2x-1|-x<1$ 的解集是_____.

14. 某书店有 11 种杂志, 2 元 1 本的 8 种, 1 元 1 本的 3 种. 小张用 10 元钱买杂志 (每种至多买一本, 10 元钱刚好用完), 则不同买法的种数是_____. (用数字作答)

15. 随机变量 ξ 的分布列如下:

ξ	-1	0	1
P	a	b	c

其中 a, b, c 成等差数列. 若 $E\xi=\dfrac{1}{3}$. 则 $D\xi$ 的值是_____.

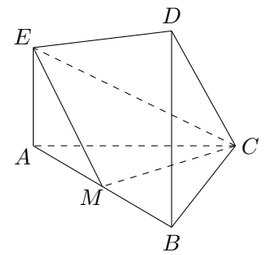
16. 已知点 O 在二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的棱上, 点 P 在 α 内, 且 $\angle POB=45^\circ$. 若对于 β 内异于 O 的任意一点 Q, 都有 $\angle POQ\geqslant 45^\circ$, 则二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的大小是_____.

17. 设 m 为实数, 若 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x-2y+5\geqslant 0\\ 3-x\geqslant 0\\ mx+y\geqslant 0\end{cases}\right\}\subseteq\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 25\}$, 则 m 的取值范围是_____.

三、解答题

18. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{2}+1$, 且 $\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$.
(1) 求边 AB 的长;
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{6}\sin C$, 求角 C 的度数.

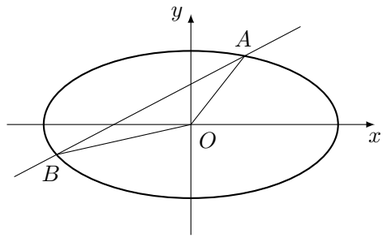
19. 在如图所示的几何体中, $EA\perp$ 平面 ABC, $DB\perp$ 平面 ABC, $AC\perp BC$, 且 $AC=BC=BD=2AE$, M 是 AB 的中点.
(1) 求证: $CM\perp EM$;
(2) 求 CM 与平面 CDE 所成的角.



20. 如图, 直线 $y=kx+b$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A, B 两点, 记 $\triangle AOB$ 的面积为 S.

(1) 求在 $k=0$, $0<b<1$ 的条件下, S 的最大值;

(2) 当 $|AB|=2$, $S=1$ 时, 求直线 AB 的方程.



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 中的相邻两项 a_{2k-1}, a_{2k} 是关于 x 的方程 $x^2-(3k+2^k)x+3k\cdot 2^k=0$ 的两个根, 且 $a_{2k-1}\leqslant a_{2k}$ $(k=1,2,3,\cdots)$.

(1) 求 a_1, a_3, a_5, a_7;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n};

(3) 记 $f(n)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|\sin n|}{\sin n}+3\right)$, $T_n=\dfrac{(-1)^{f(2)}}{a_1a_2}+\dfrac{(-1)^{f(3)}}{a_3a_4}+\dfrac{(-1)^{f(4)}}{a_5a_6}+\cdots+\dfrac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$, 求证: $\dfrac{1}{6}\leqslant T_n\leqslant\dfrac{5}{24}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

22. 设 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$, 对任意实数 t, 记 $g_t(x)=t^{\frac{2}{5}}x-\dfrac{2}{3}t$.

(1) 求函数 $y=f(x)-g_8(x)$ 的单调区间;

(2) 求证:

① 当 $x>0$ 时, $f(x)\geqslant g_t(x)$ 对任意实数 t 成立;

② 有且仅有一个正实数 x_0, 使得 $g_8(x_0)\geqslant g_t(x_0)$ 对任意实数 t 成立.

2007 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

1. 设全集 $U=\{1,3,5,6,8\}$, $A=\{1,6\}$, $B=\{5,6,8\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B=$（　）

(A) $\{6\}$　(B) $\{5,8\}$　(C) $\{6,8\}$　(D) $\{3,5,6,8\}$

2. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 则 $\tan\varphi=$（　）

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $-\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{3}$

3. “$x>1$” 是 “$x^2>x$” 的（　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

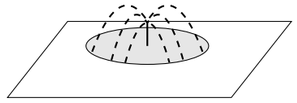
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是（　）

(A) $x+2y-1=0$　(B) $2x+y-1=0$

(C) $2x+y-3=0$　(D) $x+2y-3=0$

5. 要在边长为 16 米的正方形草坪上安装喷水龙头, 使整个草坪都能喷洒到水. 假设每个喷水龙头的喷洒范围都是半径为 6 米的圆面, 则需安装这种喷水龙头的个数最少是（　）



(A) 6　(B) 5　(C) 4　(D) 3

6. $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^9$ 展开式中的常数项是（　）

(A) -36　(B) 36　(C) -84　(D) 84

7. 若 P 是两条异面直线 l, m 外的任意一点, 则（　）

(A) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都平行

(B) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都垂直

(C) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都相交

(D) 过点 P 有且仅有一条直线与 l, m 都异面

8. 甲, 乙两人进行乒乓球比赛, 比赛规则为“3 局 2 胜”, 即以先赢 2 局者为胜. 根据经验, 每局比赛中甲获胜的概率为 0.6, 则本次比赛甲获胜的概率是（　）

(A) 0.216　(B) 0.36　(C) 0.432　(D) 0.648

9. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$, 则（　）

(A) $|2\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$　(B) $|2\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$

(C) $|2\boldsymbol{a}|>|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　(D) $|2\boldsymbol{a}|<|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2, P 是准线上一点, 且 $PF_1\perp PF_2$, $|PF_1|\cdot|PF_2|=4ab$, 则双曲线的离心率是（　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) 3

二、填空题

11. 函数 $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的值域是_____.

12. 若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$, 则 $\sin 2\theta$ 的值是_____.

13. 某校有学生 2000 人, 其中高三学生 500 人. 为了解学生的身体素质情况, 采用按年级分层抽样的方法, 从该校学生中抽取一个 200 人的样本. 则样本中高三学生的人数为_____.

14. $z=2x+y$ 中的 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y+5\geqslant 0\\3-x\geqslant 0\\x+y\geqslant 0\end{cases}$, 则 z 的最小值是_____.

15. 曲线 $y=x^3-2x^2-4x+2$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是_____.

16. 某书店有 11 种杂志, 2 元 1 本的 8 种, 1 元 1 本的 3 种. 小张用 10 元钱买杂志 (每种至多买一本, 10 元钱刚好用完), 则不同买法的种数是_____. (用数字作答)

17. 已知点 O 在二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的棱上, 点 P 在 α 内, 且 $\angle POB=45^\circ$. 若对于 β 内异于 O 的任意一点 Q, 都有 $\angle POQ\geqslant 45^\circ$, 则二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的大小是_____.

三、解答题

18. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{2}+1$, 且 $\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$.

(1) 求边 AB 的长;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{6}\sin C$, 求角 C 的度数.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 中的相邻两项 a_{2k-1}, a_{2k} 是关于 x 的方程 $x^2-(3k+2^k)x+3k\cdot 2^k=0$ 的两个根, 且 $a_{2k-1}\leqslant a_{2k}$ $(k=1,2,3,\cdots)$.

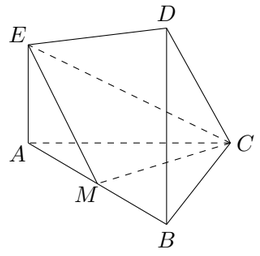
(1) 求 a_1, a_3, a_5, a_7 及 a_{2n} $(n\geqslant 4)$ (不必证明);

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n}.

20. 在如图所示的几何体中, $EA \perp$ 平面 ABC, $DB \perp$ 平面 ABC, $AC \perp BC$, 且 $AC = BC = BD = 2AE$, M 是 AB 的中点.

(1) 求证: $CM \perp EM$;

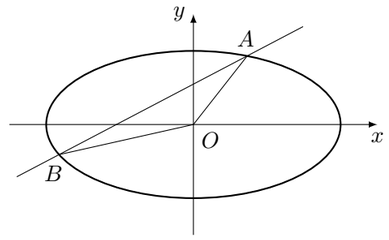
(2) 求 DE 与平面 EMC 所成角的正切值.



21. 如图, 直线 $y = kx + b$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 交于 A, B 两点, 记 $\triangle AOB$ 的面积为 S.

(1) 求在 $k = 0$, $0 < b < 1$ 的条件下, S 的最大值;

(2) 当 $|AB| = 2$, $S = 1$ 时, 求直线 AB 的方程.



22. 已知 $f(x) = |x^2 - 1| + x^2 + kx$.

(1) 若 $k = 2$, 求方程 $f(x) = 0$ 的解;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 2)$ 上有两个解 x_1, x_2, 求 k 的取值范围, 并证明 $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} < 4$.

2008 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\mathrm{i}^3(1+\mathrm{i})^2=$ （　）

(A) 2　(B) -2　(C) $2\mathrm{i}$　(D) $-2\mathrm{i}$

2. 集合 $A=\{y\in\mathbf{R}|y=\lg x, x>1\}$, $B=\{-2,-1,1,2\}$ 则下列结论正确的是 （　）

(A) $A\cap B=\{-2,-1\}$　(B) $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cup B=(-\infty,0)$

(C) $A\cup B=(0,+\infty)$　(D) $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B=\{-2,-1\}$

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 为一条对角线, 若 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$, $\overrightarrow{AC}=(1,3)$, 则 $\overrightarrow{BD}=$ （　）

(A) $(-2,-4)$　(B) $(-3,-5)$　(C) $(3,5)$　(D) $(2,4)$

4. 已知 m, n 是两条不同直线, α, β, γ 是三个不同平面, 下列命题中正确的是 （　）

(A) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$　(B) 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(C) 若 $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$　(D) 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\alpha$, 则 $m\parallel n$

5. 将函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后所得的图象关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{12},0\right)$ 中心对称, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标可能为 （　）

(A) $\left(-\dfrac{\pi}{12},0\right)$　(B) $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$　(C) $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$　(D) $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

6. 设 $(1+x)^8=a_0+a_1x+\cdots+a_8x^8$, 则 a_0, a_1, $\cdots$, a_8 中奇数的个数为（　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

7. $a<0$ 是方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负数根的 （　）

(A) 必要不充分条件　(B) 充分不必要条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

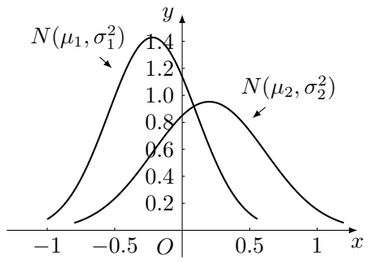
8. 若过点 $A(4,0)$ 的直线 l 与曲线 $(x-2)^2+y^2=1$ 有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围为 （　）

(A) $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$　(B) $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$　(C) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$　(D) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

9. 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y=g(x)$ 的图象与 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 而函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象关于 y 轴对称. 若 $f(m)=-1$, 则 m 的值是 （　）

(A) $-\mathrm{e}$　(B) $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　(C) e　(D) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

10. 设两个正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $(\sigma_1>0)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ $(\sigma_2>0)$ 的密度函数图象如图所示, 则有 （　）



(A) $\mu_1<\mu_2$, $\sigma_1<\sigma_2$　(B) $\mu_1<\mu_2$, $\sigma_1>\sigma_2$

(C) $\mu_1>\mu_2$, $\sigma_1<\sigma_2$　(D) $\mu_1>\mu_2$, $\sigma_1>\sigma_2$

11. 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数、偶函数, 且满足 $f(x)-g(x)=\mathrm{e}^x$, 则有 （　）

(A) $f(2)<f(3)<g(0)$　(B) $g(0)<f(3)<f(2)$

(C) $f(2)<g(0)<f(3)$　(D) $g(0)<f(2)<f(3)$

12. 12 名同学合影, 站成前排 4 人后排 8 人, 现摄影师要从后排 8 人中抽 2 人调整到前排, 若其他人的相对顺序不变, 则不同调整方法的总数是 （　）

(A) $\mathrm{C}_8^2\mathrm{A}_3^2$　(B) $\mathrm{C}_8^2\mathrm{A}_6^6$　(C) $\mathrm{C}_8^2\mathrm{A}_6^2$　(D) $\mathrm{C}_8^2\mathrm{A}_5^2$

二、填空题

13. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$ 的定义域为_____.

14. 在数列 $\{a_n\}$ 在中, $a_n=4n-\dfrac{5}{2}$, $a_1+a_2+\cdots a_n=an^2+bn$, $n\in\mathbf{N}^*$, 其中 a, b 为常数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ 的值是_____.

15. 若 A 为不等式组 $\begin{cases}x\leqslant 0\\ y\geqslant 0\\ y-x\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域, 则当 a 从 -2 连续变化到 1 时, 动直线 $x+y=a$ 扫过 A 中的那部分区域的面积为_____.

16. 已知 A, B, C, D 在同一个球面上, $AB\perp$ 平面 BCD, $BC\perp CD$, 若 $AB=6$, $AC=2\sqrt{13}$, $AD=8$, 则 B, C 两点间的球面距离是_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和图象的对称轴方程;

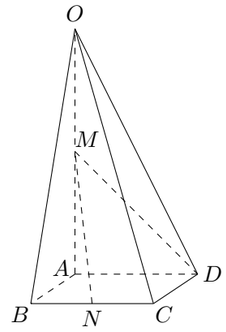
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的值域.

18. 如图, 在四棱锥 $O-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 四边长为 1 的菱形, $\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$. $OA\perp$ 底面 $ABCD$, $OA=2$, M 为 OA 的中点, N 为 BC 的中点.

(1) 证明: 直线 $MN\parallel$ 平面 OCD;

(2) 求异面直线 AB 与 MD 所成角的大小;

(3) 求点 B 到平面 OCD 的距离.



19. 为防止风沙危害, 某地决定建设防护绿化带, 种植杨树、沙柳等植物. 某人一次种植了 n 株沙柳, 各株沙柳成活与否是相互独立的, 成活率为 p, 设 ξ 为成活沙柳的株数, 数学期望 $E\xi=3$, 标准差 $\sigma\xi$ 为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

(1) 求 n, p 的值, 并写出 ξ 的分布列;

(2) 若有 3 株或 3 株以上的沙柳未成活, 则需要补种, 求需要补种沙柳的概率.

20. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ $(x>0$ 且 $x\neq 1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 已知 $2^{\frac{1}{x}}>x^a$ 对任意 $x\in(0,1)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

21. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=0$, $a_{n+1}=ca_n^3+1-c$, $n\in\mathbf{N}^*$, 其中 c 为实数.

(1) 证明: $a_n\in[0,1]$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立的充分必要条件是 $c\in[0,1]$;

(2) 设 $0<c<\dfrac{1}{3}$, 证明: $a_n\geqslant 1-(3c)^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}^*$;

(3) 设 $0<c<\dfrac{1}{3}$, 证明: $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>n+1-\dfrac{2}{1-3c}$, $n\in\mathbf{N}^*$

22. 设椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 过点 $M\left(\sqrt{2},1\right)$, 且左焦点为 $F_1\left(-\sqrt{2},0\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 当过点 $P(4,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交与两不同点 A, B 时, 在线段 AB 上取点 Q, 满足 $\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QB}\right|=\left|\overrightarrow{AQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|$, 证明: 点 Q 总在某定直线上.

2008 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

1. 若 A 为全体实数的集合, $B=\{-2,-1,1,2\}$, 则下列结论正确的是 （ ）

(A) $A\cap B=\{-2,-1\}$　(B) $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cup B=(-\infty,0)$

(C) $A\cup B=(0,+\infty)$　(D) $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B=\{-2,-1\}$

2. 若 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$, $\overrightarrow{AC}=(1,3)$, 则 $\overrightarrow{BC}=$ （ ）

(A) $(1,1)$　(B) $(-1,-1)$　(C) $(3,7)$　(D) $(-3,-7)$

3. 已知 m, n 是两条不同直线, α, β, γ 是三个不同平面, 下列命题中正确的是 （ ）

(A) 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha\parallel\beta$　(B) 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\alpha$, 则 $m\parallel n$

(C) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$　(D) 若 $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$

4. $a<0$ 是方程 $ax^2+1=0$ 有一个负数根的 （ ）

(A) 必要不充分条件　(B) 充分必要条件

(C) 充分不必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 在三角形 ABC 中, $AB=5$, $AC=3$, $BC=7$, 则 $\angle BAC$ 的大小为（ ）

(A) $\dfrac{2\pi}{3}$　(B) $\dfrac{5\pi}{6}$　(C) $\dfrac{3\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

6. 函数 $f(x)=(x-1)^2+1$ $(x\leqslant 0)$ 的反函数为 （ ）

(A) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 1)$　(B) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 1)$

(C) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 2)$　(D) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 2)$

7. 设 $(1+x)^8=a_0+a_1x+\cdots+a_8x^8$, 则 a_0, a_1, $\cdots$, a_8 中奇数的个数为（ ）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

8. 函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 图象的对称轴方程可能是 （ ）

(A) $x=-\dfrac{\pi}{6}$　(B) $x=-\dfrac{\pi}{12}$　(C) $x=\dfrac{\pi}{6}$　(D) $x=\dfrac{\pi}{12}$

9. 设函数 $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}-1$ $(x<0)$, 则 $f(x)$ （ ）

(A) 有最大值　(B) 有最小值　(C) 是增函数　(D) 是减函数

10. 若过点 $A(4,0)$ 的直线 l 与曲线 $(x-2)^2+y^2=1$ 有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围为 （ ）

(A) $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$　(B) $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$　(C) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　(D) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

11. 若 A 为不等式组 $\begin{cases}x\leqslant 0\\ y\geqslant 0\\ y-x\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域, 则当 a 从 -2 连续变化到 1 时, 动直线 $x+y=a$ 扫过 A 中的那部分区域的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{4}$　(B) 1　(C) $\dfrac{7}{4}$　(D) 2

12. 12 名同学合影, 站成前排 4 人后排 8 人, 现摄影师要从后排 8 人中抽 2 人调整到前排, 若其他人的相对顺序不变, 则不同调整方法的总数是 （ ）

(A) $C_8^2A_6^6$　(B) $C_8^2A_3^2$　(C) $C_8^2A_6^2$　(D) $C_8^2A_5^2$

二、填空题

13. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$ 的定义域为_____.

14. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{n}-\dfrac{y^2}{12-n}=1$ 的离心率是 $\sqrt{3}$. 则 $n=$_____.

15. 在数列 $\{a_n\}$ 在中, $a_n=4n-\dfrac{5}{2}$, $a_1+a_2+\cdots a_n=an^2+bn$, $n\in\mathbf{N}^*$, 其中 a, b 为常数, 则 $ab=$_____.

16. 已知 A, B, C, D 在同一个球面上, $AB\perp$ 平面 BCD, $BC\perp CD$, 若 $AB=6$, $AC=2\sqrt{13}$, $AD=8$, 则 B, C 两点间的球面距离是_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的值域.

18. 在某次普通话测试中, 为测试汉字发音水平, 设置了 10 张卡片, 每张卡片印有一个汉字的拼音, 其中恰有 3 张卡片上的拼音带有后鼻音“g”.

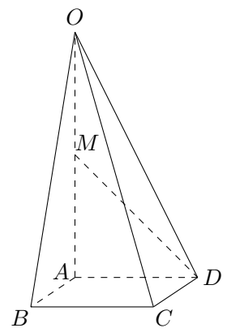
(1) 现对三位被测试者先后进行测试, 第一位被测试者从这 10 张卡片总随机抽取 1 张, 测试后放回, 余下 2 位的测试, 也按同样的方法进行. 求这三位被测试者抽取的卡片上, 拼音都带有后鼻音“g”的概率;

(2) 若某位被测试者从 10 张卡片中一次随机抽取 3 张, 求这三张卡片上, 拼音带有后鼻音“g”的卡片不少于 2 张的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $O-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 四边长为 1 的菱形, $\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$. $OA\perp$ 底面 $ABCD$, $OA=2$, M 为 OA 的中点.

(1) 求异面直线 AB 与 MD 所成角的大小;

(2) 求点 B 到平面 OCD 的距离.



20. 设函数 $f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+(a+1)x+1$, 其中 a 为实数.
(1) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值;
(2) 已知不等式 $f'(x)>x^2-x-a+1$ 对任意 $a\in(0,+\infty)$ 都成立, 求实数 x 的取值范围.

21. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$, $a_{n+1}=ca_n+1-c$, $n\in\mathbf{N}^*$, 其中 a, c 为实数, 且 $c\neq 0$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $a=\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{1}{2}$, $b_n=n(1-a_n)$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n;
(3) 若 $0<a_n<1$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立, 证明 $0<c\leqslant 1$.

22. 设椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 其相应于焦点 $F(2,0)$ 的准线方程为 $x=4$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 已知过点 $F_1(-2,0)$ 倾斜角为 θ 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点, 求证: $|AB|=\dfrac{4\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}$;
(3) 过点 $F_1(-2,0)$ 作两条互相垂直的直线分别交椭圆 C 于 A, B 和 D, E, 求 $|AB|+|DE|$ 的最小值.

2008 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$, 那么集合 $A\cap(\complement_U B)$ 等于 （ ）

(A) $\{x|-2\leqslant x<4\}$　(B) $\{x|x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant 4\}$

(C) $\{x|-2\leqslant x<-1\}$　(D) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$

2. 若 $a=2^{0.5}$, $b=\log_\pi 3$, $c=\log_2\sin\dfrac{2\pi}{5}$, 则 （ ）

(A) $a>b>c$　(B) $b>a>c$　(C) $c>a>b$　(D) $b>c>a$

3. “函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 存在反函数”是“函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 若点 P 到直线 $x=-1$ 的距离比它到点 $(2,0)$ 的距离小 1, 则点 P 的轨迹为 （ ）

(A) 圆　(B) 椭圆　(C) 双曲线　(D) 抛物线

5. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y\geqslant 0\\ x\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3^{x+2y}$ 的最小值是 （ ）

(A) 0　(B) 1　(C) $\sqrt{3}$　(D) 9

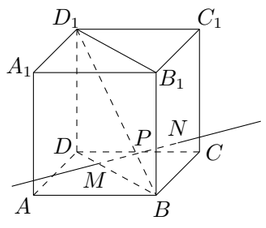
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 对任意的 p, $q\in\mathbf{N}^*$ 满足 $a_{p+q}=a_p+a_q$, 且 $a_2=-6$, 那么 a_{10} 等于 （ ）

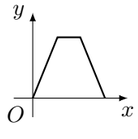
(A) -165　(B) -33　(C) -30　(D) -21

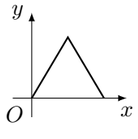
7. 过直线 $y=x$ 上的一点作圆 $(x-5)^2+(y-1)^2=2$ 的两条切线 l_1, l_2, 当直线 l_1, l_2 关于 $y=x$ 对称时, 它们之间的夹角为 （ ）

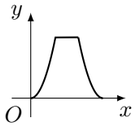
(A) $30°$　(B) $45°$　(C) $60°$　(D) $90°$

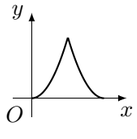
8. 如图, 动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上. 过点 P 作垂直于平面 BB_1D_1D 的直线, 与正方体表面相交于 MN. 设 $BP=x$, $MN=y$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象大致是 （ ）



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

二、填空题

9. 已知 $(a-\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$, 其中 i 是虚数单位, 那么实数 $a=$_____.

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$, 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=4$, 那么 $\boldsymbol{b}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 的值为_____.

11. 若 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^n$ 展开式的各项系数之和为 32, 则 $n=$_____, 其展开式中的常数项为_____. (用数字作答)

12. 如图, 函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC, 其中 A, B, C 的坐标分别为 $(0,4)$, $(2,0)$, $(6,4)$, 则 $f(f(0))=$_____; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$_____. (用数字作答)

13. 已知函数 $f(x)=x^2-\cos x$, 对于 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的任意 x_1, x_2, 有如下条件: ① $x_1>x_2$; ② $x_1^2>x_2^2$; ③ $|x_1|>x_2$. 其中能使 $f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立的条件序号是_____.

14. 某校数学课外小组在坐标纸上, 为学校的一块空地设计植树方案如下: 第 k 棵树种植在点 $P_k(x_k,y_k)$ 处, 其中 $x_1=1$, $y_1=1$, 当 $k\geqslant 2$ 时, $\begin{cases}x_k=x_{k-1}+1-5\left[T\left(\dfrac{k-1}{5}\right)-T\left(\dfrac{k-2}{5}\right)\right]\\ y_k=y_{k-1}+T\left(\dfrac{k-1}{5}\right)-T\left(\dfrac{k-2}{5}\right)\end{cases}$. $T(a)$ 表示非负实数 a 的整数部分, 例如 $T(2.6)=2$, $T(0.2)=0$. 按此方案, 第 6 棵树种植点的坐标应为_____; 第 2008 棵树种植点的坐标应为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1) 求 ω 的值;

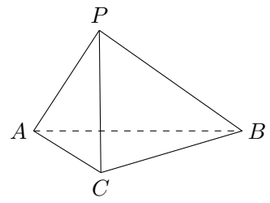
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的取值范围.

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AC=BC=2$, $\angle ACB=90°$, $AP=BP=AB$, $PC\perp AC$.

(1) 求证: $PC\perp AB$;

(2) 求二面角 $B-AP-C$ 的大小;

(3) 求点 C 到平面 APB 的距离.



17. 甲、乙等五名奥运志愿者被随机地分到 A, B, C, D 四个不同的岗位服务, 每个岗位至少有一名志愿者.

(1) 求甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率;

(2) 求甲、乙两人不在同一个岗位服务的概率;

(3) 设随机变量 ξ 为这五名志愿者中参加 A 岗位服务的人数, 求 ξ 的分布列.

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-b}{(x-1)^2}$, 求导函数 $f'(x)$, 并确定 $f(x)$ 的单调区间.

19. 已知菱形 $ABCD$ 的顶点 A, C 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上, 对角线 BD 所在直线的斜率为 1.
(1) 当直线 BD 过点 $(0,1)$ 时, 求直线 AC 的方程;
(2) 当 $\angle ABC=60^\circ$ 时, 求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

20. 对于每项均是正整数的数列 A: a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 定义变换 T_1, T_1 将数列 A 变换成数列 $T_1(A)$: n, a_1-1, a_2-1, $\cdots$, a_n-1. 对于每项均是非负整数的数列 B: b_1, b_2, $\cdots$, b_m, 定义变换 T_2, T_2 将数列 B 各项从大到小排列, 然后去掉所有为零的项, 得到数列 $T_2(B)$; 又定义 $S(B)=2(b_1+2b_2+\cdots+mb_m)+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$. 设 A_0 是每项均为正整数的有穷数列, 令 $A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))$ $(k=0,1,2,\cdots)$.
(1) 如果数列 A_0 为 5, 3, 2, 写出数列 A_1, A_2;
(2) 对于每项均是正整数的有穷数列 A, 证明 $S(T_1(A))=S(A)$;
(3) 证明: 对于任意给定的每项均为正整数的有穷数列 A_0, 存在正整数 K, 当 $k\geqslant K$ 时, $S(A_{k+1})=S(A_k)$.

2008 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$, 则集合 $A\cap B$ 等于 （ ）

(A) $\{x|x\leqslant 3$ 或 $x>4\}$　(B) $\{x|-1<x\leqslant 3\}$

(C) $\{x|3\leqslant x<4\}$　(D) $\{x|-2\leqslant x<-1\}$

2. 若 $a=\log_3\pi$< $b=\log_7 6$, $c=\log_2 0.8$, 则 （ ）

(A) $a>b>c$　(B) $b>a>c$　(C) $c>a>b$　(D) $b>c>a$

3. “双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$”是“双曲线的准线方程为 $x=\pm\dfrac{9}{5}$”的（ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 已知 $\triangle ABC$ 中, $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$, $B=60^\circ$, 那么角 A 等于 （ ）

(A) 135°　(B) 90°　(C) 45°　(D) 30°

5. 函数 $f(x)=(x-1)^2+1$ $(x<1)$ 的反函数为 （ ）

(A) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-1}$ $(x>1)$　(B) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}$ $(x>1)$

(C) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 1)$　(D) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 1)$

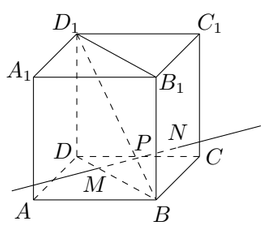
6. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y\geqslant 0\\ x\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最小值是 （ ）

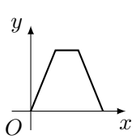
(A) 0　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

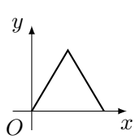
7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=6$, $a_5=15$, 若 $b_n=a_{2n}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项和等于 （ ）

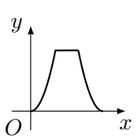
(A) 30　(B) 45　(C) 90　(D) 186

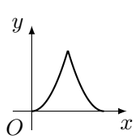
8. 如图, 动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上. 过点 P 作垂直于平面 BB_1D_1D 的直线, 与正方体表面相交于 MN. 设 $BP=x$, $MN=y$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象大致是 （ ）



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

二、填空题

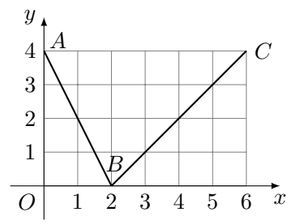
9. 若角 α 的终边经过点 $P(1,-2)$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值为_____.

10. 不等式 $\dfrac{x-1}{x+2}>1$ 的解集是_____.

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°, 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=4$, 那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值为_____.

12. $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^5$ 的展开式中常数项为_____; 各项系数之和为_____. (用数字作答)

13. 如图, 函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC, 其中 A, B, C 的坐标分别为 $(0,4)$, $(2,0)$, $(6,4)$, 则 $f(f(0))=$_____; 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)=$_____.



14. 已知函数 $f(x)=x^2-\cos x$, 对于 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的任意 x_1, x_2, 有如下条件: ① $x_1>x_2$; ② $x_1^2>x_2^2$; ③ $|x_1|>x_2$. 其中能使 $f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立的条件序号是_____. $T(a)$ 表示非负实数 a 的整数部分, 例如 $T(2.6)=2$, $T(0.2)=0$. 按此方案, 第 6 棵树种植点的坐标应为_____; 第 2008 棵树种植点的坐标应为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

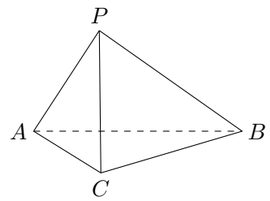
(1) 求 ω 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的取值范围.

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AC=BC=2$, $\angle ACB=90^\circ$, $AP=BP=AB$, $PC\perp AC$.

(1) 求证: $PC\perp AB$;

(2) 求二面角 $B-AP-C$ 的大小.



17. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+3bx+c$ $(b\neq 0)$, 且 $g(x)=f(x)-2$ 是奇函数.

(1) 求 a, c 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

18. 甲、乙等五名奥运志愿者被随机地分到 A, B, C, D 四个不同的岗位服务, 每个岗位至少有一名志愿者.
(1) 求甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率;
(2) 求甲、乙两人不在同一个岗位服务的概率.

19. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上, C 在直线 l: $y=x+2$ 上, 且 $AB \parallel l$.
(1) 当 AB 边通过坐标原点 O 时, 求 AB 的长及 $\triangle ABC$ 的面积;
(2) 当 $\angle ABC=90^\circ$, 且斜边 AC 的长最大时, 求 AB 所在直线的方程.

20. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=(n^2+n-\lambda)a_n$ $(n=1, 2, \cdots)$, λ 是常数.
(1) 当 $a_2=-1$ 时, 求 λ 及 a_1 的值;
(2) 数列 $\{a_n\}$ 是否可能为等差数列? 若可能, 求出它的通项公式; 若不可能, 说明理由;
(3) 求 λ 的取值范围, 使得存在正整数 m, 当 $n>m$ 时总有 $a_n<0$.

2008 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $1+\dfrac{2}{\mathrm{i}^3}=$ （　）

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) -1　(D) 3

2. 设 m, n 是整数, 则"m, n 均为偶数"是"$m+n$ 是偶数"的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 圆 O_1: $x^2+y^2-2x=0$ 和圆 O_2: $x^2+y^2-4y=0$ 的位置关系是 （　）

(A) 相离　(B) 相交　(C) 外切　(D) 内切

4. 已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 则 $\dfrac{m}{M}$ 的值为 （　）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(3,\sigma^2)$, 则 $P(\xi<3)=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

6. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意 x_1, $x_2\in\mathbf{R}$ 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$, 则下列说法一定正确的是 （　）

(A) $f(x)$ 为奇函数　(B) $f(x)$ 为偶函数

(C) $f(x)+1$ 为奇函数　(D) $f(x)+1$ 为偶函数

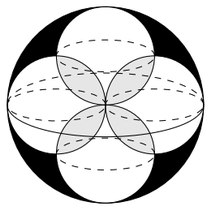
7. 若过两点 $P_1(-1,2)$, $P_2(5,6)$ 的直线与 x 轴相交于点 P, 则点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比 λ 的值为 （　）

(A) $-\dfrac{1}{3}$　(B) $-\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{1}{3}$

8. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 $y=kx$ $(k>0)$, 离心率 $e=\sqrt{5}k$, 则双曲线方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4a^2}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5a^2}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{4b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{5b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

9. 如图, 体积为 V 的大球内有 4 个小球, 每个小球的球面过大球球心且与大球球面有且只有一个交点, 4 个小球的球心是以大球球心为中心的正方形的 4 个顶点. V_1 为小球相交部分 (图中阴影部分) 的体积, V_2 为大球内、小球外的图中黑色部分的体积, 则下列关系中正确的是 （　）



(A) $V_1>\dfrac{V}{2}$　(B) $V_2<\dfrac{V}{2}$　(C) $V_1>V_2$　(D) $V_1<V_2$

10. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\sqrt{3-2\cos x-2\sin x}}$ 的值域是 （　）

(A) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right]$　(B) $[-1,0]$　(C) $[-\sqrt{2},0]$　(D) $[-\sqrt{3},0]$

二、填空题

11. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{2,4\}$, $B=\{3,4,5\}$, $C=\{3,4\}$, 则 $(A\cup B)\cap(\complement_U C)=$_____.

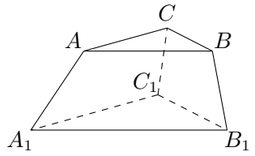
12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & (\text{当}x\neq 0\text{时})\\ a & (\text{当}x=0\text{时})\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+1}{a^2n^2+n}=$_____.

13. 已知 $a^{\frac{2}{3}}=\dfrac{4}{9}$ $(a>0)$, 则 $\log_{\frac{2}{3}}a=$_____.

14. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_{12}=-8$, $S_9=-9$, 则 $S_{16}=$_____.

15. 直线 l 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+a=0$ $(a<3)$ 相交于两点 A, B, 弦 AB 的中点为 $(0,1)$, 则直线 l 的方程为_____.

16. 某人有 4 种颜色的灯泡 (每种颜色的灯泡足够多), 要在如图所示的 6 个点 A、B、C、A_1、B_1、C_1 上各装一个灯泡, 要求同一条线段两端的灯泡不同色, 则每种颜色的灯泡都至少用一个的安装方法共有_____种. (用数字作答)



三、解答题

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $A=60^\circ$, $c=3b$. 求:

(1) $\dfrac{a}{c}$ 的值;

(2) $\cot B+\cot C$ 的值.

18. 甲、乙、丙三人按下面的规则进行乒乓球比赛: 第一局由甲、乙参加而丙轮空, 以后每一局由前一局的获胜者与轮空者进行比赛, 而前一局的失败者轮空. 比赛按这种规则一直进行到其中一人连胜两局或打满 6 局时停止. 设在每局中参赛者胜负的概率均为 $\dfrac{1}{2}$, 且各局胜负相互独立. 求:

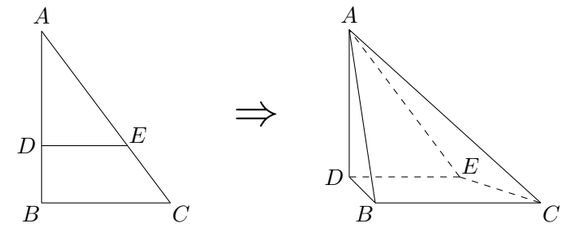
(1) 打满 3 局比赛还未停止的概率;

(2) 比赛停止时已打局数 ξ 的分别列与期望 $E\xi$.

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $B=90^\circ$, $AC=\dfrac{15}{2}$, D、E 两点分别在 AB、AC 上, 使 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}=2$, $DE=3$. 现将 $\triangle ABC$ 沿 DE 折成直二角角, 求:

(1) 异面直线 AD 与 BC 的距离;

(2) 二面角 $A-EC-B$ 的大小 (用反三角函数表示).



20. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$, 曲线 $y=f(x)$ 通过点 $(0,2a+3)$, 且在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线垂直于 y 轴.

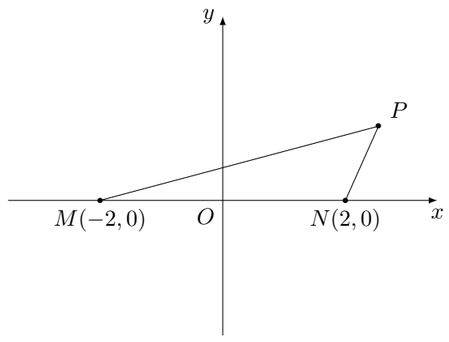
(1) 用 a 分别表示 b 和 c;

(2) 当 bc 取得最小值时, 求函数 $g(x)=-f(x)\mathrm{e}^{-x}$ 的单调区间.

21. 如图, $M(-2,0)$ 和 $N(2,0)$ 是平面上的两点, 动点 P 满足: $|PM|+|PN|=6$.

(1) 求点 P 的轨迹方程;

(2) 若 $|PM|\cdot|PN|=\dfrac{2}{1-\cos MPN}$, 求点 P 的坐标.



22. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_n=a_{n+1}^{\frac{3}{2}}a_{n+2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 若 $a_2=\dfrac{1}{4}$, 求 a_3, a_4, 并猜想 a_{2008} 的值 (不需证明);

(2) 记 $b_n=a_1a_2\cdots a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 若 $b_n\geqslant 2\sqrt{2}$ 对 $n\geqslant 2$ 恒成立, 求 a_2 的值及数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

2008 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_2+a_8=12$, 则 a_5 等于 （ ）

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

2. 设 x 是实数, 则“$x>0$”是“$|x|>0$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 曲线 C: $\begin{cases}x=\cos\theta-1\\ y=\sin\theta+1\end{cases}$ (θ 为参数) 的普通方程为 （ ）

(A) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ (B) $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

(C) $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ (D) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

4. 若点 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 $-\frac{1}{3}$, 则点 B 分有向线段 $\overrightarrow{PA}$ 所成的比是 （ ）

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 3

5. 某交高三年级有男生 500 人, 女生 400 人. 为了解该年级学生的健康情况, 从男生中任意抽取 25 人, 从女生中任意抽取 20 人进行调查. 这种抽样方法是 （ ）

(A) 简单随机抽样法 (B) 抽签法

(C) 随机数表法 (D) 分层抽样法

6. 函数 $y=10^{x^2-1}$ $(0<x\leqslant 1)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=-\sqrt{1+\lg x}\left(x>\frac{1}{10}\right)$ (B) $y=\sqrt{1+\lg x}\left(x>\frac{1}{10}\right)$

(C) $y=-\sqrt{1+\lg x}\left(\frac{1}{10}<x\leqslant 1\right)$ (D) $y=\sqrt{1+\lg x}\left(\frac{1}{10}<x\leqslant 1\right)$

7. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ 的最大值为 （ ）

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 1

8. 若双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{16y^2}{p^2}=1$ 的左焦点在抛物线 $y^2=2px$ 的准线上, 则 p 的值为 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$

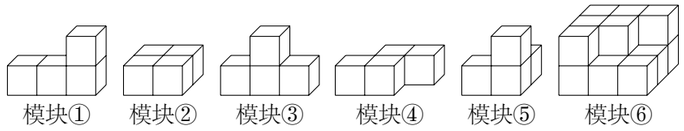
9. 从编号为 1, 2, $\cdots$, 10 的 10 个大小相同的球中任取 4 个, 则所取 4 个球的最大号码是 6 的概率为 （ ）

(A) $\frac{1}{84}$ (B) $\frac{1}{21}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

10. 若 $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^n$ 的展开式中前三项的系数成等差数, 则展开式中 x^4 项的系数为 （ ）

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

11. 如图, 模块① $\sim$ ⑤均由 4 个棱长为 1 的小正方体构成, 模块⑥由 15 个棱长为 1 的小正方体构成. 现从模块① $\sim$ ⑤中选出三个放到模块⑥上, 使得模块⑥成为一个棱长为 3 的大正方体. 则下列选择方案中, 能够完成任务的为 （ ）



(A) 模块①②⑤ (B) 模块①③⑤ (C) 模块②④⑥ (D) 模块③④⑤

12. 函数 $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{5+4\cos x}}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 的值域是 （ ）

(A) $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ (B) $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ (C) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ (D) $\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$

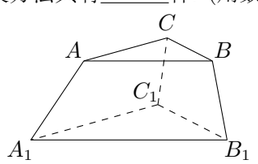
二、填空题

13. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{2,3,4\}$, $B=\{4,5\}$, 则 $A\cap(\complement_U B)=$_____.

14. 若 $x>0$, 则 $\left(2x^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{3}{2}}\right)\left(2x^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{3}{2}}\right)-4x^{-\frac{1}{2}}\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)=$_____.

15. 已知圆 C: $x^2+y^2+2x+ay-3=0$ (a 为实数) 上任意一点关于直线 l: $x-y+2=0$ 的对称点都在圆 C 上, 则 $a=$_____.

16. 某人有 3 种颜色的灯泡 (每种颜色的灯泡足够多) , 要在如图所示的 6 个点 A、B、C、A_1、B_1、C_1 上各装一个灯泡, 要求同一条线段两端的灯泡不同色, 则不同的安装方法共有_____种. (用数字作答)



三、解答题

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $b^2+c^2=a^2+\sqrt{3}bc$, 求:

(1) A 的大小;

(2) $2\sin B\cos C-\sin(B-C)$ 的值.

18. 在每道单项选择题给出的 4 个备选答案中, 只有一个是正确的. 若对 4 道选择题中的每一道都任意选定一个答案, 求这 4 道题中:

(1) 恰有两道题答对的概率;

(2) 至少答对一道题的概率.

19. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2-9x-1$ ($a<0$). 若曲线 $y=f(x)$ 的斜率最小的切线与直线 $12x+y=6$ 平行, 求:

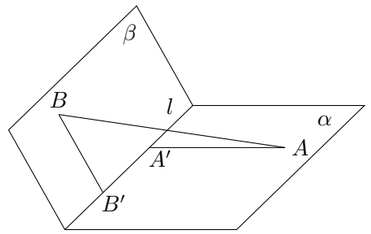
(1) a 的值;

(2) 函数 $f(x)$ 的单调区间.

20. 如图, α 和 β 为平面, $\alpha \cap \beta = l$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AB = 5$, A, B 在棱 l 上的射影分别为 A', B', $AA' = 3$, $BB' = 2$. 若二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小为 $\dfrac{2\pi}{3}$, 求:

(1) 点 B 到平面 α 的距离;

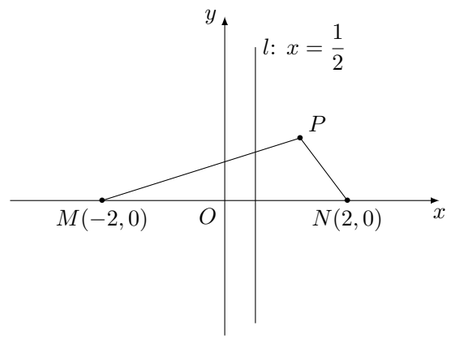
(2) 异面直线 l 与 AB 所成的角. (用反三角函数表示)



21. 如图, $M(-2,0)$ 和 $N(2,0)$ 是平面上的两点, 动点 P 满足: $||PM| - |PN|| = 2$.

(1) 求点 P 的轨迹方程;

(2) 设 d 为点 P 到直线 l: $x = \dfrac{1}{2}$ 的距离, 若 $|PM| = 2|PN|^2$, 求 $\dfrac{|PM|}{d}$ 的值.



22. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_n = a_{n+1}^{\frac{3}{2}} a_{n+2}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 若 $a_2 = \dfrac{1}{4}$, 求 a_3, a_4, 并猜想 a_{2008} 的值 (不需证明);

(2) 若 $2\sqrt{2} \leqslant a_1 a_2 \cdots a_n < 4$ 对 $n \geqslant 2$ 恒成立, 求 a_2 的值.

2008 年普通高等学校招生考试（大纲卷 I）

理科数学

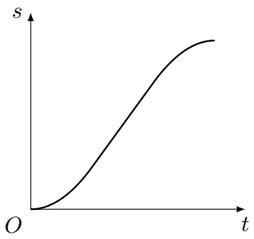
一、选择题

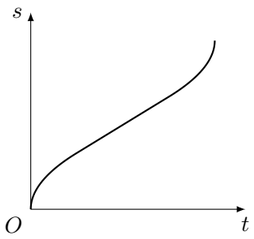
1. 函数 $y=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x}$ 的定义域为 （ ）

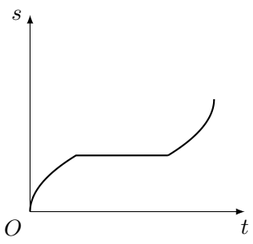
(A) $\{x|x\geqslant 0\}$ (B) $\{x|x\geqslant 1\}$

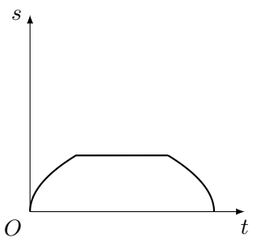
(C) $\{x|x\geqslant 1\}\cup\{0\}$ (D) $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

2. 汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车, 若把这一过程中汽车的行驶路程 s 看作时间 t 的函数, 其图象可能是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$. 若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AD}=$( )

(A) $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$ (B) $\frac{5}{3}\boldsymbol{c}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$ (C) $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$ (D) $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$

4. 设 $a\in\mathbf{R}$, 且 $(a+\mathrm{i})^2\mathrm{i}$ 为正实数, 则 $a=$ （ ）

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=4$, $a_3+a_5=10$, 则它的前 10 项的和 $S_{10}=$ （ ）

(A) 138 (B) 135 (C) 95 (D) 23

6. 若函数 $y=f(x-1)$ 的图象与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 $f(x)=$ （ ）

(A) e^{2x-1} (B) e^{2x} (C) e^{2x+1} (D) e^{2x+2}

7. 设曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3,2)$ 处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直, 则 $a=$ （ ）

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -2

8. 为得到函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象( )

(A) 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位 (B) 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位

(C) 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位 (D) 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位

9. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数, 且 $f(1)=0$, 则不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为 （ ）

(A) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ (B) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

(C) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ (D) $(-1,0)\cup(0,1)$

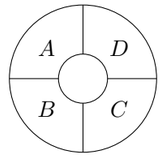
10. 若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 通过点 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$, 则 （ ）

(A) $a^2+b^2\leqslant 1$ (B) $a^2+b^2\geqslant 1$ (C) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\leqslant 1$ (D) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$

11. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等, A_1 在底面 ABC 内的射影为 $\triangle ABC$ 的中心, 则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值等于( )

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

12. 如图, 一环形花坛分成 A、B、C、D 四块, 现有 4 种不同的花供选种, 要求在每块里种 1 种花, 且相邻的 2 块种不同的花, 则不同的种法总数为( )



(A) 96 (B) 84 (C) 60 (D) 48

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 0\\ x-y+3\geqslant 0\\ 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最大值为_____.

14. 已知抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点是坐标原点, 则以抛物线与两坐标轴的三个交点为顶点的三角形面积为_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC$, $\cos B=-\frac{7}{18}$. 若以 A、B 为焦点的椭圆经过点 C, 则该椭圆的离心率 $e=$_____.

16. 等边三角形 ABC 与正方形 $ABDE$ 有一公共边 AB, 二面角 $C-AB-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, M、N 分别是 AC、BC 的中点, 则 EM、AN 所成角的余弦值等于_____.

三、解答题

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 所对的边长分别为 a、b、c, 且 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$.

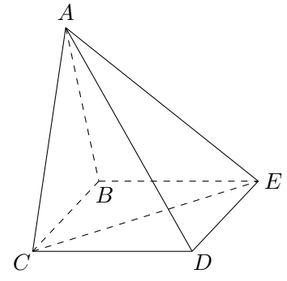
(1) 求 $\tan A\cot B$ 的值;

(2) 求 $\tan(A-B)$ 的最大值.

18. 四棱锥 $A-BCDE$ 中, 底面 $BCDE$ 为矩形, 侧面 $ABC\perp$ 底面 $BCDE$, $BC=2$, $CD=\sqrt{2}$, $AB=AC$.

(1) 证明: $AD\perp CE$;

(2) 设 CE 与平面 ABE 所成的角为 45°, 求二面角 $C-AD-E$ 的大小.



19. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$, $a\in\mathbf{R}$.
(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 内是减函数, 求 a 的取值范围.

20. 已知 5 只动物中有 1 只患有某种疾病, 需要通过化验血液来确定患病的动物. 血液化验结果呈阳性的即为患病动物, 呈阴性即没患病. 下面是两种化验方案:
方案甲: 逐个化验, 直到能确定患病动物为止.
方案乙: 先任取 3 只, 将它们的血液混在一起化验. 若结果呈阳性则表明患病动物为这 3 只中的 1 只, 然后再逐个化验, 直到能确定患病动物为止; 若结果呈阴性则在另外 2 只中任取 1 只化验.
(1) 求依方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率;
(2) ξ 表示依方案乙所需化验次数, 求 ξ 的期望.

21. 双曲线的中心为原点 O, 焦点在 x 轴上, 两条渐近线分别为 l_1, l_2, 经过右焦点 F 垂直于 l_1 的直线分别交 l_1, l_2 于 A, B 两点. 已知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$、$\left|\overrightarrow{AB}\right|$、$\left|\overrightarrow{OB}\right|$ 成等差数列, 且 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 同向.
(1) 求双曲线的离心率;
(2) 设 AB 被双曲线所截得的线段的长为 4, 求双曲线的方程.

22. 设函数 $f(x)=x-x\ln x$. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_1<1$, $a_{n+1}=f(a_n)$.
(1) 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 是增函数;
(2) 证明: $a_n<a_{n+1}<1$;
(3) 设 $b\in(a_1,1)$, 整数 $k\geqslant\dfrac{a_1-b}{a_1\ln b}$. 证明: $a_{k+1}>b$.

2008 年普通高等学校招生考试（大纲卷 I）

文科数学

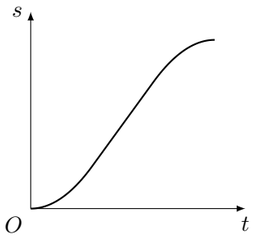
一、选择题

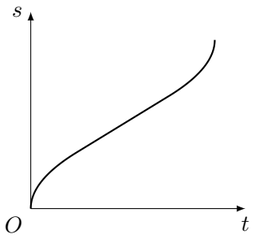
1. 函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ 的定义域为 （ ）

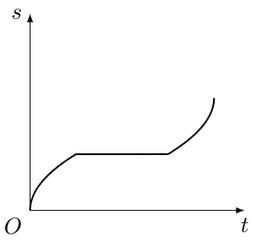
(A) $\{x|x\leqslant 1\}$　(B) $\{x|x\geqslant 0\}$

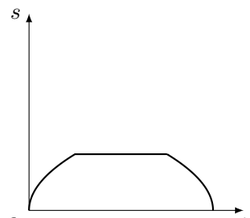
(C) $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 0\}$　(D) $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

2. 汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车, 若把这一过程中汽车的行驶路程 s 看作时间 t 的函数, 其图象可能是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

3. $\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 （ ）

(A) 10　(B) 5　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 1

4. 曲线 $y=x^3-2x+4$ 在点 $(1,3)$ 处的切线的倾斜角为 （ ）

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 120°

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$. 若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AD}=$（ ）

(A) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}$　(B) $\dfrac{5}{3}\boldsymbol{c}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$　(C) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}$　(D) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{c}$

6. $y=(\sin x-\cos x)^2-1$ 是 （ ）

(A) 最小正周期为 2π 的偶函数　(B) 最小正周期为 2π 的奇函数

(C) 最小正周期为 π 的偶函数　(D) 最小正周期为 π 的奇函数

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=3$, $a_2+a_3=6$, 则 $a_7=$ （ ）

(A) 64　(B) 81　(C) 128　(D) 243

8. 若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 $f(x)=$ （ ）

(A) e^{2x-2}　(B) e^{2x}　(C) e^{2x+1}　(D) e^{2x+2}

9. 为得到函数 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y=\sin x$ 的图象 （ ）

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个长度单位　(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个长度单位

(C) 向左平移 $\dfrac{5\pi}{6}$ 个长度单位　(D) 向右平移 $\dfrac{5\pi}{6}$ 个长度单位

10. 若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点, 则 （ ）

(A) $a^2+b^2\leqslant 1$　(B) $a^2+b^2\geqslant 1$　(C) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\leqslant 1$　(D) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant 1$

11. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等, A_1 在底面 ABC 内的射影为 $\triangle ABC$ 的中心, 则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值等于（ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

12. 将 1, 2, 3 填入 3×3 的方格中, 要求每行、每列都没有重复数字, 下面是一种填法, 则不同的填写方法共有 （ ）

1	2	3
3	1	2
2	3	1

(A) 6 种　(B) 12 种　(C) 24 种　(D) 48 种

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 0\\ x-y+3\geqslant 0\\ 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最大值为_____.

14. 已知抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点是坐标原点, 则以抛物线与两坐标轴的三个交点为顶点的三角形面积为_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, $\tan B=\dfrac{3}{4}$. 若以 A、B 为焦点的椭圆经过点 C, 则该椭圆的离心率 $e=$_____.

16. 已知菱形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $\angle A=120^\circ$, 沿对角线 BD 将 $\triangle ABD$ 折起, 使二面角 $A-BD-C$ 为 120°, 则点 A 到 $\triangle BCD$ 所在平面的距离等于_____.

三、解答题

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 所对的边长分别为 a、b、c, 且 $a\cos B=3$, $b\sin A=4$.

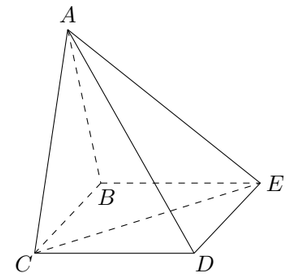
(1) 求边长 a;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=10$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 l.

18. 四棱锥 $A-BCDE$ 中, 底面 $BCDE$ 为矩形, 侧面 $ABC\perp$ 底面 $BCDE$, $BC=2$, $CD=\sqrt{2}$, $AB=AC$.

(1) 证明: $AD\perp CE$;

(2) 设侧面 ABC 为等边三角形, 求二面角 $C-AD-E$ 的大小.



19. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+2^n$.

(1) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{2^{n-1}}$. 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20. 已知 5 只动物中有 1 只患有某种疾病, 需要通过化验血液来确定患病的动物. 血液化验结果呈阳性的即为患病动物, 呈阴性即没患病. 下面是两种化验方案:
方案甲: 逐个化验, 直到能确定患病动物为止.
方案乙: 先任取 3 只, 将它们的血液混在一起化验. 若结果呈阳性则表明患病动物为这 3 只中的 1 只, 然后再逐个化验, 直到能确定患病动物为止; 若结果呈阴性则在另外 2 只中任取 1 只化验.
求依方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率.

21. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$, $a\in\mathbf{R}$.
(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ 内是减函数, 求 a 的取值范围.

22. 双曲线的中心为原点 O, 焦点在 x 轴上, 两条渐近线分别为 l_1, l_2, 经过右焦点 F 垂直于 l_1 的直线分别交 l_1, l_2 于 A, B 两点. 已知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$、$\left|\overrightarrow{AB}\right|$、$\left|\overrightarrow{OB}\right|$ 成等差数列, 且 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 同向.
(1) 求双曲线的离心率;
(2) 设 AB 被双曲线所截得的线段的长为 4, 求双曲线的方程.

2008 年普通高等学校招生考试（大纲卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{m\in\mathbf{Z}\mid -3<m<2\}$, $N=\{n\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant n\leqslant 3\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{0,1\}$　(B) $\{-1,0,1\}$　(C) $\{0,1,2\}$　(D) $\{-1,0,1,2\}$

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0$, 若复数 $(a+b\mathrm{i})^3$ 是实数, 则 （ ）

(A) $b^2=3a^2$　(B) $a^2=3b^2$　(C) $b^2=9a^2$　(D) $a^2=9b^2$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$ 的图象关于 （ ）

(A) y 轴对称　(B) 直线 $y=-x$ 对称

(C) 坐标原点对称　(D) 直线 $y=x$ 对称

4. 若 $x\in(\mathrm{e}^{-1},1)$, $a=\ln x$, $b=2\ln x$, $c=\ln^3 x$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$　(B) $c<a<b$　(C) $b<a<c$　(D) $b<c<a$

5. 设变量 x, y 满足约束条件: $\begin{cases} y\geqslant x \\ x+2y\leqslant 2 \\ x\geqslant -2 \end{cases}$, 则 $z=x-3y$ 的最小值（ ）

(A) -2　(B) -4　(C) -6　(D) -8

6. 从 20 名男同学, 10 名女同学中任选 3 名参加体能测试, 则选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{9}{29}$　(B) $\dfrac{10}{29}$　(C) $\dfrac{19}{29}$　(D) $\dfrac{20}{29}$

7. $(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x 的系数是 （ ）

(A) -4　(B) -3　(C) 3　(D) 4

8. 若动直线 $x=a$ 与函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 的图象分别交于 M、N 两点, 则 $|MN|$ 的最大值为 （ ）

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

9. 设 $a>1$, 则双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{(a+1)^2}=1$ 的离心率 e 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\sqrt{2},2\right)$　(B) $\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)$　(C) $(2,5)$　(D) $\left(2,\sqrt{5}\right)$

10. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等, E 是 SB 的中点, 则 $AESD$ 所成的角的余弦值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

11. 等腰三角形两腰所在直线的方程分别为 $x+y-2=0$ 与 $x-7y-4=0$, 原点在等腰三角形的底边上, 则底边所在直线的斜率为 （ ）

(A) 3　(B) 2　(C) $-\dfrac{1}{3}$　(D) $-\dfrac{1}{2}$

12. 已知球的半径为 2, 相互垂直的两个平面分别截球面得两个圆. 若两圆的公共弦长为 2, 则两圆的圆心距等于 （ ）

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,3)$. 若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}=(-4,-7)$ 共线, 则 $\lambda=$_____.

14. 设曲线 $y=\mathrm{e}^{ax}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直, 则 $a=$_____.

15. 已知 F 是抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点, 过 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A、B 两点. 设 $|FA|>|FB|$, 则 $|FA|$ 与 $|FB|$ 的比值等于_____.

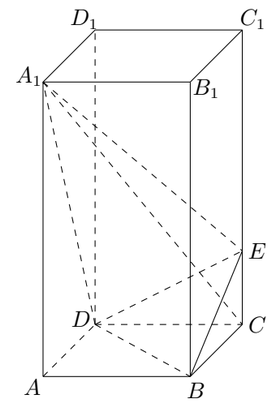
16. 平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个, 如两组对边分别平行, 类似地, 写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件:
充要条件① _____;
充要条件② _____.
(写出你认为正确的两个充要条件)

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos B=-\dfrac{5}{13}$, $\cos C=\dfrac{4}{5}$.
(1) 求 $\sin A$ 的值;
(2) 设 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{33}{2}$, 求 BC 的长.

18. 购买某种保险, 每个投保人每年度向保险公司交纳保费 a 元, 若投保人在购买保险的一年度内出险, 则可以获得 10000 元的赔偿金. 假定在一年度内有 10000 人购买了这种保险, 且各投保人是否出险相互独立. 已知保险公司在一年度内至少支付赔偿金 10000 元的概率为 $1-0.999^{10^4}$.
(1) 求一投保人在一年度内出险的概率 p;
(2) 设保险公司开办该项险种业务除赔偿金外的成本为 50000 元, 为保证盈利的期望不小于 0, 求每位投保人应交纳的最低保费. (单位: 元)

19. 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB=4$, 点 E 在 CC_1 上且 $C_1E=3EC$.
(1) 证明: $A_1C\perp$ 平面 BED;
(2) 求二面角 A_1-DE-B 的大小.



20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_1=a$, $a_{n+1}=S_n+3^n$, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 设 $b_n=S_n-3^n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 $a_{n+1}\geqslant a_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求 a 的取值范围.

21. 设椭圆中心在坐标原点, $A(2,0)$, $B(0,1)$ 是它的两个顶点, 直线 $y=kx$ ($k>0$) 与 AB 相交于点 D, 与椭圆相交于 E、F 两点.
(1) 若 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$, 求 k 的值;
(2) 求四边形 $AEBF$ 面积的最大值.

22. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 如果对任何 $x\geqslant 0$, 都有 $f(x)\leqslant ax$, 求 a 的取值范围.

2008 年普通高等学校招生考试（大纲卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 若 $\sin\alpha<0$ 且 $\tan\alpha>0$ 是, 则 α 是 （ ）

(A) 第一象限角　(B) 第二象限角　(C) 第三象限角　(D) 第四象限角

2. 设集合 $M=\{m\in\mathbf{Z}|-3<m<2\}$, $N=\{n\in\mathbf{Z}|-1\leqslant n\leqslant 3\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{0,1\}$　(B) $\{-1,0,1\}$　(C) $\{0,1,2\}$　(D) $\{-1,0,1,2\}$

3. 原点到直线 $x+2y-5=0$ 的距离为 （ ）

(A) 1　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) $\sqrt{5}$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$ 的图象关于 （ ）

(A) y 轴对称　(B) 直线 $y=-x$ 对称

(C) 坐标原点对称　(D) 直线 $y=x$ 对称

5. 若 $x\in(\mathrm{e}^{-1},1)$, $a=\ln x$, $b=2\ln x$, $c=\ln^3 x$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$　(B) $c<a<b$　(C) $b<a<c$　(D) $b<c<a$

6. 设变量 x, y 满足约束条件: $\begin{cases}y\geqslant x\\ x+2y\leqslant 2\\ x\geqslant -2\end{cases}$, 则 $z=x-3y$ 的最小值（ ）

(A) -2　(B) -4　(C) -6　(D) -8

7. 设曲线 $y=ax^2$ 在点 $(1,a)$ 处的切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行, 则 $a=$ （ ）

(A) 1　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) -1

8. 正四棱锥的侧棱长为 $2\sqrt{3}$, 侧棱与底面所成的角为 60°, 则该棱锥的体积为 （ ）

(A) 3　(B) 6　(C) 9　(D) 18

9. $(1-\sqrt{x})^4(1+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x 的系数是 （ ）

(A) -4　(B) -3　(C) 3　(D) 4

10. 函数 $f(x)=\sin x-\cos x$ 的最大值为 （ ）

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

11. 设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $\angle ABC=120^\circ$, 则以 A、B 为焦点且过点 C 的双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$　(B) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　(C) $1+\sqrt{2}$　(D) $1+\sqrt{3}$

12. 已知球的半径为 2, 相互垂直的两个平面分别截球面得两个圆. 若两圆的公共弦长为 2, 则两圆的圆心距等于 （ ）

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,3)$. 若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}=(-4,-7)$ 共线, 则 $\lambda=$_____.

14. 从 10 名男同学, 6 名女同学中选 3 名参加体能测试, 则选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的不同选法共有_____种. (用数字作答)

15. 已知 F 是抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点, A、B 是 C 上的两个点, 线段 AB 的中点为 $M(2,2)$, 则 $\triangle ABF$ 的面积等于_____.

16. 平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个, 如两组对边分别平行, 类似地, 写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件:
充要条件① _____;
充要条件② _____.
(写出你认为正确的两个充要条件)

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A=-\dfrac{5}{13}$, $\cos B=\dfrac{3}{5}$.
(1) 求 $\sin C$ 的值;
(2) 设 $BC=5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

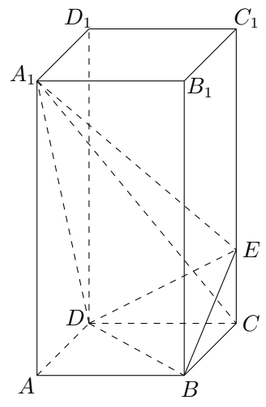
18. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4=10$, 且 a_3, a_6, a_{10} 成等比数列. 求数列 $\{a_n\}$ 前 20 项的和 S_{20}.

19. 甲、乙两人进行射击比赛, 在一轮比赛中, 甲、乙各射击一发子弹. 根据以往资料知, 甲击中 8 环, 9 环, 10 环的概率分别为 0.6, 0.3, 0.1, 乙击中 8 环, 9 环, 10 环的概率分别为 0.4, 0.4, 0.2. 设甲、乙的射击相互独立.
(1) 求在一轮比赛中甲击中的环数多于乙击中环数的概率;
(2) 求在独立的三轮比赛中, 至少有两轮甲击中的环数多于乙击中环数的概率.

20. 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB=4$, 点 E 在 CC_1 上且 $C_1E=3EC$.

(1) 证明: $A_1C\perp$ 平面 BED;

(2) 求二面角 A_1-DE-B 的大小.



21. 设 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=ax^3-3x^2$.

(1) 若 $x=2$ 是函数 $y=f(x)$ 的极值点, 求 a 的值;

(2) 若函数 $g(x)=f(x)+f'(x)$, $x\in[0,2]$, 在 $x=0$ 处取得最大值, 求 a 的取值范围.

22. 设椭圆中心在坐标原点, $A(2,0)$, $B(0,1)$ 是它的两个顶点, 直线 $y=kx$ $(k>0)$ 与 AB 相交于点 D, 与椭圆相交于 E、F 两点.

(1) 若 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$, 求 k 的值;

(2) 求四边形 $AEBF$ 面积的最大值.

2008 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 若复数 $(a^2-3a+2)+(a-1)\mathrm{i}$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 1 或 2 (D) -1

2. 设集合 $A=\left\{x\left|\dfrac{x}{x-1}<0\right.\right\}$, $B=\{x|0<x<3\}$, 那么“$m\in A$”是“$m\in B$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列, 若 $a_1=7$, $a_5=16$, 则数列 $\{a_n\}$ 前 7 项的和为 （ ）

(A) 63 (B) 64 (C) 127 (D) 128

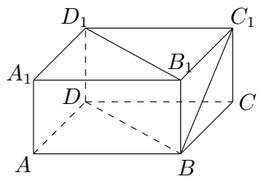
4. 函数 $f(x)=x^3+\sin x+1$ ($x\in\mathbf{R}$), 若 $f(a)=2$, 则 $f(-a)$ 的值为 （ ）

(A) 3 (B) 0 (C) -1 (D) -2

5. 某一批花生种子, 如果每 1 粒发牙的概率为 $\dfrac{4}{5}$, 那么播下 4 粒种子恰有 2 粒发芽的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{16}{625}$ (B) $\dfrac{96}{625}$ (C) $\dfrac{192}{625}$ (D) $\dfrac{256}{625}$

6. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2$, $AA_1=1$, 则 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为 （ ）



(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

7. 某班级要从 4 名男生、2 名女生中选派 4 人参加某次社区服务, 如果要求至少有 1 名女生, 那么不同的选派方案种数为 （ ）

(A) 14 (B) 24 (C) 28 (D) 48

8. 若实数 x、y 满足 $\begin{cases}x-y+1\leqslant 0\\ x>0\end{cases}$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,1)$ (B) $(0,1]$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

9. 函数 $f(x)=\cos x$ ($x\in\mathbf{R}$) 的图象按向量 $(m,0)$ 平移后, 得到函数 $y=-f'(x)$ 的图象, 则 m 的值可以为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) $-\pi$ (D) $-\dfrac{\pi}{2}$

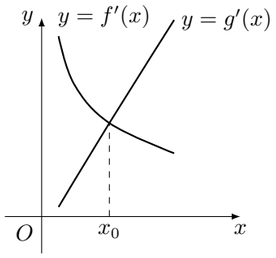
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c. 若 $(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$, 则角 B 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$ (D) $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2}{3}$

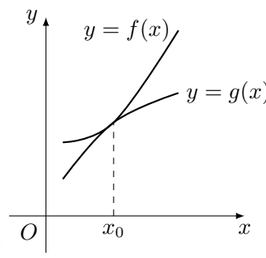
11. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的两个焦点为 F_1、F_2, 若 P 为其上一点, 且 $|PF_1|=2|PF_2|$, 则双曲线离心率的取值范围为 （ ）

(A) $(1,3)$ (B) $(1,3]$ (C) $(3,+\infty)$ (D) $[3,+\infty)$

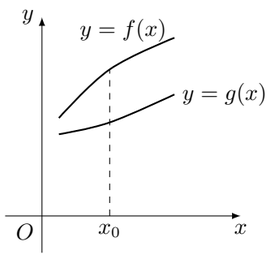
12. 已知函数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 的导函数的图象如下图, 那么 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 的图象可能是 （ ）



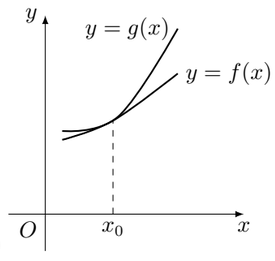
(A)



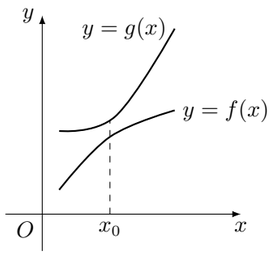
(B)



(C)



(D)



二、填空题

13. 若 $(x-2)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$_____. (用数字作答)

14. 若直线 $3x+4y+m=0$ 与圆 $\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=-2+\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 没有公共点, 则实数 m 的取值范围是_____.

15. 若三棱锥的三个侧面两两垂直, 且侧棱长均为 $\sqrt{3}$, 则其外接球的表面积是_____.

16. 设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 a、$b\in P$, 都有 $a+b$、$a-b$、ab、$\dfrac{a}{b}\in P$ (除数 $b\neq 0$), 则称 P 是一个数域. 例如有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域; 数集 $F=\left\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbf{Q}\right\}$ 也是数域. 有下列命题: ① 整数集是数域; ② 若有理数集 $\mathbf{Q}\subseteq M$, 则数集 M 必为数域; ③ 数域必为无限集; ④ 存在无穷多个数域. 其中正确的命题的序号是_____. (把你认为正确的命题的序号填填上)

三、解答题

17. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin A,\cos A)$, $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1)$, $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$, 且 A 为锐角.

(1) 求角 A 的大小;

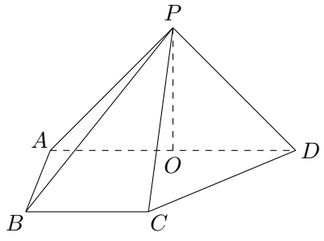
(2) 求函数 $f(x)=\cos 2x+4\cos A\sin x$ ($x\in\mathbf{R}$) 的值域.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$, 侧棱 $PA=PD=\sqrt{2}$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, 其中 $BC\parallel AD$, $AB\perp AD$, $AD=2AB=2BC=2$, O 为 AD 中点.

(1) 求证: $PO\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求异面直线 PD 与 CD 所成角的大小;

(3) 线段 AD 上是否存在点 Q, 使得它到平面 PCD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$? 若存在, 求出 $\dfrac{AQ}{QD}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-2$.

(1) 设 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列, 前 n 项和为 S_n, 其中 $a_1=3$. 若点 $(a_n,a_{n+1}^2-2a_{n+1})$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 在函数 $y=f'(x)$ 的图象上, 求证: 点 (n,S_n) 也在 $y=f'(x)$ 的图象上;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(a-1,a)$ 内的极值.

20. 某项考试按科目 A、科目 B 依次进行, 只有当科目 A 成绩合格时, 才可继续参加科目 B 的考试. 已知每个科目只允许有一次补考机会, 两个科目成绩均合格方可获得证书. 现某人参加这项考试, 科目 A 每次考试成绩合格的概率均为 $\dfrac{2}{3}$, 科目 B 每次考试成绩合格的概率均为 $\dfrac{1}{2}$. 假设各次考试成绩合格与否均互不影响.

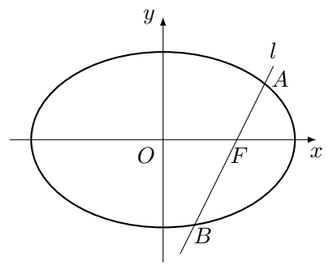
(1) 求他不需要补考就可获得证书的概率;

(2) 在这项考试过程中, 假设他不放弃所有的考试机会, 记他参加考试的次数为 ξ, 求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

21. 如图, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的一个焦点是 $F(1,0)$, O 为坐标原点.

(1) 已知椭圆短轴的两个三等分点与一个焦点构成正三角形, 求椭圆的方程;

(2) 设过点 F 的直线 l 交椭圆于 A、B 两点. 若直线 l 绕点 F 任意转动, 值有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$, 求 a 的取值范围.



22. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 记 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 上的最小值为 b_n, 令 $a_n=\ln(1+n)-b_n$.

① 如果对一切 n, 不等式 $\sqrt{a_n}<\sqrt{a_{n+2}}-\dfrac{c}{\sqrt{a_{n+2}}}$ 恒成立, 求实数 c 的取值范围;

② 求证: $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_1a_3}{a_2a_4}+\cdots+\dfrac{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}{a_2a_4\cdots a_{2n}}<\sqrt{2a_n+1}-1$.

2008 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x|x^2-x<0\}$, $B=\{x|0<x<3\}$, 则 $A\cap B$ 等于 （ ）

(A) $\{x|0<x<1\}$ (B) $\{x|0<x<3\}$ (C) $\{x|1<x<3\}$ (D) $\varnothing$

2. “$a=1$”是“直线 $x+y=0$ 和直线 $x-ay=0$ 互相垂直”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

3. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 若 $a_2=3$, $a_1=13$, 则数列 $\{a_n\}$ 前 8 项的和为（ ）

(A) 128　　(B) 80　　(C) 64　　(D) 56

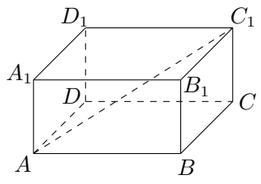
4. 函数 $f(x)=x^3+\sin x+1$ ($x\in\mathbf{R}$), 若 $f(a)=2$, 则 $f(-a)$ 的值为 （ ）

(A) 3　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

5. 某一批花生种子, 如果每 1 粒发芽的概率为 $\frac{4}{5}$, 那么播下 3 粒种子恰有 2 粒发芽的概率是 （ ）

(A) $\frac{12}{125}$　　(B) $\frac{16}{125}$　　(C) $\frac{48}{125}$　　(D) $\frac{96}{125}$

6. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2$, $AA_1=1$, 则 AC_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的正弦值为 （ ）



(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　(D) $\frac{1}{3}$

7. 函数 $y=\cos x$ ($x\in\mathbf{R}$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$ 的解析式为 （ ）

(A) $-\sin x$　　(B) $\sin x$　　(C) $-\cos x$　　(D) $\cos x$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 若 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$, 则角 B 的值为 （ ）

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$　　(D) $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

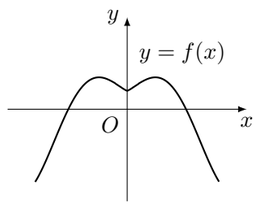
9. 某班级要从 4 名男生、2 名女生中选派 4 人参加某次社区服务, 如果要求至少有 1 名女生, 那么不同的选派方案种数为 （ ）

(A) 14　　(B) 24　　(C) 28　　(D) 48

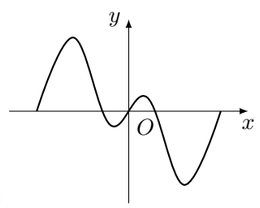
10. 若实数 x、y 满足 $\begin{cases}x-y+1\leqslant 0\\ x>0\\ y\leqslant 2\end{cases}$, 则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,2)$　　(B) $(0,2]$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $[2,+\infty)$

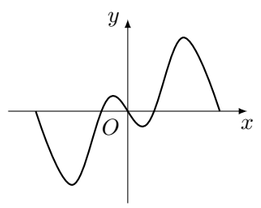
11. 如果函数 $y=f(x)$ 的图象如下图, 那么导函数 $y=f'(x)$ 的图象可能是 （ ）



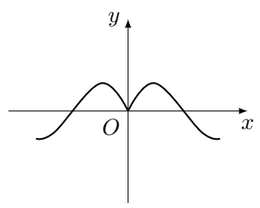
(A)



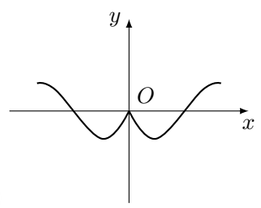
(B)



(C)



(D)



12. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的两个焦点为 F_1、F_2, 若 P 为其上一点, 且 $|PF_1|=2|PF_2|$, 则双曲线离心率的取值范围为 （ ）

(A) $(1,3)$　　(B) $(1,3]$　　(C) $(3,+\infty)$　　(D) $[3,+\infty)$

二、填空题

13. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^9$ 展开式中 x^2 的系数是_____. (用数字作答)

14. 若直线 $3x+4y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 没有公共点, 则实数 m 的取值范围是_____.

15. 若三棱锥的三个侧面两两垂直, 且侧棱长均为 $\sqrt{3}$, 则其外接球的表面积是_____.

16. 设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 a、$b\in P$, 都有 $a+b$、$a-b$、ab、$\frac{a}{b}\in P$ (除数 $b\neq 0$), 则称 P 是一个数域. 例如有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域. 有下列命题: ① 数域必含有 0, 1 两个数; ② 整数集是数域; ③ 若有理数集 $\mathbf{Q}\subseteq M$, 则数集 M 必为数域; ④ 数域必为无限集. 其中正确的命题的序号是_____. (把你认为正确的命题的序号填填上)

三、解答题

17. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin A,\cos A)$, $\boldsymbol{n}=(1,-2)$, 且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

(1) 求 $\tan A$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)=\cos 2x+4\cos A\sin x$ ($x\in\mathbf{R}$) 的值域.

18. 三人独立破译同一份密码. 已知三人各自破译出密码的概率分别为 $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, 且他们是否破译出密码互不影响.

(1) 求恰有二人破译出密码的概率;

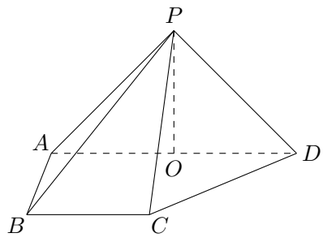
(2) “密码被破译”与“密码未被破译”的概率哪个大? 说明理由.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$, 侧棱 $PA=PD=\sqrt{2}$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, 其中 $BC\parallel AD$, $AB\perp AD$, $AD=2AB=2BC=2$, O 为 AD 中点.

(1) 求证: $PO\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求异面直线 PB 与 CD 所成角的余弦值;

(3) 求点 A 到平面 PCD 的距离.



20. 已知 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列, $a_1=1$, 且点 $(\sqrt{a_n},a_{n+1})$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 在函数 $y=x^2+1$ 的图象上.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若列数 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, $b_{n+1}=b_n+2^{a_n}$, 求证: $b_n\cdot b_{n+2}<b_{n+1}^2$.

21. 已知函数 $f(x)=x^3+mx^2+nx-2$ 的图象过点 $(-1,-6)$, 且函数 $g(x)=f'(x)+6x$ 的图象关于 y 轴对称.

(1) 求 m、n 的值及函数 $y=f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a>0$, 求函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a-1,a+1)$ 内的极值.

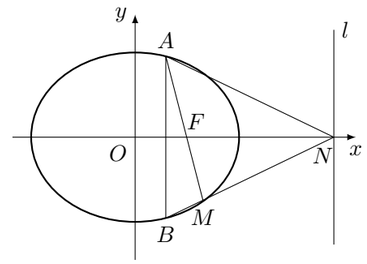
22. 如图, 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的一个焦点为 $F(1,0)$, 且过点 $(2,0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 AB 为垂直于 x 轴的动弦, 直线 l: $x=4$ 与 x 轴交于点 N, 直线 AF 与 BN 交于点 M.

① 求证: 点 M 恒在椭圆 C 上;

② 求 $\triangle AMN$ 面积的最大值.



2008 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $0<a<2$, 复数 z 的实部为 a, 虚部为 1, 则 $|z|$ 的取值范围是 （　）

(A) $(1,5)$　　(B) $(1,3)$　　(C) $(1,\sqrt{5})$　　(D) $(1,\sqrt{3})$

2. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $S_4=20$, 则 $S_6=$ （　）

(A) 16　　(B) 24　　(C) 36　　(D) 48

3. 某校共有学生 2000 名, 各年级男、女生人数如下表. 已知在全校学生中随机抽取 1 名, 抽到二年级女生的概率是 0.19. 现用分层抽样的方法在全校抽取 64 名学生, 则应在三年级抽取的学生人数为 （　）

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

(A) 24　　(B) 18　　(C) 16　　(D) 12

4. 若变量 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\leqslant 40\\ x+2y\leqslant 50\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值是 （　）

(A) 90　　(B) 80　　(C) 70　　(D) 40

5. 将正三棱柱截去三个角 (如图 1 所示 A, B, C 分别是 $\triangle GHI$ 三边的中点) 得到几何体如图 2, 则该几何体按图 2 所示方向的侧视图 (或称左视图) 为 （　）

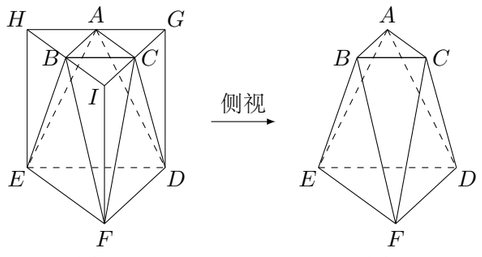
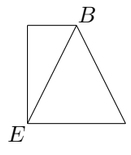
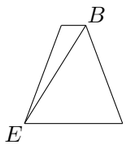


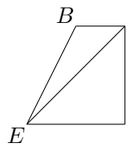
图 1

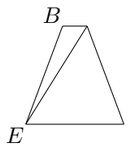
侧视

图 2

(A)


(B)


(C)


(D)


6. 已知命题 p: 所有有理数都是实数, 命题 q: 正数的对数都是负数, 则下列命题中为真命题的是 （　）

(A) $(\neg p)\vee q$　　(B) $p\wedge q$　　(C) $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　(D) $(\neg p)\vee(\neg q)$

7. 设 $a\in\mathbf{R}$, 若函数 $y=\mathrm{e}^{ax}+3x$, $x\in\mathbf{R}$ 有大于零的极值点, 则 （　）

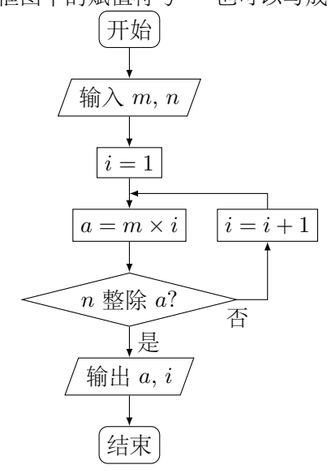
(A) $a>-3$　　(B) $a<-3$　　(C) $a>-\dfrac{1}{3}$　　(D) $a<-\dfrac{1}{3}$

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O, E 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD 交于点 F. 若 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AF}=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　(B) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　(C) $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　(D) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$

二、填空题

9. 阅读如图的程序框图. 若输入 $m=4$, $n=6$, 则输出 $a=$_____, $i=$_____. (注: 框图中的赋值符号“=”也可以写成“←”或“: =”)



10. 已知 $(1+kx^2)^6$ (k 是正整数) 的展开式中, x^8 的系数小于 120, 则 $k=$_____.

11. 经过圆 $x^2+2x+y^2=0$ 的圆心 C, 且与直线 $x+y=0$ 垂直的直线方程是_____.

12. 已知函数 $f(x)=(\sin x-\cos x)\sin x$, $x\in\mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是_____.

13. 已知曲线 C_1, C_2 的极坐标方程分别为 $\rho\cos\theta=3$, $\rho=4\cos\theta$ ($\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}$), 则曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标为_____.

14. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 若关于 x 的方程 $x^2+x+\left|a-\dfrac{1}{4}\right|+|a|=0$ 有实根, 则 a 的取值范围是_____.

15. 已知 PA 是圆 O 的切线, 切点为 A, $PA=2$. AC 是圆 O 的直径, PC 与圆 O 交于点 B, $PB=1$, 则圆 O 的半径 $R=$_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=A\sin(x+\varphi)$ ($A>0$, $0<\varphi<\pi$), $x\in\mathbf{R}$ 的最大值是 1, 其图象经过点 $M\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 已知 α, $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $f(\alpha)=\dfrac{3}{5}$, $f(\beta)=\dfrac{12}{13}$, 求 $f(\alpha-\beta)$ 的值.

17. 随机抽取某厂的某种产品 200 件, 经质检, 其中有一等品 126 件、二等品 50 件、三等品 20 件、次品 4 件. 已知生产 1 件一、二、三等品获利分别为 6 万元、2 万元、1 万元, 而 1 件次品亏损 2 万元, 设 1 件产品的利润 (单位: 万元) 为 ξ.

(1) 求 ξ 的分布列;

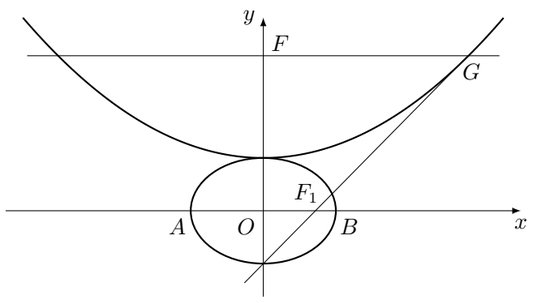
(2) 求 1 件产品的平均利润 (即 ξ 的数学期望);

(3) 经技术革新后, 仍有四个等级的产品, 但次品率降为 1%, 一等品率提高为 70%. 如果此时要求 1 件产品的平均利润不小于 4.73 万元, 则三等品率最多是多少?

18. 设 $b>0$, 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$. 如图所示, 过点 $F(0,b+2)$ 作 x 轴的平行线, 与抛物线在第一象限的交点为 G. 已知抛物线在点 G 的切线经过椭圆的右焦点 F_1.

(1) 求满足条件的椭圆方程和抛物线方程;

(2) 设 A, B 分别是椭圆长轴的左、右端点, 试探究在抛物线上是否存在点 P, 使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形? 若存在, 请指出共有几个这样的点? 并说明理由 (不必具体求出这些点的坐标) .



19. 设 $k\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<1\\ -\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$, $F(x)=f(x)-kx$, $x\in\mathbf{R}$.

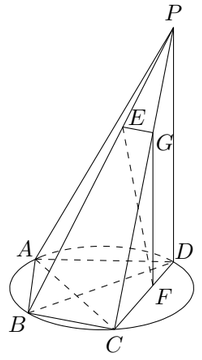
试讨论函数 $F(x)$ 的单调性.

20. 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是半径为 R 的圆的内接四边形, 其中 BD 是圆的直径, $\angle ABD=60^\circ$, $\angle BDC=45^\circ$. PD 垂直底面 $ABCD$, $PD=2\sqrt{2}R$. E, F 分别是 PB, CD 上的点, 且 $\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{DF}{FC}$, 过点 E 作 BC 的平行线交 PC 于 G.

(1) 求 BD 与平面 ABP 所成角 θ 的正切值;

(2) 证明: $\triangle EFG$ 是直角三角形;

(3) 当 $\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{1}{2}$ 时, 求 $\triangle EFG$ 的面积.



21. 已知 p, q 是实数, α, β 为方程 $x^2-px+q=0$ 的两个实根, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=p$, $x_2=p^2-q$, $x_n=px_{n-1}-qx_{n-2}$ $(n=3,4,\cdots)$.

(1) 证明: $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$;

(2) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(3) 若 $p=1$, $q=\dfrac{1}{4}$, 求 $\{x_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

2008 年普通高等学校招生考试（广东卷）

文科数学

一、选择题

1. 第二十九届夏季奥林匹克运动会将于 2008 年 8 月 8 日在北京举行, 若集合 $A=\{$ 参加北京奥运会比赛的运动员 $\}$, 集合 $B=\{$ 参加北京奥运会比赛的男运动员 $\}$, 集合 $C=\{$ 参加北京奥运会比赛的女运动员 $\}$, 则下列关系正确的是 （ ）

(A) $A\subseteq B$　(B) $B\subseteq C$　(C) $A\cap B=C$　(D) $B\cup C=A$

2. 已知 $0<a<2$, 复数 $z=a+\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 $|z|$ 的取值范围是（ ）

(A) $(1,\sqrt{3})$　(B) $(1,\sqrt{5})$　(C) $(1,3)$　(D) $(1,5)$

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(-2,m)$, 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=$ （ ）

(A) $(-2,-4)$　(B) $(-3,-6)$　(C) $(-4,-8)$　(D) $(-5,-10)$

4. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_2=4$, $S_4=20$, 则该数列的公差 $d=$ （ ）

(A) 7　(B) 6　(C) 3　(D) 2

5. 已知函数 $f(x)=(1+\cos 2x)\sin^2 x$, $x\in\mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 是 （ ）

(A) 最小正周期为 π 的奇函数　(B) 最小正周期为 π 的偶函数

(C) 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数　(D) 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

6. 经过圆 $x^2+2x+y^2=0$ 的圆心 C, 且与直线 $x+y=0$ 垂直的直线方程是 （ ）

(A) $x-y+1=0$ (B) $x-y-1=0$ (C) $x+y-1=0$ (D) $x+y+1=0$

7. 将正三棱柱截去三个角 (如图 1 所示 A, B, C 分别是 $\triangle GHI$ 三边的中点) 得到几何体如图 2, 则该几何体按图 2 所示方向的侧视图 (或称左视图) 为 （ ）

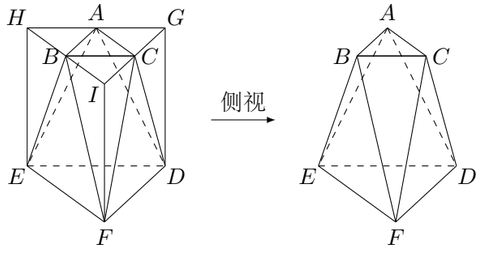
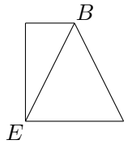
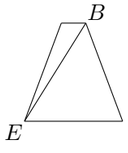


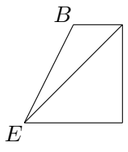
图 1

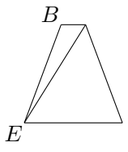
侧视

图 2

(A)


(B)


(C)


(D)


8. 命题“若函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 在其定义域内是减函数, 则 $\log_a 2<0$”的逆否命题是 （ ）

(A) 若 $\log_a 2<0$, 则函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 在其定义域内不是减函数

(B) 若 $\log_a 2\geqslant 0$, 则函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 在其定义域内不是减函数

(C) 若 $\log_a 2<0$, 则函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 在其定义域内是减函数

(D) 若 $\log_a 2\geqslant 0$, 则函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 在其定义域内是减函数

9. 设 $a\in\mathbf{R}$, 若函数 $y=\mathrm{e}^x+ax$, $x\in\mathbf{R}$ 有大于零的极值点, 则 （ ）

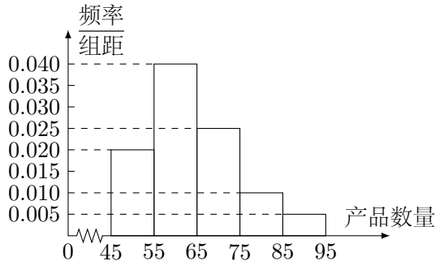
(A) $a<-1$　(B) $a>-1$　(C) $a>-\frac{1}{\mathrm{e}}$　(D) $a<-\frac{1}{\mathrm{e}}$

10. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 若 $a-|b|>0$, 则下列不等式中正确的是 （ ）

(A) $b-a>0$　(B) $a^3+b^3<0$　(C) $b+a>0$　(D) $a^2-b^2<0$

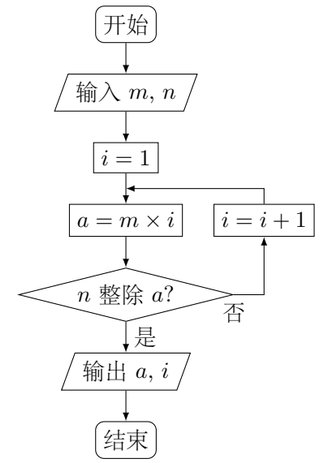
二、填空题

11. 为了调查某厂工人生产某种产品的能力, 随机抽查了 20 位工人某天生产该产品的数量. 产品数量的分组区间为 $[45,55)$, $[55,65)$, $[65,75)$, $[75,85)$, $[85,95)$, 由此得到频率分布直方图如图, 则这 20 名工人中一天生产该产品数量在 $[55,75)$ 的人数是_____.



12. 若变量 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\leqslant 40\\ x+2y\leqslant 50\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值是_____.

13. 阅读如图的程序框图. 若输入 $m=4$, $n=3$, 则输出 $a=$_____, $i=$_____. (注: 框图中的赋值符号“=”也可以写成“←”或“: =”)



14. 已知曲线 C_1, C_2 的极坐标方程分别为 $\rho\cos\theta=3$, $\rho=4\cos\theta$ $(\rho\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2})$, 则曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标为_____.

15. 已知 PA 是圆 O 的切线, 切点为 A, $PA=2$. AC 是圆 O 的直径, PC 与圆 O 交于点 B, $PB=1$, 则圆 O 的半径 $R=$_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=A\sin(x+\varphi)$ $(A>0,\ 0<\varphi<\pi)$, $x\in\mathbf{R}$ 的最大值是 1, 其图象经过点 $M\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 已知 α, $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 且 $f(\alpha)=\frac{3}{5}$, $f(\beta)=\frac{12}{13}$, 求 $f(\alpha-\beta)$ 的值.

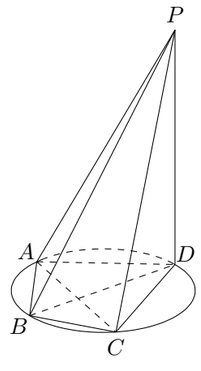
17. 某单位用 2160 万元购得一块空地, 计划在该地块上建造一栋至少 10 层、每层 2000 平方米的楼房. 经测算, 如果将楼房建为 x ($x \geqslant 10$) 层, 则每平方米的平均建筑费用为 $560+48x$ (单位: 元). 为了使楼房每平方米的平均综合费用最少, 该楼房应建为多少层?

(注: 平均综合费用 = 平均建筑费用 + 平均购地费用, 平均购地费用 $=\dfrac{\text{购地总费用}}{\text{建筑总面积}}$)

18. 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是半径为 R 的圆的内接四边形, 其中 BD 是圆的直径, $\angle ABD=60^\circ$, $\angle BDC=45^\circ$. $\triangle ADP \sim \triangle BAD$.

(1) 求线段 PD 的长;

(2) 若 $PC=\sqrt{11}R$, 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.



19. 某初级中学共有学生 2000 名, 各年级男、女生人数如下表:

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

已知在全校学生中随机抽取 1 名, 抽到初二年级女生的概率是 0.19 .

(1) 求 x 的值;

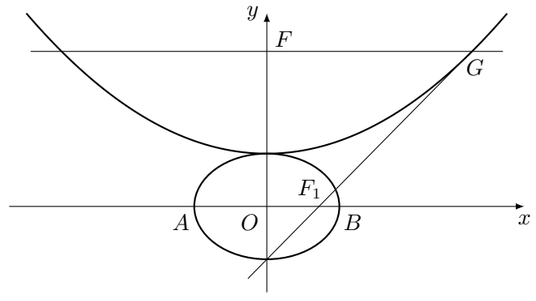
(2) 现用分层抽样的方法在全校抽取 48 名学生, 问应在初三年级抽取多少名?

(3) 已知 $y \geqslant 245$, $z \geqslant 245$, 求初三年级中女生比男生多的概率.

20. 设 $b>0$, 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$. 如图所示, 过点 $F(0, b+2)$ 作 x 轴的平行线, 与抛物线在第一象限的交点为 G. 已知抛物线在点 G 的切线经过椭圆的右焦点 F_1.

(1) 求满足条件的椭圆方程和抛物线方程;

(2) 设 A, B 分别是椭圆长轴的左、右端点, 试探究在抛物线上是否存在点 P, 使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形? 若存在, 请指出共有几个这样的点? 并说明理由 (不必具体求出这些点的坐标) .



21. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n=\dfrac{1}{3}(a_{n-1}+2a_{n-2})$ $(n=3, 4, \cdots)$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, b_n $(n=2, 3, \cdots)$ 是非零整数, 且对任意的正整数 m 和自然数 k, 都有 $-1 \leqslant b_m+b_{m+1}+\cdots+b_{m+k} \leqslant 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n=na_nb_n$ $(n=1, 2, \cdots)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

2008 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(-3,4)$, $\boldsymbol{c}=(3,2)$, 则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$ （　）

(A) $(-15,12)$　(B) 0　(C) -3　(D) -11

2. 若非空集合 A, B, C 满足 $A\cup B=C$, 且 B 不是 A 的子集, 则 （　）

(A) “$x\in C$”是“$x\in A$”的充分条件但不是必要条件

(B) “$x\in C$”是“$x\in A$”的必要条件但不是充分条件

(C) “$x\in C$”是“$x\in A$”的充要条件

(D) “$x\in C$”既不是“$x\in A$”的充分条件也不是“$x\in A$”必要条件

3. 用与球心距离为 1 的平面去截球, 所得的截面面积为 π, 则球的休积为（　）

(A) $\dfrac{8\pi}{3}$　(B) $\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$　(C) $8\sqrt{2}\pi$　(D) $\dfrac{32\pi}{3}$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4}\right)$ 的定义域为 （　）

(A) $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$　(B) $(-4,0)\cup(0,1)$

(C) $[-4,0)\cup(0,1]$　(D) $[-4,0)\cup(0,1)$

5. 将函数 $y=3\sin(x-\theta)$ 的图象 F 按向量 $\left(\dfrac{\pi}{3},3\right)$ 平移得到图象 F', 若 F' 的一条对称轴是直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$, 则 θ 的一个可能取值是 （　）

(A) $\dfrac{5}{12}\pi$　(B) $-\dfrac{5}{12}\pi$　(C) $\dfrac{11}{12}\pi$　(D) $-\dfrac{11}{12}\pi$

6. 将 5 名志愿者分配到 3 个不同的奥运场馆参加接待工作, 每个场馆至少分配一名志愿者的方案种数为 （　）

(A) 540　(B) 300　(C) 180　(D) 150

7. 若 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+b\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数, 则 b 的取值范围是 （　）

(A) $[-1,+\infty)$　(B) $(-1,+\infty)$　(C) $(-\infty,-1]$　(D) $(-\infty,-1)$

8. 已知 $m\in\mathbf{N}^*$, a, $b\in\mathbf{R}$, 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^m+a}{x}=b$, 则 $a\cdot b=$ （　）

(A) $-m$　(B) m　(C) -1　(D) 1

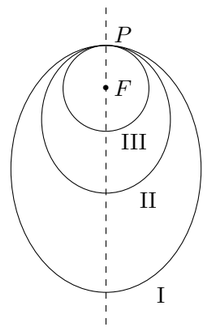
9. 过点 $A(11,2)$ 作圆 $x^2+y^2+2x-4y-164=0$ 的弦, 其中弦长为整数的共有 （　）

(A) 16 条　(B) 17 条　(C) 32 条　(D) 34 条

10. 如图所示, “嫦娥一号”探月卫星沿地月转移轨道飞向月球, 在月球附近一点 P 轨进入以月球球心 F 为一个焦点的椭圆轨道 I 绕月飞行, 之后卫星在 P 点第二次变轨进入仍以 F 为一个焦点的椭圆轨道 II 绕月飞行, 最终卫星在 P 点第三次变轨进入以 F 为圆心的圆形轨道 III 绕月飞行, 若用 $2c_1$ 和 $2c_2$ 分别表示椭轨道 I 和 II 的焦距, 用 $2a_1$ 和 $2a_2$ 分别表示椭圆轨道 I 和 II 的长轴的长, 给出下列式子:

① $a_1+c_1=a_2+c_2$; ② $a_1-c_1=a_2-c_2$; ③ $c_1a_2>a_1c_2$; ④ $\dfrac{c_1}{a_1}<\dfrac{c_2}{a_2}$.

其中正确式子的序号是 （　）



(A) ①③　(B) ②③　(C) ①④　(D) ②④

二、填空题

11. 设 z_1 是复数, $z_2=z_1-\mathrm{i}\bar{z}_1$ (其中 $\bar{z}_1$ 表示 z_1 的共轭复数) , 已知 z_2 的实部是 -1, 则 z_2 的虚部为_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 三个角 A, B, C 的对边边长分别为 $a=3$, $b=4$, $c=6$, 则 $bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C$ 的值为_____.

13. 已知函数 $f(x)=x^2+2x+a$, $f(bx)=9x^2-6x+2$, 其中 $x\in\mathbf{R}$, a, b 为常数, 则方程 $f(ax+b)=0$ 的解集为_____.

14. 已知函数 $f(x)=2^x$, 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2. 若 $f(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})=4$, 则 $\log_2[f(a_1)\cdot f(a_2)\cdot f(a_3)\cdot\cdots\cdot f(a_{10})]=$_____.

15. 观察下列等式:

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^k=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+a_{k-2}n^{k-2}+\cdots+a_1n+a_0,$$

可以推测, 当 $k\geqslant2$ ($k\in\mathbf{N}^*$) 时, $a_{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$, $a_k=\dfrac{1}{2}$, $a_{k-1}=$_____, $a_{k-2}=$_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(t)=\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$, $g(x)=\cos x\cdot f(\sin x)+\sin x\cdot f(\cos x)$, $x\in\left(\pi,\dfrac{17\pi}{12}\right]$.

(1) 将函数 $g(x)$ 化简成 $A\sin(\omega x+\varphi)+B$ ($A>0$, $\omega>0$, $\varphi\in[0,2\pi)$) 的形式;

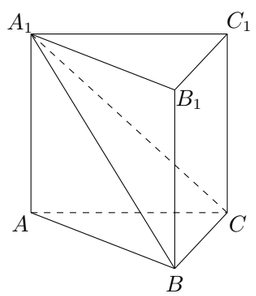
(2) 求函数 $g(x)$ 的值域.

17. 袋中有 20 个大小相同的球, 其中记上 0 号的有 10 个, 记上 n 号的有 n 个 ($n=1$, 2, 3, 4). 现从袋中任取一球. ξ 表示所取球的标号.

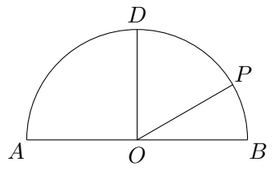
(1) 求 ξ 的分布列, 期望和方差;

(2) 若 $\eta=a\xi+b$, $E\eta=1$, $D\eta=11$, 试求 a, b 的值.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $A_1BC\perp$ 侧面 A_1ABB_1.
(1) 求证: $AB\perp BC$;
(2) 若直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 θ, 二面角 A_1-BC-A 的大小为 φ, 试判断 θ 与 φ 的大小关系, 并予以证明.



19. 如图, 在以点 O 为圆心, $|AB|=4$ 为直径的半圆 ADB 中, $OD\perp AB$, P 是半圆弧上一点, $\angle POB=30^\circ$, 曲线 C 是满足 $||MA|-|MB||$ 为定值的动点 M 的轨迹, 且曲线 C 过点 P.
(1) 建立适当的平面直角坐标系, 求曲线 C 的方程;
(2) 设过点 D 的直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 E、F. 若 $\triangle OEF$ 的面积不小于 $2\sqrt{2}$, 求直线 l 斜率的取值范围.



20. 水库的蓄水量随时间而变化. 现用 t 表示时间, 以月为单位, 年初为起点. 根据历年数据, 某水库的蓄水量 (单位: 亿立方米) 关于 t 的近似函数关系式为 $V(t)=\begin{cases}(-t^2+14t-40)\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}+50, & 0<t\leqslant 10\\ 4(t-10)(3t-41)+50, & 10<t\leqslant 12\end{cases}$.
(1) 该水库的蓄求量小于 50 的时期称为枯水期. 以 $i-1<t<i$ 表示第 i 月份 ($i=1,2,\cdots,12$), 同一年内哪几个月份是枯水期?
(2) 求一年内该水库的最大蓄水量 (取 $\mathrm{e}=2.7$ 计算).

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1=\lambda$, $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+n-4$, $b_n=(-1)^n(a_n-3n+21)$, 其中 λ 为实数, n 为正整数.
(1) 对任意实数 λ, 证明数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列;
(2) 试判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并证明你的结论;
(3) 设 $0<a<b$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 是否存在实数 λ, 使得对任意正整数 n, 都有 $a<S_n<b$? 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

2008 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(-3,4)$, $\boldsymbol{c}=(3,2)$, 则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$ （ ）

(A) $(-15,12)$　(B) 0　(C) -3　(D) -11

2. $\left(2x^3-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{10}$ 的展开式中常数项是 （ ）

(A) 210　(B) $\dfrac{105}{2}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) -105

3. 若集合 $P=\{1,2,3,4\}$, $Q=\{x|0<x<5,x\in\mathbf{R}\}$, 则 （ ）

(A) “$x\in P$”是“$x\in Q$”的充分条件但不是必要条件

(B) “$x\in P$”是“$x\in Q$”的必要条件但不是充分条件

(C) “$x\in P$”是“$x\in Q$”的充要条件

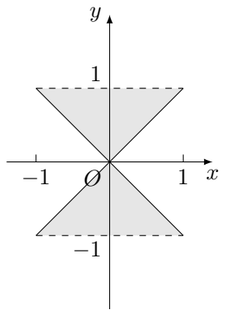
(D) “$x\in P$”既不是“$x\in Q$”的充分条件也不是“$x\in Q$”的必要条件

4. 用与球心距离为 1 的平面去截球, 所得的截面面积为 π, 则球的休积为（ ）

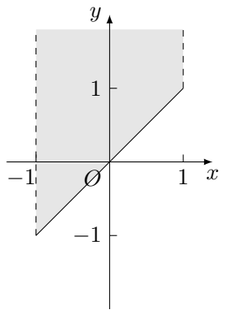
(A) $\dfrac{8\pi}{3}$　(B) $\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$　(C) $8\sqrt{2}\pi$　(D) $\dfrac{32\pi}{3}$

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 满足不等式组 $\begin{cases}|x|\leqslant|y|\\|x|<1\end{cases}$ 的点 (x,y) 的集合用阴影表示为下列图中的 （ ）

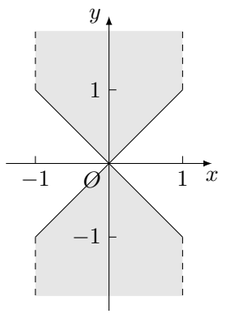
(A)



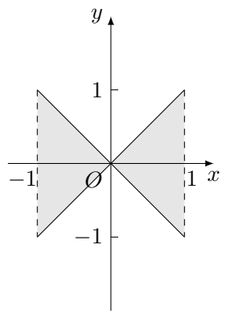
(B)



(C)



(D)



6. 已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数, 且 $f(x+4)=f(x)$, 当 $x\in(0,2)$ 时, $f(x)=2x^2$, 则 $f(7)=$ （ ）

(A) -2　(B) 2　(C) -98　(D) 98

7. 将函数 $y=\sin(x-\theta)$ 的图象 F 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度得到图象 F', 若 F' 的一条对称轴是直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$, 则 θ 的一个可能取值是 （ ）

(A) $\dfrac{5}{12}\pi$　(B) $-\dfrac{5}{12}\pi$　(C) $\dfrac{11}{12}\pi$　(D) $-\dfrac{11}{12}\pi$

8. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4}\right)$ 的定义域为 （ ）

(A) $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$　(B) $(-4,0)\cup(0,1)$

(C) $[-4,0)\cup(0,1]$　(D) $[-4,0)\cup(0,1)$

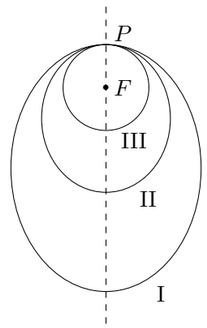
9. 从 5 名男生和 5 名女生中选 3 人组队参加某集体项目的比赛, 其中至少有一名女生入选的组队方案数为 （ ）

(A) 100　(B) 110　(C) 120　(D) 180

10. 如图所示, “嫦娥一号”探月卫星沿地月转移轨道飞向月球, 在月球附近一点 P 轨进入以月球球心 F 为一个焦点的椭圆轨道 I 绕月飞行, 之后卫星在 P 点第二次变轨进入仍以 F 为一个焦点的椭圆轨道 II 绕月飞行, 最终卫星在 P 点第三次变轨进入以 F 为圆心的圆形轨道 III 绕月飞行, 若用 $2c_1$ 和 $2c_2$ 分别表示椭轨道 I 和 II 的焦距, 用 $2a_1$ 和 $2a_2$ 分别表示椭圆轨道 I 和 II 的长轴的长, 给出下列式子:

① $a_1+c_1=a_2+c_2$; ② $a_1-c_1=a_2-c_2$; ③ $c_1a_2>a_1c_2$; ④ $\dfrac{c_1}{a_1}<\dfrac{c_2}{a_2}$.

其中正确式子的序号是 （ ）



(A) ①③　(B) ②③　(C) ①④　(D) ②④

二、填空题

11. 一个公司共有 1000 名员工, 下设一些部门, 要采用分层抽样方法从全体员工中抽取一个容量为 50 的样本, 已知某部门有 200 名员工, 那么从该部门抽取的工人数是_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边, 已知 $a=\sqrt{3}$, $b=3$, $c=30°$, 则 $A=$_____.

13. 方程 $2^{-x}+x^2=3$ 的实数解的个数为_____.

14. 明天上午李明要参加奥运志愿者活动, 为了准时起床, 他用甲、乙两个闹钟叫醒自己. 假设甲闹钟准时响的概率是 0.80, 乙闹钟准时响的概率是 0.90, 则两个闹钟至少有一准时响的概率是_____.

15. 圆 C: $\begin{cases}x=3+4\cos\theta\\y=-2+4\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 的圆心坐标为_____, 和圆 C 关于直线 $x-y=0$ 对称的圆 C' 的普通方程是_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}-2$.

(1) 将函数 $f(x)$ 化简成 $A\sin(\omega x+\varphi)+B$ ($A>0$, $\omega>0$, $\varphi\in[0,2\pi)$) 的形式, 并指出 $f(x)$ 的周期;

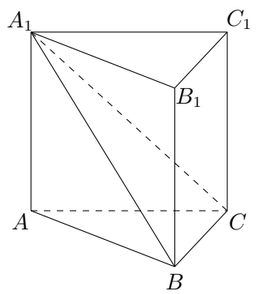
(2) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[\pi,\dfrac{17\pi}{12}\right]$ 上的最大值和最小值.

17. 已知函数 $f(x)=x^3+mx^2-m^2x+1$ (m 为常数, 且 $m>0$) 有极大值 9.

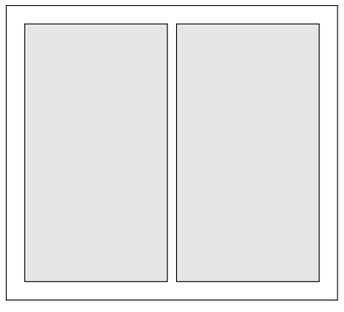
(1) 求 m 的值;

(2) 若斜率为 -5 的直线是曲线 $y=f(x)$ 的切线, 求此直线方程.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $A_1BC\perp$ 侧面 A_1ABB_1.
(1) 求证: $AB\perp BC$;
(2) 若 $AA_1=AC=a$, 直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 θ, 二面角 A_1-BC-A 的大小为 φ, 求证: $\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.



19. 如图, 要设计一张矩形广告, 该广告含有大小相等的左右两个矩形栏目 (即图中阴影部分) , 这两栏的面积之和为 18000 cm^2, 四周空白的宽度为 10 cm, 两栏之间的中缝空白的宽度为 5 cm, 怎样确定广告的高与宽的尺寸 (单位: cm) , 能使矩形广告面积最小?



20. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两个焦点为 $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$, 点 $P(3,\sqrt{7})$ 在双曲线 C 上.
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 记 O 为坐标原点, 过点 $Q(0,2)$ 的直线 l 与双曲线 C 相交于不同的两点 E、F, 若 $\triangle OEF$ 的面积为 $2\sqrt{2}$, 求直线 l 的方程.

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1=\lambda$, $a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+n-4$, $b_n=(-1)^n(a_n-3n+21)$, 其中 λ 为实数, n 为正整数.
(1) 证明: 对任意实数 λ, 数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列;
(2) 证明: 当 $\lambda\neq-18$ 时, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;
(2) 设 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在实数 λ, 使得对任意正整数 n, 都有 $S_n>-12$? 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

2008 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\left(\mathrm{i}-\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right)^3$ 等于 （ ）

(A) 8 (B) -8 (C) $8\mathrm{i}$ (D) $-8\mathrm{i}$

2. “$|x-1|<2$ 成立”是“$x(x-3)<0$ 成立”的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 已知变量 x、y 满足条件 $\begin{cases} x\geqslant 1 \\ x-y\leqslant 0 \\ x+2y-9\leqslant 0 \end{cases}$，则 $x+y$ 的最大值是 （ ）

(A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 8

4. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,9)$，若 $P(\xi>c+1)=P(\xi<c-1)$，则 $c=$ （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 设有直线 m、n 和平面 α、β. 下列四个命题中，正确的是 （ ）

(A) 若 $m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$，则 $m\parallel n$

(B) 若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\parallel\beta$，$n\parallel\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$

(C) 若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，则 $m\perp\beta$

(D) 若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\beta$，$m\not\subset\alpha$，则 $m\parallel\alpha$

6. 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是 （ ）

(A) 1 (B) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $1+\sqrt{3}$

7. 设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点，且 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ （ ）

(A) 反向平行 (B) 同向平行

(C) 互相垂直 (D) 既不平行也不垂直

8. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 上横坐标为 $\dfrac{3a}{2}$ 的点到右焦点的距离大于它到左准线的距离，则双曲线离心率的取值范围是 （ ）

(A) $(1,2)$ (B) $(2,+\infty)$ (C) $(1,5)$ (D) $(5,+\infty)$

9. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点在同一球面上，且 $AB=2$，$AD=\sqrt{3}$，$AA_1=1$，则顶点 A、B 间的球面距离是 （ ）

(A) $2\sqrt{2}\pi$ (B) $\sqrt{2}\pi$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$

10. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数（如 $[2]$=2，$\left[\dfrac{5}{4}\right]=1$）. 对于给定的 $n\in\mathbf{N}^*$，定义 $\mathrm{C}_n^x=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}$，$x\in[1,+\infty)$，则当 $x\in\left[\dfrac{3}{2},3\right)$ 时，函数 C_8^x 的值域是 （ ）

(A) $\left[\dfrac{16}{3},28\right]$ (B) $\left[\dfrac{16}{3},56\right)$

(C) $\left(4,\dfrac{28}{3}\right)\cup[28,56)$ (D) $\left(4,\dfrac{16}{3}\right]\cup\left(\dfrac{28}{3},28\right]$

二、填空题

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+3x-4}=$_____.

12. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点为 F，右准线为 l，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 过顶点 $A(0,b)$ 作 $AM\perp l$，垂足为 M，则直线 FM 的斜率等于_____.

13. 设函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，且函数 $y=x-f(x)$ 的图象过点 $(1,2)$. 则函数 $y=f^{-1}(x)-x$ 的图象一定过点_____.

14. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-ax}}{a-1}$ $(a\neq 1)$.

(1) 若 $a>1$，则 $f(x)$ 的定义域是_____；

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是_____.

15. 对有 n $(n\geqslant 4)$ 个元素的总体 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 进行抽样，先将总体分成两个子总体 $\{1,2,\cdots,m\}$ 和 $\{m+1,m+2,\cdots,n\}$（m 是给定的正整数，且 $2\leqslant m\leqslant n-2$），再从每个子总体中各随机抽取 2 个元素组成样本，用 P_{ij} 表示元素 i 和 j 同时出现在样本中的概率，则 $P_{1n}=$_____；所有 P_{ij} $(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 的和等于_____.

三、解答题

16. 甲、乙、丙三人参加了一家公司的招聘面试，面试合格者可正式签约. 甲表示只要面试合格就签约. 乙、丙则约定：两人面试都合格就一同签约，否则两人都不签约. 设每人面试合格的概率都是 $\dfrac{1}{2}$，且面试是否合格互不影响. 求：

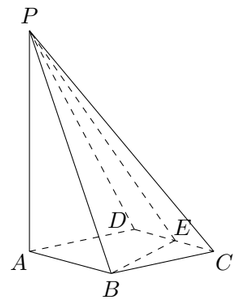
(1) 至少有 1 人面试合格的概率；

(2) 签约人数 ξ 的分布列和数学期望.

17. 如图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，$\angle BCD=60^\circ$，E 是 CD 的中点，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=2$.

(1) 证明：平面 $PBE\perp$ 平面 PAB；

(2) 求平面 PAD 和平面 PBE 所成二面角（锐角）的大小.

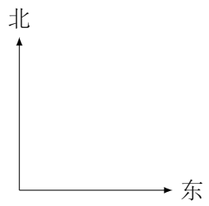


18. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\left(1+\cos^2\dfrac{n\pi}{2}\right)a_n+\sin^2\dfrac{n\pi}{2}$，$n=1,2,3,\cdots$.

(1) 求 a_3，a_4，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$. 证明：当 $n\geqslant 6$ 时，$|S_n-2|<\dfrac{1}{n}$.

19. 在一个特定时段内, 以点 E 为中心的 7 海里以内海域被设为警戒水域. 点 E 正北 55 海里处有一个雷达观测站 A. 某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点 A 北偏东 45° 且与点 A 相距 $40\sqrt{2}$ 海里的位置 B, 经过 40 分钟又测得该船已行驶到点 A 北偏东 $45^\circ+\theta$ (其中 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{26}}{26}$, $0^\circ<\theta<90^\circ$) 且与点 A 相距 $10\sqrt{13}$ 海里的位置 C.
(1) 求该船的行驶速度 (单位: 海里/小时) ;
(2) 若该船不改变航行方向继续行驶, 判断它是否会进入警戒水域, 并说明理由.



20. 若 A、B 是抛物线 $y^2=4x$ 上的不同两点, 弦 AB (不平行于 y 轴) 的垂直平分线与 x 轴相交于点 P, 则称弦 AB 是点 P 的一条"相关弦". 已知当 $x>2$ 时, 点 $P(x,0)$ 存在无穷多条"相关弦". 给定 $x_0>2$.
(1) 证明: 点 $P(x_0,0)$ 的所有"相关弦"的中点的横坐标相同;
(2) 试问: 点 $P(x_0,0)$ 的"相关弦"的弦长中是否存在最大值? 若存在, 求其最大值 (用 x_0 表示); 若不存在, 请说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=\ln^2(1+x)-\dfrac{x^2}{1+x}$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant \mathrm{e}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立 (其中 e 是自然对数的底数), 求 α 的最大值.

2008 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知 $U=\{2,3,4,5,6,7\}$, $M=\{3,4,5,7\}$, $N=\{2,4,5,6\}$, 则 （ ）

(A) $M\cap N=\{4,6\}$　　(B) $M\cup N=U$

(C) $(\complement_U N)\cup M=U$　　(D) $(\complement_U M)\cap N=N$

2. “$|x-1|<2$”是“$x<3$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

3. 已知变量 x, y 满足 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ y\leqslant 2\\ x-y\leqslant 0\end{cases}$, 则 $x+y$ 的最小值是 （ ）

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

4. 函数 $f(x)=x^2$ $(x\leqslant 0)$ 的反函数是 （ ）

(A) $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$　　(B) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$

(C) $f^{-1}(x)=-\sqrt{-x}$ $(x\leqslant 0)$　　(D) $f^{-1}(x)=-x^2$ $(x\leqslant 0)$

5. 已知直线 m, n 和平面 α, β 满足 $m\perp n$, $m\perp\alpha$, $\alpha\perp\beta$, 则 （ ）

(A) $n\perp\beta$　　(B) $n\parallel\beta$, 或 $n\subset\beta$

(C) $n\perp\alpha$　　(D) $n\parallel\alpha$, 或 $n\subset\alpha$

6. 下面不等式成立的是 （ ）

(A) $\log_3 2<\log_2 3<\log_2 5$　　(B) $\log_3 2<\log_2 5<\log_2 3$

(C) $\log_2 3<\log_3 2<\log_2 5$　　(D) $\log_2 3<\log_2 5<\log_3 2$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $AC=2$, $BC=\sqrt{10}$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ （ ）

(A) $-\dfrac{3}{2}$　　(B) $-\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $\dfrac{3}{2}$

8. 某市拟从 4 个重点项目和 6 个一般项目中各选 2 个项目作为本年度启动的项目, 则重点项目 A 和一般项目 B 至少有一个被选中的不同选法种数是 （ ）

(A) 15　　(B) 45　　(C) 60　　(D) 75

9. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点在同一个球面上, 且 $AB=2$, $AD=\sqrt{3}$, $AA_1=1$, 则顶点 A、B 间的球面距离是 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　(C) $\sqrt{2}\pi$　　(D) $2\sqrt{2}\pi$

10. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的右支上存在一点, 它到右焦点及左准线的距离相等, 则双曲线离心率的取值范围是 （ ）

(A) $(1,\sqrt{2}]$　　(B) $[\sqrt{2},+\infty)$　　(C) $(1,\sqrt{2}+1]$　　(D) $[\sqrt{2}+1,+\infty)$

二、填空题

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{b}=(-2,0)$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$_____.

12. 从某地区 15000 位老人中随机抽取 500 人, 其生活能否自理的情况如下表所示:

生活能否自理 \ 性别	男	女
能	178	278
不能	23	21

则该地区生活不能自理的老人中男性比女性约多_____人.

13. 记 $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中第 m 项的系数为 b_m, 若 $b_3=2b_4$, 则 $n=$_____.

14. 将圆 $x^2+y^2=1$ 沿 x 轴正向平移 1 个单位后所得到圆 C, 则圆 C 的方程是_____; 若过点 $(3,0)$ 的直线 l 和圆 C 相切, 则直线 l 的斜率为_____.

15. 设 $[x]$ 表示不超 x 的最大整数 (如 $[2]=2$, $\left[\dfrac{5}{4}\right]=1$). 对于给定的 $n\in\mathbf{N}^*$, 定义 $\mathrm{C}_n^x=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}$, $x\in[1,+\infty)$, 则 $\mathrm{C}_8^{\frac{3}{2}}=$_____; 当 $x\in[2,3)$ 时, 函数 C_8^x 的值域是_____.

三、解答题

16. 甲、乙、丙三人参加了一家公司的招聘面试, 面试合格者可正式签约. 甲表示只要面试合格就签约. 乙、丙则约定: 两人面试都合格就一同签约, 否则两人都不签约. 设每人面试合格的概率都是 $\dfrac{1}{2}$, 且面试是否合格互不影响. 求:

(1) 至少有 1 人面试合格的概率;

(2) 没有人签约的概率.

17. 已知函数 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}+\sin x$.

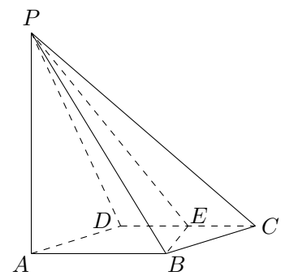
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 当 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 且 $f(x_0)=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$ 时, 求 $f\left(x_0+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

18. 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle BCD=60^\circ$, E 是 CD 的中点, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $PA=\sqrt{3}$.

(1) 证明: 平面 $PBE\perp$ 平面 PAB;

(2) 求二面角 $A-BE-P$ 的大小.



19. 已知椭圆的中心在原点, 一个焦点是 $F(2,0)$, 且两条准线间的距离为 λ $(\lambda>4)$.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 若存在过点 $A(1,0)$ 的直线 l, 使点 F 关于直线 l 的对称点在椭圆上, 求 λ 的取值范围.

20. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=\left(1+\cos^2\dfrac{n\pi}{2}\right)a_n+\sin^2\dfrac{n\pi}{2}$, $n=1$, 2, 3, $\cdots$.
(1) 求 a_3, a_4, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $S_k=a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}$, $T_k=a_2+a_4+\cdots+a_{2k}$, $W_k=\dfrac{2S_k}{2+T_k}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$, 求使 $W_k>1$ 的所有 k 的值, 并说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x^3-\dfrac{9}{2}x^2+cx$ 有三个极值点.
(1) 证明: $-27<c<5$;
(2) 若存在实数 c, 使函数 $f(x)$ 在区间 $[a,a+2]$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.

2008 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

1. 若函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ $(\omega>0)$ 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{5}$, 则 $\omega=$_____.

2. 若将一颗质地均匀的骰子 (一种各面上分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 个点的正方体玩具) 先后抛掷 2 次, 则出现向上的点数之和为 4 的概率是_____.

3. 若将复数 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 表示为 $a+b\mathrm{i}$ $(a,\ b\in\mathbf{R},\ \mathrm{i}$ 是虚数单位) 的形式, 则 $a+b=$_____.

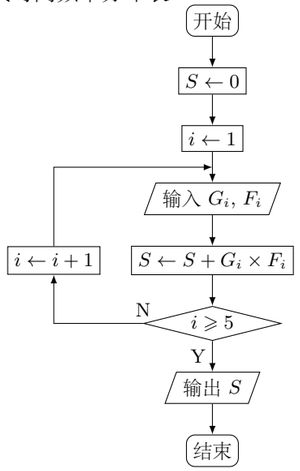
4. 设集合 $A=\left\{x|(x-1)^2<3x+7,x\in\mathbf{R}\right\}$, 则集合 $A\cap\mathbf{Z}$ 中有_____个元素.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=3$, 则 $|5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$_____.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 D 是横坐标与纵坐标的绝对值均不大于 2 的点构成的区域, E 是到原点的距离不大于 1 的点构成的区域. 向 D 中随机投一点, 则所投的点落在 E 中的概率是_____.

7. 某地区为了解 70 ~ 80 岁老人的日平均睡眠时间 (单位: h), 随机选择了 50 位老人进行调查. 下表是 50 位老人日睡眠时间频率分布表:

序号 (i)	分组 (睡眠时间)	组中值 (G_i)	频数 (人数)	频率 (F_i)
1	[4, 5)	4.5	6	0.12
2	[5, 6)	5.5	10	0.20
3	[6, 7)	6.5	20	0.40
4	[7, 8)	7.5	10	0.20
5	[8, 9]	8.5	4	0.08



在上述统计数据的分析中, 一部分计算见算法流程图, 则输出的 S 的值为_____.

8. 设直线 $y=\dfrac{1}{2}x+b$ 是曲线 $y=\ln x$ $(x>0)$ 的一条切线, 则实数 b 的值为_____.

9. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 设三角形 ABC 的顶点分别为 $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$; 点 $P(0,p)$ 为线段 AO 上的一点 (异于端点), 这里 a, b, c, p 为非零实数. 设直线 BP, CP 分别与边 AC, AB 交于点 E, F. 某同学已正确求得 OE 的方程: $\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)x+\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{a}\right)y=0$. 请你完成直线 OF 的方程: (_____)$x+\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{a}\right)y=0$.

10. 将全体正整数排成一个三角形数阵:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & & 2 & 3 & & \\
 & & 4 & 5 & 6 & & \\
 & 7 & 8 & 9 & 10 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

根据以上排列规律, 数阵中第 n $(n\geqslant 3)$ 行的从左向右的第 3 个数是_____.

11. 设 x, y, z 为正实数, 满足 $x-2y+3z=0$, 则 $\dfrac{y^2}{xz}$ 的最小值为_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦距为 $2c$, 以点 O 为圆心, a 为半径作圆 M. 若过点 $\left(\dfrac{a^2}{c},0\right)$ 所作圆 M 的两条切线互相垂直, 则该椭圆的离心率 $e=$_____.

13. 满足条件 $AB=2$, $AC=\sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积的最大值是_____.

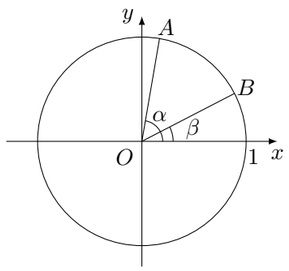
14. 设函数 $f(x)=ax^3-3x+1$ $(x\in\mathbf{R})$, 若对于任意 $x\in[-1,1]$, 都有 $f(x)\geqslant 0$ 成立, 则实数 a 的值为_____.

二、解答题

15. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 以 Ox 轴为始边做两个锐角 α, β, 它们的终边分别与单位圆交于 A、B 两点. 已知 A、B 的横坐标分别为 $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$, $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值;

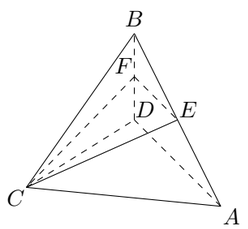
(2) 求 $\alpha+2\beta$ 的值.



16. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $CB=CD$, $AD\perp BD$, 点 E、F 分别是 AB、BD 的中点. 求证:

(1) 直线 $EF\parallel$ 平面 ACD;

(2) 平面 $EFC\perp$ 平面 BCD.



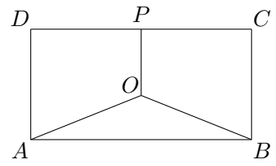
17. 如图, 某地有三家工厂, 分别位于矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A、B 及 CD 的中点 P 处, 已知 $AB=20$ km, $BC=10$ km. 为了处理三家工厂的污水, 现要在矩形区域上 (含边界), 且与 A、B 等距离的一点 O 处建造一个污水处理厂, 并铺设三条排污管道 AO、BO、PO. 记排污管道的总长度为 y km.

(1) 按下列要求写出函数关系式:

① 设 $\angle BAO=\theta$ (rad), 将 y 表示为 θ 的函数;

② 设 $OP=x$ (km), 将 y 表示为 x 的函数;

(2) 请你选用 (1) 中的一个函数关系式, 确定污水处理厂的位置, 使铺设的排污管道的总长度最短.



18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象与两坐标轴有三个交点, 经过这三个交点的圆记为 C.

(1) 求实数 b 的取值范围;

(2) 求圆 C 的方程;

(3) 问圆 C 是否经过定点 (其坐标与 b 无关)? 请证明你的结论.

19. (1) 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是各项均不为零的 n ($n \geqslant 4$) 项等差数列, 且公差 $d \neq 0$. 若将此数列删去某一项得到的数列 (按原来的顺序) 是等比数列,

① 当 $n = 4$ 时, 求 $\dfrac{a_1}{d}$ 的数值;

② 求 n 的所有可能值.

(2) 求证: 对于给定的正整数 n ($n \geqslant 4$), 存在一个各项及公差都不为零的等差数列 b_1, b_2, $\cdots$, b_n, 其中任意三项 (按原来顺序) 都不能组成等比数列.

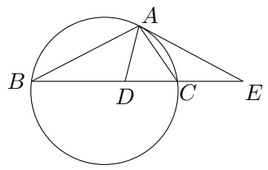
20. 已知函数 $f_1(x) = 3^{|x-p_1|}$, $f_2(x) = 2 \cdot 3^{|x-p_2|}$ ($x \in \mathbf{R}$, p_1, p_2 为常数). 函数 $f(x)$ 定义为: 对每个给定的实数 x, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{若 } f_1(x) \leqslant f_2(x) \\ f_2(x), & \text{若 } f_1(x) > f_2(x) \end{cases}$.

(1) 求 $f(x) = f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充分必要条件 (用 p_1, p_2 表示);

(2) 设 a, b 是两个实数, 满足 $a < b$, 且 p_1, $p_2 \in (a, b)$. 若 $f(a) = f(b)$, 求证: $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的单调增区间的长度之和为 $\dfrac{b-a}{2}$. (闭区间 $[m, n]$ 的长度定义为 $n - m$)

21. 四选二.

【A】如图, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 AE 与 BC 的延长线交于点 E, $\angle BAC$ 的平分线与 BC 交于点 D. 求证: $ED^2 = EC \cdot EB$.

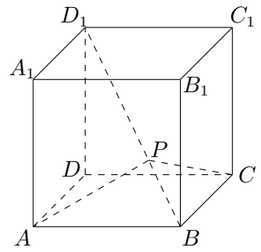


【B】在平面直角坐标系 xOy 中, 设椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 在矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 对应的变换下得到曲线 F, 求 F 的方程.

【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $P(x, y)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上的一个动点, 求 $S = x + y$ 的最大值.

【D】设 a, b, c 为正实数, 求证: $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} + abc \geqslant 2\sqrt{3}$.

22. 如图, 设动点 P 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上, 记 $\dfrac{D_1P}{D_1B} = \lambda$. 当 $\angle APC$ 为钝角时, 求 λ 的取值范围.



23. 请先阅读: 在等式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ($x \in \mathbf{R}$) 的两边对 x 求导 $(\cos 2x)' = (2\cos^2 x - 1)'$. 由求导法则得 $(-\sin 2x) \cdot 2 = 4\cos x \cdot (-\sin x)$, 化简得等式 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

(1) 利用上述想法 (或者其他方法) , 试由等式 $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$ ($x \in \mathbf{R}$, 整数 $n \geqslant 2$) 证明: $n[(1+x)^{n-1} - 1] = \sum\limits_{k=2}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^{k-1}$;

(2) 对于正整数 $n \geqslant 3$, 求证:

① $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k k\mathrm{C}_n^k = 0$;

② $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k k^2\mathrm{C}_n^k = 0$;

③ $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

2008 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $z=\sin 2+\mathrm{i}\cos 2$ 对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 定义集合运算: $A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$. 设 $A=\{1,2\}$, $B=\{0,2\}$, 则集合 $A*B$ 的所有元素之和为 （ ）

(A) 0　(B) 2　(C) 3　(D) 6

3. 若函数 $y=f(x)$ 的值域是 $\left[\frac{1}{2},3\right]$, 则函数 $F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$ 的值域是 （ ）

(A) $\left[\frac{1}{2},3\right]$　(B) $\left[2,\frac{10}{3}\right]$　(C) $\left[\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right]$　(D) $\left[3,\frac{10}{3}\right]$

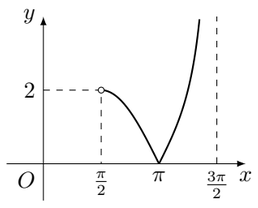
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}=$ （ ）

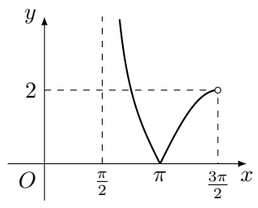
(A) $\frac{1}{2}$　(B) 0　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) 不存在

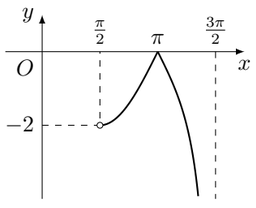
5. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 则 $a_n=$ （ ）

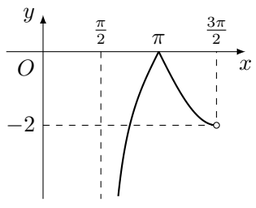
(A) $2+\ln n$　(B) $2+(n-1)\ln n$(C) $2+n\ln n$　(D) $1+n+\ln n$

6. 函数 $y=\tan x+\sin x-|\tan x-\sin x|$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内的图象大致是 （ ）

(A)


(B)


(C)


(D)


7. 已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点, 满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部, 则椭圆离心率的取值范围是 （ ）

(A) $(0,1)$　(B) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　(C) $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　(D) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

8. $(1+\sqrt[3]{x})^6\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{10}$ 展开式中的常数项为 （ ）

(A) 1　(B) 46　(C) 4245　(D) 4246

9. 若 $0<a_1<a_2$, $0<b_1<b_2$, 且 $a_1+a_2=b_1+b_2=1$, 则下列代数式中值最大的是 （ ）

(A) $a_1b_1+a_2b_2$　(B) $a_1a_2+b_1b_2$　(C) $a_1b_2+a_2b_1$　(D) $\frac{1}{2}$

10. 连结球面上两点的线段称为球的弦. 半径为 4 的球的两条弦 AB、CD 的长度分别等于 $2\sqrt{7}$、$4\sqrt{3}$, M、N 分别为 AB、CD 的中点, 每条弦的两端都在球面上运动, 有下列四个命题:
① 弦 AB、CD 可能相交于点 M;
② 弦 AB、CD 可能相交于点 N;
③ MN 的最大值为 5;
④ MN 的最小值为 1.
其中真命题的个数为 （ ）

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

11. 电子钟一天显示的时间是从 00：00 到 23：59, 每一时刻都由四个数字组成, 则一天中任一时刻显示的四个数字之和为 23 的概率为 （ ）

(A) $\frac{1}{180}$　(B) $\frac{1}{288}$　(C) $\frac{1}{360}$　(D) $\frac{1}{480}$

12. 已知函数 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$, $g(x)=mx$, 若对于任一实数 x, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数, 则实数 m 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,2)$　(B) $(0,8)$　(C) $(2,8)$　(D) $(-\infty,0)$

二、填空题

13. 直角坐标平面内三点 $A(1,2)$, $B(3,-2)$, $C(9,7)$, 若 E、F 为线段 BC 的三等分点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$_____.

14. 不等式 $2^{x-\frac{3}{x}+1}\leqslant\frac{1}{2}$ 的解集为_____.

15. 过抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 30° 的直线, 与抛物线分别交于 A、B 两点 (点 A 在 y 轴左侧), 则 $\dfrac{|AF|}{|FB|}=$_____.

16. 如图 1, 一个正四棱柱形的密闭容器水平放置, 其底部镶嵌了同底的正四棱锥形实心装饰块, 容器内盛有 a 升水时, 水面恰好经过正四棱锥的顶点 P. 如果将容器倒置, 水面也恰好过点 P (图 2). 有下列四个命题:
A. 正四棱锥的高等于正四棱柱高的一半;
B. 将容器侧面水平放置时, 水面也恰好过点 P;
C. 任意摆放该容器, 当水面静止时, 水面都恰好经过点 P;
D. 若往容器内再注入 a 升水, 则容器恰好能装满.
其中真命题的代号是_____. (写出所有真命题的代号)

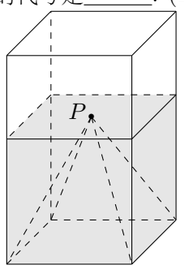


图 1

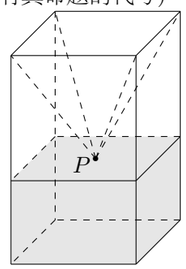


图 2

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, a、b、c 分别为角 A、B、C 所对的边长, $a=2\sqrt{3}$, $\tan\dfrac{A+B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=4$, $\sin B\sin C=\cos^2\dfrac{A}{2}$. 求 A、B 及 b、c.

18. 因冰雪灾害, 某柑桔基地果林严重受损, 为此有关专家提出两种拯救果树的方案, 每种方案都需分两年实施. 若实施方案一, 预计第一年可以使柑桔产量恢复到灾前的 1.0 倍、0.9 倍、0.8 倍的概率分别是 0.3、0.3、0.4; 第二年可以使柑桔产量为第一年产量的 1.25 倍、1.0 倍的概率分别是 0.5、0.5. 若实施方案二, 预计第一年可以使柑桔产量达到灾前的 1.2 倍、1.0 倍、0.88 倍的概率分别是 0.2、0.3、0.5; 第二年可以使柑桔产量为第一年产量的 1.2 倍、1.0 倍的概率分别是 0.4、0.6. 实施每种方案第一年与第二年相互独立, 令 ξ_i $(i=1,2)$ 表示方案 i 实施两年后柑桔产量达到灾前产量的倍数.
(1) 写出 ξ_1、ξ_2 的分布列;
(2) 实施哪种方案, 两年后柑桔产量超过灾前产量的概率更大?
(3) 不管哪种方案, 如果实施两年后柑桔产量达不到、恰好达到、超过灾前产量, 预计利润分别为 10 万元、15 万元、20 万元. 问实施哪种方案的平均利润更大?

19. 等差数列 $\{a_n\}$ 各项均为正整数, $a_1=3$, 前 n 项和为 S_n, 等比数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1=1$, 且 $b_2S_2=64$, $\{b_n\}$ 是公比为 64 的等比数列.

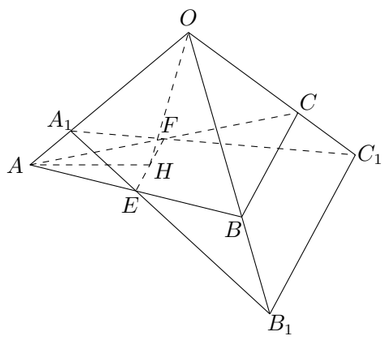
(1) 求 a_n 与 b_n;

(2) 证明: $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}<\dfrac{3}{4}$.

20. 如图, 正三棱锥 $O-ABC$ 的三条侧棱 OA、OB、OC 两两垂直, 且长度均为 2. E、F 分别是 AB、AC 的中点, H 是 EF 的中点, 过 EF 的一个平面与侧棱 OA、OB、OC 或其延长线分别相交于 A_1、B_1、C_1, 已知 $OA_1=\dfrac{3}{2}$.

(1) 证明: $B_1C_1\perp$ 平面 OAH;

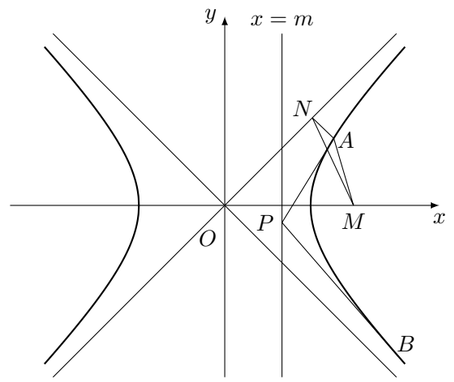
(2) 求二面角 $O-A_1B_1-C_1$ 的大小.



21. 设点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $x=m$ $(y\neq\pm m,\ 0<m<1)$ 上, 过点 P 作双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两条切线 PA、PB, 切点为 A、B, 定点 $M\left(\dfrac{1}{m},0\right)$.

(1) 过点 A 作直线 $x-y=0$ 的垂线, 垂足为 N, 试求 $\triangle AMN$ 的重心 G 所在的曲线方程;

(2) 求证: A、M、B 三点共线.



22. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\dfrac{ax}{ax+8}}$, $x\in(0,+\infty)$.

(1) 当 $a=8$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 对任意正数 a, 证明: $1<f(x)<2$.

2008 年普通高等学校招生考试（江西卷）

文科数学

一、选择题

1. “$|x|=|y|$”是“$x=y$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

2. 定义集合运算：$A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$. 设 $A=\{1,2\}$, $B=\{0,2\}$, 则集合 $A*B$ 的所有元素之和为 （ ）

(A) 0　(B) 2　(C) 3　(D) 6

3. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$, 则函数 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是（ ）

(A) $[0,1]$　(B) $[0,1)$　(C) $[0,1)\cup(1,4]$　(D) $(0,1)$

4. 若 $0<x<y<1$, 则

(A) $3^y<3^x$　(B) $\log_x 3<\log_y 3$

(C) $\log_4 x<\log_4 y$　(D) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x<\left(\dfrac{1}{4}\right)^y$

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, 则 $a_n=$ （ ）

(A) $2+\ln n$　(B) $2+(n-1)\ln n$　(C) $2+n\ln n$　(D) $1+n+\ln n$

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+2\sin\dfrac{x}{2}}$ 是 （ ）

(A) 以 4π 为周期的偶函数　(B) 以 2π 为周期的奇函数

(C) 以 2π 为周期的偶函数　(D) 以 4π 为周期的奇函数

7. 已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点, 满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部, 则椭圆离心率的取值范围是 （ ）

(A) $(0,1)$　(B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　(C) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　(D) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

8. $(1+x)^{10}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ 展开式中的常数项为 （ ）

(A) 1　(B) $(C_{10}^1)^2$　(C) C_{20}^1　(D) C_{20}^{10}

9. 设直线 m 与平面 α 相交但不垂直, 则下列说法中正确的是 （ ）

(A) 在平面 α 内有且只有一条直线与直线 m 垂直

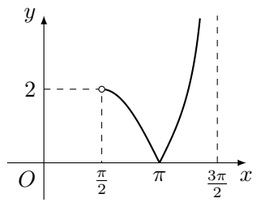
(B) 过直线 m 有且只有一个平面与平面 α 垂直

(C) 与直线 m 垂直的直线不可能与平面 α 平行

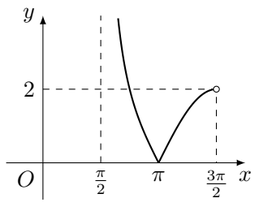
(D) 与直线 m 平行的平面不可能与平面 α 垂直

10. 函数 $y=\tan x+\sin x-|\tan x-\sin x|$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内的图象大致是 （ ）

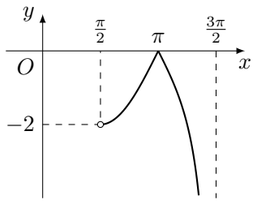
(A)



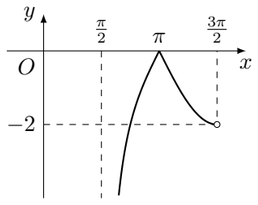
(B)



(C)



(D)



11. 电子钟一天显示的时间是从 00：00 到 23：59, 每一时刻都由四个数字组成, 则一天中任一时刻显示的四个数字之和为 23 的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{180}$　(B) $\dfrac{1}{288}$　(C) $\dfrac{1}{360}$　(D) $\dfrac{1}{480}$

12. 已知函数 $f(x)=2x^2+(4-m)x+4-m$, $g(x)=mx$, 若对于任一实数 x, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数, 则实数 m 的取值范围是 （ ）

(A) $[-4,4]$　(B) $(-4,4)$　(C) $(-\infty,4)$　(D) $(-\infty,-4)$

二、填空题

13. 不等式 $2^{x^2+2x-4}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 的解集为_____.

14. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的两条渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$, 若顶点到渐近线的距离为 1, 则双曲线方程为_____.

15. 连结球面上两点的线段称为球的弦. 半径为 4 的球的两条弦 AB、CD 的长度分别等于 $2\sqrt{7}$、$4\sqrt{3}$, 每条弦的两端都在球面上运动, 则两弦中点之间距离的最大值为_____.

16. 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 中, 有下列四个命题:

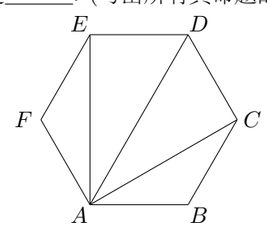
A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{BC}$;

B. $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$;

C. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$;

D. $\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}\right)\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF}\right)$.

其中真命题的代号是_____. (写出所有真命题的代号)



三、解答题

17. 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, α, $\beta\in(0,\pi)$.

(1) 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(x-\alpha)+\cos(x+\beta)$ 的最大值.

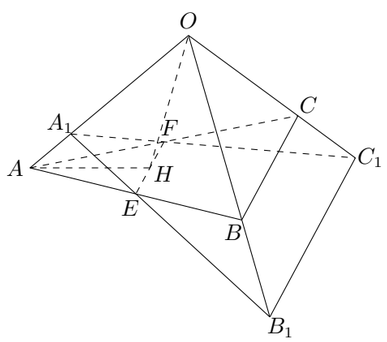
18. 因冰雪灾害, 某柑桔基地果林严重受损, 为此有关专家提出一种拯救果树的方案, 该方案需分两年实施且相互独立. 该方案预计第一年可以使柑桔产量恢复到灾前的 1.0 倍、0.9 倍、0.8 倍的概率分别是 0.2、0.4、0.4; 第二年可以使柑桔产量为第一年产量的 1.5 倍、1.25 倍、1.0 倍的概率分别是 0.3、0.3、0.4.

(1) 求两年后柑桔产量恰好达到灾前产量的概率;

(2) 求两年后柑桔产量超过灾前产量的概率.

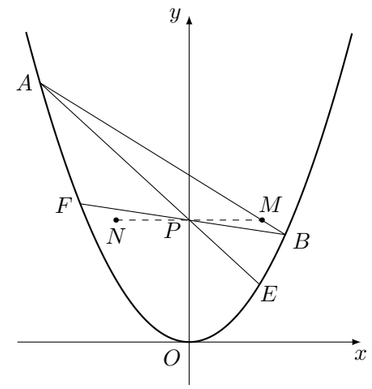
19. 等差数列 $\{a_n\}$ 各项均为正整数, $a_1=3$, 前 n 项和为 S_n, 等比数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1=1$, 且 $b_2S_2=64$, $b_3S_3=960$.
(1) 求 a_n 与 b_n;
(2) 求 $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}$.

20. 如图, 正三棱锥 $O-ABC$ 的三条侧棱 OA、OB、OC 两两垂直, 且长度均为 2. E、F 分别是 AB、AC 的中点, H 是 EF 的中点, 过 EF 的一个平面与侧棱 OA、OB、OC 或其延长线分别相交于 A_1、B_1、C_1, 已知 $OA_1=\dfrac{3}{2}$.
(1) 证明: $B_1C_1\perp$ 平面 OAH;
(2) 求二面角 $O-A_1B_1-C_1$ 的大小.



21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}ax^3-a^2x^2+a^4$ $(a>0)$.
(1) 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间;
(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 恰有两个交点, 求 a 的取值范围.

22. 已知抛物线 $y=x^2$ 和三个点 $M(x_0,y_0)$、$P(0,y_0)$、$N(-x_0,y_0)$ $(y_0\neq x_0^2$, $y_0>0)$, 过点 M 的一条直线交抛物线于 A、B 两点, AP、BP 的延长线分别交曲线 C 于 E、F.
(1) 证明 E、F、N 三点共线;
(2) 如果 A、B、M、N 四点共线, 问: 是否存在 y_0, 使以线段 AB 为直径的圆与抛物线有异于 A、B 的交点? 如果存在, 求出 y_0 的取值范围, 并求出该交点到直线 AB 的距离; 若不存在, 请说明理由.



2008 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\left\{x\left|\frac{x+3}{x-1}<0\right.\right\}$, $N=\{x|x\leqslant -3\}$, 则集合 $\{x|x\geqslant 1\}=$(　)

(A) $M\cap N$　(B) $M\cup N$　(C) $\complement_{\mathbf{R}}(M\cap N)$　(D) $\complement_{\mathbf{R}}(M\cup N)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n(2n+1)}=$　(　)

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

3. 圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=kx+2$ 没有公共点的充要条件是　(　)

(A) $k\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$　(B) $k\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

(C) $k\in\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$　(D) $k\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

4. 复数 $\dfrac{1}{-2+\mathrm{i}}+\dfrac{1}{1-2\mathrm{i}}$ 的虚部是　(　)

(A) $\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　(B) $\dfrac{1}{5}$　(C) $-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　(D) $-\dfrac{1}{5}$

5. 已知 O, A, B 是平面上的三个点, 直线 AB 上有一点 C, 满足 $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{OC}=$　(　)

(A) $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$　(B) $-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$　(C) $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　(D) $-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

6. 设 P 为曲线 C: $y=x^2+2x+3$ 上的点, 且曲线 C 在点 P 处切线倾斜角的取值范围是 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 则点 P 横坐标的取值范围是　(　)

(A) $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$　(B) $[-1,0]$　(C) $[0,1]$　(D) $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

7. 4 张卡片上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 从这 4 张卡片中随机抽取 2 张, 则取出的 2 张卡片上的数字之和为奇数的概率为　(　)

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

8. 将函数 $y=2^x+1$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移得到函数 $y=2^{x+1}$ 的图象, 则(　)

(A) $\boldsymbol{a}=(-1,-1)$　(B) $\boldsymbol{a}=(1,-1)$　(C) $\boldsymbol{a}=(1,1)$　(D) $\boldsymbol{a}=(-1,1)$

9. 一生产过程有 4 道工序, 每道工序需要安排一人照看. 现从甲、乙、丙等 6 名工人中安排 4 人分别照看一道工序, 第一道工序只能从甲、乙两工人中安排 1 人, 第四道工序只能从甲、丙两工人中安排 1 人, 则不同的安排方案共有　(　)

(A) 24 种　(B) 36 种　(C) 48 种　(D) 72 种

10. 已知点 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的一个动点, 则点 P 到点 $(0,2)$ 的距离与 P 到该抛物线准线的距离之和的最小值为　(　)

(A) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$　(B) 3　(C) $\sqrt{5}$　(D) $\dfrac{9}{2}$

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 AA_1, CC_1 的中点, 则在空间中与三条直线 A_1D_1, EF, CD 都相交的直线　(　)

(A) 不存在　(B) 有且只有两条 (C) 有且只有三条 (D) 有无数条

12. 设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 且当 $x>0$ 时 $f(x)$ 是单调函数, 则满足 $f(x)=f\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和为　(　)

(A) -3　(B) 3　(C) -8　(D) 8

二、填空题

13. 函数 $y=\begin{cases}x+1, & x<0\\ \mathrm{e}^x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的反函数是_____.

14. 在体积为 $4\sqrt{3}\pi$ 的球的表面上有 A, B, C 三点, $AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, A, C 两点的球面距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$, 则球心到平面 ABC 的距离为_____.

15. 已知 $(1+x+x^2)\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^n$ 的展开式中没有常数项, $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $2\leqslant n\leqslant 8$, 则 $n=$_____.

16. 已知 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, 且 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 有最小值, 无最大值, 则 $\omega=$_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对边的边长分别是 a, b, c. 已知 $c=2$, $C=\dfrac{\pi}{3}$.

(1) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 a, b;

(2) 若 $\sin C+\sin(B-A)=2\sin 2A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 某批发市场对某种商品的周销售量 (单位: 吨) 进行统计, 最近 100 周的统计结果如下表所示:

周销售量	2	3	4
频数	20	50	30

(1) 根据上面统计结果, 求周销售量分别为 2 吨, 3 吨和 4 吨的频率;

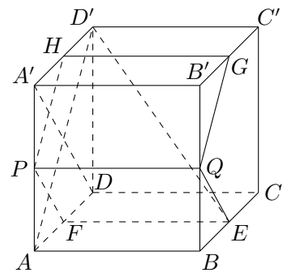
(2) 已知每吨该商品的销售利润为 2 千元, ξ 表示该种商品两周销售利润的和 (单位: 千元). 若以上述频率作为概率, 且各周的销售量相互独立, 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AP=BQ=b$ $(0<b<1)$, 截面 $PQEF\parallel A'D$, 截面 $PQGH\parallel AD'$.

(1) 证明: 平面 $PQEF$ 和平面 $PQGH$ 互相垂直;

(2) 证明: 截面 $PQEF$ 和截面 $PQGH$ 面积之和是定值, 并求出这个值;

(3) 若 $D'E$ 与平面 $PQEF$ 所成的角为 45°, 求 $D'E$ 与平面 $PQGH$ 所成角的正弦值.



20. 在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到两点 $\left(0,-\sqrt{3}\right)$, $\left(0,\sqrt{3}\right)$ 的距离之和为 4, 设点 P 的轨迹为 C, 直线 $y=kx+1$ 与 C 交于 A, B 两点.
(1) 写出 C 的方程;
(2) 若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 求 k 的值;
(3) 若点 A 在第一象限, 证明: 当 $k>0$ 时, 恒有 $\left|\overrightarrow{OA}\right|>\left|\overrightarrow{OB}\right|$.

21. 在数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 中, $a_1=2$, $b_1=4$, 且 a_n, b_n, a_{n+1} 成等差数列, b_n, a_{n+1}, b_{n+1} 成等比数列.
(1) 求 a_2, a_3, a_4 及 b_2, b_3, b_4, 由此猜测 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式, 并证明你的结论;
(2) 证明: $\dfrac{1}{a_1+b_1}+\dfrac{1}{a_2+b_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n+b_n}<\dfrac{5}{12}$.

22. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(x+1)$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;
(2) 是否存在实数 a, 使得关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$? 若存在, 求 a 的取值范围; 若不存在, 试说明理由.

2008 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|-3<x<1\}$, $N=\{x|x\leqslant -3\}$, 则 $M\cup N=$ （ ）

(A) $\varnothing$ (B) $\{x|x\geqslant -3\}$ (C) $\{x|x\geqslant 1\}$ (D) $\{x|x<1\}$

2. 若函数 $y=(x+1)(x-a)$ 为偶函数, 则 $a=$ （ ）

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

3. 圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=kx+2$ 没有公共点的充要条件是 （ ）

(A) $k\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ (B) $k\in\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$

(C) $k\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ (D) $k\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

4. 已知 $0<a<1$, $x=\log_a\sqrt{2}+\log_a\sqrt{3}$, $y=\dfrac{1}{2}\log_a 5$, $z=\log_a\sqrt{21}-\log_a\sqrt{3}$, 则 （ ）

(A) $x>y>z$ (B) $z>y>x$ (C) $y>x>z$ (D) $z>x>y$

5. 已知四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(0,2)$, $B(-1,-2)$, $C(3,1)$, 且 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$, 则顶点 D 的坐标为 （ ）

(A) $\left(2,\dfrac{7}{2}\right)$ (B) $\left(2,-\dfrac{1}{2}\right)$ (C) $(3,2)$ (D) $(1,3)$

6. 设 P 为曲线 C: $y=x^2+2x+3$ 上的点, 且曲线 C 在点 P 处切线倾斜角的取值范围是 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 则点 P 横坐标的取值范围是 （ ）

(A) $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$ (B) $[-1,0]$ (C) $[0,1]$ (D) $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

7. 4 张卡片上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 从这 4 张卡片中随机抽取 2 张, 则取出的 2 张卡片上的数字之和为奇数的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

8. 将函数 $y=2^x+1$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移得到函数 $y=2^{x+1}$ 的图象, 则（ ）

(A) $\boldsymbol{a}=(-1,-1)$ (B) $\boldsymbol{a}=(1,-1)$ (C) $\boldsymbol{a}=(1,1)$ (D) $\boldsymbol{a}=(-1,1)$

9. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}y+x-1\leqslant 0\\ y-3x-1\leqslant 0\\ y-x+1\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值为 （ ）

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) -4

10. 一生产过程有 4 道工序, 每道工序需要安排一人照看. 现从甲、乙、丙等 6 名工人中安排 4 人分别照看一道工序, 第一道工序只能从甲、乙两工人中安排 1 人, 第四道工序只能从甲、丙两工人中安排 1 人, 则不同的安排方案共有 （ ）

(A) 24 种 (B) 36 种 (C) 48 种 (D) 72 种

11. 已知双曲线 $9y^2-m^2x^2=1$ $(m>0)$ 的一个顶点到它的一条渐近线的距离为 $\dfrac{1}{5}$, 则 $m=$ （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 AA_1, CC_1 的中点, 则在空间中与三条直线 A_1D_1, EF, CD 都相交的直线 （ ）

(A) 不存在 (B) 有且只有两条 (C) 有且只有三条 (D) 有无数条

二、填空题

13. 函数 $y=\mathrm{e}^{2x+1}$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的反函数是_____.

14. 在体积为 $4\sqrt{3}\pi$ 的球的表面上有 A, B, C 三点, $AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, A, C 两点的球面距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$, 则球心到平面 ABC 的距离为_____.

15. $(1+x^3)\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ 展开式中的常数项为_____.

16. 设 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则函数 $y=\dfrac{2\sin^2 x+1}{\sin 2x}$ 的最小值为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对边的边长分别是 a, b, c. 已知 $c=2$, $C=\dfrac{\pi}{3}$.

(1) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 a, b;

(2) 若 $\sin B=2\sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 某批发市场对某种商品的周销售量 (单位: 吨) 进行统计, 最近 100 周的统计结果如下表所示:

周销售量	2	3	4
频数	20	50	30

(1) 根据上面统计结果, 求周销售量分别为 2 吨, 3 吨和 4 吨的频率;

(2) 若以上述频率作为概率, 且各周的销售量相互独立, 求

① 4 周中该种商品至少有一周的销售量为 4 吨的概率;

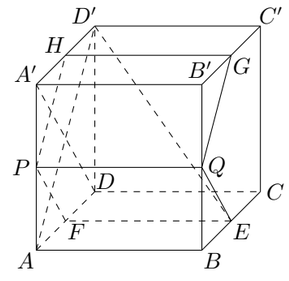
② 该种商品 4 周的销售量总和至少为 15 吨的概率.

19. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AP=BQ=b$ $(0<b<1)$, 截面 $PQEF\parallel A'D$, 截面 $PQGH\parallel AD'$.

(1) 证明: 平面 $PQEF$ 和平面 $PQGH$ 互相垂直;

(2) 证明: 截面 $PQEF$ 和截面 $PQGH$ 面积之和是定值, 并求出这个值;

(3) 若 $b=\dfrac{1}{2}$, 求 $D'E$ 与平面 $PQEF$ 所成角的正弦值.



20. 在数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 设 $c_n = \dfrac{b_n}{a_n}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.
(1) 数列 $\{c_n\}$ 是否为等比数列? 证明你的结论;
(2) 设数列 $\{\ln a_n\}$, $\{\ln b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n. 若 $a_1 = 2$, $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{n}{2n+1}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

21. 在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到两点 $\left(0, -\sqrt{3}\right)$, $\left(0, \sqrt{3}\right)$ 的距离之和为 4, 设点 P 的轨迹为 C.
(1) 写出 C 的方程;
(2) 设直线 $y = kx + 1$ 与 C 交于 A, B 两点. k 为何值时 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$? 此时 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 的值是多少?

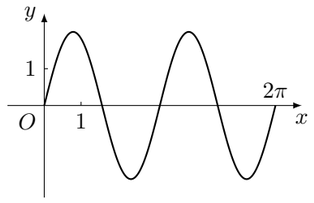
22. 设函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3a^2x + 1$ $(a,\ b \in \mathbf{R})$ 在 $x = x_1$, $x = x_2$ 处取得极值, 且 $|x_1 - x_2| = 2$.
(1) 若 $a = 1$, 求 b 的值, 并求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若 $a > 0$, 求 b 的取值范围.

2008 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 的图象如图, 那么 $\omega=$ （　）



(A) 1　　(B) 2　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

2. 已知复数 $z=1-\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{z^2-2z}{z-1}=$ （　）

(A) 2i　　(B) -2i　　(C) 2　　(D) -2

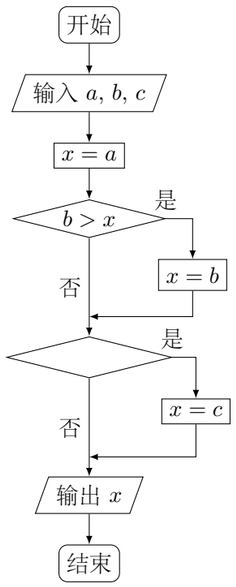
3. 如果等腰三角形的周长是底边长的 5 倍, 那么它的顶角的余弦值为 （　）

(A) $\frac{5}{18}$　　(B) $\frac{3}{4}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) $\frac{7}{8}$

4. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=2$, 前 n 项和为 S_n, 则 $\dfrac{S_4}{a_2}=$ （　）

(A) 2　　(B) 4　　(C) $\frac{15}{2}$　　(D) $\frac{17}{2}$

5. 下面的程序框图, 如果输入三个实数 a, b, c, 要求输出这三个数中最大的数, 那么在空白的判断框中, 应该填入下面四个选项中的 （　）



(A) $c>x$　　(B) $x>c$　　(C) $c>b$　　(D) $b>c$

6. 已知 $a_1>a_2>a_3>0$, 则使得 $(1-a_ix)^2<1$ $(i=1,2,3)$ 都成立的 x 取值范围是 （　）

(A) $\left(0,\frac{1}{a_1}\right)$　　(B) $\left(0,\frac{2}{a_1}\right)$　　(C) $\left(0,\frac{1}{a_3}\right)$　　(D) $\left(0,\frac{2}{a_3}\right)$

7. $\dfrac{3-\sin 70^\circ}{2-\cos^2 10^\circ}=$ （　）

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) 2　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是 （　）

(A) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 方向相同

(B) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 两向量中至少有一个为零向量

(C) $\exists\lambda\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

(D) 存在不全为零的实数 λ_1, λ_2, $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

9. 甲、乙、丙 3 位志愿者安排在周一至周五的 5 天中参加某项志愿者活动, 要求每人参加一天且每天至多安排一人, 并要求甲安排在另外两位前面. 不同的安排方法共有 （　）

(A) 20 种　　(B) 30 种　　(C) 40 种　　(D) 60 种

10. 由直线 $x=\frac{1}{2}$, $x=2$, 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及 x 轴所围图形的面积为 （　）

(A) $\frac{15}{4}$　　(B) $\frac{17}{4}$　　(C) $\frac{1}{2}\ln 2$　　(D) $2\ln 2$

11. 已知点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上, 那么点 P 到点 $Q(2,-1)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点距离之和取得最小值时, 点 P 的坐标为 （　）

(A) $\left(\frac{1}{4},-1\right)$　　(B) $\left(\frac{1}{4},1\right)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(1,-2)$

12. 某几何体的一条棱长为 $\sqrt{7}$, 在该几何体的正视图中, 这条棱的投影是长为 $\sqrt{6}$ 的线段, 在该几何体的侧视图与俯视图中, 这条棱的投影分别是长为 a 和 b 的线段, 则 $a+b$ 的最大值为 （　）

(A) $2\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) 4　　(D) $2\sqrt{5}$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,-1,1)$, $\boldsymbol{b}=(4,1,0)$, $|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{29}$ 且 $\lambda>0$, 则 $\lambda=$_____.

14. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的右顶点为 A, 右焦点为 F. 过点 F 平行双曲线的一条渐近线的直线与双曲线交于点 B, 则 $\triangle AFB$ 的面积为_____.

15. 一个六棱柱的底面是正六边形, 其侧棱垂直底面. 已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上, 且该六棱柱的体积为 $\frac{9}{8}$, 底面周长为 3, 则这个球的体积为_____.

16. 从甲、乙两品种的棉花中各抽测了 25 根棉花的纤维长度 (单位: mm), 结果如下:

甲品种: 271 273 280 285 285 287 292 294 295 301 303 303 307 308 310 314 319 323 325 325 328 331 334 337 352

乙品种: 284 292 295 304 306 307 312 313 315 315 316 318 318 320 322 322 324 327 329 331 333 336 337 343 356

由以上数据设计了如下茎叶图

甲					乙							
			3	1	27							
	7	5	5	0	28	4						
		5	4	2	29	2	5					
8	7	3	3	1	30	4	6	7				
		9	4	0	31	2	3	5	5	6	8	8
	8	5	5	3	32	0	2	2	4	7	9	
		7	4	1	33	1	3	6	7			
					34	3						
				2	35	6						

根据以上茎叶图, 对甲、乙两品种棉花的纤维长度作比较, 写出两个统计结论:

① _____;

② _____.

三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 是一个等差数列, 且 $a_2=1$, $a_5=-5$.

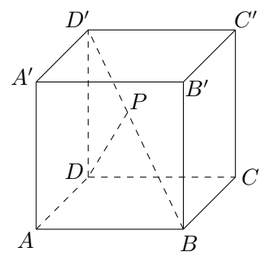
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项 a_n;

(2) 求 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n 的最大值.

18. 如图, 已知点 P 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的对角线 BD' 上, $\angle PDA=60^\circ$.

(1) 求 DP 与 CC' 所成角的大小;

(2) 求 DP 与平面 $AA'D'D$ 所成角的大小.



19. A, B 两个投资项目的利润率分别为随机变量 X_1 和 X_2. 根据市场分析, X_1 和 X_2 的分布列分别为

X_1	5%	10%
P	0.8	0.2

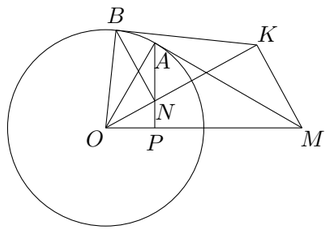
X_2	2%	8%	12%
P	0.2	0.5	0.3

(1) 在 A, B 两个项目上各投资 100 万元, Y_1 和 Y_2 分别表示投资项目 A 和 B 所获得的利润, 求方差 DY_1, DY_2;
(2) 将 x $(0 \leqslant x \leqslant 100)$ 万元投资 A 项目, $100-x$ 万元投资 B 项目, $f(x)$ 表示投资 A 项目所得利润的方差与投资 B 项目所得利润的方差的和. 求 $f(x)$ 的最小值, 并指出 x 为何值时, $f(x)$ 取到最小值.
(注: $D(aX+b)=a^2DX$)

20. 在直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, F_2 也是抛物线 C_2: $y^2=4x$ 的焦点, 点 M 为 C_1 与 C_2 在第一象限的交点, 且 $|MF_2|=\dfrac{5}{3}$.
(1) 求 C_1 的方程;
(2) 平面上的点 N 满足 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}$, 直线 $l \parallel MN$, 且与 C_1 交于 A、B 两点, 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 求直线 l 的方程.

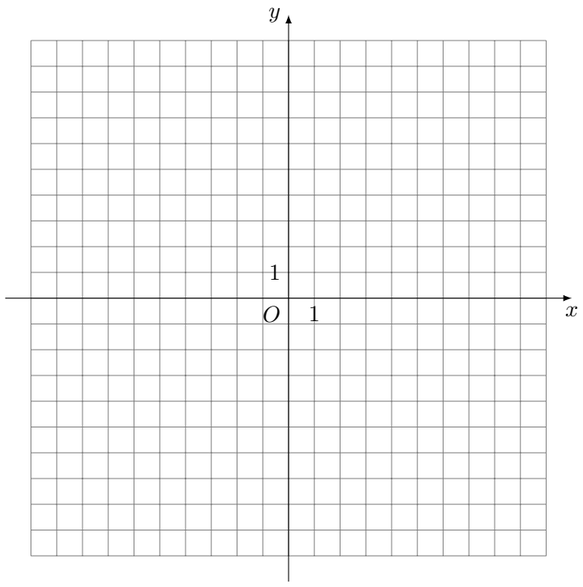
21. 设函数 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x+b}$ $(a,\, b \in \mathbf{Z})$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y=3$.
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 证明: 函数 $y=f(x)$ 的图象是一个中心对称图形, 并求其对称中心;
(3) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 上任一点的切线与直线 $x=1$ 和直线 $y=x$ 所围三角形的面积为定值, 并求出此定值.

22. 如图, 过圆 O 外一点 M 作它的一条切线, 切点为 A, 过 A 点作直线 AP 垂直直线 OM, 垂足为 P.
(1) 证明: $OM\cdot OP=OA^2$;
(2) N 为线段 AP 上一点, 直线 NB 垂直直线 ON, 且交圆 O 于 B 点. 过 B 点的切线交直线 ON 于 K. 证明: $\angle OKM=90^\circ$.



23. 已知曲线 C_1: $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 曲线 C_2: $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-\sqrt{2}\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数).
(1) 指出 C_1, C_2 各是什么曲线, 并说明 C_1 与 C_2 公共点的个数;
(2) 若把 C_1, C_2 上各点的纵坐标都压缩为原来的一半, 分别得到曲线 C_1', C_2'. 写出 C_1', C_2' 的参数方程. C_1' 与 C_2' 公共点的个数和 C_1 与 C_2 公共点的个数是否相同? 说明你的理由.

24. 已知函数 $f(x)=|x-8|-|x-4|$.
(1) 作出函数 $y=f(x)$ 的图象;
(2) 解不等式 $|x-8|-|x-4|>2$.



2008 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|(x+2)(x-1)<0\}$, $N=\{x|x+1<0\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $(-1,1)$　(B) $(-2,1)$　(C) $(-2,-1)$　(D) $(1,2)$

2. 双曲线 $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦距为 （ ）

(A) $3\sqrt{2}$　(B) $4\sqrt{2}$　(C) $3\sqrt{3}$　(D) $4\sqrt{3}$

3. 已知复数 $z=1-\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{z^2}{z-1}=$ （ ）

(A) 2　(B) -2　(C) $2\mathrm{i}$　(D) $-2\mathrm{i}$

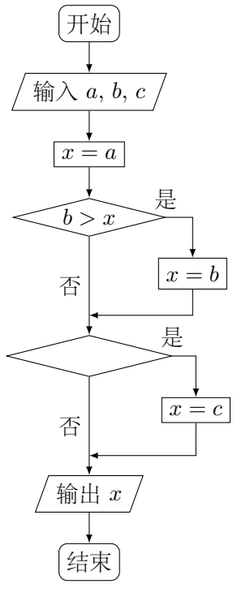
4. 设 $f(x)=x\ln x$, 若 $f'(x_0)=2$, 则 $x_0=$ （ ）

(A) e^2　(B) e　(C) $\dfrac{\ln 2}{2}$　(D) $\ln 2$

5. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$, $\boldsymbol{b}=(4,-2)$, $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直, 则 $\lambda=$ （ ）

(A) -1　(B) 1　(C) -2　(D) 2

6. 下面的程序框图, 如果输入三个实数 a, b, c, 要求输出这三个数中最大的数, 那么在空白的判断框中, 应该填入下面四个选项中的 （ ）



(A) $c>x$　(B) $x>c$　(C) $c>b$　(D) $b>c$

7. 已知 $a_1>a_2>a_3>0$, 则使得 $(1-a_ix)^2<1$ $(i=1,2,3)$ 都成立的 x 取值范围是 （ ）

(A) $\left(0,\dfrac{1}{a_1}\right)$　(B) $\left(0,\dfrac{2}{a_1}\right)$　(C) $\left(0,\dfrac{1}{a_3}\right)$　(D) $\left(0,\dfrac{2}{a_3}\right)$

8. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=2$, 前 n 项和为 S_n, 则 $\dfrac{S_4}{a_2}=$ （ ）

(A) 2　(B) 4　(C) $\dfrac{15}{2}$　(D) $\dfrac{17}{2}$

9. 平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是 （ ）

(A) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 方向相同

(B) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 两向量中至少有一个为零向量

(C) $\exists\lambda\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

(D) 存在不全为零的实数 λ_1, λ_2, $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

10. 点 $P(x,y)$ 在直线 $4x+3y=0$ 上, 且 x, y 满足 $-14\leqslant x-y\leqslant 7$, 则点 P 到坐标原点距离的取值范围是 （ ）

(A) $[0,5]$　(B) $[0,10]$　(C) $[5,10]$　(D) $[5,15]$

11. 函数 $f(x)=\cos 2x+2\sin x$ 的最小值和最大值分别为 （ ）

(A) -1, 1　(B) -2, 2　(C) -3, $\dfrac{3}{2}$　(D) -2, $\dfrac{3}{2}$

12. 已知平面 $\alpha\perp$ 平面 β, $\alpha\cap\beta=l$, 点 $A\in\alpha$, $A\notin l$, 直线 $AB\parallel l$, 直线 $AC\perp l$, 直线 $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, 则下列四种位置关系中, 不一定成立的是（ ）

(A) $AB\parallel m$　(B) $AC\perp m$　(C) $AB\parallel\beta$　(D) $AC\perp\beta$

二、填空题

13. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_3+a_8=22$, $a_6=7$, 则 $a_5=$_____.

14. 一个六棱柱的底面是正六边形, 其侧棱垂直底面. 已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上, 且该六棱柱的高为 $\sqrt{3}$, 底面周长为 3, 则这个球的体积为_____.

15. 过椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的右焦点作一条斜率为 2 的直线与椭圆交于 AB 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 的面积为_____.

16. 从甲、乙两品种的棉花中各抽测了 25 根棉花的纤维长度 (单位: mm), 结果如下:

甲品种: 271 273 280 285 285 287 292 294 295 301 303 303 307 308 310 314 319 323 325 325 328 331 334 337 352

乙品种: 284 292 295 304 306 307 312 313 315 315 316 318 318 320 322 322 324 327 329 331 333 336 337 343 356

由以上数据设计了如下茎叶图

甲					乙							
		3	1	27								
7	5	5	0	28	4							
	5	4	2	29	2	5						
8 7	3	3	1	30	4	6	7					
	9	4	0	31	2	3	5	5	6	8	8	
8	5	5	3	32	0	2	2	4	7	9		
	7	4	1	33	1	3	6	7				
				34	3							
			2	35	6							

根据以上茎叶图, 对甲、乙两品种棉花的纤维长度作比较, 写出两个统计结论:

① _____;

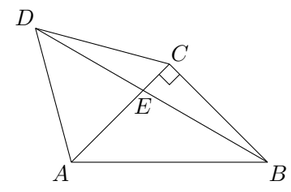
② _____.

三、解答题

17. 如图, $\triangle ACD$ 是等边三角形, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB=90^\circ$, BD 交 AC 于 E, $AB=2$.

(1) 求 $\cos\angle CAE$ 的值;

(2) 求 AE.

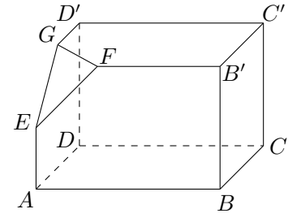


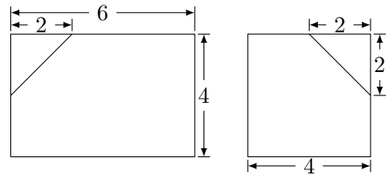
18. 如下的三个图中, 上面的是一个长方体截去一个角所得多面体的直观图. 它的正视图和俯视图在下面画出 (单位: cm).

(1) 在正视图下面, 按照画三视图的要求画出该多面体的俯视图;

(2) 按照给出的尺寸, 求该多面体的体积;

(3) 在所给直观图中连结 BC', 证明: $BC'\parallel$ 面 EFG.





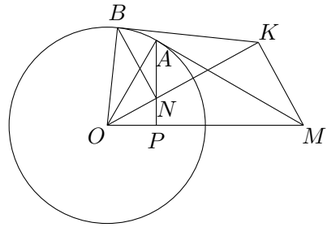
(正视图)　(侧视图)

19. 为了了解《中华人民共和国道路交通安全法》在学生中的普及情况, 调查部门对某校 6 名学生进行问卷调查. 6 人得分情况如下: 5, 6, 7, 8, 9, 10. 把这 6 名学生的得分看成一个总体.
(1) 求该总体的平均数;
(2) 用简单随机抽样方法从这 6 名学生中抽取 2 名, 他们的得分组成一个样本. 求该样本平均数与总体平均数之差的绝对值不超过 0.5 的概率.

20. 已知 $m \in \mathbf{R}$, 直线 l: $mx-(m^2+1)y=4m$ 和圆 C: $x^2+y^2-8x+4y+16=0$.
(1) 求直线 l 斜率的取值范围;
(2) 直线 l 能否将圆 C 分割成弧长的比值为 $\frac{1}{2}$ 的两段圆弧? 为什么?

21. 设函数 $f(x)=ax-\frac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $7x-4y-12=0$.
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 上任一点处的切线与直线 $x=0$ 和直线 $y=x$ 所围成的三角形面积为定值, 并求此定值.

22. 如图, 过圆 O 外一点 M 作它的一条切线, 切点为 A, 过 A 点作直线 AP 垂直直线 OM, 垂足为 P.
(1) 证明: $OM \cdot OP = OA^2$;
(2) N 为线段 AP 上一点, 直线 NB 垂直直线 ON, 且交圆 O 于 B 点. 过 B 点的切线交直线 ON 于 K. 证明: $\angle OKM = 90^\circ$.



23. 已知曲线 C_1: $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 曲线 C_2: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}t-\sqrt{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数).
(1) 指出 C_1, C_2 各是什么曲线, 并说明 C_1 与 C_2 公共点的个数;
(2) 若把 C_1, C_2 上各点的纵坐标都压缩为原来的一半, 分别得到曲线 C_1', C_2'. 写出 C_1', C_2' 的参数方程. C_1' 与 C_2' 公共点的个数和 C_1 与 C_2 公共点的个数是否相同? 说明你的理由.

2008 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的个数是 （ ）

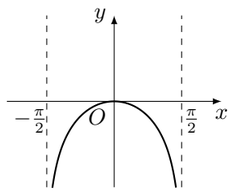
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 设 z 的共轭复数是 $\overline{z}$, 或 $z+\overline{z}=4$, $z\cdot\overline{z}=8$, 则 $\dfrac{\overline{z}}{z}$ 等于 （ ）

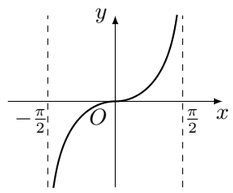
(A) i (B) $-$i (C) ±1 (D) $\pm$i

3. 函数 $y=\ln\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象是 （ ）

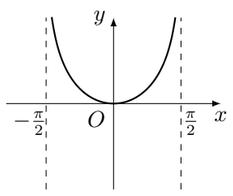
(A)



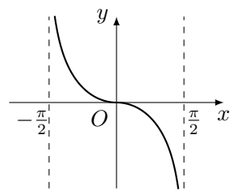
(B)



(C)



(D)



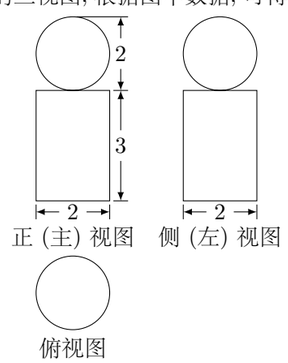
4. 设函数 $f(x)=|x+1|+|x-a|$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 a 的值为 （ ）

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) -1

5. 已知 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\sqrt{3}$, 则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{7\pi}{6}\right)$ 的值是 （ ）

(A) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ (C) $-\dfrac{4}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

6. 如图是一个几何体的三视图, 根据图中数据, 可得该几何体的表面积是( )



(A) 9π (B) 10π (C) 11π (D) 12π

7. 在某地的奥运火炬传递活动中, 有编号为 1, 2, 3, $\cdots$, 18 的 18 名火炬手. 若从中任选 3 人, 则选出的火炬手的编号能组成 3 为公差的等差数列的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{51}$ (B) $\dfrac{1}{68}$ (C) $\dfrac{1}{306}$ (D) $\dfrac{1}{408}$

8. 如图是根据《山东统计年鉴 2007》中的资料作成的 1997 年至 2006 年我省城镇居民百户家庭人口数的茎叶图. 图中左边的数字从左到右分别表示城镇居民百户家庭人口数的百位数字和十位数字, 右边的数字表示城镇居民百户家庭人口数的个位数字, 从图中可以得到 1997 年至 2006 年我省城镇居民百户家庭人口数的平均数为 （ ）

2 9	1 1 5 8
3 0	2 6
3 1	0 2 4 7

(A) 304.6 (B) 303.6 (C) 302.6 (D) 301.6

9. $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12}$ 展开式中的常数项为 （ ）

(A) -1320 (B) 1320 (C) -220 (D) 220

10. 设椭圆 C_1 的离心率为 $\dfrac{5}{13}$, 焦点在 x 轴上且长轴长为 25. 若曲线 C_2 上的点到椭圆 C_1 的两个焦点的距离的差的绝对值等于 8, 则曲线 C_2 的标准方程为 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{13^2}-\dfrac{y^2}{5^2}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{13^2}-\dfrac{y^2}{12^2}=1$

11. 已知圆的方程为 $x^2+y^2-6x-8y=0$. 设该圆过点 $(3,5)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 （ ）

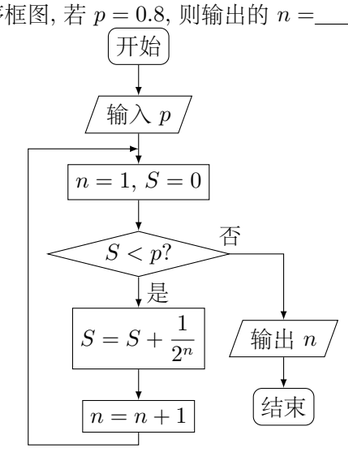
(A) $10\sqrt{6}$ (B) $20\sqrt{6}$ (C) $30\sqrt{6}$ (D) $40\sqrt{6}$

12. 设二元一次不等式组 $\begin{cases}x+2y-19\geqslant0\\x-y+8\geqslant0\\2x+y-14\leqslant0\end{cases}$ 所表示的平面区域为 M, 使函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$ 的图象过区域 M 的 a 的取值范围是 （ ）

(A) $[1,3]$ (B) $[2,\sqrt{10}]$ (C) $[2,9]$ (D) $[\sqrt{10},9]$

二、填空题

13. 执行下面的程序框图, 若 $p=0.8$, 则输出的 $n=$_____.



14. 设函数 $f(x)=ax^2+c$ $(a\neq0)$. 若 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(x_0)$, $0\leqslant x_0\leqslant1$, 则 x_0 的值为_____.

15. 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, 向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1)$, $\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$. 若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$, 且 $a\cos B+b\cos A=c\sin C$, 则角 $B=$_____.

16. 若不等式 $|3x-b|<4$ 的解集中的整数有且仅有 1, 2, 3, 则 b 的取值范围为_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)$ $(0<\varphi<\pi, \omega>0)$ 为偶函数, 且函数 $y=f(x)$ 图象的两相邻对称轴间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的值;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后, 再将得到的图象上各点的横坐标舒畅长到原来的 4 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 的单调递减区间.

18. 甲、乙两队参加奥运知识竞赛, 每队 3 人, 每人回答一个问题, 答对者为本队赢得一分, 答错得零分. 假设甲队中每人答对的概率均为 $\dfrac{2}{3}$, 乙队中 3 人答对的概率分别为 $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{2}$ 且各人正确与否相互之间没有影响. 用 ξ 表示甲队的总得分.

(1) 求随机变量 ξ 分布列和数学期望;

(2) 用 A 表示“甲、乙两个队总得分之和等于 3”这一事件, 用 B 表示“甲队总得分大于乙队总得分”这一事件, 求 $P(AB)$.

19. 将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & & & \\ a_2 & a_3 & & \\ a_4 & a_5 & a_6 & \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ \cdots\cdots & & & \end{array}$$

记表中的第一列数 $a_1, a_2, a_4, a_7, \cdots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$, $b_1 = a_1 = 1$. S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $\dfrac{2b_n}{b_nS_n - S_n^2} = 1$ $(n \geqslant 2)$.

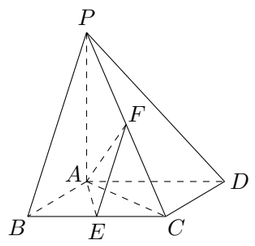
(1) 证明数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 成等差数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 上表中, 若从第三行起, 每一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列, 且公比为同一个正数. 当 $a_{81} = -\dfrac{4}{91}$ 时, 求上表中第 k $(k \geqslant 3)$ 行所有项和的和.

20. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\angle ABC = 60°$, E, F 分别是 BC, PC 的中点.

(1) 证明: $AE \perp PD$;

(2) 若 H 为 PD 上的动点, EH 与平面 PAD 所成最大角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 求二面角 $E-AF-C$ 的余弦值.



21. 已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^n} + a\ln(x-1)$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$, a 为常数.

(1) 当 $n = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

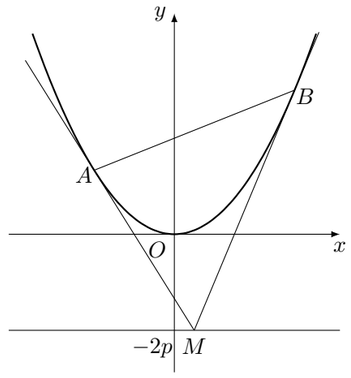
(2) 当 $a = 1$ 时, 证明: 对任意的正整数 n, 当 $x \geqslant 2$ 时, 有 $f(x) \leqslant x - 1$.

22. 如图, 设抛物线方程为 $x^2 = 2py$ $(p > 0)$, M 为直线 $y = -2p$ 上任意一点, 过 M 引抛物线的切线, 切点分别为 A, B.

(1) 求证: A, M, B 三点的横坐标成等差数列;

(2) 已知当 M 点的坐标为 $(2, -2p)$ 时, $|AB| = 4\sqrt{10}$, 求此时抛物线的方程;

(3) 是否存在点 M, 使得点 C 关于直线 AB 的对称点 D 在抛物线 $x^2 = 2py$ $(p > 0)$ 上, 其中, 点 C 满足 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (O 为坐标原点). 若存在, 求出所有适合题意的点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2008 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的个数是 （ ）

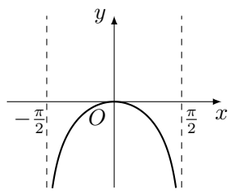
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 设 z 的共轭复数是 $\overline{z}$, 或 $z+\overline{z}=4$, $z\cdot\overline{z}=8$, 则 $\dfrac{\overline{z}}{z}$ 等于 （ ）

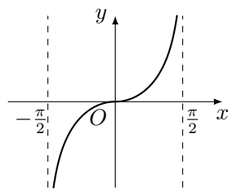
(A) i (B) −i (C) ±1 (D) ±i

3. 函数 $y=\ln\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象是 （ ）

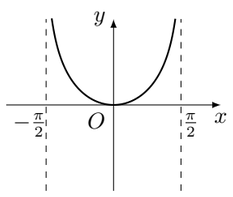
(A)



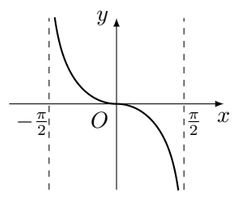
(B)



(C)



(D)



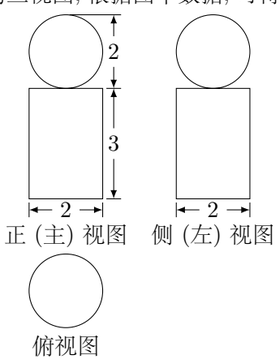
4. 给出命题: 若函数 $y=f(x)$ 是幂函数, 则函数 $y=f(x)$ 的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中, 真命题的个数是 （ ）

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\leqslant 1\\ x^2+x-2, & x>1\end{cases}$, 则 $f\left(\dfrac{1}{f(2)}\right)$ 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{15}{16}$ (B) $-\dfrac{27}{16}$ (C) $\dfrac{8}{9}$ (D) 18

6. 如图是一个几何体的三视图, 根据图中数据, 可得该几何体的表面积是( )



正 (主) 视图　侧 (左) 视图

俯视图

(A) 9π (B) 10π (C) 11π (D) 12π

7. 不等式 $\dfrac{x+5}{(x-1)^2}\geqslant 2$ 的解集是 （ ）

(A) $\left[-3,\dfrac{1}{2}\right]$ (B) $\left[-\dfrac{1}{2},3\right]$

(C) $\left[\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$ (D) $\left[-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$

8. 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, 向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1)$, $\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$. 若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$, 且 $a\cos B+b\cos A=c\sin C$, 则角 A, B 的大小分别为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$

9. 从某项综合能力测试中抽取 100 人的成绩, 统计如表, 则这 100 人成绩的标准差为 （ ）

分数	5	4	3	2	1
人数	20	10	30	30	10

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ (C) 3 (D) $\dfrac{8}{5}$

10. 已知 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\sqrt{3}$, 则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{7\pi}{6}\right)$ 的值是 （ ）

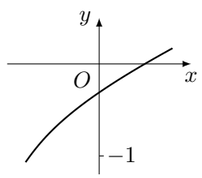
(A) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ (C) $-\dfrac{4}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

11. 若圆 C 的半径为 1, 圆心在第一象限, 且与直线 $4x-3y=0$ 和 x 轴相切, 则该圆的标准方程是 （ ）

(A) $(x-3)^2+\left(y-\dfrac{7}{3}\right)^2=1$ (B) $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

(C) $(x-1)^2+(y-3)^2=1$ (D) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=1$

12. 已知函数 $f(x)=\log_a(2^x+b-1)$ $(a>0, a\neq 1)$ 的图象如图所示, 则 a, b 满足的关系是 （ ）



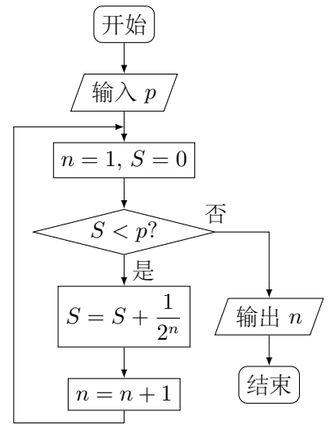
(A) $0<a^{-1}<b<1$ (B) $0<b<a^{-1}<1$

(C) $0<b^{-1}<a<-1$ (D) $0<a^{-1}<b^{-1}<1$

二、填空题

13. 已知圆 C: $x^2+y^2-6x-4y+8=0$. 以圆 C 与坐标轴的交点分别作为双曲线的一个焦点和顶点, 则适合上述条件的双曲线的标准方程为_____.

14. 执行下面的程序框图, 若 $p=0.8$, 则输出的 $n=$_____.



15. 已知 $f(3^x)=4x\log_2 3+233$, 则 $f(2)+f(4)+f(8)+\cdots+f(2^8)$ 的值等于_____.

16. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\geqslant 0\\ 5x-y-10\leqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值为_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)$ $(0<\varphi<\pi, \omega>0)$ 为偶函数, 且函数 $y=f(x)$ 图象的两相邻对称轴间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的值;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 的单调递减区间.

18. 现有 8 名奥运会志愿者, 其中志愿者 A_1、A_2、A_3 通晓日语, B_1、B_2、B_3 通晓俄语, C_1、C_2 通晓韩语. 从中选出通晓日语、俄语和韩语的志愿者各 1 名, 组成一个小组.

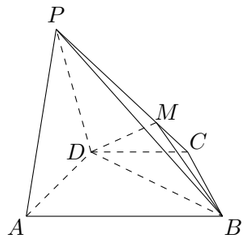
(1) 求 A_1 被选中的概率;

(2) 求 B_1 和 C_1 不全被选中的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\parallel DC$, $\triangle PAD$ 是等边三角形, 已知 $BD=2AD=8$, $AB=2DC=4\sqrt{5}$.

(1) 设 M 是 PC 上的一点, 证明: 平面 $MBD\perp$ 平面 PAD;

(2) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



20. 将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & & & \\ a_2 & a_3 & & \\ a_4 & a_5 & a_6 & \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ \cdots\cdots & & & \end{array}$$

记表中的第一列数 a_1, a_2, a_4, a_7, $\cdots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$, $b_1=a_1=1$. S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $\dfrac{2b_n}{b_nS_n-S_n^2}=1$ $(n\geqslant 2)$.

(1) 证明数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 成等差数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 上表中, 若从第三行起, 每一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列, 且公比为同一个正数. 当 $a_{81}=-\dfrac{4}{91}$ 时, 求上表中第 k $(k\geqslant 3)$ 行所有项和的和.

21. 设函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{x-1}+ax^3+bx^2$, 已知 $x=-2$ 和 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点.

(1) 求 a 和 b 的值;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 设 $g(x)=\dfrac{2}{3}x^3-x^2$, 试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

22. 已知曲线 C_1: $\dfrac{|x|}{a}+\dfrac{|y|}{b}=1$ $(a>b>0)$ 所围成的封闭图形的面积为 $4\sqrt{5}$, 曲线 C_1 的内切圆半径为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. 记 C_2 为以曲线 C_1 与坐标轴的交点为顶点的椭圆.

(1) 求椭圆 C_2 的标准方程;

(2) 设 AB 是过椭圆 C_2 中心的任意弦, l 是线段 AB 的垂直平分线. M 是 l 上异于椭圆中心的点.

① 若 $|MO|=\lambda|OA|$ (O 为坐标原点) , 当点 A 在椭圆 C_2 上运动时, 求点 M 的轨迹方程;

② 若 M 是 l 与椭圆 C_2 的交点, 求 $\triangle AMB$ 的面积的最小值.

2008 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{1-2\mathrm{i}}$ 等于 （ ）

(A) i (B) $-\mathrm{i}$ (C) 1 (D) -1

2. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|x=2a, a\in A\}$, 则集合 $\complement_U(A\cup B)$ 中元素的个数为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 若 $c=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, $B=120^\circ$, 则 a 等于 （ ）

(A) $\sqrt{6}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1+a_2=4$, $a_7+a_8=28$, 则该数列前 10 项和 S_{10} 等于 （ ）

(A) 64 (B) 100 (C) 110 (D) 120

5. 直线 $\sqrt{3}x-y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2=0$ 相切, 则实数 m 等于( )

(A) $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$ (C) $-3\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$ (D) $-3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$

6. “$a=\dfrac{1}{8}$”是“对任意的正数 x, $2x+\dfrac{a}{x}\geqslant 1$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

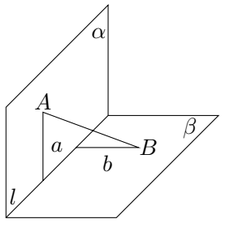
7. 已知函数 $f(x)=2^{x+3}$, $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 若 $mn=16$ $(m, n\in\mathbf{R}^+)$, 则 $f^{-1}(m)+f^{-1}(n)$ 的值为 （ ）

(A) -2 (B) 1 (C) 4 (D) 10

8. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2, 过 F_1 作倾斜角为 30° 的直线交双曲线右支于 M 点. 若 MF_2 垂直于 x 轴, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{6}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

9. 如图, $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, A, B 到 l 的距离分别是 a 和 b, AB 与 α, β 所成的角分别是 θ 和 φ, AB 在 α, β 内的射影分别是 m 和 n, 若 $a>b$, 则 （ ）



(A) $\theta>\varphi$, $m>n$ (B) $\theta>\varphi$, $m<n$

(C) $\theta<\varphi$, $m<n$ (D) $\theta<\varphi$, $m>n$

10. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases}y\geqslant 1\\ y\leqslant 2x-1\\ x+y\leqslant m\end{cases}$, 如果目标函数 $z=x-y$ 的最小值为 -1, 则实数 m 等于 （ ）

(A) 7 (B) 5 (C) 4 (D) 3

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ $(x, y\in\mathbf{R})$, $f(1)=2$, 则 $f(-3)$ 等于 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 9

12. 为提高信息在传输中的抗干扰能力, 通常在原信息中按一定规则加入相关数据组成传输信息. 设定原信息为 $a_0a_1a_2$, $a_i\in\{0,1\}$ $(i=0, 1, 2)$, 传输信息为 $h_0a_0a_1a_2h_1$, 其中 $h_0=a_0\oplus a_1$, $h_1=h_0\oplus a_2$, $\oplus$ 运算规则为: $0\oplus 0=0$, $0\oplus 1=1$, $1\oplus 0=1$, $1\oplus 1=0$. 例如原信息为 111, 则传输信息为 01111. 传输信息在传输过程中受到干扰可能导致接收信息出错, 则下列接收信息一定有误的是 （ ）

(A) 11010 (B) 01100 (C) 10111 (D) 00011

二、填空题

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+a)n+1}{n+a}=2$, 则 $a=$_____.

14. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各顶点都在球 O 的球面上, 其中 $AB:AD:AA_1=1:1:\sqrt{2}$. A, B 两点的球面距离记为 m, A, D_1 两点的球面距离记为 n, 则 $\dfrac{m}{n}$ 的值为_____.

15. 关于平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. 有下列三个命题:

① 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$;

② 若 $\boldsymbol{a}=(1,k)$, $\boldsymbol{b}=(-2,6)$, $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $k=-3$;

③ 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°.

其中真命题的序号为_____. (写出所有真命题的序号)

16. 某地奥运火炬接力传递路线共分 6 段, 传递活动分别由 6 名火炬手完成. 如果第一棒火炬手只能从甲、乙、丙三人中产生, 最后一棒火炬手只能从甲、乙两人中产生, 则不同的传递方案共有_____种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}-2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{x}{4}+\sqrt{3}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及最值;

(2) 令 $g(x)=f\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, 判断函数 $g(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

18. 某射击测试规则为: 每人最多射击 3 次, 击中目标即终止射击, 第 i 次击中目标得 $4-i$ $(i=1, 2, 3)$ 分, 3 次均未击中目标得 0 分. 已知某射手每次击中目标的概率为 0.8, 其各次射击结果互不影响.

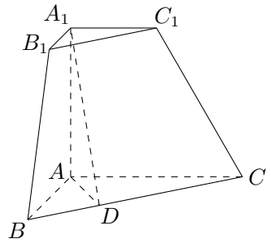
(1) 求该射手恰好射击两次的概率;

(2) 该射手的得分记为 ξ, 求随机变量 ξ 的分布列及数学期望.

19. 三棱锥被平行于底面 ABC 的平面所截得的几何体如图所示, 截面为 $A_1B_1C_1$, $\angle BAC=90^\circ$, $A_1A\perp$ 平面 ABC, $A_1A=\sqrt{3}$, $AB=\sqrt{2}$, $AC=2$, $A_1C_1=1$, $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{1}{2}$.

(1) 证明: 平面 $A_1AD\perp$ 平面 BCC_1B_1;

(2) 求二面角 $A-CC_1-B$ 的大小.



20. 已知抛物线 C: $y=2x^2$, 直线 $y=kx+2$ 交 C 于 A, B 两点, M 是线段 AB 的中点, 过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N.
(1) 证明: 抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行;
(2) 是否存在实数 k 使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$, 若存在, 求 k 的值; 若不存在, 说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{kx+1}{x^2+c}$ ($c>0$ 且 $c\neq 1$, $k\in\mathbf{R}$) 恰有一个极大值点和一个极小值点, 其中一个是 $x=-c$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的另一个极值点;
(2) 求函数 $f(x)$ 的极大值 M 和极小值 m, 并求 $M-m\geqslant 1$ 时 k 的取值范围.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\dfrac{3}{5}$, $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+1}$, $n=1,2,\cdots$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 证明: 对任意的 $x>0$, $a_n\geqslant\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}\left(\dfrac{2}{3^n}-x\right)$, $n=1,2,\cdots$;
(3) 证明: $a_1+a_2+\cdots+a_n>\dfrac{n^2}{n+1}$.

2008 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

文科数学

一、选择题

1. $\sin 330^\circ$ 等于 （ ）

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $A=\{1,3\}$, $B=\{3,4,5\}$, 则集合 $\complement_U(A\cap B)=$ （ ）

(A) $\{3\}$ (B) $\{4,5\}$ (C) $\{3,4,5\}$ (D) $\{1,2,4,5\}$

3. 某林场有树苗 30000 棵, 其中松树苗 4000 棵. 为调查树苗的生长情况, 采用分层抽样的方法抽取一个容量为 150 的样本, 则样本中松树苗的数量为 （ ）

(A) 30 (B) 25 (C) 20 (D) 15

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1+a_2=4$, $a_7+a_8=28$, 则该数列前 10 项和 S_{10} 等于 （ ）

(A) 64 (B) 100 (C) 110 (D) 120

5. 直线 $\sqrt{3}x-y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2=0$ 相切, 则实数 m 等于( )

(A) $-3\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$ (B) $-3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$ (D) $-\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$

6. “$a=\dfrac{1}{8}$”是“对任意的正数 x, $2x+\dfrac{a}{x}\geqslant 1$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=2^{x+3}$, $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 若 $mn=16$ $(m,n\in\mathbf{R}^+)$, 则 $f^{-1}(m)+f^{-1}(n)$ 的值为 （ ）

(A) 10 (B) 4 (C) 1 (D) -2

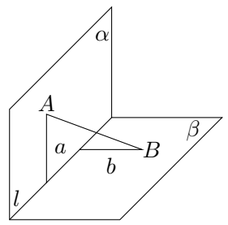
8. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各顶点都在半径为 1 的球面上, 其中 $AB:AD:AA_1=2:1:\sqrt{3}$, 则两 A, B 点的球面距离为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{2\pi}{3}$

9. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2, 过 F_1 作倾斜角为 30° 的直线交双曲线右支于 M 点. 若 MF_2 垂直于 x 轴, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{6}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

10. 如图, $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, A, B 到 l 的距离分别是 a 和 b, AB 与 α, β 所成的角分别是 θ 和 φ, AB 在 α, β 内的射影分别是 m 和 n, 若 $a>b$, 则 （ ）



(A) $\theta>\varphi$, $m<n$ (B) $\theta>\varphi$, $m>n$

(C) $\theta<\varphi$, $m<n$ (D) $\theta<\varphi$, $m>n$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ $(x,y\in\mathbf{R})$, $f(1)=2$, 则 $f(-2)$ 等于 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 9

12. 为提高信息在传输中的抗干扰能力, 通常在原信息中按一定规则加入相关数据组成传输信息. 设定原信息为 $a_0a_1a_2$, $a_i\in\{0,1\}$ $(i=0,1,2)$, 传输信息为 $h_0a_0a_1a_2h_1$, 其中 $h_0=a_0\oplus a_1$, $h_1=h_0\oplus a_2$, $\oplus$ 运算规则为: $0\oplus 0=0$, $0\oplus 1=1$, $1\oplus 0=1$, $1\oplus 1=0$. 例如原信息为 111, 则传输信息为 01111. 传输信息在传输过程中受到干扰可能导致接收信息出错, 则下列接收信息一定有误的是 （ ）

(A) 11010 (B) 01100 (C) 10111 (D) 00011

二、填空题

13. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $c=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, $B=120^\circ$, 则 $a=$_____.

14. $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中 $\dfrac{1}{x^2}$ 的系数为_____. (用数字作答)

15. 关于平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. 有下列三个命题:

① 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$;

② 若 $\boldsymbol{a}=(1,k)$, $\boldsymbol{b}=(-2,6)$, $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $k=-3$;

③ 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°.

其中真命题的序号为_____. (写出所有真命题的序号)

16. 某地奥运火炬接力传递路线共分 6 段, 传递活动分别由 6 名火炬手完成. 如果第一棒火炬手只能从甲、乙、丙三人中产生, 最后一棒火炬手只能从甲、乙两人中产生, 则不同的传递方案共有_____种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}+\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及最值;

(2) 令 $g(x)=f\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, 判断函数 $g(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

18. 一个口袋中装有大小相同的 2 个红球, 3 个黑球和 4 个白球, 从口袋中一次摸出一个球, 摸出的球不再放回.

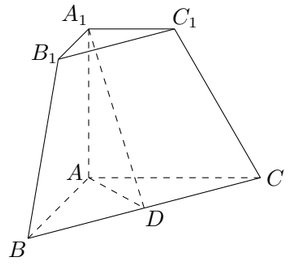
(1) 连续摸球 2 次, 求第一次摸出黑球, 第二次摸出白球的概率;

(2) 如果摸出红球, 则停止摸球, 求摸球次数不超过 3 次的概率.

19. 三棱锥被平行于底面 ABC 的平面所截得的几何体如图所示, 截面为 $A_1B_1C_1$, $\angle BAC=90^\circ$, $A_1A\perp$ 平面 ABC, $A_1A=\sqrt{3}$, $AB=AC=2A_1C_1=2$, D 为 BC 中点.

(1) 证明: 平面 $A_1AD\perp$ 平面 BCC_1B_1;

(2) 求二面角 $A-CC_1-B$ 的大小.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\dfrac{2}{3}$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$, $n=1,2,\cdots$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$ 是等比数列;

(2) 数列 $\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

21. 已知抛物线 C: $y=2x^2$, 直线 $y=kx+2$ 交 C 于 A, B 两点, M 是线段 AB 的中点, 过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N.

(1) 证明: 抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行;

(2) 是否存在实数 k 使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$, 若存在, 求 k 的值; 若不存在, 说明理由.

22. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+1$, $g(x)=ax^2-2x+1$, 其中实数 $a\neq 0$.

(1) 若 $a>0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象只有一个公共点且 $g(x)$ 存在最小值时, 记 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$, 求 $h(a)$ 的值域;

(3) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(a,a+2)$ 内均为增函数, 求 a 的取值范围.

2008 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 不等式 $|x-1|<1$ 的解集是_____.

2. 若集合 $A=\{x|x\leqslant 2\}$、$B=\{x|x\geqslant a\}$ 满足 $A\cap B=\{2\}$, 则实数 $a=$_____.

3. 若复数 z 满足 $z=\mathrm{i}(2-z)$ (i 是虚数单位), 则 $z=$_____.

4. 若函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=x^2$ $(x>0)$, 则 $f(4)=$_____.

5. 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$_____.

6. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ 的最大值是_____.

7. 在平面直角坐标系中, 从六个点: $A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(1,1)$、$D(0,2)$、$E(2,2)$、$F(3,3)$ 中任取三个, 这三点能构成三角形的概率是_____. (结果用分数表示)

8. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f(x)=\lg x$, 则满足 $f(x)>0$ 的 x 的取值范围是_____.

9. 已知总体的各个体的值由小到大依次为 2, 3, 3, 7, a, b, 12, 13.7, 18.3, 20, 且总体的中位数为 10.5. 若要使该总体的方差最小, 则 a、b 的取值分别是_____.

10. 某海域内有一孤岛, 岛四周的海平面 (视为平面) 上有一浅水区 (含边界), 其边界是长轴长为 $2a$, 短轴长为 $2b$ 的椭圆. 已知岛上甲、乙导航灯的海拔高度分别为 h_1、h_2, 且两个导航灯在海平面上的投影恰好落在椭圆的两个焦点上, 现有船只经过该海域 (船只的大小忽略不计), 在船上测得甲、乙导航灯的仰角分别为 θ_1、θ_2, 那么船只已进入该浅水区的判别条件是_____.

11. 方程 $x^2+\sqrt{2}x-1=0$ 的解可视为函数 $y=x+\sqrt{2}$ 的图象与函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象交点的横坐标. 若 $x^4+ax-4=0$ 的各个实根 x_1, x_2, $\cdots$, x_k $(k\leqslant 4)$ 所对应的点 $\left(x_i,\dfrac{4}{x_i}\right)$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 均在直线 $y=x$ 的同侧, 则实数 a 的取值范围是_____.

二、选择题

12. 组合数 C_n^r $(n>r\geqslant 1$, n、$r\in\mathbf{Z})$ 恒等于 (　　)

(A) $\dfrac{r+1}{n+1}\mathrm{C}_{n-1}^{r-1}$　　(B) $(n+1)(r+1)\mathrm{C}_{n-1}^{r-1}$

(C) $nr\mathrm{C}_{n-1}^{r-1}$　　(D) $\dfrac{n}{r}\mathrm{C}_{n-1}^{r-1}$

13. 给定空间中的直线 l 及平面 α, 条件“直线 l 与平面 α 内无数条直线都垂直”是“直线 l 与平面 α 垂直”的 (　　)

(A) 充要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

14. 若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $a-\dfrac{3}{2}$ 的无穷等比数列, 且 $\{a_n\}$ 各项的和为 a, 则 a 的值是 (　　)

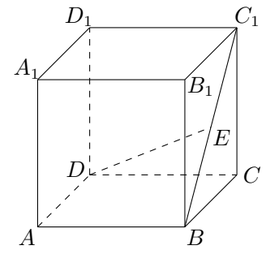
(A) 1　　(B) 2　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{5}{4}$

15. 如图, 在平面直角坐标系中, Ω 是一个与 x 轴的正半轴、y 轴的正半轴分别相切于点 C、D 的定圆所围成区域 (含边界), A、B、C、D 是该圆的四等分点. 若点 $P(x,y)$、点 $P'(x',y')$ 满足 $x\leqslant x'$ 且 $y\geqslant y'$, 则称 P 优于 P'. 如果 Ω 中的点 Q 满足: 不存在 Ω 中的其它点优于 Q, 那么所有这样的点 Q 组成的集合是劣弧 (　　)

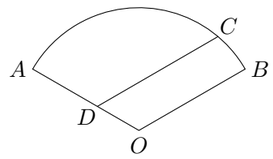
(A) $\overset{\frown}{AB}$　　(B) $\overset{\frown}{BC}$　　(C) $\overset{\frown}{CD}$　　(D) $\overset{\frown}{DA}$

三、解答题

16. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 BC_1 的中点. 求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小. (结果用反三角函数表示)



17. 如图, 某住宅小区的平面图呈圆心角为 120° 的扇形 AOB. 小区的两个出入口设置在点 A 及点 C 处, 且小区里有一条平行于 BO 的小路 CD, 已知某人从 C 沿 CD 走到 D 用了 10 分钟, 从 D 沿 DA 走到 A 用了 6 分钟, 若此人步行的速度为每分钟 50 米, 求该扇形的半径 OA 的长. (精确到 1 米)



18. 已知函数 $f(x)=\sin 2x$, $g(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, 直线 $x=t$ $(t\in\mathbf{R})$ 与函数 $f(x)$、$g(x)$ 的图象分别交于 M、N 两点.

(1) 当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时, 求 $|MN|$ 的值;

(2) 求 $|MN|$ 在 $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时的最大值.

19. 已知函数 $f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^{|x|}}$.

(1) 若 $f(x)=2$, 求 x 的值;

(2) 若 $2^t f(2t)+mf(t)\geqslant 0$ 对于 $t\in[1,2]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

20. 设 $P(a,b)$ $(b\neq 0)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点, l 是经过原点与点 $(1,b)$ 的直线, 记 Q 是直线 l 与抛物线 $x^2=2py$ $(p\neq 0)$ 的异于原点的交点.

(1) 已知 $a=1$, $b=2$, $p=2$, 求点 Q 的坐标;

(2) 已知点 $P(a,b)$ $(ab\neq 0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上, $p=\dfrac{1}{2ab}$, 求证: 点 Q 落在双曲线 $4x^2-4y^2=1$ 上;

(3) 已知动点 $P(a,b)$ 满足 $ab\neq 0$, $p=\dfrac{1}{2ab}$, 若点 Q 始终落在一条关于 x 轴对称的抛物线上, 试问动点 P 的轨迹落在哪种二次曲线上, 并说明理由.

21. 已知以 a_1 为首项的数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+c, & a_n<3\\ \dfrac{a_n}{d}, & a_n\geqslant 3\end{cases}$.

(1) 当 $a_1=1$, $c=1$, $d=3$ 时, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 $0<a_1<1$, $c=1$, $d=3$ 时, 试用 a_1 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项的和 S_{100};

(3) 当 $0<a_1<\dfrac{1}{m}$ (m 是正整数), $c=\dfrac{1}{m}$, 正整数 $d\geqslant 3m$ 时, 求证: 数列 $a_2-\dfrac{1}{m}$, $a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}$, $a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}$, $a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}$ 成等比数列当且仅当 $d=3m$.

2008 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 不等式 $|x-1|<1$ 的解集是_____.

2. 若集合 $A=\{x|x\leqslant 2\}$、$B=\{x|x\geqslant a\}$ 满足 $A\cap B=\{2\}$, 则实数 $a=$_____.

3. 若复数 z 满足 $z=\mathrm{i}(2-z)$ (i 是虚数单位), 则 $z=$_____.

4. 若函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=\log_2 x$, 则 $f(x)=$_____.

5. 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$_____.

6. 若直线 $ax-y+1=0$ 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, 则实数 $a=$_____.

7. 若 z 是实系数方程 $x^2+2x+p=0$ 的一个虚根, 且 $|z|=2$, 则 $p=$_____.

8. 在平面直角坐标系中, 从五个点: $A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(1,1)$、$D(0,2)$、$E(2,2)$ 中任取三个, 这三点能构成三角形的概率是_____. (结果用分数表示)

9. 若函数 $f(x)=(x+a)(bx+2a)$ (常数 a, $b\in\mathbf{R}$) 是偶函数, 且它的值域为 $(-\infty,4]$, 则该函数的解析式 $f(x)=$_____.

10. 已知总体的各个体的值由小到大依次为 2, 3, 3, 7, a, b, 12, 13.7, 18.3, 20, 且总体的中位数为 10.5. 若要使该总体的方差最小, 则 a、b 的取值分别是_____.

11. 在平面直角坐标系中, 点 A、B、C 的坐标分别为 $(0,1)$、$(4,2)$、$(2,6)$. 如果 $P(x,y)$ 是 $\triangle ABC$ 围成的区域 (含边界) 上的点, 那么当 $w=xy$ 取到最大值时, 点 P 的坐标是_____.

二、选择题

12. 设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上的点. 若 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点, 则 $|PF_1|+|PF_2|$ 等于 (　　)

(A) 4　　(B) 5　　(C) 8　　(D) 10

13. 给定空间中的直线 l 及平面 α, 条件“直线 l 与平面 α 内无数条直线都垂直”是“直线 l 与平面 α 垂直”的 (　　)

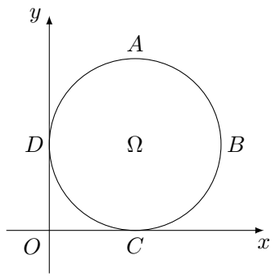
(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

14. 若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $a-\dfrac{3}{2}$ 的无穷等比数列, 且 $\{a_n\}$ 各项的和为 a, 则 a 的值是 (　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{5}{4}$

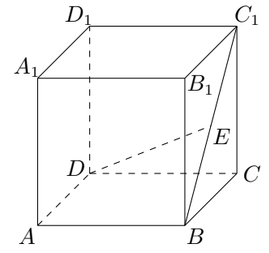
15. 如图, 在平面直角坐标系中, Ω 是一个与 x 轴的正半轴、y 轴的正半轴分别相切于点 C、D 的定圆所围成区域 (含边界), A、B、C、D 是该圆的四等分点. 若点 $P(x,y)$、点 $P'(x',y')$ 满足 $x\leqslant x'$ 且 $y\geqslant y'$, 则称 P 优于 P'. 如果 Ω 中的点 Q 满足: 不存在 Ω 中的其它点优于 Q, 那么所有这样的点 Q 组成的集合是劣弧 (　　)



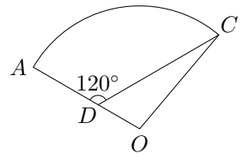
(A) $\overset{\frown}{AB}$　　(B) $\overset{\frown}{BC}$　　(C) $\overset{\frown}{CD}$　　(D) $\overset{\frown}{DA}$

三、解答题

16. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 BC_1 的中点. 求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小. (结果用反三角函数表示)



17. 如图, 某住宅小区的平面图呈扇形 AOC. 小区的两个出入口设置在点 A 及点 C 处, 小区里有两条笔直的小路 AD、DC, 且拐弯处的转角为 120°. 已知某人从 C 沿 CD 走到 D 用了 10 分钟, 从 D 沿 DA 走到 A 用了 6 分钟. 若此人步行的速度为每分钟 50 米, 求该扇形的半径 OA 的长. (精确到 1 米)



18. 已知函数 $f(x)=\sin 2x$, $g(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, 直线 $x=t$ ($t\in\mathbf{R}$) 与函数 $f(x)$、$g(x)$ 的图象分别交于 M、N 两点.

(1) 当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时, 求 $|MN|$ 的值;

(2) 求 $|MN|$ 在 $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时的最大值.

19. 已知函数 $f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^{|x|}}$.

(1) 若 $f(x)=2$, 求 x 的值;

(2) 若 $2^t f(2t)+mf(t)\geqslant 0$ 对于 $t\in[1,2]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

20. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

(1) 求双曲线 C 的渐近线方程;

(2) 已知点 M 的坐标为 $(0,1)$. 设 P 是双曲线 C 上的点, Q 是点 P 关于原点的对称点. 记 $\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$, 求 λ 的取值范围;

(3) 已知点 D、E、M 的坐标分别为 $(-2,-1)$、$(2,-1)$、$(0,1)$, P 为双曲线 C 上在第一象限内的点. 记 l 为经过原点与点 P 的直线, s 为 $\triangle DEM$ 截直线 l 所得线段的长. 试将 s 表示为直线 l 的斜率 k 的函数.

21. 已知数列 $\{a_n\}$: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=r$, $a_{n+3}=a_n+2$ (n 是正整数), 与数列 $\{b_n\}$: $b_1=1$, $b_2=0$, $b_3=-1$, $b_4=0$, $b_{n+4}=b_n$ (n 是正整数). 记 $T_n=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+\cdots+b_na_n$.

(1) 若 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=64$, 求 r 的值;

(2) 求证: 当 n 是正整数时, $T_{12n}=-4n$;

(3) 已知 $r>0$, 且存在正整数 m, 使得在 T_{12m+1}, T_{12m+2}, $\cdots$, T_{12m+12} 中有 4 项为 100, 求 r 的值, 并指出哪 4 项为 100.

2008 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $\complement_U(A\cap B)=$ （ ）

(A) $\{2,3\}$ (B) $\{1,4,5\}$ (C) $\{4,5\}$ (D) $\{1,5\}$

2. 复数 $2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2=$ （ ）

(A) -4 (B) 4 (C) $-4\mathrm{i}$ (D) $4\mathrm{i}$

3. $(\tan x+\cot x)\cos^2 x=$ （ ）

(A) $\tan x$ (B) $\sin x$ (C) $\cos x$ (D) $\cot x$

4. 直线 $y=3x$ 绕原点逆时针旋转 90^0, 再向右平移 1 个单位, 所得到的直线为 （ ）

(A) $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ (B) $y=-\dfrac{1}{3}x+1$ (C) $y=3x-3$ (D) $y=\dfrac{1}{3}x+1$

5. 若 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, $\sin\alpha>\sqrt{3}\cos\alpha$, 则 α 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$ (C) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right)$ (D) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

6. 从甲、乙等 10 个同学中挑选 4 名参加某项公益活动, 要求甲、乙中至少有 1 人参加, 则不同的挑选方法共有 （ ）

(A) 70 种 (B) 112 种 (C) 140 种 (D) 168 种

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_2=1$, 则其前 3 项的和 S_3 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,-1]$ (B) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

(C) $[3,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

8. 设 M, N 是球心 O 的半径 OP 上的两点, 且 $NP=MN=OM$, 分别过 N, M, O 作垂直于 OP 的平面, 截球面得三个圆, 则这三个圆的面积之比为 （ ）

(A) 3 : 5 : 6 (B) 3 : 6 : 8 (C) 5 : 7 : 9 (D) 5 : 8 : 9

9. 设直线 $l\subset$ 平面 α, 过平面 α 外一点 A 与 l, α 都成 30° 角的直线有且只有 （ ）

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

10. 设 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$, 其中 $\omega>0$, 则 $f(x)$ 是偶函数的充要条件是( )

(A) $f(0)=1$ (B) $f(0)=0$ (C) $f'(0)=1$ (D) $f'(0)=0$

11. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cdot f(x+2)=13$, 若 $f(1)=2$, 则 $f(99)=$ （ ）

(A) 13 (B) 2 (C) $\dfrac{13}{2}$ (D) $\dfrac{2}{13}$

12. 已知抛物线 C: $y^2=8x$ 的焦点为 F, 准线与 x 轴的交点为 K, 点 A 在 C 上且 $|AK|=\sqrt{2}|AF|$, 则 $\triangle AFK$ 的面积为 （ ）

(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 32

二、填空题

13. $(1+2x)^3(1-x)^4$ 展开式中 x^2 的系数为_____.

14. 已知直线 l: $x-y+4=0$ 与圆 C: $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, 则 C 上各点到 l 的距离的最小值为_____.

15. 已知正四棱柱的对角线的长为 $\sqrt{6}$, 且对角线与底面所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 则该正四棱柱的体积等于_____.

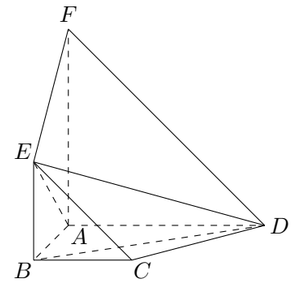
16. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_4\geqslant 10$, $S_5\leqslant 15$, 则 a_4 的最大值为_____.

三、解答题

17. 求函数 $y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2 x-4\cos^4 x$ 的最大值与最小值.

18. 设进入某商场的每一位顾客购买甲种商品的概率为 0.5, 购买乙种商品的概率为 0.6, 且购买甲种商品与购买乙种商品相互独立, 各顾客之间购买商品也是相互独立的.
(1) 求进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种的概率;
(2) 求进入商场的 1 位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种的概率;
(3) 记 ξ 表示进入商场的 3 位顾客中至少购买甲、乙两种商品中的一种的人数, 求 ξ 的分布列及期望.

19. 如图, 平面 $ABEF\perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABEF$ 与 $ABCD$ 都是直角梯形, $\angle BAD=\angle FAB=90^\circ$, $BC\parallel\!\!\!=\dfrac{1}{2}AD$, $BE\parallel\!\!\!=\dfrac{1}{2}AF$.
(1) 证明: C, D, F, E 四点共面;
(2) 设 $AB=BC=BE$, 求二面角 $A-ED-B$ 的大小.



20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $ba_n-2^n=(b-1)S_n$.

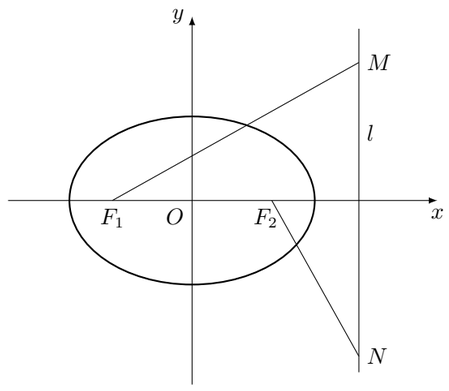
(1) 证明: 当 $b=2$ 时, $\{a_n-n\cdot 2^{n-1}\}$ 是等比数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 右准线为 l, M, N 是 l 上的两个动点, $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$.

(1) 若 $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|=\left|\overrightarrow{F_2N}\right|=2\sqrt{5}$, 求 a, b 的值;

(2) 证明: 当 $|MN|$ 取最小值时, $\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$ 与 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 共线.



22. 已知 $x=3$ 是函数 $f(x)=a\ln(1+x)+x^2-10x$ 的一个极值点.

(1) 求 a;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若直线 $y=b$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点, 求 b 的取值范围.

2008 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $\complement_U(A\cap B)=$ （ ）

(A) $\{2,3\}$ (B) $\{1,4,5\}$ (C) $\{4,5\}$ (D) $\{1,5\}$

2. 函数 $y=\ln(2x+1)\left(x>-\dfrac{1}{2}\right)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x-1\ (x\in\mathbf{R})$ (B) $y=\mathrm{e}^{2x}-1\ (x\in\mathbf{R})$

(C) $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-1)\ (x\in\mathbf{R})$ (D) $y=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\ (x\in\mathbf{R})$

3. 设平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,5)$, $\boldsymbol{b}=(-2,1)$, 则 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=$ （ ）

(A) $(7,3)$ (B) $(7,7)$ (C) $(1,7)$ (D) $(1,3)$

4. $(\tan x+\cot x)\cos^2 x=$ （ ）

(A) $\tan x$ (B) $\sin x$ (C) $\cos x$ (D) $\cot x$

5. 不等式 $|x^2-x|<2$ 的解集为 （ ）

(A) $(-1,2)$ (B) $(-1,1)$ (C) $(-2,1)$ (D) $(-2,2)$

6. 直线 $y=3x$ 绕原点逆时针旋转 90^0, 再向右平移 1 个单位, 所得到的直线为 （ ）

(A) $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ (B) $y=-\dfrac{1}{3}x+1$ (C) $y=3x-3$ (D) $y=3x+1$

7. $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 的对边边长分别是 a、b、c. 若 $a=\dfrac{\sqrt{5}}{2}b$, $A=2B$, 则 $\cos B=$ （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

8. 设 M 是球 O 的半径 OP 的中点, 分别过 M、O 作垂直于 OP 的平面, 截球面得到两个圆, 则这两个圆的面积比值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

9. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cdot f(x+2)=13$, 若 $f(1)=2$, 则 $f(99)=$ （ ）

(A) 13 (B) 2 (C) $\dfrac{13}{2}$ (D) $\dfrac{2}{13}$

10. 设直线 $l\subset$ 平面 α, 过平面 α 外一点 A 与 l, α 都成 30° 角的直线有且只有 （ ）

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

11. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, P 为 C 的右支上一点, 且 $|PF_2|=|F_1F_2|$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积等于 （ ）

(A) 24 (B) 36 (C) 48 (D) 96

12. 若三棱柱的一个侧面是边长为 2 的正方形, 另外两个侧面都是有一个内角为 60° 的菱形, 则该棱柱的体积为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$

二、填空题

13. $(1+2x)^3(1-x)^4$ 展开式中 x 的系数为_____.

14. 已知直线 l: $x-y+4=0$ 与圆 C: $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, 则 C 上各点到 l 的距离的最小值为_____.

15. 从甲、乙等 10 名同学中挑选 4 名参加某项公益活动, 要求甲、乙中至少有 1 人参加, 则不同的挑选方法有_____种.

16. 设数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+n+1$, 则通项 $a_n=$_____.

三、解答题

17. 求函数 $y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2 x-4\cos^4 x$ 的最大值与最小值.

18. 设进入某商场的每一位顾客购买甲种商品的概率为 0.5, 购买乙种商品的概率为 0.6, 且购买甲种商品与购买乙种商品相互独立, 各顾客之间购买商品是相互独立的.

(1) 求进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种的概率;

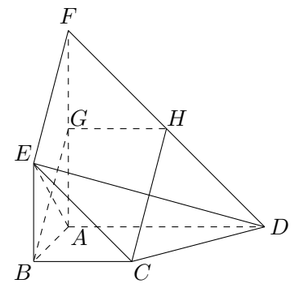
(2) 求进入该商场的 3 位顾客中, 至少有 2 位顾客既未购买甲种也未购买乙种商品的概率.

19. 如图, 平面 $ABEF\perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABEF$ 与 $ABCD$ 都是直角梯形, $\angle BAD=\angle FAB=90^\circ$, $BC\parallel\!\!=\dfrac{1}{2}AD$, $BE\parallel\!\!=\dfrac{1}{2}AF$, G、H 分别是 FA、FD 的中点.

(1) 证明: 四边形 $BCHG$ 是平行四边形;

(2) C、D、E、F 四点是否共面? 为什么?

(3) 设 $AB=BE$. 证明: 平面 $ADE\perp$ 平面 CDE.



20. 设 $x=1$ 和 $x=2$ 是函数 $f(x)=x^5+ax^3+bx+1$ 的两个极值点.
(1) 求 a 和 b 的值;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2a_n-2^n$.
(1) 求 a_3, a_4;
(2) 证明: 数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是等比数列;
(3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

22. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 点 F_2 到右准线 l 的距离为 $\sqrt{2}$.
(1) 求 a、b 的值;
(2) 设 M、N 是右准线 l 上两个动点, 满足 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$. 证明: 当 $\left|\overrightarrow{MN}\right|$ 取最小值时, $\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}=\mathbf{0}$.

2008 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位，$\dfrac{\mathrm{i}^3(\mathrm{i}+1)}{\mathrm{i}-1}=$ （　）

(A) -1　(B) 1　(C) $-\mathrm{i}$　(D) i

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y\leqslant 1 \\ x+2y\geqslant 1 \end{cases}$，则目标函数 $z=5x+y$ 的最大值为 （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

3. 设函数 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$ 是 （　）

(A) 最小正周期为 π 的奇函数　(B) 最小正周期为 π 的偶函数

(C) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇函数　(D) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的偶函数

4. 设 a, b 是两条直线，α, β 是两个平面，则 $a\perp b$ 的一个充分条件是 （　）

(A) $a\perp\alpha, b\parallel\beta, \alpha\perp\beta$　(B) $a\perp\alpha, b\perp\beta, \alpha\parallel\beta$

(C) $a\subset\alpha, b\perp\beta, \alpha\parallel\beta$　(D) $a\subset\alpha, b\parallel\beta, \alpha\perp\beta$

5. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{m^2-1}=1$ $(m>1)$ 上一点 P 到其左焦点的距离为 3，到右焦点的距离为 1，则 P 点到右准线的距离为 （　）

(A) 6　(B) 2　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

6. 设集合 $S=\{x\,||x-2|>3\}$，$T=\{x|a<x<a+8\}$，$S\cup T=\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是 （　）

(A) $-3<a<-1$　(B) $-3\leqslant a\leqslant -1$

(C) $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant -1$　(D) $a<-3$ 或 $a>-1$

7. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$ $(0\leqslant x<1)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，则 （　）

(A) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数且最大值为 1

(B) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数且最小值为 0

(C) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数且最大值为 1

(D) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数且最小值为 0

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} -x+1, & x<0 \\ x-1, & x\geqslant 0 \end{cases}$，则不等式 $x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1$ 的解集是 （　）

(A) $\{x|-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}-1\}$　(B) $\{x|x\leqslant 1\}$

(C) $\{x|x\leqslant\sqrt{2}-1\}$　(D) $\{x|-\sqrt{2}-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}-1\}$

9. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数．令 $a=f\left(\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$，$b=f\left(\cos\dfrac{5\pi}{7}\right)$，$c=f\left(\tan\dfrac{5\pi}{7}\right)$，则 （　）

(A) $b<a<c$　(B) $c<b<a$　(C) $b<c<a$　(D) $a<b<c$

10. 有 8 张卡片分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8，从中取出 6 张卡片排成 3 行 2 列，要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5，则不同的排法共有 （　）

(A) 1344 种　(B) 1248 种　(C) 1056 种　(D) 960 种

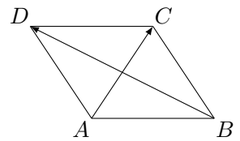
二、填空题

11. $\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的二项展开式中，x^2 的系数是_____．(用数字作答)

12. 一个正方体的各定点均在同一球的球面上，若该球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则该正方体的表面积为_____．

13. 已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点关于直线 $y=x$ 对称．直线 $4x-3y-2=0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点，且 $|AB|=6$，则圆 C 的方程为_____．

14. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,2)$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____．



15. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3^{n+1}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$_____．

16. 设 $a>1$，若仅有一个常数 c 使得对于任意的 $x\in[a,2a]$，都有 $y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=c$，这时，a 的取值的集合为_____．

三、解答题

17. 已知 $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$．

(1) 求 $\sin x$ 的值；

(2) 求 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值．

18. 甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球，命中率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 与 p，且乙投球 2 次均未命中的概率为 $\dfrac{1}{16}$．

(1) 求乙投球的命中率 p；

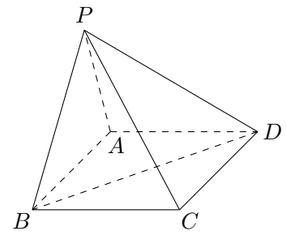
(2) 若甲投球 1 次，乙投球 2 次，两人共命中的次数记为 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望．

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形．已知 $AB=3$，$AD=2$，$PA=2$，$PD=2\sqrt{2}$，$\angle PAB=60^\circ$．

(1) 证明 $AD\perp$ 平面 PAB；

(2) 求异面直线 PC 与 AD 所成的角的大小；

(3) 求二面角 $P-BD-A$ 的大小．



20. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+b$ $(x\neq 0)$, 其中 $a, b\in\mathbf{R}$.
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y=3x+1$, 求函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
(3) 若对于任意的 $a\in\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$, 不等式 $f(x)\leqslant 10$ 在 $\left[\dfrac{1}{4}, 1\right]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

21. 已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(-3, 0)$, 一条渐近线的方程是 $\sqrt{5}x-2y=0$.
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 若以 k $(k\neq 0)$ 为斜率的直线 l 与双曲线 C 相交于两个不同的点 M, N, 线段 MN 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\dfrac{81}{2}$, 求 k 的取值范围.

22. 在数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中, $a_1=1$, $b_1=4$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$, $2a_{n+1}$ 为 b_n 与 b_{n+1} 的等比中项, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 求 a_2, b_2 的值;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中的通项公式;
(3) 设 $T_n=(-1)^{a_1}b_1+(-1)^{a_2}b_2+\cdots+(-1)^{a_n}b_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明 $|T_n|<2n^2$, $n\geqslant 3$.

2008 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $U=\{x\in\mathbf{N}|0<x\leqslant 8\}$, $S=\{1,2,4,5\}$, $T=\{3,5,7\}$, 则 $S\cap(\complement_U T)=$ （　）

(A) $\{1,2,4\}$　(B) $\{1,2,3,4,5,7\}$　(C) $\{1,2\}$　(D) $\{1,2,4,5,6,8\}$

2. 设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1\\ x+2y\geqslant 1\end{cases}$, 则目标函数 $z=5x+y$ 的最大值为 （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

3. 函数 $y=1+\sqrt{x}\ (0\leqslant x\leqslant 4)$ 的反函数是 （　）

(A) $y=(x-1)^2\ (1\leqslant x\leqslant 3)$　(B) $y=(x-1)^2\ (0\leqslant x\leqslant 4)$

(C) $y=x^2-1\ (1\leqslant x\leqslant 3)$　(D) $y=x^2-1\ (0\leqslant x\leqslant 4)$

4. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=25$, 且 $a_2=3$, 则 $a_7=$ （　）

(A) 12　(B) 13　(C) 14　(D) 15

5. 设 a,b 是两条直线, α,β 是两个平面, 则 $a\perp b$ 的一个充分条件是 （　）

(A) $a\perp\alpha, b\parallel\beta, \alpha\perp\beta$　(B) $a\perp\alpha, b\perp\beta, \alpha\parallel\beta$

(C) $a\subset\alpha, b\perp\beta, \alpha\parallel\beta$　(D) $a\subset\alpha, b\parallel\beta, \alpha\perp\beta$

6. 把函数 $y=\sin x\ (x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 得到的图象所表示的函数是 （　）

(A) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right), x\in\mathbf{R}$　(B) $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right), x\in\mathbf{R}$

(C) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right), x\in\mathbf{R}$　(D) $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right), x\in\mathbf{R}$

7. 设椭圆 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1\ (m>0, n>0)$ 的右焦点与抛物线 $y^2=8x$ 的焦点相同, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 则此椭圆的方程为 （　）

(A) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$　(B) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　(C) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{64}=1$　(D) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0\\ -x+2, & x>0\end{cases}$, 则不等式 $f(x)\geqslant x^2$ 的解集为 （　）

(A) $[-1,1]$　(B) $[-2,2]$　(C) $[-2,1]$　(D) $[-1,2]$

9. 设 $a=\sin\frac{5\pi}{7}, b=\cos\frac{2\pi}{7}, c=\tan\frac{2\pi}{7}$, 则 （　）

(A) $a<b<c$　(B) $a<c<b$　(C) $b<c<a$　(D) $b<a<c$

10. 设 $a>1$, 若对于任意的 $x\in[a,2a]$, 都有 $y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=3$, 这时 a 的取值的集合为 （　）

(A) $\{a|1<a\leqslant 2\}$ (B) $\{a|a\geqslant 2\}$　(C) $\{a|2\leqslant a\leqslant 3\}$ (D) $\{2,3\}$

二、填空题

11. 一个单位共有职工 200 人, 其中不超过 45 岁的有 120 人, 超过 45 岁的有 80 人. 为了调查职工的健康状况, 用分层抽样的方法从全体职工中抽取一个容量为 25 的样本, 应抽取超过 45 岁的职工_____人.

12. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^3 的系数为_____. (用数字作答)

13. 若一个球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$, 则它的表面积为_____.

14. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2)$, 若 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{c}|=$_____.

15. 已知圆 C 的圆心与点 $P(-2,1)$ 关于直线 $y=x+1$ 对称. 直线 $3x+4y-11=0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $|AB|=6$, 则圆 C 的方程为_____.

16. 有 4 张分别标有数字 1, 2, 3, 4 的红色卡片和 4 张分别标有数字 1, 2, 3, 4 的蓝色卡片, 从这 8 张卡片中取出 4 张卡片排成一行. 如果取出的 4 张卡片所标的数字之和等于 10, 则不同的排法共有_____种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega x+2\sin\omega x\cos\omega x+1\ (x\in\mathbf{R}, \omega>0)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求 ω 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最大值, 并且求使 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

18. 甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球, 命中率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 p, 且乙投球 2 次均未命中的概率为 $\frac{1}{16}$.

(1) 求乙投球的命中率 p;

(2) 求甲投球 2 次, 至少命中 1 次的概率;

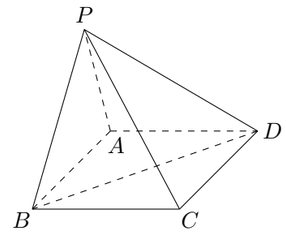
(3) 若甲、乙两人各投球 2 次, 求两人共命中 2 次的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形. 已知 $AB=3$, $AD=2$, $PA=2$, $PD=2\sqrt{2}$, $\angle PAB=60^\circ$.

(1) 证明 $AD\perp$ 平面 PAB;

(2) 求异面直线 PC 与 AD 所成的角的大小;

(3) 求二面角 $P-BD-A$ 的大小.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_{n+1}=(1+q)a_n-qa_{n-1}$ $(n\geqslant 2$, $q\neq 0)$.
(1) 设 $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(3) 若 a_3 是 a_6 与 a_9 的等差中项, 求 q 的值, 并证明: 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, a_n 是 a_{n+3} 与 a_{n+6} 的等差中项.

21. 设函数 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+b$ $(x\in\mathbf{R})$, 其中 a, $b\in\mathbf{R}$.
(1) 当 $a=-\dfrac{10}{3}$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有极值, 求 a 的取值范围;
(3) 若对于任意的 $a\in[-2,2]$, 不等式 $f(x)\leqslant 1$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

22. 已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(-3,0)$, 一条渐近线的方程是 $\sqrt{5}x-2y=0$.
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 若以 k $(k\neq 0)$ 为斜率的直线 l 与双曲线 C 相交于两个不同的点 M, N, 线段 MN 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\dfrac{81}{2}$, 求 k 的取值范围.

2008 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 a 是实数, $\dfrac{a-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 是纯虚数, 则 $a=$ （　）

(A) 1　(B) -1　(C) $\sqrt{2}$　(D) $-\sqrt{2}$

2. 已知 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x|x>0\}$, $B=\{x|x\leqslant -1\}$, 则 $\left(A\cap \complement_U B\right)\cup\left(B\cap \complement_U A\right)=$ （　）

(A) $\varnothing$　(B) $\{x|x\leqslant 0\}$

(C) $\{x|x>-1\}$　(D) $\{x|x>0$ 或 $x\leqslant -1\}$

3. 已知 a, b 都是实数, 那么“$a^2>b^2$”是“$a>b$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 在 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ 的展开式中, 含 x^4 的项的系数是(　)

(A) -15　(B) 85　(C) -120　(D) 274

5. 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ $(x\in[0,2\pi])$ 的图象和直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交点个数是 （　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 4

6. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_2=2$, $a_5=\dfrac{1}{4}$, 则 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=$(　)

(A) $16(1-4^{-n})$　(B) $16(1-2^{-n})$　(C) $\dfrac{32}{3}(1-4^{-n})$　(D) $\dfrac{32}{3}(1-2^{-n})$

7. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点到一条准线的距离之比为 $3:2$, 则双曲线的离心率是 （　）

(A) 3　(B) 5　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{5}$

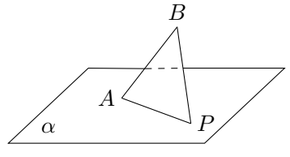
8. 若 $\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}$, 则 $\tan\alpha=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 2　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) -2

9. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$, 则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值是 （　）

(A) 1　(B) 2　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 如图, AB 是平面 α 的斜线段, A 为斜足. 若点 P 在平面 α 内运动, 使得 $\triangle ABP$ 的面积为定值, 则动点 P 的轨迹是 （　）



(A) 圆　(B) 椭圆　(C) 一条直线　(D) 两条平行直线

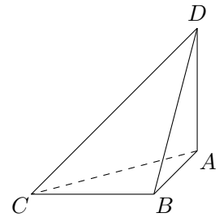
二、填空题

11. 已知 $a>0$, 若平面内三点 $A(1,-a)$, $B(2,a^2)$, $C(3,a^3)$ 共线, 则 $a=$_____.

12. 已知 F_1、F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点, 过 F_1 的直线交椭圆于 A、B 两点. 若 $|F_2A|+|F_2B|=12$, 则 $|AB|=$_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 若 $\left(\sqrt{3}b-c\right)\cos A=a\cos C$, 则 $\cos A=$_____.

14. 如图, 已知球 O 的面上四点 A、B、C、D, $DA\perp$ 平面 ABC, $AB\perp BC$, $DA=AB=BC=\sqrt{3}$, 则球 O 点体积等于_____.



15. 已知 t 为常数, 函数 $y=|x^2-2x-t|$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值为 2, 则 $t=$_____.

16. 用 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成六位数 (没有重复数字), 要求任何相邻两个数字的奇偶性不同, 且 1 和 2 相邻, 这样的六位数的个数是_____. (用数字作答)

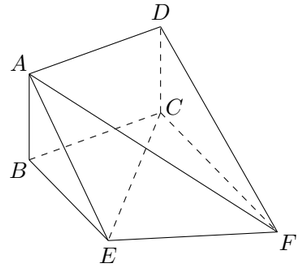
17. 若 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 且当 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1\end{cases}$ 时, 恒有 $ax+by\leqslant 1$, 则以 a, b 为坐标的点 $P(a,b)$ 所形成的平面区域的面积等于_____.

三、解答题

18. 如图, 矩形 $ABCD$ 和梯形 $BEFC$ 所在平面互相垂直, $BE\ /\!/\ CF$, $\angle BCF=\angle CEF=90^\circ$, $AD=\sqrt{3}$, $EF=2$.

(1) 求证: $AE\ /\!/$ 平面 DCF;

(2) 当 AB 的长为何值时, 二面角 $A-EF-C$ 的大小为 60°?



19. 一个袋中有若干个大小相同的黑球、白球和红球. 已知从袋中任意摸出 1 个球, 得到黑球的概率是 $\dfrac{2}{5}$; 从袋中任意摸出 2 个球, 至少得到 1 个白球的概率是 $\dfrac{7}{9}$.

(1) 若袋中共有 10 个球,

① 求白球的个数;

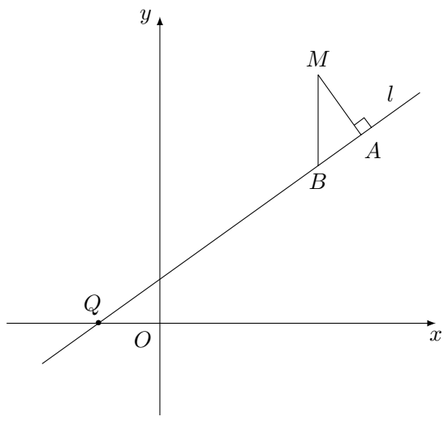
② 从袋中任意摸出 3 个球, 记得到白球的个数为 ξ, 求随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi$.

(2) 求证: 从袋中任意摸出 2 个球, 至少得到 1 个黑球的概率不大于 $\dfrac{7}{10}$. 并指出袋中哪种颜色的球个数最少.

20. 已知曲线 C 是到点 $P\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)$ 和到直线 $y=-\frac{5}{8}$ 距离相等的点的轨迹. l 是过点 $Q(-1,0)$ 的直线, M 是 C 上 (不在 l 上) 的动点; A、B 在 l 上, $MA\perp l$, $MB\perp x$ 轴 (如图).

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 求出直线 l 的方程, 使得 $\dfrac{|QB|^2}{|QA|}$ 为常数.



21. 已知 a 是实数, 函数 $f(x)=\sqrt{x}(x-a)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $g(a)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最小值.

① 写出 $g(a)$ 的表达式;

② 求 a 的取值范围, 使得 $-6\leqslant g(a)\leqslant -2$.

22. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_n\geqslant 0$, $a_1=0$, $a_{n+1}^2+a_{n+1}-1=a_n^2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $T_n=\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$. 求证: 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,

(1) $a_n<a_{n+1}$;

(2) $S_n>n-2$;

(3) $T_n<3$.

2008 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x|x>0\}$, $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$, 则 $A\cup B=$ （　）

(A) $\{x|x\geqslant -1\}$　(B) $\{x|x\leqslant 2\}$

(C) $\{x|0<x\leqslant 2\}$　(D) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

2. 函数 $y=(\sin x+\cos x)^2+1$ 的最小正周期是 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) π　(C) $\dfrac{3\pi}{2}$　(D) 2π

3. 已知 a, b 都是实数, 那么“$a^2>b^2$”是“$a>b$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_2=2$, $a_5=\dfrac{1}{4}$, 则公比 $q=$ （　）

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) -2　(C) 2　(D) $\dfrac{1}{2}$

5. 已知 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 且 $a+b=2$, 则 （　）

(A) $ab\leqslant\dfrac{1}{2}$　(B) $ab\geqslant\dfrac{1}{2}$　(C) $a^2+b^2\geqslant 2$　(D) $a^2+b^2\leqslant 3$

6. 在 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ 的展开式中, 含 x^4 的项的系数是（　）

(A) -15　(B) 85　(C) -120　(D) 274

7. 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ $(x\in[0,2\pi])$ 的图象和直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交点个数是 （　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 4

8. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点到一条准线的距离之比为 $3:2$, 则双曲线的离心率是 （　）

(A) 3　(B) 5　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{5}$

9. 对两条不相交的空间直线 a 与 b, 必存在平面 α, 使得 （　）

(A) $a\subset\alpha$, $b\subset\alpha$　(B) $a\subset\alpha$, $b\parallel\alpha$　(C) $a\perp\alpha$, $b\perp\alpha$　(D) $a\subset\alpha$, $b\perp\alpha$

10. 若 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 且当 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1\end{cases}$ 时, 恒有 $ax+by\leqslant 1$, 则以 a, b 为坐标的点 $P(a,b)$ 所形成的平面区域的面积是 （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) 1　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

二、填空题

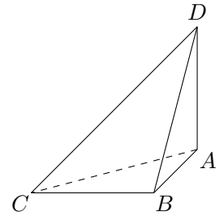
11. 已知函数 $f(x)=x^2+|x-2|$, 则 $f(1)=$_____.

12. 若 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\dfrac{3}{5}$, 则 $\cos 2\theta=$_____.

13. 已知 F_1、F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点, 过 F_1 的直线交椭圆于 A、B 两点. 若 $|F_2A|+|F_2B|=12$, 则 $|AB|=$_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 若 $\left(\sqrt{3}b-c\right)\cos A=a\cos C$, 则 $\cos A=$_____.

15. 如图, 已知球 O 的面上四点 A、B、C、D, $DA\perp$ 平面 ABC, $AB\perp BC$, $DA=AB=BC=\sqrt{3}$, 则球 O 点体积等于_____.



16. 已知 $\boldsymbol{a}$ 是平面内的单位向量, 若向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$, 则 $|\boldsymbol{b}|$ 的取值范围是_____.

17. 用 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成六位数 (没有重复数字), 要求任何相邻两个数字的奇偶性不同, 且 1 和 2 相邻, 这样的六位数的个数是_____. (用数字作答)

三、解答题

18. 已知数列 $\{x_n\}$ 的首项 $x_1=3$, 通项 $x_n=2^np+nq$ $(n\in\mathbf{N}^*$, p, q 为常数), 且 x_1, x_4, x_5 成等差数列. 求:

(1) p, q 的值;

(2) 数列 $\{x_n\}$ 前 n 项和 S_n 的公式.

19. 一个袋中装有大小相同的黑球、白球和红球, 已知袋中共有 10 个球, 从中任意摸出 1 个球, 得到黑球的概率是 $\dfrac{2}{5}$; 从中任意摸出 2 个球, 至少得到 1 个白球的概率是 $\dfrac{7}{9}$. 求:

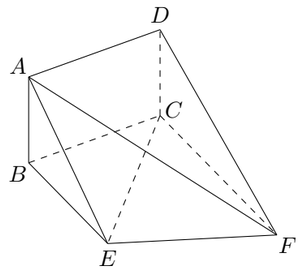
(1) 从中任意摸出 2 个球, 得到的数是黑球的概率;

(2) 袋中白球的个数.

20. 如图, 矩形 $ABCD$ 和梯形 $BEFC$ 所在平面互相垂直, $BE \parallel CF$, $\angle BCF = \angle CEF = 90^\circ$, $AD = \sqrt{3}$, $EF = 2$.

(1) 求证: $AE \parallel$ 平面 DCF;

(2) 当 AB 的长为何值时, 二面角 $A - EF - C$ 的大小为 60°?



21. 已知 a 是实数, 函数 $f(x) = x^2(x - a)$.

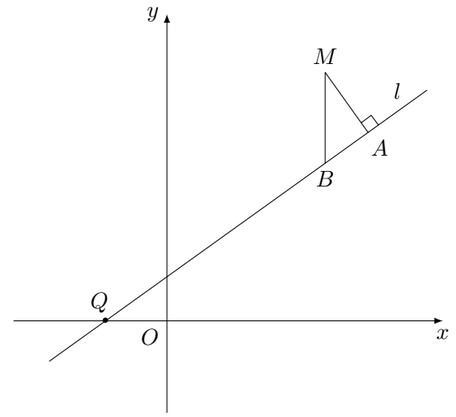
(1) 若 $f'(1) = 3$, 求 a 的值及曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值.

22. 已知曲线 C 是到点 $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$ 和到直线 $y = -\frac{5}{8}$ 距离相等的点的轨迹. l 是过点 $Q(-1, 0)$ 的直线, M 是 C 上 (不在 l 上) 的动点; A、B 在 l 上, $MA \perp l$, $MB \perp x$ 轴 (如图).

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 求出直线 l 的方程, 使得 $\frac{|QB|^2}{|QA|}$ 为常数.



2009 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 若 $\dfrac{1+7\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$, 则乘积 ab 的值是 （ ）

(A) -15 (B) -3 (C) 3 (D) 15

2. 若集合 $A=\{x||2x-1|<3\}$, $B=\left\{x|\dfrac{2x+1}{3-x}<0\right\}$, 则 $A\cap B$ 是 （ ）

(A) $\left\{x|-1<x<-\dfrac{1}{2}\text{ 或 }2<x<3\right\}$

(B) $\{x|2<x<3\}$

(C) $\left\{x|-\dfrac{1}{2}<x<2\right\}$

(D) $\left\{x|-1<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$

3. 下列曲线中离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 的是 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{6}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{10}=1$

4. 下列选项中, p 是 q 的必要不充分条件的是 （ ）

(A) p: $a+c>b+d$, q: $a>b$ 且 $c>d$

(B) p: $a>1$, $b>1$, q: $f(x)=a^x-b$ $(a>0$, 且 $a\neq1)$ 的图象不过第二象限

(C) p: $x=1$, q: $x^2=x$

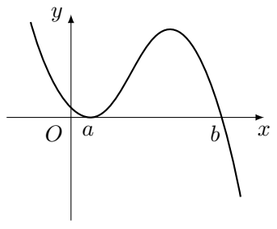
(D) p: $a>1$, q: $f(x)=\log_a x$ $(a>0$, 且 $a\neq1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1+a_3+a_5=105$, $a_2+a_4+a_6=99$. 以 S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则使得 S_n 达到最大值的 n 是 （ ）

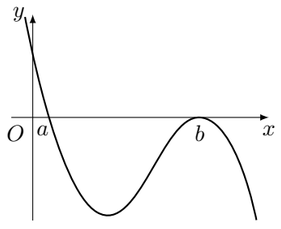
(A) 21 (B) 20 (C) 19 (D) 18

6. 设 $a<b$, 函数 $y=(x-a)^2(x-b)$ 的图象可能是 （ ）

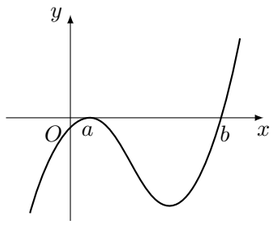
(A)



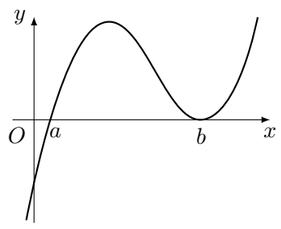
(B)



(C)



(D)



7. 若不等式组 $\begin{cases}x\geqslant0\\x+3y\geqslant4\\3x+y\leqslant4\end{cases}$ 所表示的平面区域被直线 $y=kx+\dfrac{4}{3}$ 分为面积相等的两部分, 则 k 的值是 （ ）

(A) $\dfrac{7}{3}$ (B) $\dfrac{3}{7}$ (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

8. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x$ $(\omega>0)$, $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=2$ 的两个相邻交点的距离等于 π, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 （ ）

(A) $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$ (B) $\left[k\pi+\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{11\pi}{12}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$ (D) $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$

9. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(x)=2f(2-x)-x^2+8x-8$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 （ ）

(A) $y=2x-1$ (B) $y=x$ (C) $y=3x-2$ (D) $y=-2x+3$

10. 考察正方体 6 个面的中心, 甲从这 6 个点中任意选两个点连成直线, 乙也从这 6 个点中任意选两个点连成直线, 则所得的两条直线相互平行但不重合的概率等于 （ ）

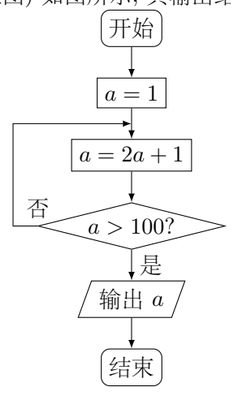
(A) $\dfrac{1}{75}$ (B) $\dfrac{2}{75}$ (C) $\dfrac{3}{75}$ (D) $\dfrac{4}{75}$

二、填空题

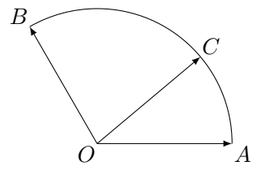
11. 若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(X\leqslant\mu)=$_____.

12. 以直角坐标系的原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 并在两种坐标系中取相同的长度单位. 已知直线的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ $(\rho\in\mathbf{R})$, 它与曲线 $\begin{cases}x=1+2\cos\alpha\\y=2+2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数) 相交于两点 A 和 B, 则 $|AB|=$_____.

13. 程序框图 (即算法流程图) 如图所示, 其输出结果是_____.



14. 给定两个长度为 1 的平面向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$, 它们的夹角为 120°. 如图所示, 点 C 在以 O 为圆心的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上变动. 若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 其中 x, $y\in\mathbf{R}$, 则 $x+y$ 的最大值是_____.



15. 对于四面体 $ABCD$, 下列命题正确的是_____. (写出所有正确命题的编号)

① 相对棱 AB 与 CD 所在的直线异面;

② 由顶点 A 作四面体的高, 其垂足是 $\triangle BCD$ 的三条高线的交点;

③ 若分别作 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的边 AB 上的高, 则这两条高所在直线异面;

④ 分别作三组相对棱中点的连线, 所得的三条线段相交于一点;

⑤ 最长棱必有某个端点, 由它引出的另两条棱的长度之和大于最长棱.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin(C-A)=1$, $\sin B=\dfrac{1}{3}$.

(1) 求 $\sin A$ 的值;

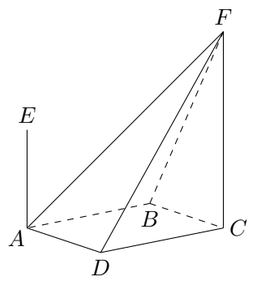
(2) 设 $AC=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 某地有 A、B、C、D 四人先后感染了甲型 H1N1 流感, 其中只有 A 到过疫区. B 肯定是受 A 感染的. 对于 C, 因为难以断定他是受 A 还是受 B 感染的, 于是假定他受 A 和受 B 感染的概率都是 $\dfrac{1}{2}$. 同样也假定 D 受 A、B 和 C 感染的概率都是 $\dfrac{1}{3}$. 在这种假定之下, B、C、D 中直接受 A 感染的人数 X 就是一个随机变量. 写出 X 的分布列 (不要求写出计算过程), 并求 X 的均值 (即数学期望).

18. 如图, 四棱锥 $F-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是菱形, 其对角线 $AC=2$, $BD=\sqrt{2}$, AE、CF 都与平面 $ABCD$ 垂直, $AE=1$, $CF=2$.

(1) 求二面角 $B-AF-D$ 的大小;

(2) 求四棱锥 $E-ABCD$ 与四棱锥 $F-ABCD$ 公共部分的体积.



19. 已知函数 $f(x)=x-\dfrac{2}{x}+a(2-\ln x)$, $(a>0)$. 讨论 $f(x)$ 的单调性.

20. 点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上, $x_0=a\cos\beta$, $y_0=b\sin\beta$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. 直线 l_2 与直线 l_1: $\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y=1$ 垂直, O 为坐标原点, 直线 OP 的倾斜角为 α, 直线 l_2 的倾斜角为 γ.

(1) 证明: 点 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 l_1 的唯一交点;

(2) 证明: $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ 构成等比数列.

21. 首项为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}({a_n}^2+3)$, $n\in\mathbf{N}_+$.

(1) 证明: 若 a_1 为奇数, 则对一切 $n\geqslant 2$, a_n 都是奇数;

(2) 若对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 都有 $a_{n+1}>a_n$, 求 a_1 的取值范围.

2009 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$ 等于 （ ）

(A) $1+\mathrm{i}$ (B) $-1-\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $-1+\mathrm{i}$

2. 若集合 $A=\{x|(2x+1)(x-3)<0\}$, $B=\{x\in\mathbf{N}_+|x\leqslant 5\}$, 则 $A\cap B$ 是 （ ）

(A) $\{1,2,3\}$ (B) $\{1,2\}$ (C) $\{4,5\}$ (D) $\{1,2,3,4,5\}$

3. 不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+3y\geqslant 4\\ 3x+y\leqslant 4\end{cases}$ 所表示的平面区域的面积等于 （ ）

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

4. “$a+c>b+d$”是“$a>b$ 且 $c>d$”的 （ ）

(A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1+a_3+a_5=105$, $a_2+a_4+a_6=99$, 则 a_{20} 等于 （ ）

(A) -1 (B) 1 (C) 3 (D) 7

6. 下列曲线中离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的是 （ ）

(A) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$ (B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ (C) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$ (D) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{10}=1$

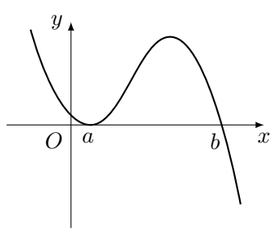
7. 直线 l 过点 $(-1,2)$ 且与直线 $2x-3y+4=0$ 垂直, 则 l 的方程是 （ ）

(A) $3x+2y-1=0$ (B) $3x+2y+7=0$

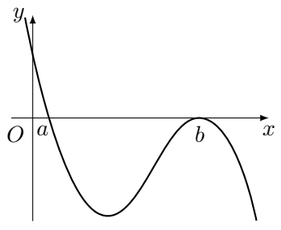
(C) $2x-3y+5=0$ (D) $2x-3y+8=0$

8. 设 $a<b$, 函数 $y=(x-a)^2(x-b)$ 的图象可能是 （ ）

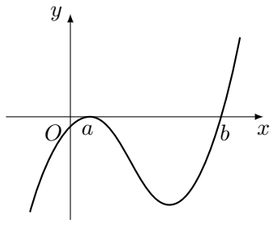
(A)



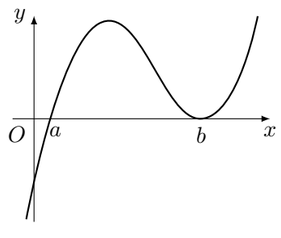
(B)



(C)



(D)



9. 设函数 $f(x)=\frac{\sin\theta}{3}x^3+\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{2}x^2+\tan\theta$, 其中 $\theta\in\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$, 则导数 $f'(1)$ 的取值范围是 （ ）

(A) $[-2,2]$ (B) $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ (C) $[\sqrt{3},2]$ (D) $[\sqrt{2},2]$

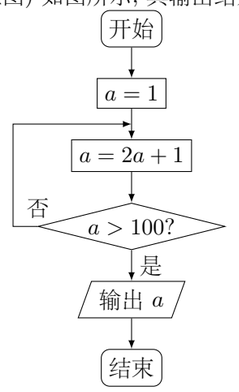
10. 考察正方体 6 个面的中心, 从中任意选 3 个点连成三角形, 再把剩下的 3 个点也连成三角形, 则所得的两个三角形全等的概率等于 （ ）

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 0

二、填空题

11. 在空间直角坐标系中, 已知点 $A(1,0,2)$, $B(1,-3,1)$, 点 M 在 y 轴上, 且 M 到 A 与到 B 的距离相等, 则 M 的坐标是_____.

12. 程序框图 (即算法流程图) 如图所示, 其输出结果是_____.



13. 从长度分别为 2、3、4、5 的四条线段中任意取出三条, 则以这三条线段为边可以构成三角形的概率是_____.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 和 F 分别是边 CD 和 BC 的中点. 若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$, 其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, 则 $\lambda+\mu=$_____.

15. 对于四面体 $ABCD$, 下列命题正确的是_____. (写出所有正确命题的编号)

① 相对棱 AB 与 CD 所在的直线异面;

② 由顶点 A 作四面体的高, 其垂足是 $\triangle BCD$ 的三条高线的交点;

③ 若分别作 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的边 AB 上的高, 则这两条高所在直线异面;

④ 任何三个面的面积之和都大于第四个面的面积;

⑤ 分别作三组相对棱中点的连线, 所得的三条线段相交于一点.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $C-A=\frac{\pi}{2}$, $\sin B=\frac{1}{3}$.

(1) 求 $\sin A$ 的值;

(2) 设 $AC=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 某良种培育基地正在培育一种小麦新品种 A, 将其与原有的一个优良品种 B 进行对照试验, 两种小麦各种植了 25 亩, 所得亩产数据 (单位: 千克) 如下:

品种 A: 357, 359, 367, 368, 375, 388, 392, 399, 400, 405, 412, 414, 415, 421, 423, 423, 427, 430, 430, 434, 443, 445, 451, 454.

品种 B: 363, 371, 374, 383, 385, 386, 391, 392, 394, 395, 397, 397, 400, 401, 401, 403, 406, 407, 410, 412, 415, 416, 422, 430.

(1) 完成所附的茎叶图;

(2) 用茎叶图处理现有的数据, 有什么优点?

(3) 通过观察茎叶图, 对品种 A 与 B 的亩产量及其稳定性进行比较, 写出统计结论.

A		B
	35	
	36	
	37	
	38	
	39	
	40	
	41	
	42	
	43	
	44	
	45	

18. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 以原点为圆心、椭圆短半轴长为半径的圆与直线 $y=x+2$ 相切.

(1) 求 a 与 b;

(2) 设该椭圆的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2, 直线 l_1 过 F_2 且与 x 轴垂直, 动直线 l_2 与 y 轴垂直, 交 l_1 于点 P. 求线段 PF_1 的垂直平分线与 l_2 的交点 M 的轨迹方程, 并指明曲线类型.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2n^2+2n$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=2-b_n$.

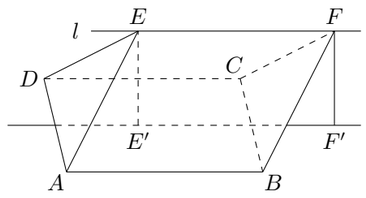
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n=a_n^2\cdot b_n$, 证明: 当且仅当 $n\geqslant 3$ 时, $c_{n+1}<c_n$.

20. 如图, $ABCD$ 的边长为 2 的正方形, 直线 l 与平面 $ABCD$ 平行, E 和 F 是 l 上的两个不同点, 且 $EA=ED$, $FB=FC$. E' 和 F' 是平面 $ABCD$ 内的两点, EE' 和 FF' 都与平面 $ABCD$ 垂直.

(1) 证明: 直线 $E'F'$ 垂直且平分线段 AD;

(2) 若 $\angle EAD=\angle EAB=60^\circ$, $EF=2$, 求多面体 $ABCDEF$ 的体积.



21. 已知函数 $f(x)=x-\dfrac{2}{x}+1-a\ln x$, $a>0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a=3$, 求 $f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上值域, 其中 $\mathrm{e}=0.71828\cdots$ 是自然对数的底数.

2009 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $z=\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})$ 对应的点位于 （　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线, $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ $(k\in\mathbf{R})$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 如果 $\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{d}$, 那么 （　）

(A) $k=1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 同向　(B) $k=1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 反向

(C) $k=-1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 同向　(D) $k=-1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 反向

3. 为了得到函数 $y=\lg\dfrac{x+3}{10}$ 的图象, 只需把函数 $y=\lg x$ 的图象上所有的点 （　）

(A) 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

(B) 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

(C) 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

(D) 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

4. 若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1, AB_1 与底面 $ABCD$ 成 60° 角, 则 A_1C_1 到底面 $ABCD$ 的距离为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{3}$

5. “$\alpha=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$”是“$\cos 2\alpha=\dfrac{1}{2}$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

6. 若 $\left(1+\sqrt{2}\right)^5=a+b\sqrt{2}$ $(a, b$ 为有理数), 则 $a+b=$ （　）

(A) 45　(B) 55　(C) 70　(D) 80

7. 用 0 到 9 这 10 个数字, 可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为(　)

(A) 324　(B) 328　(C) 360　(D) 648

8. 点 P 在直线 l: $y=x-1$ 上, 若存在过 P 的直线交抛物线 $y=x^2$ 于 A, B 两点, 且 $|PA=|AB|$, 则称点 P 为“$\mathscr{A}$ 点”, 那么下列结论中正确的是(　)

(A) 直线 l 上的所有点都是“$\mathscr{A}$ 点”

(B) 直线 l 上仅有有限个点是“$\mathscr{A}$ 点”

(C) 直线 l 上的所有点都不是“$\mathscr{A}$ 点”

(D) 直线 l 上有无穷多个点 (但不是所有的点) 是“$\mathscr{A}$ 点”

二、填空题

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=$_____.

10. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x\leqslant 4\\ y\leqslant 5\end{cases}$, 则 $s=y-x$ 的最小值为_____.

11. 设 $f(x)$ 是偶函数. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 1, 则该曲线在 $(-1, f(-1))$ 处的切线的斜率为_____.

12. 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1, F_2, 点 P 在椭圆上. 若 $|PF_1|=4$, 则 $|PF_2|=$_____; $\angle F_1PF_2$ 的大小为_____.

13. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & x\geqslant 0\end{cases}$, 则不等式 $|f(x)|\geqslant\dfrac{1}{3}$ 的解集为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{4n-3}=1$, $a_{4n-1}=0$, $a_{2n}=a_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $a_{2009}=$_____; $a_{2014}=$_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $B=\dfrac{\pi}{3}$, $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $b=\sqrt{3}$.

(1) 求 $\sin C$ 的值;

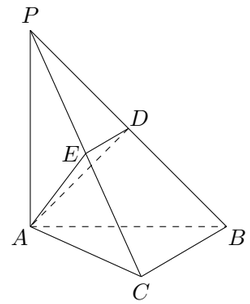
(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 底面 ABC, $PA=AB$, $\angle ABC=60^\circ$, $\angle BCA=90^\circ$, 点 D, E 分别在棱 PB, PC 上, 且 $DE\parallel BC$.

(1) 求证: $BC\perp$ 平面 PAC;

(2) 当 D 为 PB 的中点时, 求 AD 与平面 PAC 所成的角的大小;

(3) 是否存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角? 并说明理由.



17. 某学生在上学路上要经过 4 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是 $\dfrac{1}{3}$, 遇到红灯时停留的时间都是 2 min.

(1) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率;

(2) 求这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间 ξ 的分布列及期望.

18. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{kx}$ $(k\neq 0)$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内单调递增, 求 k 的取值范围.

19. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 右准线方程为 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 设直线 l 是圆 O: $x^2+y^2=2$ 上动点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0y_0\neq 0)$ 处的切线, l 与双曲线 C 交于不同的两点 A, B, 证明 $\angle AOB$ 的大小为定值.

20. 已知数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$ $(1\leqslant a_1<a_2<\cdots a_n,\ n\geqslant 2)$ 具有性质 P: 对任意的 i, j $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$, a_ia_j 与 $\dfrac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A.

(1) 分别判断数集 $\{1,3,4\}$ 与 $\{1,2,3,6\}$ 是否具有性质 P, 并说明理由;

(2) 证明: $a_1=1$, 且 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n$;

(3) 证明: 当 $n=5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.

2009 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|-\dfrac{1}{2}<x<2\}$, $B=\{x|x^2\leqslant 1\}$, 则 $A\cup B=$ （　）

(A) $\{x|-1\leqslant x<2\}$　(B) $\left\{x|-\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}$

(C) $\{x|x<2\}$　(D) $\{x|1\leqslant x<2\}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$, $\boldsymbol{b}=(0,1)$, $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ $(k\in\mathbf{R})$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 如果 $\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{d}$, 那么 （　）

(A) $k=1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 同向　(B) $k=1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 反向

(C) $k=-1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 同向　(D) $k=-1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 反向

3. 若 $\left(1+\sqrt{2}\right)^4=a+b\sqrt{2}$ (a, b 为有理数), 则 $a+b=$ （　）

(A) 33　(B) 29　(C) 23　(D) 19

4. 为了得到函数 $y=\lg\dfrac{x+3}{10}$ 的图象, 只需把函数 $y=\lg x$ 的图象上所有的点 （　）

(A) 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

(B) 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

(C) 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

(D) 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

5. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的无重复数字的四位偶数的个数为 （　）

(A) 8　(B) 24　(C) 48　(D) 120

6. “$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$”是“$\cos 2\alpha=\dfrac{1}{2}$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1, AB_1 与底面 $ABCD$ 成 60° 角, 则 A_1C_1 到底面 $ABCD$ 的距离为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{3}$

8. 设 D 是正 $\triangle P_1P_2P_3$ 及其内部的点构成的集合, 点 P_0 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的中心. 若集合 $S=\{P|P\in D,|PP_0|\leqslant|PP_i|,i=1,2,3\}$, 则集合 S 表示的平面区域是 （　）

(A) 三角形区域　(B) 四边形区域　(C) 五边形区域　(D) 六边形区域

二、填空题

9. 若 $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$, $\tan\theta>0$, 则 $\cos\theta=$_____.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $a_5=$_____; 前 8 项的和 $S_n=$_____. (用数字作答)

11. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x\leqslant 4\\ y\leqslant 5\end{cases}$, 则 $s=x+y$ 的最大值为_____.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x,\ x\leqslant 1\\ -x,\ x>1\end{cases}$. 若 $f(x)=2$, 则 $x=$_____.

13. 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1, F_2, 点 P 在椭圆上. 若 $|PF_1|=4$, 则 $|PF_2|=$_____; $\angle F_1PF_2$ 的大小为_____.

14. 设 A 是整数集的一个非空子集. 对于 $k\in A$, 如果 $k-1\notin A$, 那么 k 是 A 的一个“孤立元”. 给定 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 由 S 的 3 个元素构成的所有集合中, 不含“孤立元”的集合共有_____个.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=2\sin(\pi-x)\cos x$.

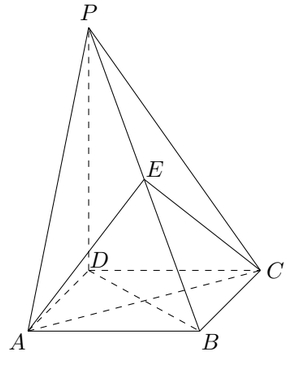
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形, $PD\perp ABCD$, 点 E 在棱 PB 上.

(1) 求证: 平面 $AEC\perp PDB$;

(2) 当 $PD=\sqrt{2}AB$ 且 E 为 PB 的中点时, 求 AE 与平面 PDB 所成的角的大小.



17. 某学生在上学路上要经过 4 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是 $\dfrac{1}{3}$, 遇到红灯时停留的时间都是 2 min.

(1) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率;

(2) 这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间至多是 4 min 的概率.

18. 设函数 $f(x)=x^3-3ax+b$ $(a\neq 0)$.
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(x))$ 处与直线 $y=8$ 相切, 求 a, b 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点.

19. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 右准线方程为 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 已知直线 $x-y+m=0$ 与双曲线 C 交于不同的两点 A, B, 且线段 AB 的中点在圆 $x^2+y^2=5$ 上, 求 m 的值.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=pn+q$ $(n\in\mathbf{N}^*, P>0)$. 数列 $\{b_m\}$ 定义如下: 对于正整数 m, b_m 是使得不等式 $a_n\geqslant m$ 成立的所有 n 中的最小值.
(1) 若 $p=\dfrac{1}{2}$, $q=-\dfrac{1}{3}$, 求 b_3;
(2) 若 $p=2$, $q=-1$, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 $2m$ 项和公式;
(3) 是否存在 p 和 q, 使得 $b_m=3m+2$ $(m\in\mathbf{N}^*)$? 如果存在, 求 p 和 q 的取值范围; 如果不存在, 请说明理由.

2009 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系是 （ ）

(A) 相切　(B) 相交但直线不过圆心

(C) 直线过圆心　(D) 相离

2. 已知复数 z 的实部为 -1, 虚部为 2, 则 $\dfrac{5\mathrm{i}}{z}=$ （ ）

(A) $2-\mathrm{i}$　(B) $2+\mathrm{i}$　(C) $-2-\mathrm{i}$　(D) $-2+\mathrm{i}$

3. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数是 （ ）

(A) 16　(B) 70　(C) 560　(D) 1120

4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=6$, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=2$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

5. 不等式 $|x+3|-|x-1|\leqslant a^2-3a$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 （ ）

(A) $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$　(B) $(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$

(C) $[1,2]$　(D) $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

6. 锅中煮有芝麻馅汤圆 6 个, 花生馅汤圆 5 个, 豆沙馅汤圆 4 个, 这三种汤圆的外部特征完全相同. 从中任意舀取 4 个汤圆, 则每种汤圆都至少取到 1 个的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{8}{91}$　(B) $\dfrac{25}{91}$　(C) $\dfrac{48}{91}$　(D) $\dfrac{60}{91}$

7. 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C, 向量 $\boldsymbol{m}=\left(\sqrt{3}\sin A,\sin B\right)$, $\boldsymbol{n}=\left(\cos B,\sqrt{3}\cos A\right)$, 若 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1+\cos(A+B)$, 则 $C=$ （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　(D) $\dfrac{5\pi}{6}$

8. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x+1}-ax-b\right)=2$, 其中 a, $b\in\mathbf{R}$, 则 $a-b$ 的值为 （ ）

(A) -6　(B) -2　(C) 2　(D) 6

9. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 50°, P 为空间中任意一点, 则过点 P 且与平面 α 和平面 β 所成的角都是 25° 的直线的条数为 （ ）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

10. 已知以 $T=4$ 为周期的函数 $f(x)=\begin{cases}m\sqrt{1-x^2}, & x\in(-1,1]\\ 1-|x-2|, & x\in(1,3]\end{cases}$, 其中 $m>0$. 若方程 $3f(x)=x$ 恰有 5 个实数解, 则 m 的取值范围为 （ ）

(A) $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{7}\right)$　(C) $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　(D) $\left(\dfrac{4}{3},\sqrt{7}\right)$

二、填空题

11. 若 $A=\{x\in\mathbf{R}||x|<3\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}|2^x>1\}$, 则 $A\cap B=$_____.

12. 若 $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+a$ 是奇函数, 则 $a=$_____.

13. 将 4 名大学生分配到 3 个乡镇去当村官, 每个乡镇至少一名, 则不同的分配方案有_____种. (用数字作答)

14. 设 $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n+1}$, $b_n=\left|\dfrac{a_n+2}{a_n-1}\right|$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则数列 $\{b_n\}$ 的通项 $b_n=$_____.

15. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. 若双曲线上存在一点 P 使 $\dfrac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}=\dfrac{a}{c}$, 则该双曲线的离心率的取值范围为_____.

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\dfrac{\pi}{8}x+1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若函数 $y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 求当 $x\in\left[0,\dfrac{4}{3}\right]$ 时 $y=g(x)$ 的最大值.

17. 某单位为绿化环境, 移栽了甲、乙两种大树各 2 株. 设甲、乙两种大树移栽的成活率分别为 $\dfrac{2}{3}$ 和 $\dfrac{1}{2}$, 且各株大树是否成活互不影响. 求移栽的 4 株大树中:

(1) 两种大树各成活 1 株的概率;

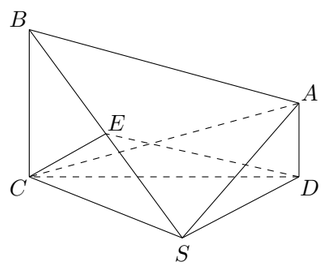
(2) 成活的株数 ξ 的分布列与期望.

18. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+k$ $(k>0)$ 在 $x=0$ 处取得极值, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于直线 $x+2y+1=0$.

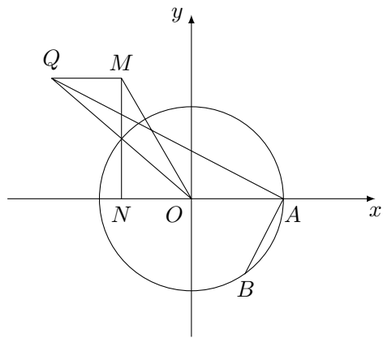
(1) 求 a, b 的值;

(2) 若函数 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)}$, 讨论 $g(x)$ 的单调性.

19. 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$ 且 $AD \perp CD$; 平面 $CSD \perp$ 平面 $ABCD$, $CS \perp DS$, $CS=2AD=2$, E 为 BS 的中点, $CE=\sqrt{2}$, $AS=\sqrt{3}$. 求:
(1) 点 A 到平面 BCS 的距离;
(2) 二面角 $E-CD-A$ 的大小.



20. 已知以原点 O 为中心的椭圆的一条准线方程为 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, M 是椭圆上的动点.
(1) 若点 C, D 的坐标分别是 $\left(0,-\sqrt{3}\right)$, $\left(0,\sqrt{3}\right)$, 求 $|MC|\cdot|MD|$ 的最大值;
(2) 如图, 点 A 的坐标为 $(1,0)$, B 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的点, N 是点 M 在 x 轴上的射影, 点 Q 满足条件: $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{BA}=0$. 求线段 QB 的中点 P 的轨迹方程.



21. 设 m 个不全相等的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ $(m \geqslant 7)$ 依次围成一个圆圈.
(1) 若 $m=2009$, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_{1005}$ 是公差为 d 的等差数列, 而 $a_1, a_{2009}, a_{2008}, \cdots, a_{1006}$ 是公比为 q 的等比数列; 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的前 n 项和 S_n $(n \leqslant m)$ 满足: $S_3=15$, $S_{2009}=S_{2007}+12a_1$, 求通项 a_n $(n \leqslant m)$;
(2) 若每个数 a_n $(n \leqslant m)$ 是其左右相邻两数平方的等比中项, 求证: $a_1+\cdots+a_6+a_7^2+\cdots+a_m^2>ma_1a_2\cdots a_m$.

2009 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 圆心在 y 轴上, 半径为 1, 且过点 $(1,2)$ 的圆的方程为 （ ）

(A) $x^2+(y-2)^2=1$　(B) $x^2+(y+2)^2=1$

(C) $(x-1)^2+(y-3)^2=1$　(D) $x^2+(y-3)^2=1$

2. 命题“若一个数是负数, 则它的平方是正数”的逆命题是 （ ）

(A) “若一个数是负数, 则它的平方不是正数”

(B) “若一个数的平方是正数, 则它是负数”

(C) “若一个数不是负数, 则它的平方不是正数”

(D) “若一个数的平方不是正数, 则它不是负数”

3. $(x+2)^6$ 的展开式中 x^3 的系数是 （ ）

(A) 20　(B) 40　(C) 80　(D) 160

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,x)$. 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$ 平行, 则实数 x 的值是 （ ）

(A) -2　(B) 0　(C) 1　(D) 2

5. 设 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, $a_1=2$ 且 a_1, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$ （ ）

(A) $\dfrac{n^2}{4}+\dfrac{7n}{4}$　(B) $\dfrac{n^2}{3}+\dfrac{5n}{3}$　(C) $\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{3n}{4}$　(D) n^2+n

6. 下列关系式中正确的是 （ ）

(A) $\sin 11^\circ<\cos 10^\circ<\sin 168^\circ$　(B) $\sin 168^\circ<\sin 11^\circ<\cos 10^\circ$

(C) $\sin 11^\circ<\sin 168^\circ<\cos 10^\circ$　(D) $\sin 168^\circ<\cos 10^\circ<\sin 11^\circ$

7. 已知 $a>0$, $b>0$, 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+2\sqrt{ab}$ 的最小值是 （ ）

(A) 2　(B) $2\sqrt{2}$　(C) 4　(D) 5

8. 12 个篮球队中有 3 个强队, 将这 12 个队任意分成 3 个组 (每组 4 个队), 则 3 个强队恰好被分在同一组的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{55}$　(B) $\dfrac{3}{55}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{3}$

9. 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 顶点 B_1 到对角线 BD_1 和到平面 A_1BCD_1 的距离分别为 h 和 d, 则下列命题中正确的是 （ ）

(A) 若侧棱的长小于底面的边长, 则 $\dfrac{h}{d}$ 的取值范围为 $(0,1)$

(B) 若侧棱的长小于底面的边长, 则 $\dfrac{h}{d}$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

(C) 若侧棱的长大于底面的边长, 则 $\dfrac{h}{d}$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$

(D) 若侧棱的长大于底面的边长, 则 $\dfrac{h}{d}$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

10. 把函数 $f(x)=x^3-3x$ 的图象 C_1 向右平移 u 个单位长度, 再向下平移 v 个单位长度后得到图象 C_2. 若对任意的 $u>0$, 曲线 C_1 与 C_2 至多只有一个交点, 则 v 的最小值为 （ ）

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

二、填空题

11. 若 $U=\{n|n$ 是小于 9 的正整数 $\}$, $A=\{n\in U|n$ 是奇数 $\}$, $B=\{n\in U|n$ 是 3 的倍数 $\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$_____.

12. 记 $f(x)=\log_3(x+1)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$, 则方程 $f^{-1}(x)=8$ 的解 $x=$_____.

13. 5 个人站成一排, 其中甲、乙两人不相邻的排法有_____种. (用数字作答)

14. 从一堆苹果中任取 5 只, 称得它们的质量如下 (单位: 克)

125　124　121　123　127

则该样本标准差 $s=$_____(克). (用数字作答)

15. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. 若椭圆上存在一点 P 使 $\dfrac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\dfrac{c}{\sin\angle PF_2F_1}$, 则该椭圆的离心率的取值范围为_____.

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=(\sin\omega x+\cos\omega x)^2+2\cos^2\omega x$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$.

(1) 求 ω 的最小正周期.

(2) 若函数 $y=g(x)$ 的图象是由 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度得到, 求 $y=g(x)$ 的单调增区间.

17. 某单位为绿化环境, 移栽了甲、乙两种大树各 2 株. 设甲、乙两种大树移栽的成活率分别为 $\dfrac{5}{6}$ 和 $\dfrac{4}{5}$, 且各株大树是否成活互不影响. 求移栽的 4 株大树中:

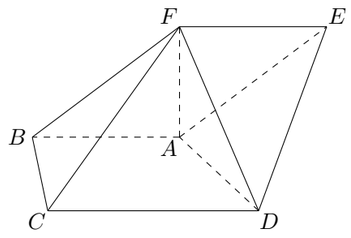
(1) 至少有 1 株成活的概率;

(2) 两种大树各成活 1 株的概率.

18. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, $AB\parallel DC$, $\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$, $CD=AD=2$, 四边形 $ABFE$ 为平行四边形, $FA\perp$ 平面 $ABCD$, $FC=3$, $ED=\sqrt{7}$. 求:

(1) 直线 AB 到平面 $EFCD$ 的距离;

(2) 二面角 $F-AD-E$ 的平面角的正切值.



19. 已知 $f(x)=x^2+bx+c$ 为偶函数, 曲线 $y=f(x)$ 过点 $(2,5)$, $g(x)=(x+a)f(x)$.

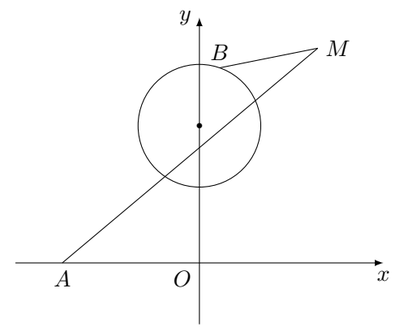
(1) 求曲线 $y=g(x)$ 有斜率为 0 的切线, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若当 $x=-1$ 时函数 $y=g(x)$ 取得极值, 确定 $y=g(x)$ 的单调区间.

20. 已知以原点 O 为中心的双曲线的一条准线方程为 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 离心率 $e=\sqrt{5}$.

(1) 求该双曲线的方程;

(2) 如图, 点 A 的坐标为 $\left(-\sqrt{5},0\right)$, B 是圆 $x^2+\left(y-\sqrt{5}\right)^2=1$ 上的点, 点 M 在双曲线右支上, 求 $|MA|+|MB|$ 的最小值, 并求此时 M 点的坐标.



21. 已知 $a_1=1$, $a_2=4$, $a_{n+2}=4a_{n+1}+a_n$, $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 b_1, b_2, b_3 的值;

(2) 设 $c_n=b_nb_{n+1}$, S_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n\geqslant 17n$;

(3) 求证: $|b_{2n}-b_n|<\dfrac{1}{64}\cdot\dfrac{1}{17^{n-2}}$.

2009 年普通高等学校招生考试（大纲卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{4,5,7,9\}$, $B=\{3,4,7,8,9\}$, 全集 $U=A\cup B$, 则集合 $\complement_U(A\cap B)$ 中的元素共有 （ ）

(A) 3 个　(B) 4 个　(C) 5 个　(D) 6 个

2. 已知 $\dfrac{\overline{z}}{1+\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$, 则复数 $z=$ （ ）

(A) $-1+3\mathrm{i}$　(B) $1-3\mathrm{i}$　(C) $3+\mathrm{i}$　(D) $3-\mathrm{i}$

3. 不等式 $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|<1$ 的解集为 （ ）

(A) $\{x|0<x<1\}\cup\{x|x>1\}$　(B) $\{x|0<x<1\}$

(C) $\{x|-1<x<0\}$　(D) $\{x|x<0\}$

4. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 相切, 则该双曲线的离心率等于 （ ）

(A) $\sqrt{3}$　(B) 2　(C) $\sqrt{5}$　(D) $\sqrt{6}$

5. 甲组有 5 名男同学, 3 名女同学; 乙组有 6 名男同学、2 名女同学. 若从甲、乙两组中各选出 2 名同学, 则选出的 4 人中恰有 1 名女同学的不同选法共有 （ ）

(A) 150 种　(B) 180 种　(C) 300 种　(D) 345 种

6. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是单位向量, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 的最小值为（ ）

(A) -2　(B) $\sqrt{2}-2$　(C) -1　(D) $1-\sqrt{2}$

7. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等, A_1 在底面 ABC 上的射影为 BC 的中点, 则异面直线 AB 与 CC_1 所成的角的余弦值为（ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

8. 如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{4\pi}{3},0\right)$ 中心对称, 那么 $|\varphi|$ 的最小值为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

9. 已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切, 则 a 的值为 （ ）

(A) 1　(B) 2　(C) -1　(D) -2

10. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60°, 动点 P、Q 分别在面 α、β 内, P 到 β 的距离为 $\sqrt{3}$, Q 到 α 的距离为 $2\sqrt{3}$, 则 P、Q 两点之间距离的最小值为（ ）

(A) $\sqrt{2}$　(B) 2　(C) $2\sqrt{3}$　(D) 4

11. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数, 则 （ ）

(A) $f(x)$ 是偶函数　(B) $f(x)$ 是奇函数

(C) $f(x)=f(x+2)$　(D) $f(x+3)$ 是奇函数

12. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F, 右准线为 l, 点 $A\in l$, 线段 AF 交 C 于点 B. 若 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$, 则 $\left|\overrightarrow{AF}\right|=$ （ ）

(A) $\sqrt{2}$　(B) 2　(C) $\sqrt{3}$　(D) 3

二、填空题

13. $(x-y)^{10}$ 的展开式中, x^7y^3 的系数与 x^3y^7 的系数之和等于_____.

14. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_9=72$, 则 $a_2+a_4+a_9=$_____.

15. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上. 若 $AB=AC=AA_1=2$, $\angle BAC=120^\circ$, 则此球的表面积等于_____.

16. 若 $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则函数 $y=\tan 2x\tan^3 x$ 的最大值为_____.

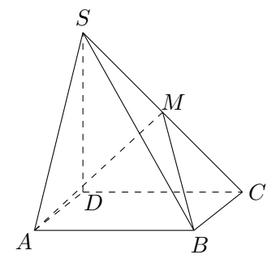
三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c, 已知 $a^2-c^2=2b$, 且 $\sin A\cos C=3\cos A\sin C$, 求 b.

18. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $SD\perp$ 底面 $ABCD$, $AD=\sqrt{2}$, $DC=SD=2$, 点 M 在侧棱 SC 上, $\angle ABM=60^\circ$.

(1) 证明: M 是侧棱 SC 的中点;

(2) 求二面角 $S-AM-B$ 的大小.



19. 甲、乙二人进行一次围棋比赛, 约定先胜 3 局者获得这次比赛的胜利, 比赛结束, 假设在一局中, 甲获胜的概率为 0.6, 乙获胜的概率为 0.4, 各局比赛结果相互独立, 已知前 2 局中, 甲、乙各胜 1 局.

(1) 求甲获得这次比赛胜利的概率;

(2) 设 ξ 表示从第 3 局开始到比赛结束所进行的局数, 求 ξ 得分布列及数学期望.

20. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n+\dfrac{n+1}{2^n}$.

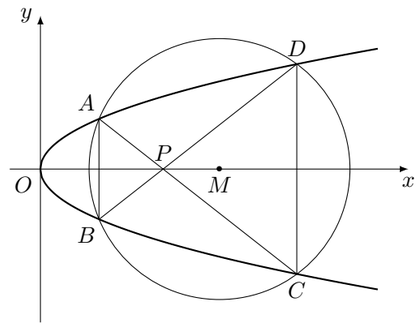
(1) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21. 如图, 已知抛物线 E: $y^2=x$ 与圆 M: $(x-4)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相交于 A、B、C、D 四个点.

(1) 求 r 的取值范围;

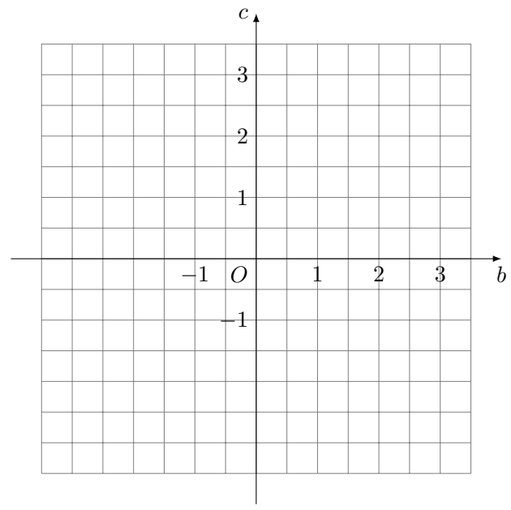
(2) 当四边形 $ABCD$ 的面积最大时, 求对角线 AC、BD 的交点 P 坐标.



22. 设函数 $f(x)=x^3+3bx^2+3cx$ 在两个极值点 x_1、x_2, 且 $x_1\in[-1,0]$, $x_2\in[1,2]$.

(1) 求 b、c 满足的约束条件, 并在下面的坐标平面内, 画出满足这些条件的点 (b,c) 的区域;

(2) 证明: $-10\leqslant f(x_2)\leqslant-\dfrac{1}{2}$.



2009 年普通高等学校招生考试（大纲卷 I）

文科数学

一、选择题

1. $\sin 585^\circ$ 的值为 （ ）

(A) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设集合 $A=\{4,5,7,9\}$, $B=\{3,4,7,8,9\}$, 全集 $U=A\cup B$, 则集合 $\complement_U(A\cap B)$ 中的元素共有 （ ）

(A) 3 个 (B) 4 个 (C) 5 个 (D) 6 个

3. 不等式 $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|<1$ 的解集为 （ ）

(A) $\{x|0<x<1\}\cup\{x|x>1\}$ (B) $\{x|0<x<1\}$

(C) $\{x|-1<x<0\}$ (D) $\{x|x<0\}$

4. 已知 $\tan\alpha=4$, $\cot\beta=\dfrac{1}{3}$, 则 $\tan(\alpha+\beta)=$ （ ）

(A) $\dfrac{7}{11}$ (B) $-\dfrac{7}{11}$ (C) $\dfrac{7}{13}$ (D) $-\dfrac{7}{13}$

5. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 相切, 则该双曲线的离心率等于 （ ）

(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$

6. 已知函数 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)=1+2\lg x$ $(x>0)$, 则 $f(1)+g(1)=$（ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

7. 甲组有 5 名男同学, 3 名女同学; 乙组有 6 名男同学、2 名女同学. 若从甲、乙两组中各选出 2 名同学, 则选出的 4 人中恰有 1 名女同学的不同选法共有 （ ）

(A) 150 种 (B) 180 种 (C) 300 种 (D) 345 种

8. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, 则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$ （ ）

(A) 150° (B) 120° (C) 60° (D) 30°

9. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等, A_1 在底面 ABC 上的射影为 BC 的中点, 则异面直线 AB 与 CC_1 所成的角的余弦值为（ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

10. 如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{4\pi}{3},0\right)$ 中心对称, 那么 $|\varphi|$ 的最小值为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

11. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60°, 动点 P、Q 分别在面 α、β 内, P 到 β 的距离为 $\sqrt{3}$, Q 到 α 的距离为 $2\sqrt{3}$, 则 P、Q 两点之间距离的最小值为（ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4

12. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F, 右准线 l, 点 $A\in l$, 线段 AF 交 C 于点 B. 若 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$, 则 $\left|\overrightarrow{AF}\right|=$ （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) 3

13. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F, 右准线为 l, 点 $A\in l$, 线段 AF 交 C 于点 B. 若 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$, 则 $\left|\overrightarrow{AF}\right|=$ （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) 3

二、填空题

14. $(x-y)^{10}$ 的展开式中, x^7y^3 的系数与 x^3y^7 的系数之和等于_____.

15. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_9=72$, 则 $a_2+a_4+a_9=$_____.

16. 已知 OA 为球 O 的半径, 过 OA 的中点 M 且垂直于 OA 的平面截球面得到圆 M. 若圆 M 的面积为 3π, 则球 O 的表面积等于_____.

17. 若直线 m 被两平行线 l_1: $x-y+1=0$ 与 l_2: $x-y+3=0$ 所截得的线段的长为 $2\sqrt{2}$, 则 m 的倾斜角可以是

① 15° ② 30° ③ 45° ④ 60° ⑤ 75°

其中正确答案的序号是_____. (写出所有正确答案的序号)

三、解答题

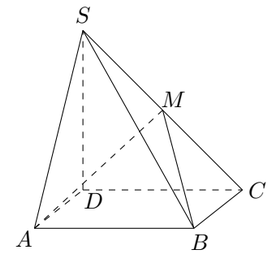
18. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 l, 公比是正数的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 已知 $a_1=1$, $b_1=3$, $a_3+b_3=17$, $T_3-S_3=12$, 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c, 已知 $a^2-c^2=2b$, 且 $\sin B=4\cos A\sin C$, 求 b.

20. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $SD\perp$ 底面 $ABCD$, $AD=\sqrt{2}$, $DC=SD=2$, 点 M 在侧棱 SC 上, $\angle ABM=60^\circ$.

(1) 证明: M 是侧棱 SC 的中点;

(2) 求二面角 $S-AM-B$ 的大小.



21. 甲、乙二人进行一次围棋比赛, 约定先胜 3 局者获得这次比赛的胜利, 比赛结束, 假设在一局中, 甲获胜的概率为 0.6, 乙获胜的概率为 0.4, 各局比赛结果相互独立, 已知前 2 局中, 甲、乙各胜 1 局.

(1) 求再赛 2 局结束这次比赛的概率;

(2) 求甲获得这次比赛胜利的概率.

22. 已知函数 $f(x)=x^4-3x^2+6$.

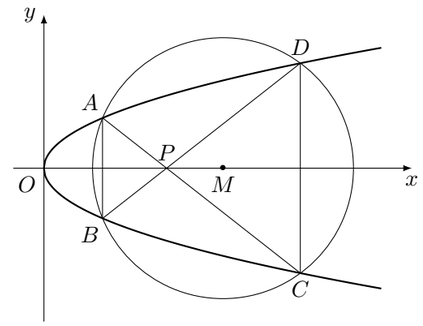
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设点 P 在曲线 $y=f(x)$ 上, 若该曲线在点 P 处的切线 l 通过坐标原点, 求 l 的方程.

23. 如图, 已知抛物线 E: $y^2=x$ 与圆 M: $(x-4)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相交于 A、B、C、D 四个点.

(1) 求 r 的取值范围;

(2) 当四边形 $ABCD$ 的面积最大时, 求对角线 AC、BD 的交点 P 坐标.



2009 年普通高等学校招生考试（大纲卷 II）

理科数学

一、选择题

1. $\dfrac{10\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $-2+4\mathrm{i}$　(B) $-2-4\mathrm{i}$　(C) $2+4\mathrm{i}$　(D) $2-4\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x|x>3\}$, $B=\left\{x|\dfrac{x-1}{x-4}<0\right\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\varnothing$　(B) $(3,4)$　(C) $(-2,1)$　(D) $(4,+\infty)$

3. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\cot A=-\dfrac{12}{5}$, 则 $\cos A=$ （ ）

(A) $\dfrac{12}{13}$　(B) $\dfrac{5}{13}$　(C) $-\dfrac{5}{13}$　(D) $-\dfrac{12}{13}$

4. 曲线 $y=\dfrac{x}{2x-1}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 （ ）

(A) $x-y-2=0$　(B) $x+y-2=0$

(C) $x+4y-5=0$　(D) $x-4y-5=0$

5. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, E 为 AA_1 中点, 则异面直线 BE 与 CD_1 所成的角的余弦值为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　(B) $\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　(D) $\dfrac{3}{5}$

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$ （ ）

(A) $\sqrt{5}$　(B) $\sqrt{10}$　(C) 5　(D) 25

7. 设 $a=\log_3\pi$, $b=\log_2\sqrt{3}$, $c=\log_3\sqrt{2}$, 则 （ ）

(A) $a>b>c$　(B) $a>c>b$　(C) $b>a>c$　(D) $b>c>a$

8. 若将函数 $y=\tan\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 与函数 $y=\tan\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合, 则 ω 的最小值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

9. 已知直线 $y=k(x+2)$ $(k>0)$ 与抛物线 C: $y^2=8x$ 相交于 A、B 两点, F 为 C 的焦点. 若 $|FA|=2|FB|$, 则 $k=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

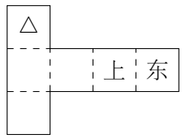
10. 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门, 则甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的选法共有 （ ）

(A) 6 种　(B) 12 种　(C) 30 种　(D) 36 种

11. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A、B 两点, 若 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$. 则 C 的离心率为（ ）

(A) $\dfrac{6}{5}$　(B) $\dfrac{7}{5}$　(C) $\dfrac{5}{8}$　(D) $\dfrac{9}{5}$

12. 纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北. 现有沿该正方体的一些棱将正方体剪开、外面朝上展平, 得到如图的平面图形, 则标“△”的面的方位是 （ ）



(A) 南　(B) 北　(C) 西　(D) 下

二、填空题

13. $\left(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\right)^4$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为_____.

14. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_5=5a_3$, 则 $\dfrac{S_9}{S_5}=$_____.

15. 设 OA 是球 O 的半径, M 是 OA 的中点, 过 M 且与 OA 成 45° 角的平面截球 O 的表面得到圆 C. 若圆 C 的面积等于 $\dfrac{7\pi}{4}$, 则球 O 的表面积等于_____.

16. 已知 AC、BD 为圆 O: $x^2+y^2=4$ 的两条相互垂直的弦, 垂足为 $M\left(1,\sqrt{2}\right)$, 则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为_____.

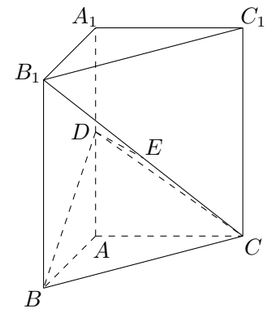
三、解答题

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c, $\cos(A-C)+\cos B=\dfrac{3}{2}$, $b^2=ac$, 求 B.

18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp AC$, D、E 分别为 AA_1、B_1C 的中点, $DE\perp$ 平面 BCC_1.

(1) 证明: $AB=AC$;

(2) 设二面角 $A-BD-C$ 为 60°, 求 B_1C 与平面 BCD 所成的角的大小.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=1$, $S_{n+1}=4a_n+2$.

(1) 设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 某车间甲组有 10 名工人, 其中有 4 名女工人; 乙组有 5 名工人, 其中有 3 名女工人. 现采用分层抽样方法 (层内采用不放回简单随机抽样) 从甲、乙两组中共抽取 3 名工人进行技术考核.

(1) 求从甲、乙两组各抽取的人数;

(2) 求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率;

(3) 记 ξ 表示抽取的 3 名工人中男工人数, 求 ξ 的分布列及数学期望.

21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过右焦点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 当 l 的斜率为 1 时, 坐标原点 O 到 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) C 上是否存在点 P, 使得当 l 绕 F 转到某一位置时, 有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立? 若存在, 求出所有的 P 的坐标与 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

22. 设函数 $f(x)=x^2+a\ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1, x_2, 且 $x_1<x_2$.

(1) 求 a 的取值范围, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: $f(x_2)>\dfrac{1-2\ln 2}{4}$.

2009 年普通高等学校招生考试（大纲卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M=\{1,3,5,7\}$, $N=\{5,6,7\}$, 则 $\complement_U(M\cup N)=$ （ ）

(A) $\{5,7\}$　(B) $\{2,4\}$　(C) $\{2,4,8\}$　(D) $\{1,3,5,6,7\}$

2. 函数 $y=\sqrt{-x}$ $(x\leqslant 0)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$　(B) $y=-x^2$ $(x\geqslant 0)$

(C) $y=x^2$ $(x\leqslant 0)$　(D) $y=-x^2$ $(x\leqslant 0)$

3. 函数 $y=\log_2\dfrac{2-x}{2+x}$ 的图象 （ ）

(A) 关于原点对称　(B) 关于直线 $y=-x$ 对称

(C) 关于 y 轴对称　(D) 关于直线 $y=x$ 对称

4. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\cot A=-\dfrac{12}{5}$, 则 $\cos A=$ （ ）

(A) $\dfrac{12}{13}$　(B) $\dfrac{5}{13}$　(C) $-\dfrac{5}{13}$　(D) $-\dfrac{12}{13}$

5. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, E 为 AA_1 中点, 则异面直线 BE 与 CD_1 所成的角的余弦值为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　(B) $\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　(D) $\dfrac{3}{5}$

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$ （ ）

(A) $\sqrt{5}$　(B) $\sqrt{10}$　(C) 5　(D) 25

7. 设 $a=\lg\mathrm{e}$, $b=(\lg\mathrm{e})^2$, $c=\lg\sqrt{\mathrm{e}}$, 则 （ ）

(A) $a>b>c$　(B) $a>c>b$　(C) $c>a>b$　(D) $c>b>a$

8. 双曲线 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的渐近线与圆 $(x-3)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相切, 则 $r=$ （ ）

(A) $\sqrt{3}$　(B) 2　(C) 3　(D) 6

9. 若将函数 $y=\tan\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 与函数 $y=\tan\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合, 则 ω 的最小值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

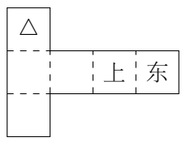
10. 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门, 则甲、乙所选的课程中恰有 1 门相同的选法有 （ ）

(A) 6 种　(B) 12 种　(C) 24 种　(D) 30 种

11. 已知直线 $y=k(x+2)$ $(k>0)$ 与抛物线 C: $y^2=8x$ 相交于 A、B 两点, F 为 C 的焦点. 若 $|FA|=2|FB|$, 则 $k=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

12. 纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北. 现有沿该正方体的一些棱将正方体剪开、外面朝上展平, 得到如图的平面图形, 则标“△”的面的方位是 （ ）



(A) 南　(B) 北　(C) 西　(D) 下

二、填空题

13. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=1$, $S_6=4S_3$, 则 $a_4=$_____.

14. $\left(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\right)^4$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为_____.

15. 已知圆 O: $x^2+y^2=5$ 和点 $A(1,2)$, 则过 A 且与圆 O 相切的直线与两坐标轴围成的三角形的面积等于_____.

16. 设 OA 是球 O 的半径, M 是 OA 的中点, 过 M 且与 OA 成 45° 角的平面截球 O 的表面得到圆 C. 若圆 C 的面积等于 $\dfrac{7\pi}{4}$, 则球 O 的表面积等于_____.

三、解答题

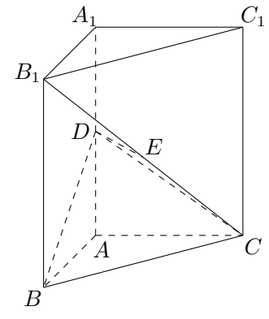
17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3a_7=-16$, $a_4+a_6=0$, 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c, $\cos(A-C)+\cos B=\dfrac{3}{2}$, $b^2=ac$, 求 B.

19. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp AC$, D、E 分别为 AA_1、B_1C 的中点, $DE\perp$ 平面 BCC_1.

(1) 证明: $AB=AC$;

(2) 设二面角 $A-BD-C$ 为 60°, 求 B_1C 与平面 BCD 所成的角的大小.



20. 某车间甲组有 10 名工人, 其中有 4 名女工人; 乙组有 10 名工人, 其中有 6 名女工人. 现采用分层抽样方法 (层内采用不放回简单随机抽样) 从甲、乙两组中共抽取 4 名工人进行技术考核.
(1) 求从甲、乙两组各抽取的人数;
(2) 求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率;
(3) 求抽取的 4 名工人中恰有 2 名男工人的概率.

21. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-(1+a)x^2+4ax+24a$, 其中常数 $a>1$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)>0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

22. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过右焦点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 当 l 的斜率为 1 时, 坐标原点 O 到 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(1) 求 a, b 的值;
(2) C 上是否存在点 P, 使得当 l 绕 F 转到某一位置时, 有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立? 若存在, 求出所有的 P 的坐标与 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

2009 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\sin x\cos x$ 的最小值是 （ ）

(A) -1 (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x^2-2x>0\}$, 则 $\complement_U A$ 等于 （ ）

(A) $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$ (B) $\{x|0<x<2\}$

(C) $\{x|x<0$ 或 $x>2\}$ (D) $\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2\}$

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_3=6$, $a_1=4$, 则公差 d 等于 （ ）

(A) 1 (B) $\dfrac{5}{3}$ (C) 2 (D) 3

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\mathrm{d}x$ 等于 （ ）

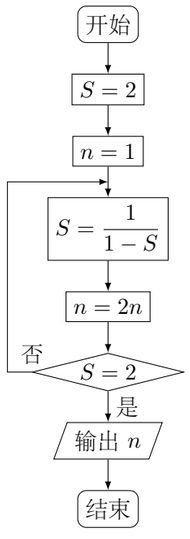
(A) π (B) 2 (C) $\pi-2$ (D) $\pi+2$

5. 下列函数 $f(x)$ 中, 满足“对任意 x_1, $x_2\in(0,+\infty)$, 当 $x_1<x_2$ 时, 都有 $f(x_1)>f(x_2)$ 的是 （ ）

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (B) $f(x)=(x-1)^2$

(C) $f(x)=\mathrm{e}^x$ (D) $f(x)=\ln(x+1)$

6. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果是 （ ）



(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

7. 设 m, n 是平面 α 内的两条不同直线, l_1, l_2 是平面 β 内的两条相交直线, 则 $\alpha\parallel\beta$ 的一个充分而不必要条件是 （ ）

(A) $m\parallel\beta$ 且 $l_1\parallel\alpha$ (B) $m\parallel l_1$ 且 $n\parallel l_2$

(C) $m\parallel\beta$ 且 $n\parallel\beta$ (D) $m\parallel\beta$ 且 $n\parallel l_2$

8. 已知某运动员每次投篮命中的概率都为 40%. 现采用随机模拟的方法估计该运动员三次投篮恰有两次命中的概率: 先由计算器算出 0 到 9 之间取整数值的随机数, 指定 1, 2, 3, 4 表示命中, 5, 6, 7, 8, 9, 0 表示不命中; 再以每三个随机数为一组, 代表三次投篮的结果. 经随机模拟产生了 20 组随机数:

907 966 191 925 271 932 812 458 569 683
431 257 393 027 556 488 730 113 537 989

据此估计, 该运动员三次投篮恰有两次命中的概率为 （ ）

(A) 0.35 (B) 0.25 (C) 0.20 (D) 0.15

9. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为同一平面内具有相同起点的任意三个非零向量, 且满足 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$, 则 $|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$ 的值一定等于 （ ）

(A) 以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为两边的三角形面积

(B) 以 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为两边的三角形面积

(C) 以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积

(D) 以 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行四边形的面积

10. 函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称. 据此可推测, 对任意的非零实数 a, b, c, m, n, p, 关于 x 的方程 $m[f(x)]^2+nf(x)+p=0$ 的解集都不可能是 （ ）

(A) $\{1,2\}$ (B) $\{1,4\}$ (C) $\{1,2,3,4\}$ (D) $\{1,4,16,64\}$

二、填空题

11. 若 $\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}=a+b\mathrm{i}$ (i 为虚数单位, a, $b\in\mathbf{R}$) 则 $a+b=$_____.

12. 某校开展“爱我海西、爱我家乡”摄影比赛, 9 位评委为参赛作品 A 给出的分数如茎叶图所示. 记分员在去掉一个最高分和一个最低分后, 算的平均分为 91, 复核员在复核时, 发现有一个数字 (茎叶图中的 x) 无法看清. 若记分员计算无误, 则数字 x 应该是_____.

	作品 A					
8	8	9	9			
9	2	3	x	2	1	4

13. 过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 45° 的直线交抛物线于 A、B 两点, 若线段 AB 的长为 8, 则 $p=$_____.

14. 若曲线 $f(x)=ax^3+\ln x$ 存在垂直于 y 轴的切线, 则实数 a 取值范围是_____.

15. 五位同学围成一圈依序循环报数, 规定:

① 第一位同学首次报出的数为 1, 第二位同学首次报出的数也为 1, 之后每位同学所报出的数都是前两位同学所报出的数之和;

② 若报出的数为 3 的倍数, 则报该数的同学需拍手一次.

已知甲同学第一个报数, 当五位同学依序循环报到第 100 个数时, 甲同学拍手的总次数为_____.

三、解答题

16. 从集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 的所有非空子集中, 等可能地取出一个.

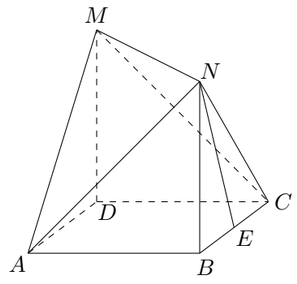
(1) 记性质 r: 集合中的所有元素之和为 10, 求所取出的非空子集满足性质 r 的概率;

(2) 记所取出的非空子集的元素个数为 ξ, 求 ξ 的分布列和数学期望 $\mathrm{E}\xi$.

17. 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $MD\perp$ 平面 $ABCD$, $NB\perp$ 平面 $ABCD$, 且 $MD=NB=1$, E 为 BC 的中点.

(1) 求异面直线 NE 与 AM 所成角的余弦值;

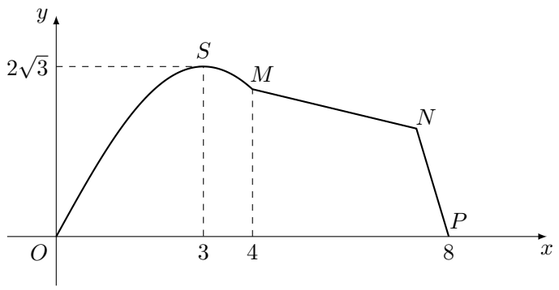
(2) 在线段 AN 上是否存在点 S, 使得 $ES\perp$ 平面 AMN? 若存在, 求线段 AS 的长; 若不存在, 请说明理由.



18. 如图, 某市拟在长为 8 km 的道路 OP 的一侧修建一条运动赛道. 赛道的前一部分为曲线段 OSM, 该曲线段为函数 $y=A\sin\omega x$ $(A>0,\ \omega>0)$, $x\in[0,4]$ 的图象, 且图象的最高点为 $S\left(3,2\sqrt{3}\right)$; 赛道的后一部分为折线段 MNP. 为保证参赛运动员的安全, 限定 $\angle MNP=120^\circ$.

(1) 求 A, ω 的值和 M, P 两点间的距离;

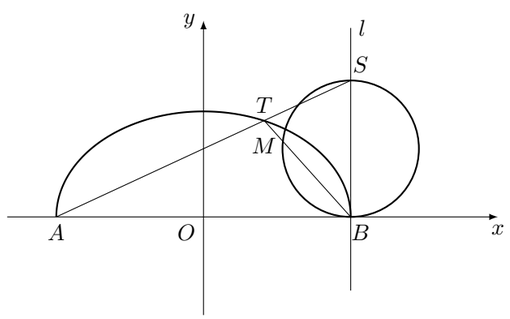
(2) 应如何设计, 才能使折线段赛道 MNP 最长?



19. 已知 A, B 分别为曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(y\geqslant 0,\ a>0)$ 与 x 轴的左、右两个交点, 直线 l 过点 B, 且与 x 轴垂直, S 为 l 上异于点 B 的一点, 连结 AS 交曲线 C 于点 T.

(1) 若曲线 C 为半圆, 点 T 为圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点, 试求出点 S 的坐标;

(2) 如图, 点 M 是以 SB 为直径的圆与线段 TB 的交点. 试问: 是否存在 a, 使得 O, M, S 三点共线? 若存在, 求出 a 的值, 若不存在, 请说明理由.



20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+bx$, 且 $f'(-1)=0$.

(1) 试用含 a 的代数式表示 b, 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 令 $a=-1$, 设函数 $f(x)$ 在 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ 处取得极值, 记点 $M(x_1,f(x_1))$, $N(x_2,f(x_2))$, $P(m,f(m))$, $x_1<m<x_2$. 请仔细观察曲线 $f(x)$ 在点 P 处的切线与线段 MP 的位置变化趋势, 并解释以下问题:

① 若对任意的 $m\in(t,x_2]$, 线段 MP 与曲线 $f(x)$ 均有异于 M, P 的公共点, 试确定 t 的最小值, 并证明你的结论;

② 若存在点 $Q(n,f(n))$, $x_1\leqslant n<m$, 使得线段 PQ 与曲线 $f(x)$ 有异于 P、Q 的公共点, 请直接写出 m 的取值范围. (不必给出求解过程)

21. 三选二.

【A】已知矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-1\end{pmatrix}$ 所对应的线性变换把点 $A(x,y)$ 变成点 $A'(13,5)$, 试求 M 的逆矩阵及点 A 的坐标.

【B】已知直线 l: $3x+4y-12=0$ 与圆 C: $\begin{cases}x=-1+2\cos\theta\\y=2+2\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 试判断他们的公共点个数.

【C】解不等式 $|2x-1|<|x|+1$.

2009 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x|x>0\}$, $B=\{x|x<3\}$, 则 $A\cap B$ 等于

(A) $\{x|x<0\}$　(B) $\{x|0<x<3\}$ (C) $\{x|x>3\}$　(D) $\mathbf{R}$

2. 下列函数中, 与函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 有相同定义域的是

(A) $f(x)=\ln x$　(B) $f(x)=\dfrac{1}{x}$　(C) $f(x)=|x|$　(D) $f(x)=\mathrm{e}^x$

.

3. 一个容量 100 的样本, 其数据的分组与各组的频数如下表

组别	$(0,10]$	$(20,20]$	$(20,30)$	$(30,40)$	$(40,50]$	$(50,60]$	$(60,70]$
频数	12	13	24	15	16	13	7

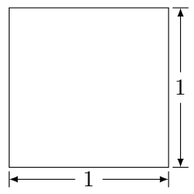
则样本数据落在 $(10,40)$ 上的频率为　(　)

(A) 0.13　(B) 0.39　(C) 0.52　(D) 0.64

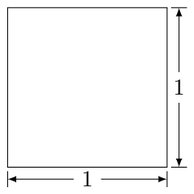
4. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ $(a>0)$ 的离心率为 2, 则 a 等于　(　)

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) 1

5. 如图, 某几何体的正视图与侧视图都是边长为 1 的正方形, 且体积为 $\dfrac{1}{2}$. 则该集合体的俯视图可以是　(　)

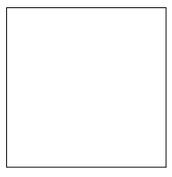


正视图

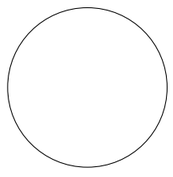


侧视图

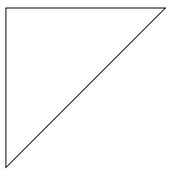
(A)



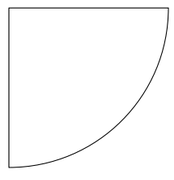
(B)



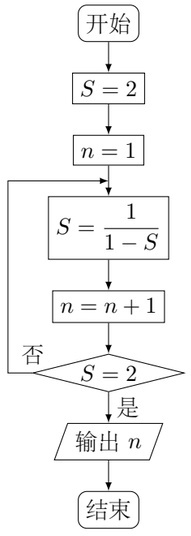
(C)



(D)



6. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果是　(　)

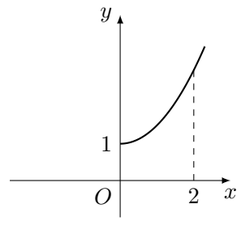


(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

7. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, $BC=4$, $CA=3$, 则角 C 的大小为(　)

(A) 75°　(B) 60°　(C) 45°　(D) 30°

8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则在 $(-2,0)$ 上, 下列函数中与 $f(x)$ 的单调性不同的是　(　)



(A) $y=x^2+1$　(B) $y=|x|+1$

(C) $y=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0\\ x^3+1, & x<0\end{cases}$　(D) $y=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\geqslant 0\\ \mathrm{e}^{-x}, & x<0\end{cases}$

9. 在平面直角坐标系中, 若不等式组 $\begin{cases}x+y-1\geqslant 0\\ x-1\leqslant 0\\ ax-y+1\geqslant 0\end{cases}$ (a 为常数) 所表示的平面区域内的面积等于 2, 则 a 的值为　(　)

(A) -5　(B) 1　(C) 2　(D) 3

10. 设 m, n 是平面 α 内的两条不同直线, l_1, l_2 是平面 β 内的两条相交直线, 则 $\alpha\parallel\beta$ 的一个充分而不必要条件是　(　)

(A) $m\parallel\beta$ 且 $l_1\parallel\alpha$　(B) $m\parallel l_1$ 且 $n\parallel l_2$

(C) $m\parallel\beta$ 且 $n\parallel\beta$　(D) $m\parallel\beta$ 且 $n\parallel l_2$

11. 函数 $f(x)$ 的零点与 $g(x)=4^x+2x-2$ 的零点之差的绝对值不超过 0.25, 则 $f(x)$ 可以是　(　)

(A) $f(x)=4x-1$　(B) $f(x)=(x-1)^2$

(C) $f(x)=\mathrm{e}^x-1$　(D) $f(x)=\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

12. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为同一平面内具有相同起点的任意三个非零向量, 且满足 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$, 则 $|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$ 的值一定等于　(　)

(A) 以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积

(B) 以 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行四边形的面积

(C) 以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为两边的三角形面积

(D) 以 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为两边的三角形面积

二、填空题

13. 复数 $\mathrm{i}^2(1+\mathrm{i})$ 的实部是_____.

14. 点 A 为周长等于 3 的圆周上的一个定点. 若在该圆周上随机取一点 B, 则劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度小于 1 的概率为_____.

15. 若曲线 $f(x)=ax^2+\ln x$ 存在垂直于 y 轴的切线, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 五位同学围成一圈依序循环报数, 规定:
① 第一位同学首次报出的数为 1, 第二位同学首次报出的数也为 1, 之后每位同学所报出的数都是前两位同学所报出的数之和;
② 若报出的数为 3 的倍数, 则报该数的同学需拍手一次.
当第 30 个数被报出时, 五位同学拍手的总次数为_____.

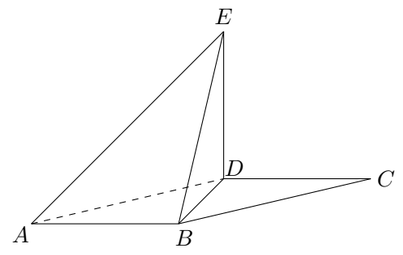
三、解答题

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, $a_4=16$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 a_3, a_5 分别为等差数列 $\{b_n\}$ 的第 3 项和第 5 项, 试求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n.

18. 袋中有大小、形状相同的红、黑球各一个, 现一次有放回地随机摸取 3 次, 每次摸取一个球.
(1) 试问: 一共有多少种不同的结果? 请列出所有可能的结果;
(2) 若摸到红球时得 2 分, 摸到黑球时得 1 分, 求 3 次摸球所得总分为 5 的概率.

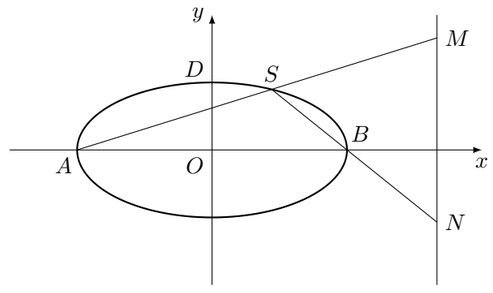
19. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$, 其中 $\omega>0$, $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$.
(1) 若 $\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\varphi-\sin\dfrac{3\pi}{4}\sin\varphi=0$, 求 φ 的值;
(2) 在 (1) 的条件下, 若函数 $f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴之间的距离等于 $\dfrac{\pi}{3}$, 求函数 $f(x)$ 的解析式; 并求最小正实数 m, 使得函数 $f(x)$ 的图象象左平移 m 个单位所对应的函数是偶函数.

20. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle DAB=60^\circ$, $AB=2$, $AD=4$. 将 $\triangle CBD$ 沿 BD 折起到 $\triangle EBD$ 的位置, 使平面 $EDB\perp$ 平面 ABD.
(1) 求证: $AB\perp DE$;
(2) 求三棱锥 $E-ABD$ 的侧面积.



21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+bx$, 且 $f'(-1)=0$.
(1) 试用含 a 的代数式表示 b;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(3) 令 $a=-1$, 设函数 $f(x)$ 在 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ 处取得极值, 记点 $M(x_1,f(x_1))$, $N(x_2,f(x_2))$. 证明: 线段 MN 与曲线 $f(x)$ 存在异于 M、N 的公共点.

22. 已知直线 $x-2y+2=0$ 经过椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左顶点 A 和上顶点 D, 椭圆 C 的右顶点为 B, 点 S 和椭圆 C 上位于 x 轴上方的动点, 直线, AS, BS 与直线 l: $x=\dfrac{10}{3}$ 分别交于 M, N 两点.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 求线段 MN 的长度的最小值;
(3) 当线段 MN 的长度最小时, 在椭圆 C 上是否存在这样的点 T, 使得 $\triangle TSB$ 的面积为 $\dfrac{1}{5}$? 若存在, 确定点 T 的个数, 若不存在, 说明理由.

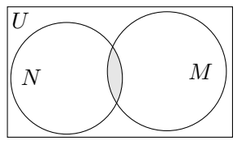


2009 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x|-2\leqslant x-1\leqslant 2\}$ 和 $N=\{x|x=2k-1,k=1,2,\cdots\}$ 的关系的韦恩 (Venn) 图如图所示, 则阴影部分所示的集合的元素共有 (　　)



(A) 3 个　　(B) 2 个　　(C) 1 个　　(D) 无穷个

2. 设 z 是复数, $\alpha(z)$ 表示满足 $z^n=1$ 的最小正整数 n, 则对虚数单位 i, $\alpha(\mathrm{i})=$ (　　)

(A) 8　　(B) 6　　(C) 4　　(D) 2

3. 若函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的反函数, 其图象经过点 $(\sqrt{a},a)$, 则 $f(x)=$ (　　)

(A) $\log_2 x$　　(B) $\log_{\frac{1}{2}} x$　　(C) $\dfrac{1}{2^x}$　　(D) x^2

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$, $n=1,2,\cdots$, 且 $a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}$ ($n\geqslant 3$), 则当 $n\geqslant 1$ 时, $\log_2 a_1+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{2n-1}=$ (　　)

(A) $n(2n-1)$　　(B) $(n+1)^2$　　(C) n^2　　(D) $(n-1)^2$

5. 给定下列四个命题:
① 若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行, 那么这两个平面相互平行;
② 若一个平面经过另一个平面的垂线, 那么这两个平面相互垂直;
③ 垂直于同一直线的两条直线相互平行;
④ 若两个平面垂直, 那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.
其中, 为真命题的是 (　　)

(A) ①和②　　(B) ②和③　　(C) ③和④　　(D) ②和④

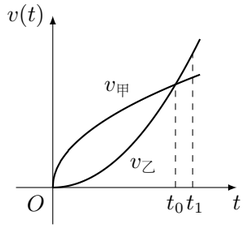
6. 一质点受到平面上的三个力 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ (单位: 牛顿) 的作用而处于平衡状态. 已知 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ 成 60° 角, 且 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ 的大小分别为 2 和 4, 则 $\boldsymbol{F}_3$ 的大小为 (　　)

(A) 6　　(B) 2　　(C) $2\sqrt{5}$　　(D) $2\sqrt{7}$

7. 2010 年广州亚运会组委会要从小张、小赵、小李、小罗、小王五名志愿者中选派四人分别从事翻译、导游、礼仪、司机四项不同工作, 若其中小张和小赵只能从事前两项工作, 其余三人均能从事这四项工作, 则不同的选派方案共有 (　　)

(A) 36 种　　(B) 12 种　　(C) 18 种　　(D) 48 种

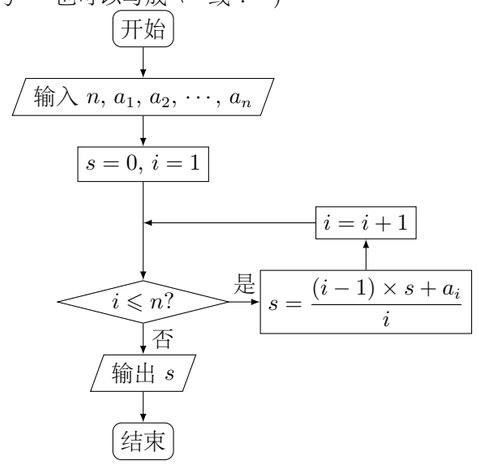
8. 已知甲、乙两车由同一起点同时出发, 并沿同一路线 (假定为直线) 行驶. 甲车、乙车的速度曲线分别为 $v_{甲}$ 和 $v_{乙}$ (如图所示). 那么对于图中给定的 t_0 和 t_1, 下列判断中一定正确的是 (　　)



(A) 在 t_1 时刻, 甲车在乙车前面　　(B) t_1 时刻后, 甲车在乙车后面
(C) 在 t_0 时刻, 两车的位置相同　　(D) t_0 时刻后, 乙车在甲车前面

二、填空题

9. 随机抽取某产品 n 件, 测得其长度分别为 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 则如图所示的程序框图输出的 $s=$_____, s 表示的样本的数字特征是_____. (注: 框图中的赋值符号"="也可以写成"←"或":=")



10. 若平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平行于 x 轴, $\boldsymbol{b}=(2,-1)$, 则 $\boldsymbol{a}=$_____.

11. 已知椭圆 G 的中心在坐标原点, 长轴在 x 轴上, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 且 G 上一点到 G 的两个焦点的距离之和为 12, 则椭圆 G 的方程为_____.

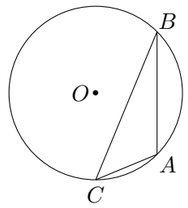
12. 已知离散型随机变量 X 的分布列如下表. 若 $EX=0$, $DX=1$, 则 $a=$_____, $b=$_____.

X	-1	0	1	2
P	a	b	c	$\dfrac{1}{12}$

13. 若直线 l_1: $\begin{cases}x=1-2t\\y=2+kt\end{cases}$ (t 为参数) 与直线 l_2: $\begin{cases}x=s\\y=1-2s\end{cases}$ (s 为参数) 垂直, 则 $k=$_____.

14. 不等式 $\dfrac{|x+1|}{|x+2|}\geqslant 1$ 的实数解为_____.

15. 如图, 点 A, B, C 是圆 O 上的点, 且 $AB=4$, $\angle ACB=45°$, 则圆 O 的面积等于_____.



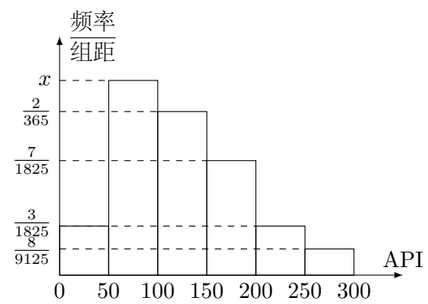
三、解答题

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\theta,-2)$ 与 $\boldsymbol{b}=(1,\cos\theta)$ 互相垂直, 其中 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.
(1) 求 $\sin\theta\cos\theta$ 的值;
(2) 若 $\sin(\theta-\varphi)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, 求 $\cos\varphi$ 的值.

17. 根据空气质量指数 API (为整数) 的不同, 可将空气质量分级如下表: 对某城市一年 (365 天) 的空气质量进行监测, 获得 API 数据按照区间 $[0,50]$, $(50,100]$, $(100,150]$, $(150,200]$, $(200,250]$, $(250,300]$ 进行分组, 得到频率分布直方图如图.

API	$0\sim 50$	$51\sim 100$	$101\sim 150$	$151\sim 200$	$201\sim 250$	$251\sim 300$	>300
级别	I	II	III_1	III_2	IV_1	IV_2	V
状况	优	良	轻微污染	轻度污染	中度污染	中重度污染	重度污染

(1) 求直方图中 x 的值;
(2) 计算一年中空气质量分别为良和轻微污染的天数;
(3) 求该城市某一周至少有 2 天的空气质量为良或轻微污染的概率.
(结果用分数表示. 已知 $5^7=78125$, $2^7=128$, $\dfrac{3}{1825}+\dfrac{2}{365}+\dfrac{7}{1825}+\dfrac{3}{1825}+\dfrac{8}{9125}=\dfrac{123}{9125}$, $365=73\times 5$)

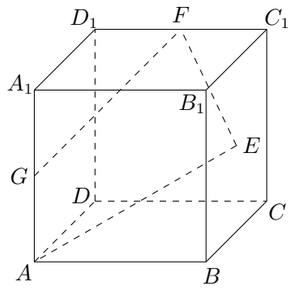


18. 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 E 是正方形 BCC_1B_1 的中心, 点 F、G 分别是棱 C_1D_1, AA_1 的中点. 设点 E_1, G_1 分别是点 E、G 在平面 DCC_1D_1 内的正投影.

(1) 求以 E 为顶点, 以四边形 $FGAE$ 在平面 DCC_1D_1 内的正投影为底面边界的棱锥的体积;

(2) 证明: 直线 $FG_1\perp FEE_1$;

(3) 求异面直线 E_1G_1 与 EA 所成角的正弦值.



19. 已知曲线 C: $y=x^2$ 与直线 l: $x-y+2=0$ 交于两点 $A(x_A,y_A)$ 和 $B(x_B,y_B)$, 且 $x_A<x_B$. 记曲线 C 在点 A 和点 B 之间那一段 L 与线段 AB 所围成的平面区域 (含边界) 为 D. 设点 $P(s,t)$ 是 L 上的任一点, 且点 P 与点 A 和点 B 均不重合.

(1) 若点 Q 是线段 AB 的中点, 试求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程;

(2) 若曲线 G: $x^2-2ax+y^2-4y+a^2+\dfrac{51}{25}=0$ 与 D 有公共点, 试求 a 的最小值.

20. 已知二次函数 $y=g(x)$ 的导函数的图象与直线 $y=2x$ 平行, 且 $y=g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 $m-1$ ($m\neq 0$). 设 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 上的点 P 到点 $Q(0,2)$ 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$, 求 m 的值;

(2) k ($k\in\mathbf{R}$) 如何取值时, 函数 $y=f(x)-kx$ 存在零点, 并求出零点.

21. 已知曲线 C_n: $x^2-2nx+y^2=0$ ($n=1,\ 2,\ \cdots$). 从点 $P(-1,0)$ 向曲线 C_n 引斜率为 k_n ($k_n>0$) 的切线 l_n, 切点为 $P_n(x_n,y_n)$.

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的通项公式;

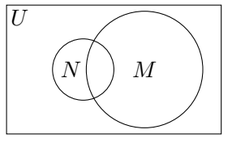
(2) 证明: $x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\dfrac{x_n}{y_n}$.

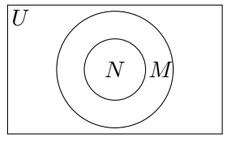
2009 年普通高等学校招生考试（广东卷）

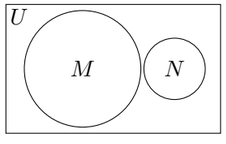
文科数学

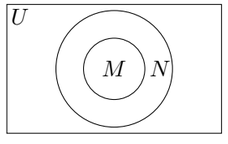
一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 则正确表示集合 $M=\{-1,0,1\}$ 和 $N=\{x\,|x^2+x=0\}$ 关系的韦恩 (Venn) 图是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

2. 下列 n 的取值中, 使 $\mathrm{i}^n=1$ (i 是虚数单位) 的是 （ ）

(A) $n=2$　　(B) $n=3$　　(C) $n=4$　　(D) $n=5$

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$, $\boldsymbol{b}=(-x,x^2)$, 则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ （ ）

(A) 平行于 x 轴　　(B) 平行于第一、三象限的角平分线

(C) 平行于 y 轴　　(D) 平行于第二、四象限的角平分线

4. 若函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的反函数, 且 $f(2)=1$, 则 $f(x)=$ （ ）

(A) $\log_2 x$　　(B) $\dfrac{1}{2^x}$　　(C) $\log_{\frac{1}{2}} x$　　(D) 2^{x-2}

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为正数, 且 $a_3\cdot a_9=2{a_5}^2$, $a_2=1$, 则 $a_1=$（ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 2

6. 给定下列四个命题:

① 若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行, 那么这两个平面相互平行;

② 若一个平面经过另一个平面的垂线, 那么这两个平面相互垂直;

③ 垂直于同一直线的两条直线相互平行;

④ 若两个平面垂直, 那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中, 为真命题的是 （ ）

(A) ①和②　　(B) ②和③　　(C) ③和④　　(D) ②和④

7. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边分别为 a, b, c. 若 $a=c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, 且 $\angle A=75^\circ$, 则 $b=$ （ ）

(A) 2　　(B) $4+2\sqrt{3}$　　(C) $4-2\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

8. 函数 $f(x)=(x-3)\mathrm{e}^x$ 的单调递增区间是 （ ）

(A) $(-\infty,2)$　　(B) $(0,3)$　　(C) $(1,4)$　　(D) $(2,+\infty)$

9. 函数 $y=2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1$ 是 （ ）

(A) 最小正周期为 π 的奇函数　　(B) 最小正周期为 π 的偶函数

(C) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇函数　　(D) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的偶函数

10. 广州 2010 年亚运会火炬传递在 A, B, C, D, E 五个城市之间进行, 各城市之间的距离 (单位: 百公里) 见下表. 若以 A 为起点, E 为终点, 每个城市经过且只经过一次, 那么火炬传递的最短路线距离是 （ ）

	A	B	C	D	E
A	0	5	4	5	6
B	5	0	7	6	2
C	4	7	0	9	8.6
D	5	6	9	0	5
E	6	2	8.6	5	0

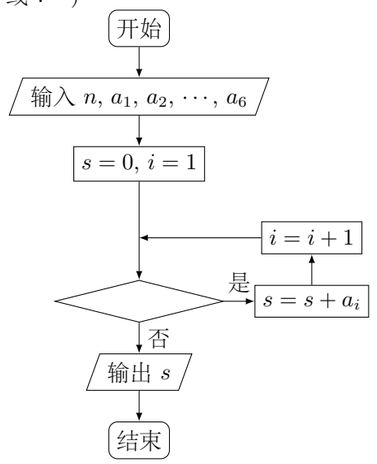
(A) 20.6　　(B) 21　　(C) 22　　(D) 23

二、填空题

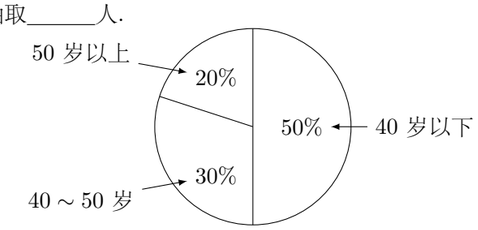
11. 某篮球队 6 名主力队员在最近三场比赛中投进的三分球个数如下表所示:

队员 i	1	2	3	4	5	6
三分球个数	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

如图是统计该 6 名队员在最近三场比赛中投进的三分球总数的程序框图, 则图中判断框应填_____, 输出的 s=_____. (注: 框图中的赋值符号“=”也可以写成“←”或“:=”)



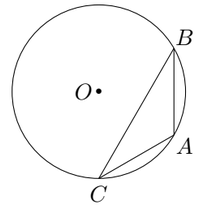
12. 某单位 200 名职工的年龄分布情况如图, 现要从中抽取 40 名职工作样本. 用系统抽样法, 将全体职工随机按 1 ～ 200 编号, 并按编号顺序平均分为 40 组 (1 ～ 5 号, 6 ～ 10 号, ⋯, 196 ～ 200 号). 若第 5 组抽出的号码为 22, 则第 8 组抽出的号码应是_____. 若用分层抽样方法, 则 40 岁以下年龄段应抽取_____人.



13. 以点 $(2,-1)$ 为圆心且与直线 $x+y=6$ 相切的圆的方程是_____.

14. 若直线 $\begin{cases}x=1-2t\\y=2+3t\end{cases}$ (t 为参数) 与直线 $4x+ky=1$ 垂直, 则常数 $k=$_____.

15. 如图, 点 A, B, C 是圆 O 上的点, 且 $AB=4$, $\angle ACB=30^\circ$, 则圆 O 的面积等于_____.



三、解答题

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\theta,-2)$ 与 $\boldsymbol{b}=(1,\cos\theta)$ 互相垂直, 其中 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 求 $\sin\theta\cos\theta$ 的值;

(2) 若 $5\cos(\theta-\varphi)=3\sqrt{5}\cos\varphi$, $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, 求 $\cos\varphi$ 的值.

17. 某高速公路收费站入口处的安全标识墩如图 1 所示. 墩的上半部分是正四棱锥 $P-EFGH$, 下半部分是长方体 $ABCD-EFGH$. 图 2、图 3 分别是该标识墩的正 (主) 视图和俯视图 (单位: cm).

(1) 请画出该安全标识墩的侧 (左) 视图;

(2) 求该安全标识墩的体积;

(3) 证明: 直线 $BD\perp$ 平面 PEG.

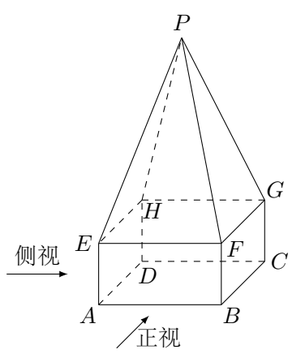


图 1

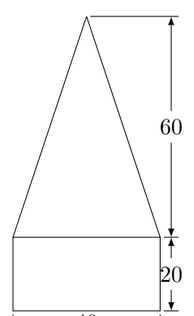


图 2

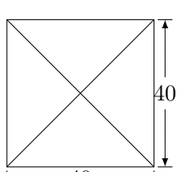


图 3

18. 随机抽取某中学甲、乙两班各 10 名同学, 测量他们的身高 (单位: cm), 获得身高数据的茎叶图如图.
(1) 根据茎叶图判断哪个班的平均身高较高;
(2) 计算甲班的样本方差;
(3) 现从乙班这 10 名同学中随机抽取两名身高不低于 173 cm 的同学, 求身高为 176 cm 的同学被抽中的概率.

甲班					乙班				
			2	18	1				
9	9	1	0	17	0	3	6	8	9
8	8	3	2	16	2	5	8		
			8	15	9				

19. 已知椭圆 G 的中心在坐标原点, 长轴在 x 轴上, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 两个焦点分别为 F_1 和 F_2, 椭圆 G 上一点到 F_1 和 F_2 的距离之和为 12. 圆 C_k: $x^2+y^2+2kx-4y-21=0$ ($k\in\mathbf{R}$) 的圆心为点 A_k.
(1) 求椭圆 G 的方程;
(2) 求 $\triangle A_kF_1F_2$ 面积;
(3) 问是否存在圆 C_k 包围椭圆 G? 请说明理由.

20. 已知点 $\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$ 是函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) 的图象上一点. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $f(n)-c$. 数列 $\{b_n\}$ ($b_n>0$) 的首项为 c, 且前 n 项和 S_n 满足 $S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$ ($n\geqslant 2$).
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 若数列 $\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n, 问满足 $T_n>\dfrac{1000}{2009}$ 的最小正整数 n 是多少?

21. 已知二次函数 $y=g(x)$ 的导函数的图象与直线 $y=2x$ 平行, 且 $y=g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 $m-1$ ($m\neq 0$). 设 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 上的点 P 到点 $Q(0,2)$ 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$, 求 m 的值;
(2) k ($k\in\mathbf{R}$) 如何取值时, 函数 $y=f(x)-kx$ 存在零点, 并求出零点.

2009 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $P=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(1,0)+m(0,1),m\in\mathbf{R}\}$, $Q=\{\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}=(1,1)+n(-1,1),n\in\mathbf{R}\}$ 是两个向量集合, 则 $P\cap Q=$ （ ）

(A) $\{(1,1)\}$ (B) $\{(-1,1)\}$ (C) $\{(1,0)\}$ (D) $\{(0,1)\}$

2. 函数 $y=\dfrac{1-ax}{1+ax}\left(x\in\mathbf{R},\ x\neq-\dfrac{1}{a}\right)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\dfrac{1-ax}{1+ax}\left(x\in\mathbf{R},\ x\neq-\dfrac{1}{a}\right)$ (B) $y=\dfrac{1+ax}{1-ax}\left(x\in\mathbf{R},\ x\neq\dfrac{1}{a}\right)$

(C) $y=\dfrac{1+x}{a(1-x)}\ (x\in\mathbf{R},\ x\neq1)$ (D) $y=\dfrac{1-x}{a(1+x)}\ (x\in\mathbf{R},\ x\neq-1)$

3. 投掷两颗骰子, 得到其向上的点数分别为 m 和 n, 则复数 $(m+n\mathrm{i})(n-m\mathrm{i})$ 为实数的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{12}$

4. 函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-2$ 的图象 F 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移到 F', F' 的解析式 $y=f(x)$, 当 $y=f(x)$ 为奇函数时, 向量 $\boldsymbol{a}$ 可以等于 （ ）

(A) $\left(-\dfrac{\pi}{6},-2\right)$ (B) $\left(-\dfrac{\pi}{6},2\right)$ (C) $\left(\dfrac{\pi}{6},-2\right)$ (D) $\left(\dfrac{\pi}{6},2\right)$

5. 将甲、乙、丙、丁四名学生分到三个不同的班, 每个班至少分到一名学生, 且甲、乙两名学生不能分到一个班, 则不同分法的种数为 （ ）

(A) 18 (B) 24 (C) 30 (D) 36

6. 设 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+x\right)^{2n}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n}x^{2n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n})^2-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})^2\right]=$（ ）

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的准线过椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点, 则直线 $y=kx+2$ 与椭圆至多有一个交点的充要条件是 （ ）

(A) $k\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ (B) $k\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

(C) $k\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (D) $k\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

8. 在“家电下乡”活动中, 某厂要将 100 台洗衣机运往邻近的乡镇, 现有 4 辆甲型货车和 8 辆乙型货车可供使用, 每辆甲型货车运输费用 400 元, 可装洗衣机 20 台; 每辆乙型货车运输费用 300 元, 可装洗衣机 10 台, 若每辆至多只运一次, 则该厂所花的最少运输费用为 （ ）

(A) 2000 元 (B) 2200 元 (C) 2400 元 (D) 2800 元

9. 设球的半径为时间 t 的函数 $R(t)$. 若球的体积以均匀速度 c 增长, 则球的表面积的增长速度与球半径 （ ）

(A) 成正比, 比例系数为 c (B) 成正比, 比例系数为 $2c$

(C) 成反比, 比例系数为 c (D) 成反比, 比例系数为 $2c$

10. 古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种性状来研究数, 例如:

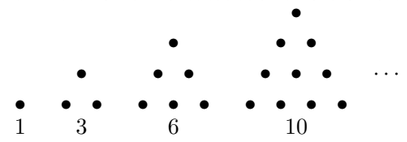


图 1

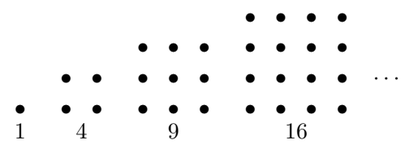


图 2

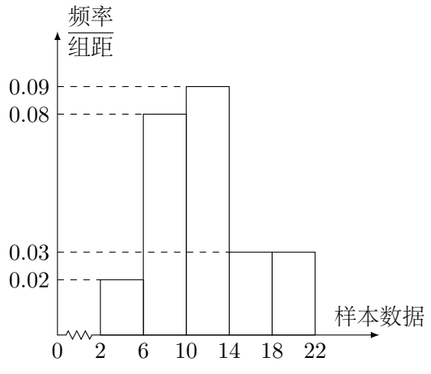
他们研究过图 1 中的 1, 3, 6, 10, $\cdots$, 由于这些数能够表示成三角形, 将其称为三角形数; 类似地, 称图 2 中的 1, 4, 9, 16$\cdots$ 这样的数成为正方形数. 下列数中及时三角形数又是正方形数的是 （ ）

(A) 289 (B) 1024 (C) 1225 (D) 1378

二、填空题

11. 已知关于 x 的不等式 $\dfrac{ax-1}{x+1}<0$ 的解集是 $(-\infty,-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, 则 $a=$_____.

12. 样本容量为 200 的频率分布直方图. 根据样本的频率分布直方图估计, 样本数落在 $[6,10)$ 内的频数为_____, 数据落在 $[2,10)$ 内的概率约为_____.



13. 卫星和地面之间的电视信号沿直线传播, 电视信号能够传送到达的地面区域, 称为这个卫星的覆盖区域. 为了转播 2008 年北京奥运会, 我国发射了“中星九号”广播电视直播卫星, 它离地球表面的距离约为 36000 km. 已知地球半径约为 6400 km, 则“中星九号”覆盖区域内的任意两点的球面距离的最大值约为_____km. (结果中保留反余弦的符号)

14. 已知函数 $f(x)=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin x$, 则 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=m$ (m 为正整数), $a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & \text{当}a_n\text{为偶数时}\\ 3a_n+1, & \text{当}a_n\text{为奇数时}\end{cases}$. 若 $a_6=1$, 则 m 所有可能的取值为_____.

三、解答题

16. 一个盒子里装有 4 张大小形状完全相同的卡片, 分别标有数 2, 3, 4, 5; 另一个盒子也装有 4 张大小形状完全相同的卡片, 分别标有数 3, 4, 5, 6. 现从一个盒子中任取一张卡片, 其上面的数记为 x; 再从另一盒子里任取一张卡片, 其上面的数记为 y, 记随机变量 $\eta=x+y$, 求 η 的分布列和数学期望.

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$, $\boldsymbol{c}=(-1,0)$.

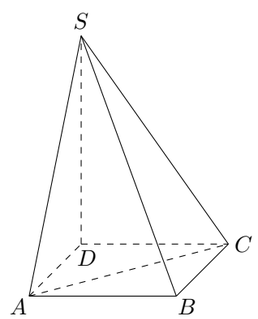
(1) 求向量 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的长度的最大值;

(2) 设 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, 求 $\cos\beta$ 的值.

18. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形, $SD\perp$ 平面 $ABCD$, $SD=2a$, $AD=\sqrt{2}a$, 点 E 是 SD 上的点, 且 $DE=\lambda a$ $(0<\lambda\leqslant 2)$.

(1) 求证: 对任意的 $\lambda\in(0,2]$, 都有 $AC\perp BE$;

(2) 设二面角 $C-AE-D$ 的大小为 θ, 直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 φ. 若 $\tan\theta\cdot\tan\varphi=1$, 求 λ 的值.



19. 已知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=-a_n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+2$ (n 为正整数).

(1) 令 $b_n=2^n a_n$, 求证数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n=\dfrac{n+1}{n}a_n$, $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$, 试比较 T_n 与 $\dfrac{5n}{2n+1}$ 的大小, 并予以证明.

20. 过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的对称轴上一点 $A(a,0)$ $(a>0)$ 的直线与抛物线相交于 M、N 两点, 自 M、N 向直线 l: $x=-a$ 作垂线, 垂足分别为 M_1、N_1.

(1) 当 $a=\dfrac{p}{2}$ 时, 求证: $AM_1\perp AN_1$;

(2) 记 $\triangle AMM_1$、$\triangle AM_1N_1$、$\triangle ANN_1$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3, 是否存在 λ, 使得对任意的 $a>0$, 都有 $S_2^2=\lambda S_1S_3$ 成立. 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

21. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes$: $p\otimes q=-\dfrac{1}{3}(p-c)(q-b)+4bc$ (p、q 为实常数). 记 $f_1(x)=x^2-2c$, $f_2(x)=x-2b$, $x\in\mathbf{R}$. 令 $f(x)=f_1(x)\otimes f_2(x)$.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 $-\dfrac{4}{3}$, 试确定 b、c 的值;

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 上斜率为 c 的切线与该曲线的公共点;

(3) 记 $g(x)=|f'(x)|$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值为 M. 若 $M\geqslant k$ 对任意的 b、c 恒成立, 试求 k 的最大值.

2009 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,1)$, $\boldsymbol{c}=(4,2)$, 则 $\boldsymbol{c}=$ （ ）

(A) $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　(B) $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　(C) $-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$　(D) $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$

2. 函数 $y=\dfrac{1-2x}{1+2x}\left(x\in\mathbf{R},\ x\neq-\dfrac{1}{2}\right)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\dfrac{1+2x}{1-2x}\left(x\in\mathbf{R},\ x\neq\dfrac{1}{2}\right)$　(B) $y=\dfrac{1-2x}{1+2x}\left(x\in\mathbf{R},\ x\neq-\dfrac{1}{2}\right)$

(C) $y=\dfrac{1+x}{2(1-x)}\ (x\in\mathbf{R},\ x\neq1)$　(D) $y=\dfrac{1-x}{2(1+x)}\ (x\in\mathbf{R},\ x\neq-1)$

3. “$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$”是“$\cos2\alpha=\dfrac{1}{2}$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

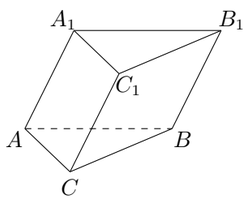
4. 从 5 名志愿者中选派 4 人在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天. 要求星期五有一人参加, 星期六有两人参加, 星期日有一人参加, 则不同的选派方法共有 （ ）

(A) 120 种　(B) 96 种　(C) 60 种　(D) 48 种

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的准线经过椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的焦点, 则 $b=$ （ ）

(A) 3　(B) $\sqrt{5}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{2}$

6. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90°$, $\angle ACC_1=60°$, $\angle BCC_1=45°$, 侧棱 CC_1 的长为 1, 则该三棱柱的高等于 （ ）



(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7. 函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-2$ 的图象 F 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移到 F', F' 的解析式 $y=f(x)$, 当 $y=f(x)$ 为奇函数时, 向量 $\boldsymbol{a}$ 可以等于 （ ）

(A) $\left(\dfrac{\pi}{6},-2\right)$　(B) $\left(\dfrac{\pi}{6},2\right)$　(C) $\left(-\dfrac{\pi}{6},-2\right)$　(D) $\left(-\dfrac{\pi}{6},2\right)$

8. 在“家电下乡”活动中, 某厂要将 100 台洗衣机运往邻近的乡镇, 现有 4 辆甲型货车和 8 辆乙型货车可供使用, 每辆甲型货车运输费用 400 元, 可装洗衣机 20 台; 每辆乙型货车运输费用 300 元, 可装洗衣机 10 台, 若每辆至多只运一次, 则该厂所花的最少运输费用为 （ ）

(A) 2000 元　(B) 2200 元　(C) 2400 元　(D) 2800 元

9. 设 $x\in\mathbf{R}$, 记不超过 x 的最大整数为 $[x]$, 令 $\{x\}=x-[x]$, 则 $\left\{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$, $\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$, $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ （ ）

(A) 是等差数列但不是等比数列　(B) 是等比数列但不是等差数列

(C) 既是等差数列又是等比数列　(D) 既不是等差数列也不是等比数列

10. 古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种性状来研究数, 例如:

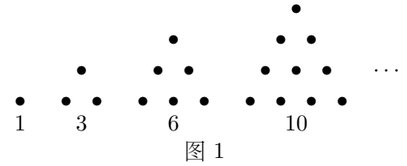


图 1

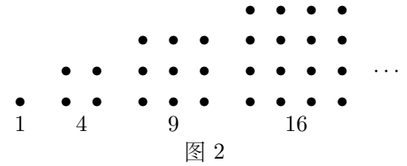


图 2

他们研究过图 1 中的 1, 3, 6, 10, $\cdots$, 由于这些数能够表示成三角形, 将其称为三角形数; 类似地, 称图 2 中的 1, 4, 9, 16$\cdots$ 这样的数成为正方形数. 下列数中及时三角形数又是正方形数的是 （ ）

(A) 289　(B) 1024　(C) 1225　(D) 1378

二、填空题

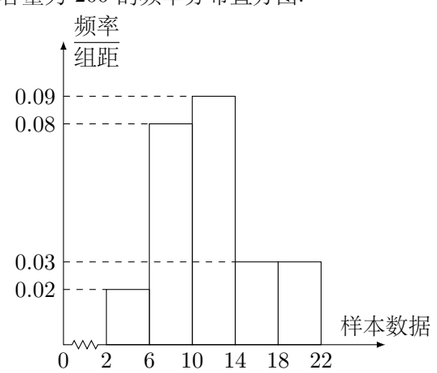
11. 已知 $(1+ax)^5=1+10x+bx^2+\cdots+a^5x^5$, 则 $b=$_____.

12. 甲、乙、丙三人将参加某项测试, 他们能达标的概率分别是 0.8、0.6、0.5, 则三人都达标的概率是_____, 三人中至少有一人达标的概率是_____.

13. 设集合 $A=\{x\ \log_2 x<1\}$, $B=\left\{x\ \dfrac{x-1}{x+2}<1\right\}$, 则 $A\cap B=$_____.

14. 过原点 O 作圆 $x^2+y^2-6x-8y+20=0$ 的两条切线, 设切点分别为 P、Q, 则线段 PQ 的长为_____.

15. 下图是样本容量为 200 的频率分布直方图.



根据样本的频率分布直方图估计, 样本数据落在 $[6,10)$ 内的频数为_____, 数据落在 $[2,10)$ 内的概率约为_____.

三、解答题

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, a、b、c 分别为角 A、B、C 所对的边, 且 $\sqrt{3}a=2c\sin A$.

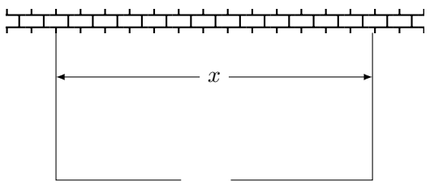
(1) 确定角 C 的大小:

(2) 若 $c=\sqrt{7}$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $a+b$ 的值.

17. 围建一个面积为 360 m^2 的矩形场地, 要求矩形场地的一面利用旧墙 (利用旧墙需维修), 其它三面围墙要新建, 在旧墙的对面的新墙上要留一个宽度为 2 m 的进出口. 如图所示, 已知旧墙的维修费用为 45 元/m, 新墙的造价为 180 元/m. 设利用的旧墙的长度为 x (单位: m), 修建此矩形场地围墙的总费用为 y (单位: 元).

(1) 将 y 表示为 x 的函数:

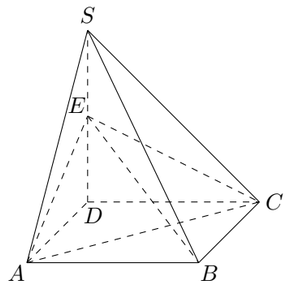
(2) 试确定 x, 使修建此矩形场地围墙的总费用最小, 并求出最小总费用.



18. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形, $SD \perp$ 平面 $ABCD$, $SD=AD=a$, 点 E 是 SD 上的点, 且 $DE=\lambda a$ $(0<\lambda \leqslant 1)$.

(1) 求证: 对任意的 $\lambda \in (0,1]$, 都有 $AC \perp BE$;

(2) 若二面角 $C-AE-D$ 的大小为 $60°$, 求 λ 的值.



19. 已知 $\{a_n\}$ 是一个公差大于 0 的等差数列, 且满足 $a_3a_6=55$, $a_2+a_7=16$.

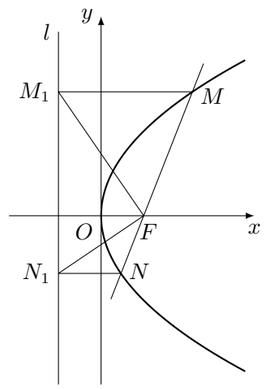
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 满足等式: $a_n=\dfrac{b_1}{2}+\dfrac{b_2}{2^2}+\dfrac{b_3}{2^3}+\cdots+\dfrac{b_n}{2^n}$ (n 为正整数), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20. 如图, 过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点 F 的直线与抛物线相交于 M、N 两点, 自 M、N 向准线 l 作垂线, 垂足分别为 M_1、N_1.

(1) 求证: $FM_1 \perp FN_1$;

(2) 记 $\triangle FMM_1$、$\triangle FM_1N_1$、$\triangle FNN_1$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3, 试判断 $S_2^2=4S_1S_3$ 是否成立, 并证明你的结论.



21. 已知关于 x 的函数 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x_3+bx^2+cx+bc$, 其导函数为 $f'(x)$. 令 $g(x)=|f'(x)|$, 记函数 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 M.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 $-\dfrac{4}{3}$, 试确定 b、c 的值;

(2) 若 $|b|>1$, 证明对任意的 c, 都有 $M>2$;

(3) 若 $M \geqslant k$ 对任意的 b、c 恒成立, 试求 k 的最大值.

2009 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 若 $\log_2 a<0$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^b>1$, 则 （ ）

(A) $a>1, b>0$　(B) $a>1, b<0$

(C) $0<a<1, b>0$　(D) $0<a<1, b<0$

2. 对于非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, “$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$”是“$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$”的 （ ）

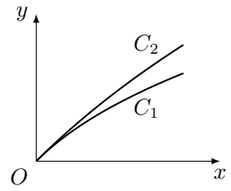
(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 φ $(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 的单位后, 得到函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 则 φ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{5\pi}{6}$　(C) $\dfrac{7\pi}{6}$　(D) $\dfrac{11\pi}{6}$

4. 如图, 当参数 $\lambda=\lambda_1, \lambda_2$ 时, 连续函数 $y=\dfrac{x}{1+\lambda x}$ $(x\geqslant 0)$ 的图象分别对应曲线 C_1 和 C_2, 则 （ ）



(A) $0<\lambda_1<\lambda$　(B) $0<\lambda<\lambda_1$　(C) $\lambda_1<\lambda_2<0$　(D) $\lambda_2<\lambda_1<0$

5. 从 10 名大学生毕业生中选 3 个人担任村长助理, 则甲、乙至少有 1 人入选, 而丙没有入选的不同选法的种数位 （ ）

(A) 85　(B) 56　(C) 49　(D) 28

6. 已知 D 是由不等式组 $\begin{cases}x-2y\geqslant 0\\ x+3y\geqslant 0\end{cases}$ 所确定的平面区域, 则圆 $x^2+y^2=4$ 在区域 D 内的弧长为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　(C) $\dfrac{3\pi}{4}$　(D) $\dfrac{3\pi}{2}$

7. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱上到异面直线 AB, CC_1 的距离相等的点的个数为 （ ）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

8. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义. 对于给定的正数 K, 定义函数 $f_K(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\leqslant K\\ K, & f(x)>K\end{cases}$. 取函数 $f(x)=2-x-\mathrm{e}^{-x}$. 若对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 恒有 $f_K(x)=f(x)$, 则 （ ）

(A) K 的最大值为 2　(B) K 的最小值为 2

(C) K 的最大值为 1　(D) K 的最小值为 1

二、填空题

9. 某班共 30 人, 其中 15 人喜爱篮球运动, 10 人喜爱乒乓球运动, 8 人对这两项运动都不喜爱, 则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为_____.

10. 在 $(1+x)^3+(1+\sqrt{x})^3+(1+\sqrt[3]{x})^3$ 的展开式中, x 的系数为_____. (用数字作答)

11. 若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $2\tan x+\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 的最小值为_____.

12. 已知以双曲线 C 的两个焦点及虚轴的两个端点为原点的四边形中, 有一个内角为 60°, 则双曲线 C 的离心率为_____.

13. 一个总体分为 A, B 两层, 其个体数之比为 $4:1$, 用分层抽样方法从总体中抽取一个容量为 10 的样本. 已知 B 层中甲、乙都被抽到的概率为 $\dfrac{1}{28}$, 则总体中的个体数为_____.

14. 在半径为 13 的球面上有 A, B, C 三点, $AB=6$, $BC=8$, $CA=10$, 则
(1) 球心到平面 ABC 的距离为_____;
(2) 过 A, B 两点的大圆面与平面 ABC 所成二面角为 (锐角) 的正切值为_____.

15. 将正 $\triangle ABC$ 分割成 n^2 $(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$ 个全等的小正三角形 (图 1, 图 2 分别给出了 $n=2, 3$ 的情形), 在每个三角形的顶点各放置一个数, 使位于 $\triangle ABC$ 的三边及平行于某边的任一直线上的数 (当数的个数不少于 3 时) 都分别依次成等差数列. 若顶点 A, B, C 处的三个数互不相同且和为 1, 记所有顶点上的数之和为 $f(n)$, 则有 $f(2)=2$, $f(3)=$_____, $\cdots$, $f(n)=$_____.

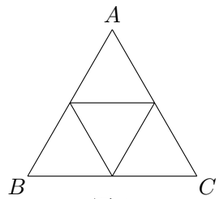


图 1

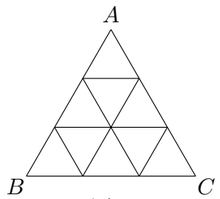


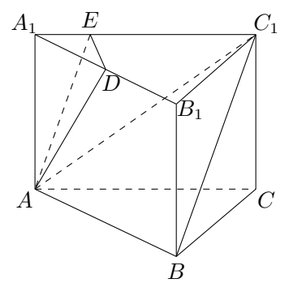
图 2

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=3\overrightarrow{BC}^2$, 求角 A, B, C 的大小.

17. 为拉动经济增长, 某市决定新建一批重点工程, 分别为基础设施工程、民生工程和产业建设工程三类. 这三类工程所含项目的个数分别占总数的 $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{1}{6}$. 现在 3 名工人独立地从中任选一个项目参与建设.
(1) 求他们选择的项目所属类别互不相同的概率;
(2) 记 ξ 为 3 人中选择的项目属于基础设施工程或产业建设工程的人数, 求 ξ 的分布列及数学期望.

18. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=\sqrt{2}AA_1$. 点 D 是 A_1B_1 的中点, 点 E 在 A_1C_1 上, 且 $DE\perp AE$.
(1) 证明: 平面 $ADE\perp$ 平面 ACC_1A_1;
(2) 求直线 AD 和平面 ABC_1 所成角的正弦值.



19. 某地建一座桥, 两端的桥墩已建好, 这两墩相距 m 米, 余下工程只需要建两端桥墩之间的桥面和桥墩. 经测算, 一个桥墩的工程费用为 256 万元, 距离为 x 米的相邻两墩之间的桥面工程费用为 $(2+\sqrt{x})x$ 万元. 假设桥墩等距离分布, 所有桥墩都视为点, 且不考虑其他因素, 记余下工程的费用为 y 万元.

(1) 试写出 y 关于 x 的函数关系式;

(2) 当 $m=640$ 米时, 需新建多少个桥墩才能使 y 最小?

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 到点 $F(3,0)$ 的距离的 4 倍与它到直线 $x=2$ 的距离的 3 倍之和记为 d. 当点 P 运动时, d 恒等于点 P 的横坐标与 18 之和.

(1) 求点 P 的轨迹 C;

(2) 设过点 F 的直线 l 与轨迹 C 相交于 M, N 两点, 求线段 MN 长度的最大值.

21. 对于数列 $\{u_n\}$, 若存在常数 $M>0$, 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 恒有 $|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1|\leqslant M$, 则称数列 $\{u_n\}$ 为 $B-$ 数列.

(1) 首项为 1, 公比为 q ($|q|<1$) 的等比数列是否为 $B-$ 数列? 请说明理由;

(2) 设 S_n 是数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项和, 给出下列两组论断:

A 组: ① 数列 $\{x_n\}$ 是 $B-$ 数列　② 数列 $\{x_n\}$ 不是 $B-$ 数列

B 组: ③ 数列 $\{S_n\}$ 是 $B-$ 数列　④ 数列 $\{S_n\}$ 不是 $B-$ 数列

请以其中一组中的一个论断为条件, 另一组中的一个论断为结论组成一个命题. 判断所给命题的真假, 并证明你的结论;

(3) 若数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是 $B-$ 数列, 证明: 数列 $\{a_nb_n\}$ 也是 $B-$ 数列.

2009 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. $\log_2\sqrt{2}$ 的值为 （ ）

(A) $-\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{2}$　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{2}$

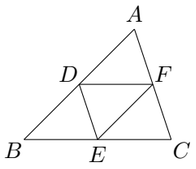
2. 抛物线 $y^2=-8x$ 的焦点坐标是 （ ）

(A) $(2,0)$　(B) $(-2,0)$　(C) $(4,0)$　(D) $(-4,0)$

3. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_2=3$, $a_6=11$, 则 S_7 等于( )

(A) 13　(B) 35　(C) 49　(D) 63

4. 如图, D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC, CA 的中点, 则 （ ）



(A) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$　(B) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}=\mathbf{0}$

(C) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$　(D) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$

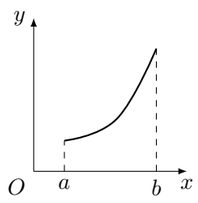
5. 某地政府召集 5 家企业的负责人开会, 其中甲企业有 2 人到会, 其余 4 家企业各有 1 人到会, 会上有 3 人发言, 则这 3 人来自 3 家不同企业的可能情况的种数为 （ ）

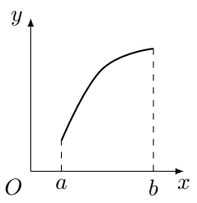
(A) 14　(B) 16　(C) 20　(D) 48

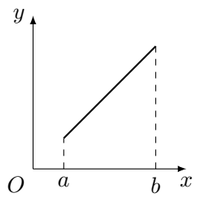
6. 平面六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 既与 AB 共面也与 CC_1 共面的棱的条数为 （ ）

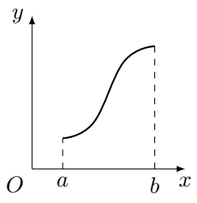
(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

7. 若函数 $y=f(x)$ 的导函数在区间 $[a,b]$ 上是增函数, 则函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象可能是 （ ）

(A)


(B)


(C)


(D)


8. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义. 对于给定的正数 K, 定义函数 $f_K(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\leqslant K\\ K, & f(x)>K\end{cases}$. 取函数 $f(x)=2^{-|x|}$. 当 $K=\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f_K(x)$ 的单调递增区间为 （ ）

(A) $(-\infty,0)$　(B) $(0,+\infty)$　(C) $(-\infty,-1)$　(D) $(1,+\infty)$

二、填空题

9. 某班共 30 人, 其中 15 人喜爱篮球运动, 10 人喜爱兵乓球运动, 8 人对这两项运动都不喜爱, 则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为_____.

10. 若 $x>0$, 则 $x+\frac{2}{x}$ 的最小值为_____.

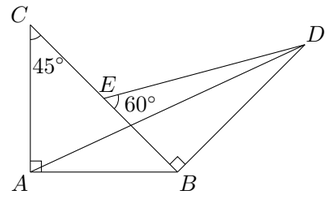
11. 在 $(1+\sqrt{x})^4$ 的展开式中, x 的系数为_____. (用数字作答)

12. 一个总体分为 A, B 两层, 用分层抽样方法从总体中抽取一个容量为 10 的样本. 已知 B 层中每个个体被抽到的概率都为 $\frac{1}{12}$, 则总体中的个体数为_____.

13. 过双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的一个焦点作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的两条切线, 切点分别为 A, B. 若 $\angle AOB=120^\circ$ (O 是坐标原点), 则双曲线线 C 的离心率为_____.

14. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $BC=1$, $B=2A$, 则 $\frac{AC}{\cos A}$ 的值等于_____, AC 的取值范围为_____.

15. 如图, 两块斜边长相等的直角三角板拼在一起. 若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, 则 $x=$_____, $y=$_____.

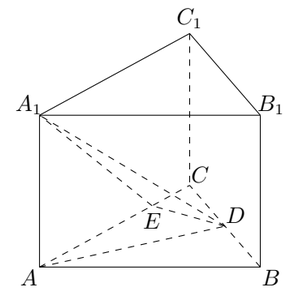


三、解答题

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\theta,\cos\theta-2\sin\theta)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$.
(1) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 求 $\tan\theta$ 的值;
(2) 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, $0<\theta<\pi$, 求 θ 的值.

17. 为拉动经济增长, 某市决定新建一批重点工程, 分别为基础设施工程、民生工程和产业建设工程三类. 这三类工程所含项目的个数分别占总数的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$. 现在 3 名工人独立地从中任选一个项目参与建设. 求:
(1) 他们选择的项目所属类别互不相同的概率;
(2) 至少有 1 人选择的项目属于民生工程的概率.

18. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=4$, $AA_1=\sqrt{7}$. 点 D 是 BC 的中点, 点 E 在 AC 上, 且 $DE\perp A_1E$.
(1) 证明: 平面 $A_1DE\perp$ 平面 ACC_1A_1;
(2) 求直线 AD 和平面 A_1DE 所成角的正弦值.



19. 已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx$ 的导函数的图象关于直线 $x=2$ 对称.
(1) 求 b 的值;
(2) 若 $f(x)$ 在 $x=t$ 处取得极小值, 记此极小值为 $g(t)$, 求 $g(t)$ 的定义域和值域.

20. 已知椭圆 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 以两个焦点和短轴的两个端点为顶点的四边形是一个面积为 8 的正方形 (记为 Q).
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 设点 P 是椭圆 C 的左准线与 x 轴的交点, 过点 P 的直线 l 与椭圆 C 相交于 M, N 两点. 当线段 MN 的中点落在正方形 Q 内 (包括边界) 时, 求直线 l 的斜率的取值范围.

21. 对于数列 $\{u_n\}$, 若存在常数 $M>0$, 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 恒有 $|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1|\leqslant M$, 则称数列 $\{u_n\}$ 为 $B-$ 数列.
(1) 首项为 1, 公比为 $-\dfrac{1}{2}$ 的等比数列是否为 $B-$ 数列? 请说明理由;
(2) 设 S_n 是数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项和, 给出下列两组论断:
A 组: ① 数列 $\{x_n\}$ 是 $B-$ 数列　② 数列 $\{x_n\}$ 不是 $B-$ 数列
B 组: ③ 数列 $\{S_n\}$ 是 $B-$ 数列　④ 数列 $\{S_n\}$ 不是 $B-$ 数列
请以其中一组中的一个论断为条件, 另一组中的一个论断为结论组成一个命题. 判断所给命题的真假, 并证明你的结论;
(3) 若数列 $\{a_n\}$ 是 $B-$ 数列, 证明: 数列 $\{a_n^2\}$ 也是 $B-$ 数列.

2009 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

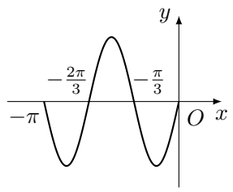
一、填空题

1. 若复数 $z_1=4+29\mathrm{i}$, $z_2=6+9\mathrm{i}$, 其中 i 是虚数单位, 则复数 $(z_1-z_2)\mathrm{i}$ 的实部为_____.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 30°, $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____.

3. 函数 $f(x)=x^3-15x^2-33x+6$ 的单调减区间为_____.

4. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (A, ω, φ 为常数, $A>0$, $\omega>0$) 在闭区间 $[-\pi,0]$ 上的图象如图所示, 则 $\omega=$_____.



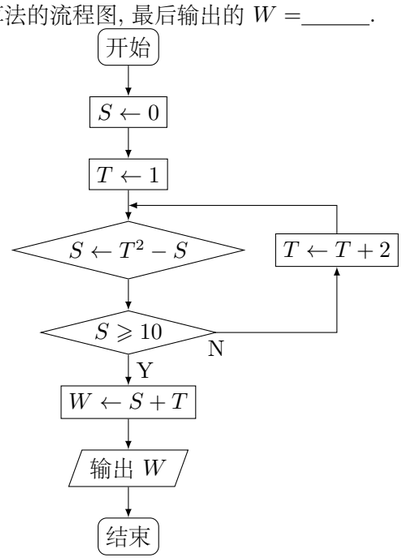
5. 现有 5 根竹竿, 它们的长度 (单位: m) 分别为 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 若从中一次随机抽取 2 根竹竿, 则它们的长度恰好相差 0.3 m 的概率为_____.

6. 某校甲、乙两个班级各有 5 名编号为 1, 2, 3, 4, 5 的学生进行投篮练习, 每人投 10 次, 投中的次数如下表:

学生	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号
甲班	6	7	7	8	7
乙班	6	7	6	7	9

则以上两组数据的方差中较小的一个为 $s^2=$_____.

7. 如图是一个算法的流程图, 最后输出的 $W=$_____.



8. 在平面上, 若两个正三角形的边长的比为 1 : 2, 则它们的面积比为 1 : 4, 类似地, 在空间内, 若两个正四面体的棱长的比为 1 : 2, 则它们的体积比为_____.

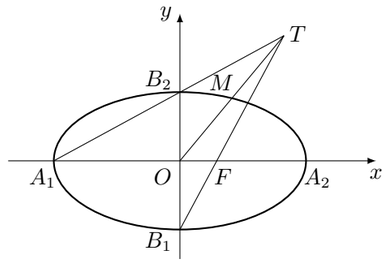
9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 在曲线 C: $y=x^3-10x+3$ 上, 且在第二象限内, 已知曲线 C 在点 P 处的切线的斜率为 2, 则点 P 的坐标为_____.

10. 已知 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 函数 $f(x)=a^x$, 若实数 m、n 满足 $f(m)>f(n)$, 则 m、n 的大小关系为_____.

11. 已知集合 $A=\{x|\log_2 x\leqslant 2\}$, $B=(-\infty,a)$, 若 $A\subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 $(c,+\infty)$, 其中 $c=$_____.

12. 设 α 和 β 为不重合的两个平面, 给出下列命题:
(1) 若 α 内的两条相交直线分别平行于 β 内的两条直线, 则 α 平行于 β;
(2) 若 α 外一条直线 l 与 α 内的一条直线平行, 则 l 和 α 平行;
(3) 设 α 和 β 相交于直线 l, 若 α 内有一条直线垂直于 l, 则 α 和 β 垂直;
(4) 直线 l 与 α 垂直的充分必要条件是 l 与 α 内的两条直线垂直.
上面命题中, 真命题的序号_____. (写出所有真命题的序号)

13. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, A_1, A_2, B_1, B_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的四个顶点, F 为其右焦点, 直线 A_1B_2 与直线 B_1F 相交于点 T, 线段 OT 与椭圆的交点 M 恰为线段 OT 的中点, 则该椭圆的离心率为_____.

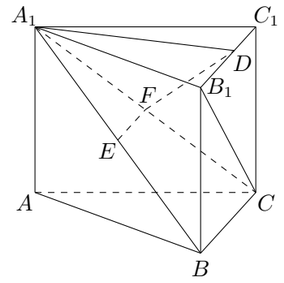


14. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $|q|>1$, 令 $b_n=a_n+1$ ($n=1,2,\cdots$), 若数列 $\{b_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-53,-23,19,37,82\}$ 中, 则 $6q=$_____.

二、解答题

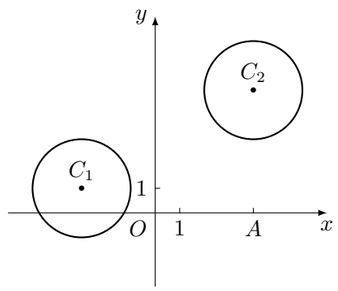
15. 设向量 $\boldsymbol{a}=(4\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\sin\beta,4\cos\beta)$, $\boldsymbol{c}=(\cos\beta,-4\sin\beta)$.
(1) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ 垂直, 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值;
(2) 求 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的最大值;
(3) 若 $\tan\alpha\tan\beta=16$, 求证: $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E、F 分别是 A_1B、A_1C 的中点, 点 D 在 B_1C_1 上, $A_1D\perp B_1C$. 求证:
(1) $EF\parallel$ 平面 ABC;
(2) 平面 $A_1FD\perp$ 平面 BB_1C_1C.



17. 设 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 满足 $a_2^2+a_3^2=a_4^2+a_5^2$, $S_7=7$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n;
(2) 试求所有的正整数 m, 使得 $\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的项.

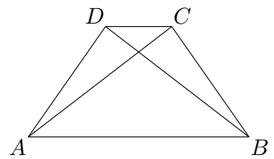
18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 C_1: $(x+3)^2+(y-1)^2=4$ 和圆 C_2: $(x-4)^2+(y-5)^2=4$.
(1) 若直线 l 过点 $A(4,0)$, 且被圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程;
(2) 设 P 为平面上的点, 满足: 存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2, 它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交, 且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等, 试求所有满足条件的点 P 的坐标.



19. 按照某学者的理论, 假设一个人生产某产品单件成本为 a 元, 如果他卖出该产品的单价为 m 元, 则他的满意度为 $\dfrac{m}{m+a}$; 如果他买进该产品的单价为 n 元, 则他的满意度为 $\dfrac{n}{n+a}$. 如果一个人对两种交易 (卖出或买进) 的满意度分别为 h_1 和 h_2, 则他对这两种交易的综合满意度为 $\sqrt{h_1 h_2}$.
现假设甲生产 A、B 两种产品的单件成本分别为 12 元和 5 元, 乙生产 A、B 两种产品的单件成本分别为 3 元和 20 元, 设产品 A、B 的单价分别为 m_A 元和 m_B 元, 甲买进 A 与卖出 B 的综合满意度为 $h_{甲}$, 乙卖出 A 与买进 B 的综合满意度为 $h_{乙}$.
(1) 求 h 和 $h_{乙}$ 关于 m_A、m_B 的表达式; 当 $m_A = \dfrac{3}{5}m_B$ 时, 求证: $h_{甲} = h_{乙}$;
(2) 设 $m_A = \dfrac{3}{5}m_B$, 当 m_A、m_B 分别为多少时, 甲、乙两人的综合满意度均最大? 最大的综合满意度为多少?
(3) 记 (2) 中最大的综合满意度为 h_0, 试问能否适当选取 m_A、m_B 的值, 使得 $h_{甲} \geqslant h_0$ 和 $h_{乙} \geqslant h_0$ 同时成立, 但等号不同时成立? 试说明理由.

20. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = 2x^2 + (x-a)|x-a|$.
(1) 若 $f(0) \geqslant 1$, 求 a 的取值范围;
(2) 求 $f(x)$ 的最小值;
(3) 设函数 $h(x) = f(x)$, $x \in (a, +\infty)$, 直接写出 (不需给出演算步骤) 不等式 $h(x) \geqslant 1$ 的解集.

21. 四选二.
【A】如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\triangle ABC \cong \triangle BAD$. 求证: $AB \parallel CD$.

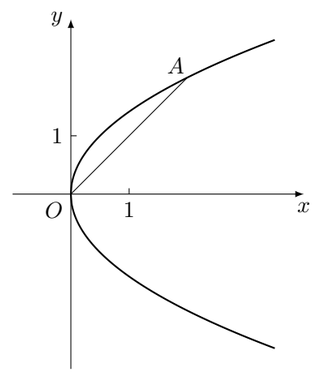


【B】求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

【C】已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}} \\ y = 3(t + \dfrac{1}{t}) \end{cases}$ (t 为参数, $t > 0$), 求曲线 C 的普通方程.

【D】设 $a \geqslant b > 0$, 求证: $3a^3 + 2b^3 \geqslant 3a^2 b + 2ab^2$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 C 的顶点在原点, 经过点 $A(2,2)$, 其焦点 F 在 x 轴上.
(1) 求抛物线 C 的标准方程;
(2) 求过点 F, 且与直线 OA 垂直的直线的方程;
(3) 设过点 $M(m,0)$ ($m > 0$) 的直线交抛物线 C 于 D、E 两点, $ME = 2DM$, 记 D 和 E 两点间的距离为 $f(m)$, 求 $f(m)$ 关于 m 的表达式.



23. 对于正整数 $n \geqslant 2$, 用 T_n 表示关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 有实数根的有序数组 (a,b) 的组数, 其中 a, $b \in \{1, 2, \cdots, n\}$ (a 和 b 可以相等); 对于随机选取的 a, $b \in \{1, 2, \cdots, n\}$ (a 和 b 可以相等), 记 P_n 为关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 有实数根的概率.
(1) 求 T_{n^2} 和 P_{n^2};
(2) 求证: 对任意正整数 $n \geqslant 2$, 有 $P_n > 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

2009 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 若复数 $z=(x^2-1)+(x-1)\mathrm{i}$ 为纯虚数, 则实数 x 的值为 （ ）

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) -1 或 1

2. 函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为 （ ）

(A) $(-4,-1)$ (B) $(-4,1)$ (C) $(-1,1)$ (D) $(-1,1]$

3. 已知全集 $U=A\cup B$ 中有 m 个元素, $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ 中有 n 个元素. 若 $A\cap B$ 非空, 则 $A\cap B$ 的元素个数为 （ ）

(A) mn (B) $m+n$ (C) $n-m$ (D) $m-n$

4. 若函数 $f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x$, $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $f(x)$ 的最大值为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3}+1$ (D) $\sqrt{3}+2$

5. 设函数 $f(x)=g(x)+x^2$, 曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线方程为 $y=2x+1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率为 （ ）

(A) 4 (B) $-\dfrac{1}{4}$ (C) 2 (D) $-\dfrac{1}{2}$

6. 过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于点 P, F_2 为右焦点, 若 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 则椭圆的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

7. $(1+ax+by)^n$ 展开式中不含 x 的项的系数绝对值的和为 243, 不含 y 的项的系数绝对值的和为 32, 则 a, b, n 的值可能为 （ ）

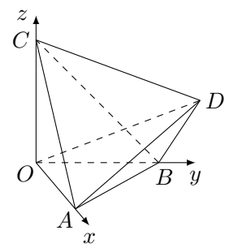
(A) $a=2$, $b=-1$, $n=5$ (B) $a=-2$, $b=-1$, $n=6$

(C) $a=-1$, $b=2$, $n=6$ (D) $a=1$, $b=2$, $n=5$

8. 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=n^2\left(\cos^2\dfrac{n\pi}{3}-\sin^2\dfrac{n\pi}{3}\right)$, 其前 n 项和为 S_n, 则 S_{30} 为 （ ）

(A) 470 (B) 490 (C) 495 (D) 510

9. 如图, 正四面体 $ABCD$ 的顶点 A, B, C 分别在两两垂直的三条射线 Ox, Oy, Oz 上, 则在下列命题中, 错误的为 （ ）



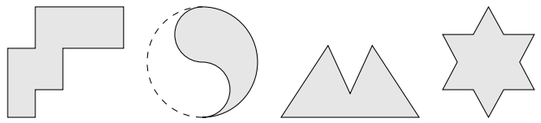
(A) $O-ABC$ 是正三棱锥 (B) 直线 $OB\parallel$ 平面 ACD

(C) 直线 AD 与 OB 所成的角是 45° (D) 二面角 $D-OB-A$ 为 45°

10. 为了庆祝六一儿童节, 某食品厂制作了 3 种不同的精美卡片, 每袋食品随机装入一张卡片, 集齐 3 种卡片可获奖, 现购买该种食品 5 袋, 能获奖的概率为

(A) $\dfrac{31}{81}$ (B) $\dfrac{33}{81}$ (C) $\dfrac{48}{81}$ (D) $\dfrac{50}{81}$

11. 一个平面封闭区域内任意两点距离的最大值称为该区域的“直径”, 封闭区域边界曲线的长度与区域直径之比称为区域的“周率”, 下面四个平面区域(阴影部分) 的周率从左到右依次记为 τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, 则下列关系中正确的为 （ ）



(A) $\tau_1>\tau_4>\tau_3$ (B) $\tau_3>\tau_1>\tau_2$ (C) $\tau_4>\tau_2>\tau_3$ (D) $\tau_3>\tau_4>\tau_2$

12. 设函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a<0)$ 的定义域为 D, 若所有点 $(s,f(t))$ $(s,t\in D)$ 构成一个正方形区域, 则 a 的值为 （ ）

(A) -2 (B) -4 (C) -8 (D) 不能确定

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,3)$, $\boldsymbol{c}=(k,7)$. 若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $k=$_____.

14. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于半径为 2 的球, 若 A, B 两点的球面距离为 π, 则正三棱柱的体积为_____.

15. 若不等式 $\sqrt{9-x^2}\leqslant k(x+2)-\sqrt{2}$ 的解集为区间 $[a,b]$, 且 $b-a=2$, 则 $k=$_____.

16. 设直线系 M: $x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$, 对于下列四个命题:

A. M 中所有直线均经过一个定点;

B. 存在定点 P 不在 M 中的任一条直线上;

C. 对于任意整数 n $(n\geqslant3)$, 存在正 n 边形, 其所有边均在 M 中的直线上;

D. M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等.

其中真命题的代号是_____. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $k>0$, 求不等式 $f'(x)+k(1-x)f(x)>0$ 的解集.

18. 某公司拟资助三位大学生自主创业, 现聘请两位专家, 独立地对每位大学生的创业方案进行评审. 假设评审结果为“支持”或“不支持”的概率都是 $\dfrac{1}{2}$. 若某人获得两个“支持”, 则给予 10 万元的创业资助; 若只获得一个“支持”, 则给予 5 万元的资助; 若未获得“支持”, 则不予资助, 令 ξ 表示该公司的资助总额.

(1) 写出 ξ 的分布列;

(2) 求数学期望 $E\xi$.

19. $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, $\tan C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$, $\sin(B-A)=\cos C$.

(1) 求 A, C;

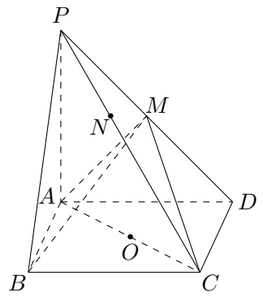
(2) 若 $S_{\triangle ABC}=3+\sqrt{3}$, 求 a, c.

20. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AD=4$, $AB=2$. 以 AC 的中点 O 为球心、AC 为直径的球面交 PD 于点 M, 交 PC 于点 N.

(1) 求证: 平面 $ABM\perp$ 平面 PCD;

(2) 求直线 CD 与平面 ACM 所成的角的大小;

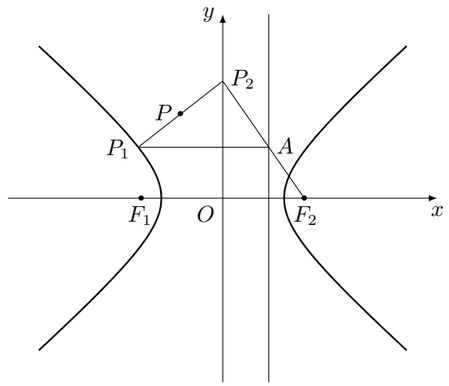
(3) 求点 N 到平面 ACM 的距离.



21. 已知点 $P_1(x_0,y_0)$ 为双曲线 $\dfrac{x^2}{8b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (b 为正常数) 上任一点, F_2 为双曲线的右焦点, 过 P_1 作右准线的垂线, 垂足为 A, 连接 F_2A 并延长交 y 轴于 P_2.

(1) 求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹 E 的方程;

(2) 设轨迹 E 与 x 轴交于 B, D 两点, 在 E 上任取一点 $Q(x_1,y_1)$ ($y_1\neq 0$), 直线 QB, QD 分别交 y 轴于 M, N 两点. 求证: 以 MN 为直径的圆过两定点.



22. 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$, $a_1=a$, $a_2=b$, 且对满足 $m+n=p+q$ 的正整数 m, n, p, q 都有 $\dfrac{a_m+a_n}{(1+a_m)(1+a_n)}=\dfrac{a_p+a_q}{(1+a_p)(1+a_q)}$.

(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{4}{5}$ 时, 求通项 a_n;

(2) 证明: 对任意 a, 存在与 a 有关的常数 λ, 使得对于每个正整数 n, 都有 $\dfrac{1}{\lambda}\leqslant a_n\leqslant\lambda$.

2009 年普通高等学校招生考试（江西卷）

文科数学

一、选择题

1. 下列命题是真命题的为 （ ）

(A) 若 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$, 则 $x=y$　　(B) 若 $x^2=1$, 则 $x=1$

(C) 若 $x=y$, 则 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$　　(D) 若 $x<y$, 则 $x^2<y^2$

2. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$ 的定义域为 （ ）

(A) $[-4,1]$　　(B) $[-4,0)$　　(C) $(0,1]$　　(D) $[-4,0)\cup(0,1]$

3. 50 名学生参加甲、乙两项体育活动, 每人至少参加了一项, 参加甲项的学生有 30 名, 参加乙项的学生有 25 名, 则仅参加了一项活动的学生人数为( )

(A) 50　　(B) 45　　(C) 40　　(D) 35

4. 函数 $f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x$ 的最小正周期为 （ ）

(A) 2π　　(B) $\frac{3\pi}{2}$　　(C) π　　(D) $\frac{\pi}{2}$

5. 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数, 若对于 $x\geqslant 0$, 都有 $f(x+2)=f(x)$, 且当 $x\in[0,2)$ 时, $f(x)=\log_2(x+1)$, 则 $f(-2008)+f(2009)$ 的值为 （ ）

(A) -2　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

6. 若 $\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n$ 能被 7 整除, 则 x, n 的值可能为 （ ）

(A) $x=4$, $n=3$　(B) $x=4$, $n=4$　(C) $x=5$, $n=4$　(D) $x=6$, $n=5$

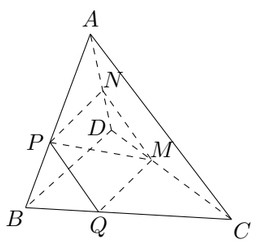
7. 设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的两个焦点, 若 F_1, F_2, $P(0,2b)$ 是正三角形的三个顶点, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\frac{3}{2}$　　(B) 2　　(C) $\frac{5}{2}$　　(D) 3

8. 公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 a_4 是 a_3 与 a_7 的等比中项, $S_8=32$, 则 S_{10} 等于

(A) 18　　(B) 24　　(C) 60　　(D) 90

9. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 截面 $PQMN$ 是正方形, 则在下列命题中, 错误的为 （ ）



(A) $AC\perp BD$

(B) $AC\parallel$ 截面 $PQMN$

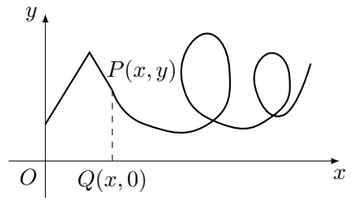
(C) $AC=BD$

(D) 异面直线 PM 与 BD 所成的角为 45°

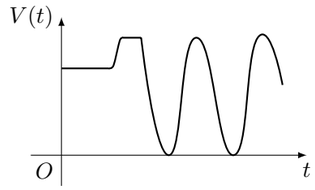
10. 甲、乙、丙、丁 4 个足球队参加比赛, 假设每场比赛各队取胜的概率相等, 现任意将这 4 个队分成两个组 (每组两个队) 进行比赛, 胜者再赛. 则甲、乙相遇的概率为 （ ）

(A) $\frac{1}{6}$　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$

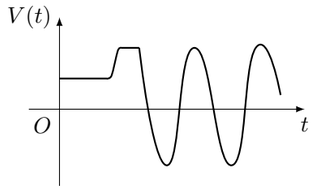
11. 如图所示, 一质点 $P(x,y)$ 在 xOy 平面上沿曲线运动, 速度大小不变, 其在 x 轴上的投影点 $Q(x,0)$ 的运动速度 $V=V(t)$ 的图象大致为 （ ）



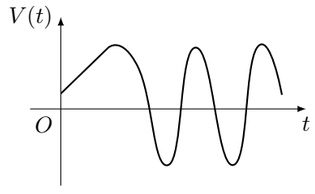
(A)



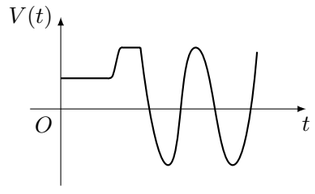
(B)



(C)



(D)



12. 若存在过点 $(1,0)$ 的直线与曲线 $y=x^3$ 和 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 都相切, 则 a 等于 （ ）

(A) -1 或 $-\frac{25}{64}$　(B) -1 或 $\frac{21}{4}$　(C) $-\frac{7}{4}$ 或 $-\frac{25}{64}$　(D) $-\frac{7}{4}$ 或 7

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,3)$, $\boldsymbol{c}=(k,2)$. 若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $k=$_____.

14. 体积为 8 的一个正方体, 其全面积与球 O 的表面积相等, 则球 O 的体积等于_____.

15. 若不等式 $\sqrt{4-x^2}\leqslant k(x+1)$ 的解集为区间 $[a,b]$, 且 $b-a=1$, 则 $k=$_____.

16. 设直线系 M: $x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 对于下列四个命题:

A. 存在一个圆与所有直线相交;

B. 存在一个圆与所有直线不相交;

C. 存在一个圆与所有直线相切;

D. M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等.

其中真命题的代号是_____. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-a$.

(1) 对于任意实数 x, $f'(x)\geqslant m$ 恒成立, 求 m 的最大值;

(2) 若方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根, 求 a 的取值范围.

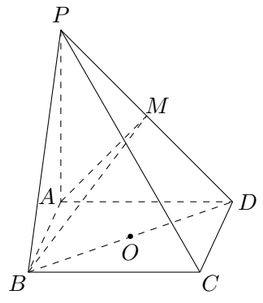
18. 某公司拟资助三位大学生自主创业, 现聘请两位专家, 独立地对每位大学生的创业方案进行评审. 假设评审结果为“支持”或“不支持”的概率都是 $\frac{1}{2}$. 若某人获得两个“支持”, 则给予 10 万元的创业资助; 若只获得一个“支持”, 则给予 5 万元的资助; 若未获得“支持”, 则不予资助. 求:

(1) 该公司的资助总额为零的概率;

(2) 该公司的资助总额超过 15 万元的概率.

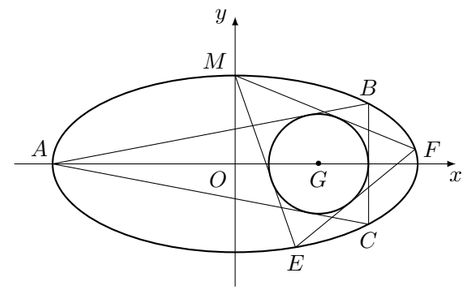
19. $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, $A=\dfrac{\pi}{6}$, $(1+\sqrt{3})c=2b$.
(1) 求 C;
(2) 若 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=1+\sqrt{3}$, 求 a, b, c.

20. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AD=4$, $AB=2$. 以 BD 的中点 O 为球心、BD 为直径的球面交 PD 于点 M.
(1) 求证: 平面 $ABM\perp$ 平面 PCD;
(2) 求直线 PC 与平面 ABM 所成的角;
(3) 求点 O 到平面 ABM 的距离.



21. 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=n^2\left(\cos^2\dfrac{n\pi}{3}-\sin^2\dfrac{n\pi}{3}\right)$, 其前 n 项和为 S_n.
(1) 求 S_n;
(2) $b_n=\dfrac{S_{3n}}{n\cdot 4^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 如图, 已知圆 G: $(x-2)^2+y^2=r^2$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$ 的内接 $\triangle ABC$ 的内切圆, 其中 A 为椭圆的左顶点.
(1) 求圆 G 的半径 r;
(2) 过点 $M(0,1)$ 作圆 G 的两条切线交椭圆于 E, F 两点, 证明: 直线 EF 与圆 G 相切.



2009 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|-3<x\leqslant 5\}$, $N=\{x|-5<x<5\}$, 则 $M\cap N=$(　)

(A) $\{x|-5<x<5\}$　(B) $\{x|-3<x<5\}$

(C) $\{x|-5<x\leqslant 5\}$　(D) $\{x|-3<x\leqslant 5\}$

2. 已知复数 $z=1-2\mathrm{i}$, 那么 $\dfrac{1}{z}=$　(　)

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{i}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{i}$　(C) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$　(D) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$

3. 平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$, $\boldsymbol{a}=(2,0)$, $|\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$　(　)

(A) $\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 4　(D) 12

4. 已知圆 C 与直线 $x-y=0$ 及 $x-y-4=0$ 都相切, 圆心在直线 $x+y=0$ 上, 则圆 C 的方程为　(　)

(A) $(x+1)^2+(y-1)^2=2$　(B) $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

(C) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$　(D) $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

5. 从 5 名男医生、4 名女医生中选 3 名医生组成一个医疗小分队, 要求其中男、女医生都有, 则不同的组队方案共有　(　)

(A) 70 种　(B) 80 种　(C) 100 种　(D) 140 种

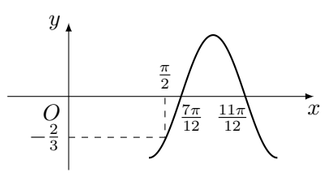
6. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $\dfrac{S_6}{S_3}=3$, 则 $\dfrac{S_9}{S_6}=$　(　)

(A) 2　(B) $\dfrac{7}{3}$　(C) $\dfrac{8}{3}$　(D) 3

7. 曲线 $y=\dfrac{x}{x-2}$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线方程为　(　)

(A) $y=x-2$　(B) $y=-3x+2$　(C) $y=2x-3$　(D) $y=-2x+1$

8. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的图象如图所示, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{3}$, 则 $f(0)=$　(　)

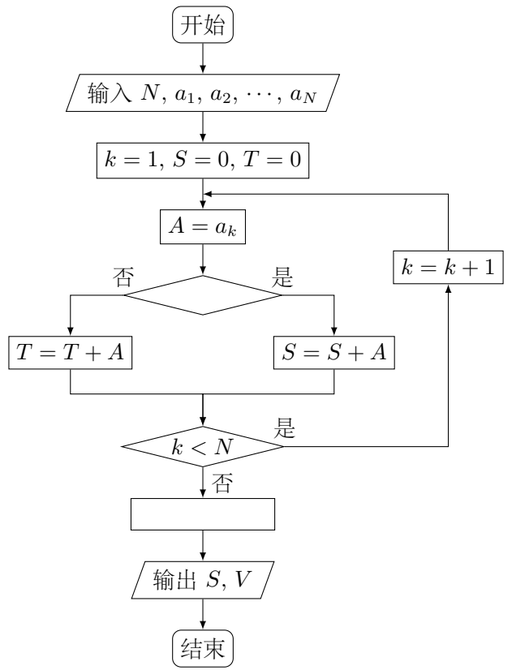


(A) $-\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 单调增加, 则满足 $f(2x-1)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围是　(　)

(A) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　(B) $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　(C) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$　(D) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$

10. 某店一个月的收入和支出总共记录了 N 个数据 $a_1, a_2, \cdots, a_N$, 其中收入记为正数, 支出记为负数. 该店用下边的程序框图计算月总收入 S 和月净盈利 V, 那么在图中空白的判断框和处理框中, 应分别填入下列四个选项中的　(　)



(A) $A>0$, $V=S-T$　(B) $A<0$, $V=S-T$

(C) $A>0$, $V=S+T$　(D) $A<0$, $V=S+T$

11. 正六棱锥 $P-ABCDEF$ 中, G 为 PB 的中点, 则三棱锥 $D-GAC$ 与三棱锥 $P-GAC$ 体积之比为　(　)

(A) 1 : 1　(B) 1 : 2　(C) 2 : 1　(D) 3 : 2

12. 若 x_1 满足 $2x+2^x=5$, x_2 满足 $2x+2\log_2(x-1)=5$, 则 $x_1+x_2=$(　)

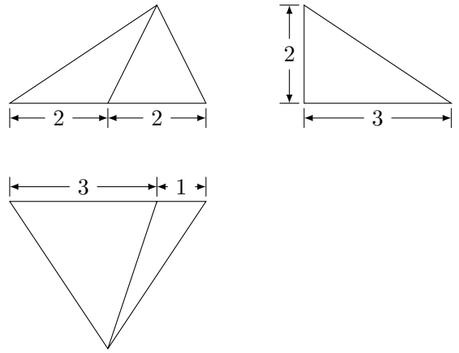
(A) $\dfrac{5}{2}$　(B) 3　(C) $\dfrac{7}{2}$　(D) 4

二、填空题

13. 某企业有 3 个分厂生产同一种电子产品, 第一、二、三分厂的产量之比为 1 : 2 : 1, 用分层抽样方法 (每个分厂的产品为一层) 从 3 个分厂生产的电子产品中共取 100 件作使用寿命的测试, 由所得的测试结果算得从第一、二、三分厂取出的产品的使用寿命的平均值分别为 980 h, 1020 h, 1032 h, 则抽取的 100 件产品的使用寿命的平均值为_____h.

14. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $6S_5-5S_3=5$, 则 $a_4=$_____.

15. 设某几何体的三视图如下 (尺寸的长度单位为 m). 则该几何体的体积为_____m^3.



16. 已知 F 是双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 的左焦点, $A(1,4)$, P 是双曲线右支上的动点, 则 $|PF|+|PA|$ 的最小值为_____.

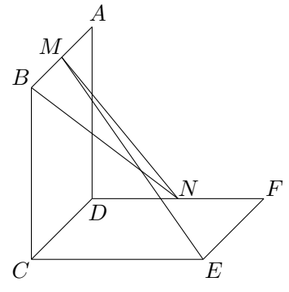
三、解答题

17. 如图, A, B, C, D 都在同一个与水平面垂直的平面内, B, D 为两岛上的两座灯塔的塔顶. 测量船于水面 A 处测得 B 点和 D 点的仰角分别为 $75°$, $30°$, 于水面 C 处测得 B 点和 D 点的仰角均为 $60°$, $AC=0.1$ km. 试探究图中 B, D 间距离与另外哪两点间距离相等, 然后求 B, D 的距离. (计算结果精确到 0.01 km, $\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{6}\approx 2.449$)

18. 如图, 已知两个正方形 $ABCD$ 和 $DCEF$ 不在同一平面内, M, N 分别为 AB, DF 的中点.

(1) 若平面 $ABCD \perp$ 平面 $DCEF$, 求直线 MN 与平面 $DCEF$ 所成角的正值弦;

(2) 用反证法证明: 直线 ME 与 BN 是两条异面直线.



19. 某人向一目射击 4 次, 每次击中目标的概率为 $\frac{1}{3}$. 该目标分为 3 个不同的部分, 第一、二、三部分面积之比为 $1:3:6$. 击中目标时, 击中任何一部分的概率与其面积成正比.

(1) 设 X 表示目标被击中的次数, 求 X 的分布列;

(2) 若目标被击中 2 次, A 表示事件"第一部分至少被击中 1 次或第二部分被击中 2 次", 求 $P(A)$.

20. 已知椭圆 C 过点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 两个焦点为 $(-1,0)$, $(1,0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) E, F 是椭圆 C 上的两个动点, 如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数, 证明直线 EF 的斜率为定值, 并求出这个定值.

21. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x$, $a>1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

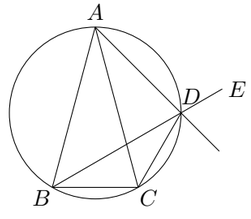
(2) 证明: 若 $a<5$, 则对于任意 x_1, $x_2 \in (0,+\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$.

22. 三选一.

【A】已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 是 $\triangle ABC$ 外接圆劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上的点 (不与点 A, C 重合), 延长 BD 至 E.

(1) 求证: AD 的延长线平分 $\angle CDE$;

(2) 若 $\angle BAC=30^\circ$, $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高为 $2+\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 外接圆的面积.



【B】在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$, M, N 分别为 C 与 x 轴, y 轴的交点.

(1) 写出 C 的直角坐标方程, 并求 M, N 的极坐标;

(2) 设 MN 的中点为 P, 求直线 OP 的极坐标方程.

【C】设函数 $f(x)=|x-1|+|x-a|$.

(1) 若 $a=-1$, 解不等式 $f(x)\geqslant 3$;

(2) 如果 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x)\geqslant 2$, 求 a 的取值范围.

2009 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|-3<x\leqslant 5\}$, $N=\{x|x<-5$ 或 $x>5\}$, 则 $M\cup N=$ （ ）

(A) $\{x|x<-5$ 或 $x>-3\}$　(B) $\{x|-5<x<5\}$

(C) $\{x|-3<x<5\}$　(D) $\{x|x<-3$ 或 $x>5\}$

2. 已知复数 $z=1-2\mathrm{i}$, 那么 $\dfrac{1}{z}=$ （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{i}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{i}$　(C) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$　(D) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$

3. $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_7-2a_4=-1$, $a_3=0$, 则公差 $d=$ （ ）

(A) -2　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 2

4. 平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $\boldsymbol{a}=(2,0)$, $|\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$ （ ）

(A) $\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 4　(D) 12

5. 如果把地球看成一个球体, 则地球上北纬 60° 纬线长和赤道线长的比值为 （ ）

(A) 0.8　(B) 0.75　(C) 0.5　(D) 0.25

6. 已知函数 $f(x)$ 满足: 当 $x\geqslant 4$ 时, $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; 当 $x<4$ 时, $f(x)=f(x+1)$. 则 $f(2+\log_2 3)=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{24}$　(B) $\dfrac{1}{12}$　(C) $\dfrac{1}{8}$　(D) $\dfrac{3}{8}$

7. 已知圆 C 与直线 $x-y=0$ 及 $x-y-4=0$ 都相切, 圆心在直线 $x+y=0$ 上, 则圆 C 的方程为 （ ）

(A) $(x+1)^2+(y-1)^2=2$　(B) $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

(C) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$　(D) $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

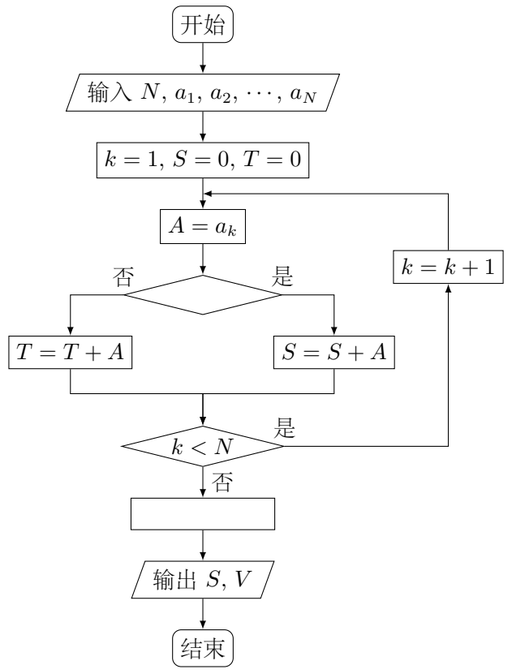
8. 已知 $\tan\theta=2$, 则 $\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=$ （ ）

(A) $-\dfrac{4}{3}$　(B) $\dfrac{5}{4}$　(C) $-\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

9. $ABCD$ 为长方形, $AB=2$, $BC=1$, O 为 AB 的中点. 在长方形 $ABCD$ 内随机取一点, 取到的点到 O 的距离大于 1 的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $1-\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{8}$　(D) $1-\dfrac{\pi}{8}$

10. 某店一个月的收入和支出总共记录了 N 个数据 $a_1, a_2, \cdots, a_N$, 其中收入记为正数, 支出记为负数. 该店用下边的程序框图计算月总收入 S 和月净盈利 V, 那么在图中空白的判断框和处理框中, 应分别填入下列四个选项中的 （ ）



(A) $A>0$, $V=S-T$　(B) $A<0$, $V=S-T$

(C) $A>0$, $V=S+T$　(D) $A<0$, $V=S+T$

11. 下列 4 个命题

p_1: $\exists x\in(0,+\infty)$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　p_2: $\exists x\in(0,1)$, $\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{3}}x$

p_3: $\forall x\in(0,+\infty)$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\log_{\frac{1}{2}}x$　p_4: $\forall x\in(0,\dfrac{1}{3})$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{3}}x$

其中的真命题是 （ ）

(A) p_1, p_3　(B) p_1, p_4　(C) p_2, p_3　(D) p_2, p_4

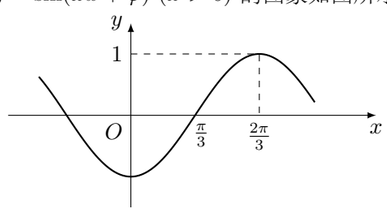
12. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 单调增加, 则满足 $f(2x-1)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　(B) $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　(C) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$　(D) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$

二、填空题

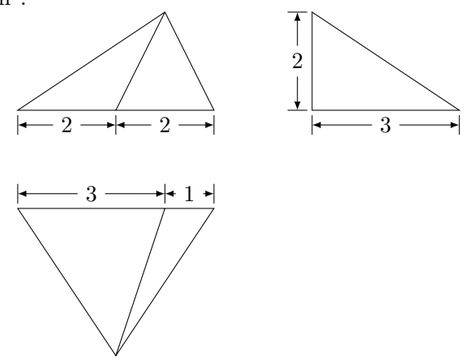
13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 四边形 $ABCD$ 的边 $AB\parallel DC$, $AD\parallel BC$. 已知点 $A(-2,0)$, $B(6,8)$, $C(8,6)$, 则 D 点的坐标为_____.

14. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$ 的图象如图所示, 则 $\omega=$_____.



15. 若函数 $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x+1}$ 在 $x=1$ 处取极值, 则 $a=$_____.

16. 设某几何体的三视图如下 (尺寸的长度单位为 m). 则该几何体的体积为_____m^3.



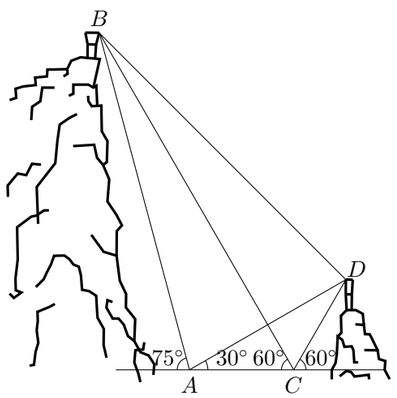
三、解答题

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 S_1, S_3, S_2 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比 q;

(2) 求 $a_1-a_3=3$, 求 S_n.

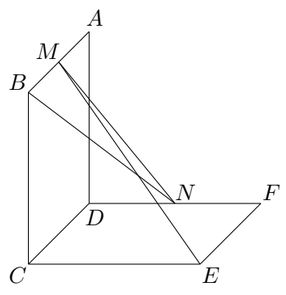
18. 如图, A, B, C, D 都在同一个与水平面垂直的平面内, B, D 为两岛上的两座灯塔的塔顶. 测量船于水面 A 处测得 B 点和 D 点的仰角分别为 $75°$, $30°$, 于水面 C 处测得 B 点和 D 点的仰角均为 $60°$, $AC = 0.1$ km. 试探究图中 B, D 间距离与另外哪两点间距离相等, 然后求 B, D 的距离. (计算结果精确到 0.01 km, $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{6} \approx 2.449$)



19. 如图, 已知两个正方形 $ABCD$ 和 $DCEF$ 不在同一平面内, M, N 分别为 AB, DF 的中点.

(1) 若 $CD = 2$, 平面 $ABCD \perp$ 平面 $DCEF$, 求直线 MN 的长;

(2) 用反证法证明: 直线 ME 与 BN 是两条异面直线.



20. 某企业有两个分厂生产某种零件, 按规定内径尺寸 (单位: mm) 的值落在 $[29.94, 30.06]$ 的零件为优质品. 从两个分厂生产的零件中个抽出 500 件, 量其内径尺寸, 得结果如下表:

甲厂

分组	频数
$[29.86, 29.90)$	12
$[29.90, 29.94)$	63
$[29.84, 29.98)$	86
$[29.98, 30.02)$	182
$[30.02, 30.06)$	92
$[30.06, 30.10)$	61
$[30.10, 30.14)$	4

乙厂

分组	频数
$[29.86, 29.90)$	29
$[29.90, 29.94)$	71
$[29.84, 29.98)$	85
$[29.98, 30.02)$	159
$[30.02, 30.06)$	76
$[30.06, 30.10)$	62
$[30.10, 30.14)$	18

(1) 试分别估计两个分厂生产的零件的优质品率;

(2) 由于以上统计数据填下面 2×2 列联表, 并问是否有 99% 的把握认为“两个分厂生产的零件的质量有差异”.

	甲厂	乙厂	合计
优质品			
非优质品			
合计			

附: $\chi^2 = \dfrac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$,

$P(\chi^2 \geqslant k)$	0.05	0.01
k	3.841	6.635

21. 设 $f(x) = \mathrm{e}^x(ax^2 + x + 1)$, 且曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线与 x 轴平行.

(1) 求 a 的值, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时, $|f(\cos\theta) - f(\sin\theta)| < 2$.

22. 已知椭圆 C 过点 $A\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$, 两个焦点为 $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) E, F 是椭圆 C 上的两个动点, 如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数, 证明直线 EF 的斜率为定值, 并求出这个定值.

2009 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{0,3,6,9,12\}$, 则 $A\cap\complement_{\mathbf{N}}B=$ （ ）

(A) $\{1,5,7\}$ (B) $\{3,5,7\}$ (C) $\{1,3,9\}$ (D) $\{1,2,3\}$

2. 复数 $\dfrac{3+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}-\dfrac{3-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) 0 (B) 2 (C) $-2\mathrm{i}$ (D) 2

3. 对变量 x, y 有观测数据 (x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, 10)$, 得散点图 1; 对变量 u, v 有观测数据 (u_i, v_i) $(i=1, 2, \cdots, 10)$, 得散点图 2. 由这两个散点图可以判断 （ ）

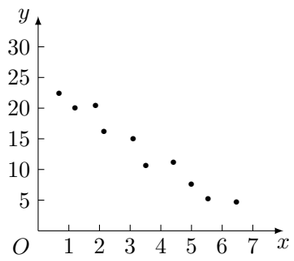


图 1

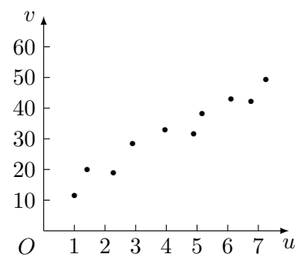


图 2

(A) 变量 x 与 y 正相关, u 与 v 正相关

(B) 变量 x 与 y 正相关, u 与 v 负相关

(C) 变量 x 与 y 负相关, u 与 v 正相关

(D) 变量 x 与 y 负相关, u 与 v 负相关

4. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 的焦点到渐近线的距离为 （ ）

(A) $2\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) 1

5. 有四个关于三角函数的命题:

p_1: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$;

p_2: $\exists x, y\in\mathbf{R}$, $\sin(x-y)=\sin x-\sin y$;

p_3: $\forall x\in[0,\pi]$, $\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$;

p_4: $\sin x=\cos y\Rightarrow x+y=\dfrac{\pi}{2}$.

其中假命题的是 （ ）

(A) p_1, p_4 (B) p_2, p_4 (C) p_1, p_3 (D) p_2, p_3

6. 设 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\geqslant 4\\ x-y\geqslant -1\\ x-2y\leqslant 2\end{cases}$, 则 $z=x+y$ （ ）

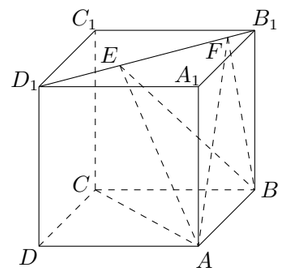
(A) 有最小值 2, 最大值 3 (B) 有最小值 2, 无最大值

(C) 有最大值 3, 无最小值 (D) 既无最小值, 也无最大值

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $4a_1$, $2a_2$, a_3 成等差数列. 若 a_1=1, 则 S_4= （ ）

(A) 7 (B) 8 (C) 15 (D) 16

8. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱线长为 1, 线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F, 且 $EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则下列结论中错误的是 （ ）



(A) $AC\perp BE$

(B) EF // 平面 $ABCD$

(C) 三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值

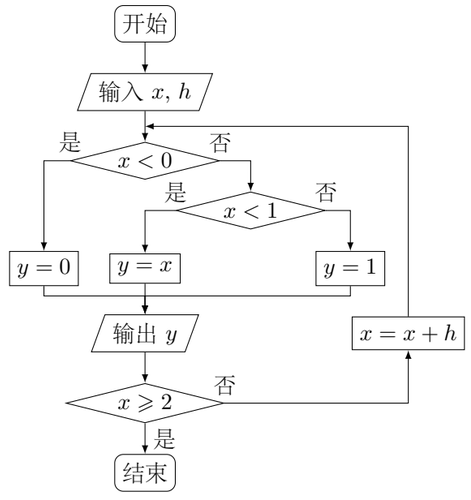
(D) 异面直线 AE, BF 所成的角为定值

9. 已知 O, N, P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$, $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\mathbf{0}$, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$, 则点 O, N, P 依次是 $\triangle ABC$ 的 （ ）

(A) 重心、外心、垂心 (B) 重心、外心、内心

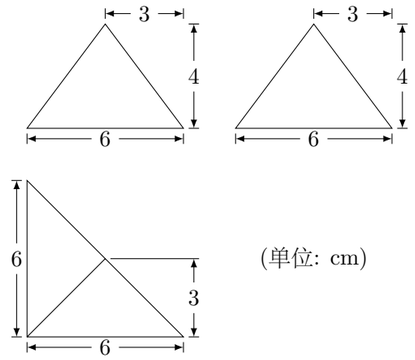
(C) 外心、重心、垂心 (D) 外心、重心、内心

10. 如果执行如图的程序框图, 输入 $x=-2$, $h=0.5$, 那么输出的各个数的和等于 （ ）



(A) 3 (B) 3.5 (C) 4 (D) 4.5

11. 一个棱锥的三视图如图, 则该棱锥的全面积 (单位: cm^2) 为 （ ）



(单位: cm)

(A) $48+12\sqrt{2}$ (B) $48+24\sqrt{2}$ (C) $36+12\sqrt{2}$ (D) $36+24\sqrt{2}$

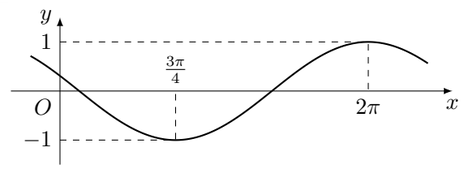
12. 用 $\min\{a,b,c\}$ 表示 a, b, c 三个数中的最小值. 设 $f(x)=\min\{2^x, x+2, 10-x\}$ $(x\geqslant 0)$, 则 $f(x)$ 的最大值为 （ ）

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

二、填空题

13. 设已知抛物线 C 的顶点在坐标原点, 焦点为 $F(1,0)$, 直线 l 与抛物线 C 相交于 A, B 两点. 若 AB 的中点为 $(2,2)$, 则直线 l 的方程为_____.

14. 已知函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0, -\pi\leqslant\varphi<\pi)$ 的图象如图所示, 则 $\varphi=$_____.

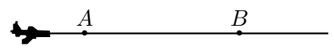


15. 7 名志愿者中安排 6 人在周六、周日两天参加社区公益活动. 若每天安排 3 人, 则不同的安排方案共有_____种. (用数字作答)

16. 等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n. 已知 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0$, $S_{2m-1}=38$, 则 $m=$_____.

三、解答题

17. 为了测量两山顶 M, N 间的距离, 飞机沿水平方向在 A, B 两点进行测量. A, B, M, N 在同一个铅垂平面内 (如示意图), 飞机能够测量的数据有俯角和 A, B 间的距离, 请设计一个方案, 包括: ① 指出需要测量的数据 (用字母表示, 并在图中标出); ② 用文字和公式写出计算 M, N 间的距离的步骤.





18. 某工厂有工人 1000 名, 其中 250 名工人参加过短期培训 (称为 A 类工人), 另外 750 名工人参加过长期培训 (称为 B 类工人), 现用分层抽样方法 (按 A 类、B 类分二层) 从该工厂的工人中共抽查 100 名工人, 调查他们的生产能力 (此处生产能力指一天加工的零件数).

(1) 求甲、乙两工人都被抽到的概率, 其中甲为 A 类工人, 乙为 B 类工人;

(2) 从 A 类工人中的抽查结果和从 B 类工人中的抽插结果分别如下表 1 和表 2.

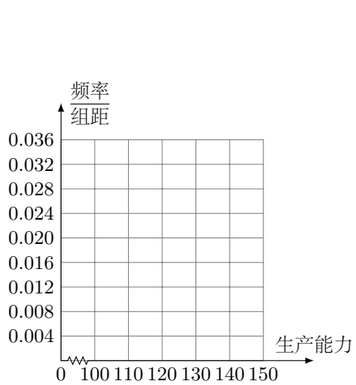
表 1:

生产能力分组	$[100,110)$	$[110,120)$	$[120,130)$	$[130,140)$	$[140,150)$
人数	4	8	x	5	3

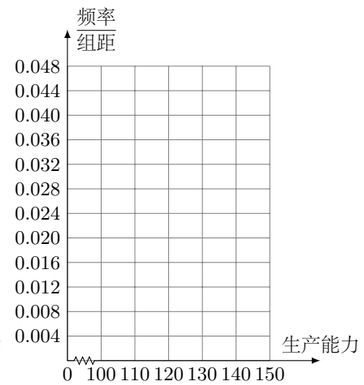
表 2:

生产能力分组	$[110,120)$	$[120,130)$	$[130,140)$	$[140,150)$
人数	6	y	36	18

① 先确定 x, y, 再在答题纸上完成下列频率分布直方图. 就生产能力而言, A 类工人中个体间的差异程度与 B 类工人中个体间的差异程度哪个更小? (不用计算, 可通过观察直方图直接回答结论)



A 类工人生产能力的频率分布直方图



B 类工人生产能力的频率分布直方图

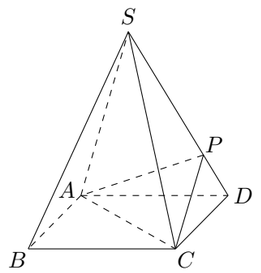
② 分别估计 A 类工人和 B 类工人生产能力的平均数, 并估计该工厂工人的生产能力的平均数. (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

19. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形, 每条侧棱的长都是地面边长的 $\sqrt{2}$ 倍, P 为侧棱 SD 上的点.

(1) 求证: $AC \perp SD$;

(2) 若 $SD \perp$ 平面 PAC, 求二面角 $P-AC-D$ 的大小;

(3) 在 (2) 的条件下, 侧棱 SC 上是否存在一点 E, 使得 $BE \parallel$ 平面 PAC. 若存在, 求 $SE:EC$ 的值; 若不存在, 试说明理由.



20. 已知椭圆 C 的中心为直角坐标系 xOy 的原点, 焦点在 x 轴上, 它的一个顶点到两个焦点的距离分别是 7 和 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 P 为椭圆 C 上的动点, M 为过 P 且垂直于 x 轴的直线上的点, $\dfrac{|OP|}{|OM|}=\lambda$, 求点 M 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么曲线.

21. 已知函数 $f(x)=(x^3+3x^2+ax+b)\mathrm{e}^{-x}$.

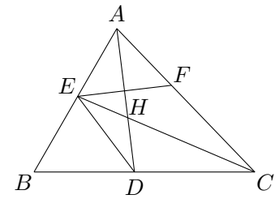
(1) 若 $a=b=-3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,\alpha)$, $(2,\beta)$ 单调增加, 在 $(\alpha,2)$, $(\beta,+\infty)$ 单调减少, 证明: $\beta-\alpha<6$.

22. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的两条角平分线 AD 和 CE 相交于 H, $\angle B=60^\circ$, F 在 AC 上, 且 $AE=AF$.

(1) 证明: 证明: B, D, H, E 四点共圆;

(2) 证明: CE 平分 $\angle DEF$.



23. 已知曲线 C_1: $\begin{cases}x=-4+\cos t\\ y=3+\sin t\end{cases}$ (t 为参数), C_2: $\begin{cases}x=8\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).

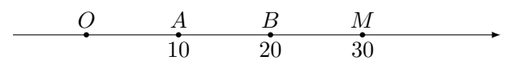
(1) 化 C_1, C_2 的方程为普通方程, 并说明它们分别表示什么曲线

(2) 若 C_1 上的点 P 对应的参数为 $t=\dfrac{\pi}{2}$, Q 为 C_2 上的动点, 求 PQ 中点 M 到直线 C_3: $\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2+t\end{cases}$ (t 为参数) 距离的最小值.

24. 如图, O 为数轴的原点, A, B, M 为数轴上三点, C 为线段 OM 上的动点, 设 x 表示 C 与原点的距离, y 表示 C 到 A 距离 4 倍与 C 到 B 距离的 6 倍的和.

(1) 将 y 表示成 x 的函数;

(2) 要使 y 的值不超过 70, x 应该在什么范围内取值?



2009 年普通高等学校招生考试（琼、宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{0,3,6,9,12\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{3,5\}$ (B) $\{3,6\}$ (C) $\{3,7\}$ (D) $\{3,9\}$

2. 复数 $\dfrac{3+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-\mathrm{i}$

3. 对变量 x, y 有观测数据 $(x_i,\ y_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$, 得散点图 1; 对变量 u, v 有观测数据 $(u_i,\ v_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$, 得散点图 2. 由这两个散点图可以判断 （ ）

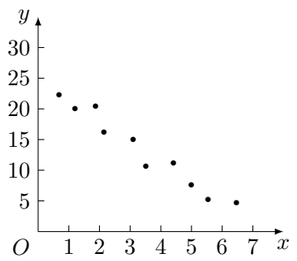


图 1

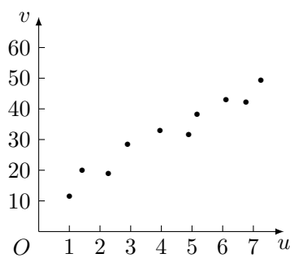


图 2

(A) 变量 x 与 y 正相关, u 与 v 正相关

(B) 变量 x 与 y 正相关, u 与 v 负相关

(C) 变量 x 与 y 负相关, u 与 v 正相关

(D) 变量 x 与 y 负相关, u 与 v 负相关

4. 有四个关于三角函数的命题:

p_1: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$;

p_2: $\exists x,\ y\in\mathbf{R}$, $\sin(x-y)=\sin x-\sin y$;

p_3: $\forall x\in[0,\pi]$, $\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$;

p_4: $\sin x=\cos y\Rightarrow x+y=\dfrac{\pi}{2}$.

其中假命题的是 （ ）

(A) p_1, p_4 (B) p_2, p_4 (C) p_1, p_3 (D) p_2, p_3

5. 已知圆 C_1: $(x+1)^2+(y-1)^2=1$, 圆 C_2 与圆 C_1 关于直线 $x-y-1=0$ 对称, 则圆 C_2 的方程为 （ ）

(A) $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ (B) $(x-2)^2+(y+2)^2=1$

(C) $(x+2)^2+(y+2)^2=1$ (D) $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

6. 设 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\geqslant 4\\ x-y\geqslant -1\\ x-2y\leqslant 2\end{cases}$, 则 $z=x+y$ （ ）

(A) 有最小值 2, 最大值 3 (B) 有最小值 2, 无最大值

(C) 有最大值 3, 无最小值 (D) 既无最小值, 也无最大值

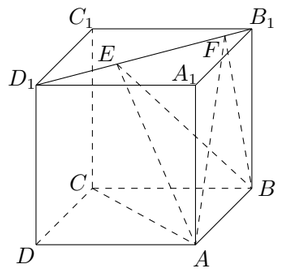
7. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3,2)$, $\boldsymbol{b}=(-1,0)$, 向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直, 则实数 λ 的值为 （ ）

(A) $-\dfrac{1}{7}$ (B) $\dfrac{1}{7}$ (C) $-\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{6}$

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n. 已知 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0$, $S_{2m-1}=38$, 则 $m=$ （ ）

(A) 38 (B) 20 (C) 10 (D) 9

9. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱线长为 1, 线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F, 且 $EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则下列结论中错误的是 （ ）



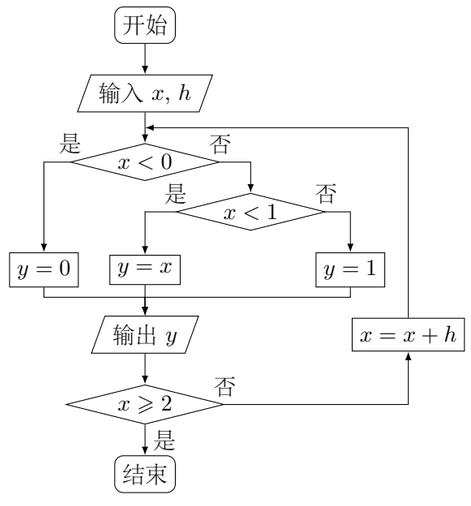
(A) $AC\perp BE$

(B) EF // 平面 $ABCD$

(C) 三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值

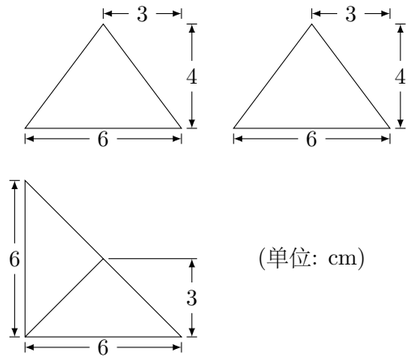
(D) 异面直线 AE, BF 所成的角为定值

10. 如果执行如图的程序框图, 输入 $x=-2$, $h=0.5$, 那么输出的各个数的和等于 （ ）



(A) 3 (B) 3.5 (C) 4 (D) 4.5

11. 一个棱锥的三视图如图, 则该棱锥的全面积 (单位: cm^2) 为 （ ）



(单位: cm)

(A) $48+12\sqrt{2}$ (B) $48+24\sqrt{2}$ (C) $36+12\sqrt{2}$ (D) $36+24\sqrt{2}$

12. 用 $\min\{a,b,c\}$ 表示 a, b, c 三个数中的最小值. 设 $f(x)=\min\{2^x,x+2,10-x\}$ $(x\geqslant 0)$, 则 $f(x)$ 的最大值为 （ ）

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

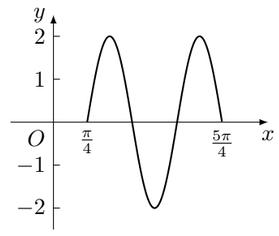
二、填空题

13. 曲线 $y=x\mathrm{e}^x+2x+1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_____.

14. 已知抛物线 C 的顶点坐标为原点, 焦点在 x 轴上, 直线 $y=x$ 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 若 $P(2,2)$ 为 AB 的中点, 则抛物线 C 的方程为_____.

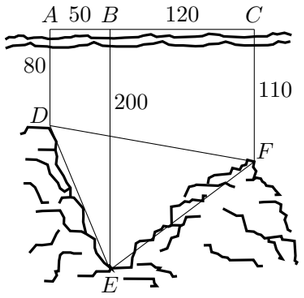
15. 等比数列a_n 的公比 $q>0$, 已知 $a_2=1$, $a_{n+2}+a_{n+1}=6a_n$, 则 a_n 的前 4 项和 $S_4=$_____.

16. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象如图所示, 则 $f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=$_____.

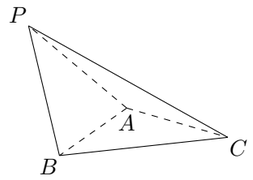


三、解答题

17. 如图, 为了解某海域海底构造, 在海平面内一条直线上的 A, B, C 三点进行测量, 已知 $AB=50$ m, $BC=120$ m, 于 A 处测得水深 $AD=80$ m, 于 B 处测得水深 $BE=200$ m, 于 C 处测得水深 $CF=110$ m, 求 $\angle DEF$ 的余弦值.



18. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle PAB$ 是等边三角形, $\angle PAC=\angle PBC=90^\circ$.
(1) 求证: $AB\perp PC$;
(2) 若 $PC=4$, 且平面 $PAC\perp$ 平面 PBC, 求三棱锥 $P-ABC$ 体积.



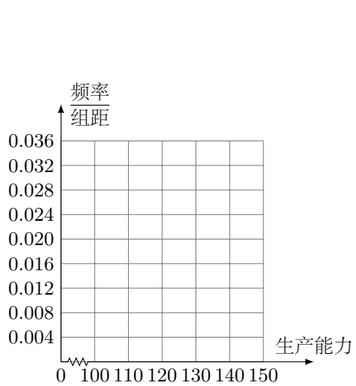
19. 某工厂有工人 1000 名, 其中 250 名工人参加过短期培训 (称为 A 类工人), 另外 750 名工人参加过长期培训 (称为 B 类工人), 现用分层抽样方法 (按 A 类、B 类分二层) 从该工厂的工人中共抽查 100 名工人, 调查他们的生产能力 (此处生产能力指一天加工的零件数).
(1) 求甲、乙两工人都被抽到的概率, 其中甲为 A 类工人, 乙为 B 类工人;
(2) 从 A 类工人中的抽查结果和从 B 类工人中的抽插结果分别如下表 1 和表 2.
表 1:

生产能力分组	$[100,110)$	$[110,120)$	$[120,130)$	$[130,140)$	$[140,150)$
人数	4	8	x	5	3

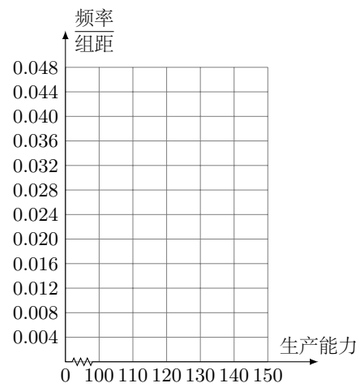
表 2:

生产能力分组	$[110,120)$	$[120,130)$	$[130,140)$	$[140,150)$
人数	6	y	36	18

① 先确定 x, y, 再在答题纸上完成下列频率分布直方图. 就生产能力而言, A 类工人中个体间的差异程度与 B 类工人中个体间的差异程度哪个更小? (不用计算, 可通过观察直方图直接回答结论)



A 类工人生产能力的频率分布直方图



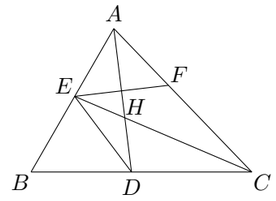
B 类工人生产能力的频率分布直方图

② 分别估计 A 类工人和 B 类工人生产能力的平均数, 并估计该工厂工人的生产能力的平均数. (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

20. 已知椭圆 C 的中心为直角坐标系 xOy 的原点, 焦点在 x 轴上, 它的一个顶点到两个焦点的距离分别是 7 和 1.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 若 P 为椭圆 C 上的动点, M 为过 P 且垂直于 x 轴的直线上的点, $\dfrac{|OP|}{|OM|}=e$ (e 为椭圆 C 的离心率), 求点 M 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么曲线.

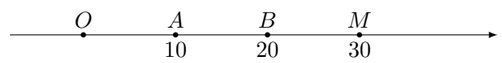
21. 已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2-9a^2x+a^3$.
(1) 设 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的极值;
(2) 若 $a>\dfrac{1}{4}$, 且当 $x\in[1,4a]$ 时, $|f'(x)|\leqslant 12a$ 恒成立, 试确定 a 的取值范围.

22. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的两条角平分线 AD 和 CE 相交于 H, $\angle B=60^\circ$, F 在 AC 上, 且 $AE=AF$.
(1) 证明: 证明: B, D, H, E 四点共圆;
(2) 证明: CE 平分 $\angle DEF$.



23. 已知曲线 C_1: $\begin{cases}x=-4+\cos t\\ y=3+\sin t\end{cases}$ (t 为参数), C_2: $\begin{cases}x=8\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).
(1) 化 C_1, C_2 的方程为普通方程, 并说明它们分别表示什么曲线
(2) 若 C_1 上的点 P 对应的参数为 $t=\dfrac{\pi}{2}$, Q 为 C_2 上的动点, 求 PQ 中点 M 到直线 C_3: $\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2+t\end{cases}$ (t 为参数) 距离的最小值.

24. 如图, O 为数轴的原点, A, B, M 为数轴上三点, C 为线段 OM 上的动点, 设 x 表示 C 与原点的距离, y 表示 C 到 A 距离 4 倍与 C 到 B 距离的 6 倍的和.
(1) 将 y 表示成 x 的函数;
(2) 要使 y 的值不超过 70, x 应该在什么范围内取值?



2009 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 集合 $A=\{0,2,a\}$, $B=\{1,a^2\}$. 若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$, 则 a 的值为 （ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

2. 复数 $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 等于 （ ）

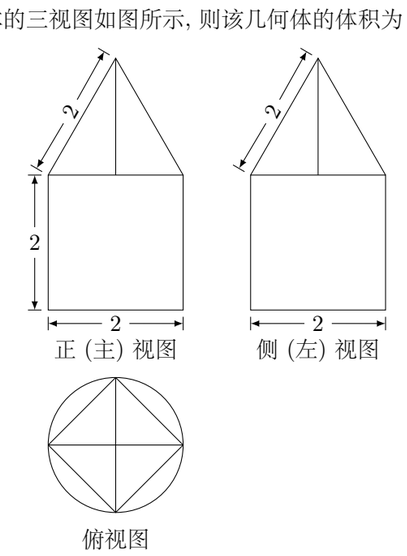
(A) $1+2\mathrm{i}$　　(B) $1-2\mathrm{i}$　　(C) $2+\mathrm{i}$　　(D) $2-\mathrm{i}$

3. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位, 所得图象的函数解析式是 （ ）

(A) $y=\cos 2x$　　(B) $y=2\cos^2 x$

(C) $y=1+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(D) $y=2\sin^2 x$

4. 一空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 （ ）



(A) $2\pi+2\sqrt{3}$　　(B) $4\pi+2\sqrt{3}$　　(C) $2\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(D) $4\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

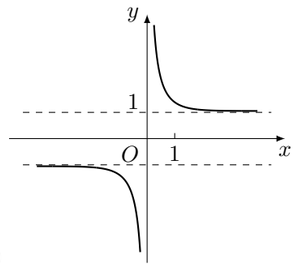
5. 已知 α, β 表示两个不同的平面, m 为平面 α 内的一条直线, 则“$\alpha\perp\beta$”是“$m\perp\beta$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

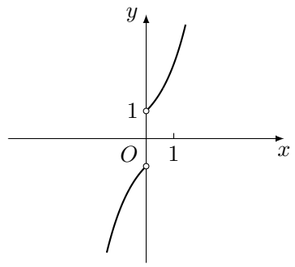
(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

6. 函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ 的图象大致为 （ ）

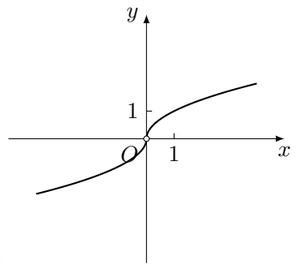
(A)



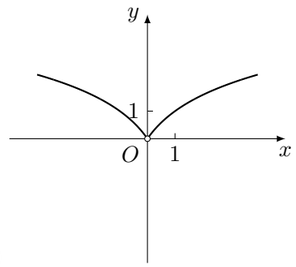
(B)



(C)



(D)

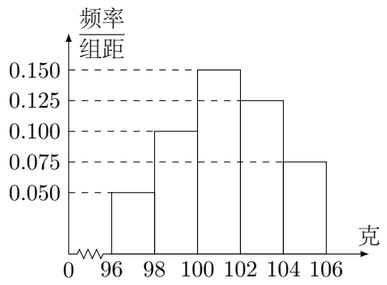


7. 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$, 则 （ ）

(A) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\mathbf{0}$　　(B) $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\mathbf{0}$

(C) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$　　(D) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$

8. 某工厂对一批产品进行了抽样检测. 如图是根据抽样检测后的产品净重 (单位: 克) 数据绘制的频率分布直方图, 其中产品净重的范围是 $[96,106]$, 样本数据分组为 $[96,98)$, $[98,100)$, $[100,102)$, $[102,104)$, $[104,106]$, 已知样本中产品净重小于 100 克的个数是 36, 则样本中净重大于或等于 98 克并且小于 104 克的产品的个数是 （ ）



(A) 90　　(B) 75　　(C) 60　　(D) 45

9. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 只有一个公共点, 则双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{5}{4}$　　(B) 5　　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(D) $\sqrt{5}$

10. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x), & x\leqslant 0\\ f(x-1)-f(x-2), & x>0\end{cases}$, 则 $f(2009)$ 的值为 （ ）

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

11. 在区间 $[-1,1]$ 上随机取一个数 x, $\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 的值介于 0 到 $\dfrac{1}{2}$ 之间的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{2}{\pi}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{2}{3}$

12. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3x-y-6\leqslant 0\\ x-y+2\geqslant 0\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$, 若目标函数 $z=ax+by$ $(a>0,\ b>0)$ 的是最大值为 12, 则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}$ 的最小值为 （ ）

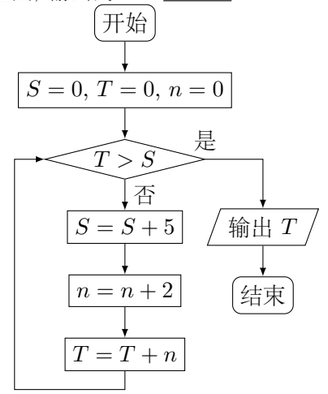
(A) $\dfrac{25}{6}$　　(B) $\dfrac{8}{3}$　　(C) $\dfrac{11}{3}$　　(D) 4

二、填空题

13. 不等式 $|2x-1|-|x-2|<0$ 的解集为_____.

14. 若函数 $f(x)=a^x-x-a$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 执行如图的程序框图, 输出的 $T=$_____.



16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 满足 $f(x-4)=-f(x)$, 且在区间 $[0,2]$ 上是增函数, 若方程 $f(x)=m$ $(m>0)$ 在区间 $[-8,8]$ 上有四个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4, 则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$_____.

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin^2 x$.

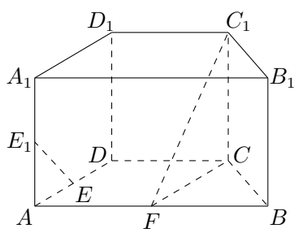
(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小正周期;

(2) 设 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角, 若 $\cos B=\dfrac{1}{3}$, $f\left(\dfrac{C}{3}\right)=-\dfrac{1}{4}$, 且 C 为锐角, 求 $\sin A$.

18. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB\parallel CD$, $AB=4$, $BC=CD=2$, $AA_1=2$, E、E_1、F 分别是棱 AD、AA_1、AB 的中点.

(1) 证明: 直线 $EE_1\parallel$ 平面 FCC_1;

(2) 求二面角 $B-FC_1-C$ 的余弦值.



19. 在某校组织的一次篮球定点投篮训练中, 规定每人最多投 3 次; 在 A 处每投进一球得 3 分, 在 B 处每投进一球得 2 分; 如果前两次得分之和超过 3 分即停止投篮, 否则投第三次, 某同学在 A 处的命中率 q_1 为 0.25, 在 B 处的命中率为 q_2, 该同学选择先在 A 处投一球, 以后都在 B 处投, 用 ξ 表示该同学投篮训练结束后所得的总分, 其分布列为

ξ	0	2	3	4	5
p	0.03	p_1	p_2	p_3	p_4

(1) 求 q_2 的值;

(2) 求随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi$;

(3) 试比较该同学选择都在 B 处投篮得分超过 3 分与选择上述方式投篮得分超过 3 分的概率的大小.

20. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 点 (n,S_n) 均在函数 $y=b^x+r$ ($b>0$ 且 $b\neq1$, b, r 均为常数) 的图象上.

(1) 求 r 的值;

(2) 当 $b=2$ 时, 记 $b_n=2(\log_2a_n+1)$ ($n\in\mathbf{N}^*$). 证明: 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 不等式 $\dfrac{b_1+1}{b_1}\cdot\dfrac{b_2+1}{b_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$ 成立.

21. 两县城 A 和 B 相距 20 km, 现计划在两县城外以 AB 为直径的半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上选择一点 C 建造垃圾处理厂, 其对城市的影响度与所选地点到城市的的距离有关, 对城 A 和城 B 的总影响度为城 A 与城 B 的影响度之和. 记 C 点到城 A 的距离为 x km, 建在 C 处的垃圾处理厂对城 A 和城 B 的总影响度为 y. 统计调查表明: 垃圾处理厂对城 A 的影响度与所选地点到城 A 的距离的平方成反比, 比例系数为 4; 对城 B 的影响度与所选地点到城 B 的距离的平方成反比, 比例系数为 k, 当垃圾处理厂建在 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时, 对城 A 和城 B 的总影响度为 0.065.

(1) 将 y 表示成 x 的函数;

(2) 讨论 (1) 中函数的单调性, 并判断弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上是否存在一点, 使建在此处的垃圾处理厂对城 A 和城 B 的总影响度最小? 若存在, 求出该点到城 A 的距离; 若不存在, 说明理由.

22. 设椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a, $b>0$) 过 $M(2,\sqrt{2})$, $N(\sqrt{6},1)$ 两点, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 是否存在圆心在原点的圆, 使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A, B, 且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$? 若存在, 写出该圆的方程, 并求 $|AB|$ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

2009 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 集合 $A=\{0,2,a\}$, $B=\{1,a^2\}$. 若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$, 则 a 的值为 （ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

2. 复数 $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 等于 （ ）

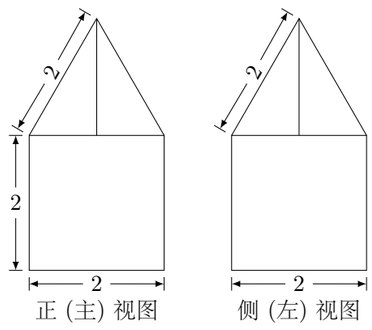
(A) $1+2\mathrm{i}$　　(B) $1-2\mathrm{i}$　　(C) $2+\mathrm{i}$　　(D) $2-\mathrm{i}$

3. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位, 所得图象的函数解析式是 （ ）

(A) $y=\cos 2x$　　(B) $y=2\cos^2 x$

(C) $y=1+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(D) $y=2\sin^2 x$

4. 一空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 （ ）



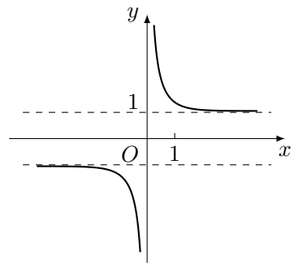
(A) $2\pi+2\sqrt{3}$　　(B) $4\pi+2\sqrt{3}$　　(C) $2\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(D) $4\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

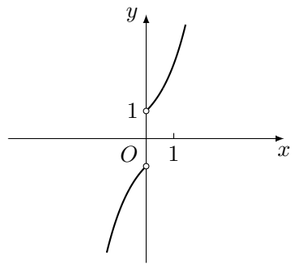
5. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\odot$: $a\odot b=ab+2a+b$, 则满足 $x\odot(x-2)<0$ 的实数 x 的取值范围为 （ ）.

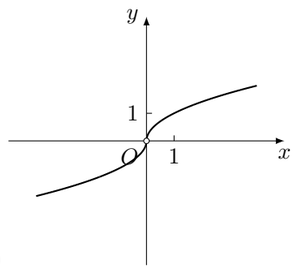
(A) $(0,2)$　　(B) $(-2,1)$

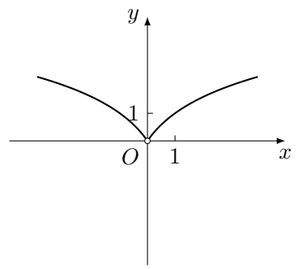
(C) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　(D) $(-1,2)$

6. 函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ 的图象大致为 （ ）

(A)


(B)


(C)


(D)


7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(4-x), & x\leqslant 0\\ f(x-1)-f(x-2), & x>0\end{cases}$, 则 $f(3)$ 的值为 （ ）

(A) -1　　(B) -2　　(C) 1　　(D) 2

8. 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$, 则 （ ）

(A) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\mathbf{0}$　　(B) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$

(C) $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\mathbf{0}$　　(D) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$

9. 已知 α, β 表示两个不同的平面, m 为平面 α 内的一条直线, 则“$\alpha\perp\beta$”是“$m\perp\beta$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

10. 设斜率为 2 的直线 l 过抛物线 $y^2=ax$ $(a\neq 0)$ 的焦点 F, 且和 y 轴交于点 A. 若 $\triangle OAF$ (O 为坐标原点) 的面积为 4, 则抛物线方程为 （ ）

(A) $y^2=\pm 4x$　　(B) $y^2=\pm 8x$　　(C) $y^2=4x$　　(D) $y^2=8x$

11. 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上随机取一个数 x, $\cos x$ 的值介于 0 到 $\dfrac{1}{2}$ 之间的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{2}{\pi}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{2}{3}$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4)=-f(x)$, 且在区间 $[0,2]$ 上是增函数, 则 （ ）

(A) $f(-25)<f(11)<f(80)$　　(B) $f(80)<f(11)<f(-25)$

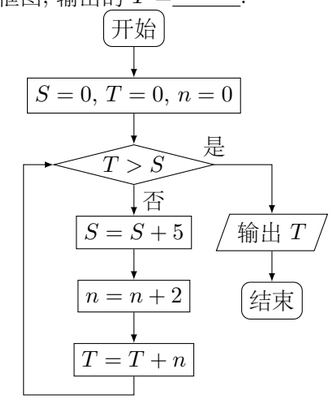
(C) $f(11)<f(80)<f(-25)$　　(D) $f(-25)<f(80)<f(11)$

二、填空题

13. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3=7$, $a_5=a_2+6$, 则 $a_6=$_____.

14. 若函数 $f(x)=a^x-x-a$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 执行如图的程序框图, 输出的 $T=$_____.



16. 某公司租赁甲、乙两种设备生产 A, B 两类产品, 甲种设备每天能生产 A 类产品 5 件和 B 类产品 10 件, 乙种设备每天能生产 A 类产品 6 件和 B 类产品 20 件. 已知设备甲每天的租赁费为 200 元, 设备乙每天的租赁费为 300 元. 现该公司至少要生产 A 类产品 50 件, B 类产品 140 件, 所需租赁费最少为_____元.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos^2\dfrac{\varphi}{2}+\cos x\sin\varphi-\sin x$ $(0<\varphi<\pi)$ 在 $x=\pi$ 处取最小值.

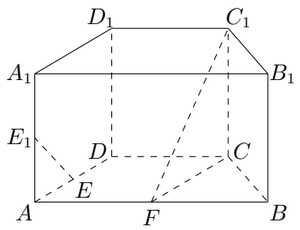
(1) 求 φ 的值;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边. 已知 $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $f(A)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 求角 C.

18. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB\parallel CD$, $AB=4$, $BC=CD=2$, $AA_1=2$, E、E_1 分别是棱 AD、AA_1 的中点.

(1) 设 F 是棱 AB 的中点, 证明: 直线 $EE_1\parallel$ 平面 FCC_1;

(2) 证明: 平面 $D_1AC\perp$ 平面 BB_1C_1C.



19. 一汽车厂生产 A, B, C 三类轿车, 每类轿车均有舒适型和标准型两种型号, 某月的产量如下表 (单位: 辆) :

	轿车 A	轿车 B	轿车 C
舒适型	100	150	z
标准型	300	450	600

按类型分层抽样的方法在这个月生产的轿车中抽取 50 辆, 其中有 A 类轿车 10 辆.

(1) 求 z 的值;

(2) 用分层抽样的方法在 C 类轿车中抽取一个容量为 5 的样本. 将该样本看成一个总体, 从中任取 2 辆, 求至少有 1 辆舒适型轿车的概率;

(3) 用随机抽样的方法从 B 类舒适型轿车中抽取 8 辆, 经检测它们的得分如下: 9.4, 8.6, 9.2, 9.6, 8.7, 9.3, 9.0, 8.2. 把这 8 辆轿车的得分看作一个总体, 从中任取一个数, 求该数与样本平均数之差的绝对值不超过 0.5 的概率.

20. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 点 (n,S_n) 均在函数 $y=b^x+r$ ($b>0$ 且 $b\neq1$, b, r 均为常数) 的图象上.

(1) 求 r 的值;

(2) 当 $b=2$ 时, 记 $b_n=\dfrac{n+1}{4a_n}$ ($n\in\mathbf{N}^*$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+bx^2+x+3$, 其中 $a\neq0$.

(1) 当 a, b 满足什么条件时, $f(x)$ 取得极值?

(2) 已知 $a>0$, 且 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增, 试用 a 表示出 b 的取值范围.

22. 设 $m\in\mathbf{R}$, 在平面直角坐标系中, 已知向量 $\boldsymbol{a}=(mx,y+1)$, 向量 $\boldsymbol{b}=(x,y-1)$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 动点 $M(x,y)$ 的轨迹为 E.

(1) 求轨迹 E 的方程, 并说明该方程所表示曲线的形状;

(2) 已知 $m=\dfrac{1}{4}$. 证明: 存在圆心在原点的圆, 使得该圆的任意一条切线与轨迹 E 恒有两个交点 A, B, 且 $OA\perp OB$ (O 为坐标原点), 并求出该圆的方程;

(3) 已知 $m=\dfrac{1}{4}$. 设直线 l 与圆 C: $x^2+y^2=R^2$ ($1<R<2$) 相切于 A_1, 且 l 与轨迹 E 只有一个公共点 B_1. 当 R 为何值时, $|A_1B_1|$ 取得最大值? 并求最大值.

2009 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

理科数学

一、选择题

1. 设不等式 $x^2-x\leqslant 0$ 的解集为 M, 函数 $f(x)=\ln(1-|x|)$ 的定义域为 N, 则 $M\cap N$ 为 （ ）

(A) $[0,1)$ (B) $(0,1)$ (C) $[0,1]$ (D) $(-1,0]$

2. 已知 z 是纯虚数, $\dfrac{z+2}{1-\mathrm{i}}$ 是实数, 那么 z 等于 （ ）

(A) $2\mathrm{i}$ (B) i (C) $-\mathrm{i}$ (D) $-2\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{2x-4}$ $(x\geqslant 4)$ 的反函数为 （ ）

(A) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2$ $(x\geqslant 0)$ (B) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2$ $(x\geqslant 2)$

(C) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2+4$ $(x\geqslant 0)$ (D) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2+4$ $(x\geqslant 2)$

4. 过原点且倾斜角为 60° 的直线被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长为( )

(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{6}$ (D) $2\sqrt{3}$

5. 若 $3\sin\alpha+\cos\alpha=0$, 则 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}$ 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{10}{3}$ (B) $\dfrac{5}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) -2

6. 若 $(1-2x)^{2009}=a_0+a_1x+\cdots+a_{2009}x^{2009}$ $(x\in\mathbf{R})$, 则 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{2009}}{2^{2009}}$ 的值为 （ ）

(A) 2 (B) 0 (C) -1 (D) -2

7. “$m>n>0$”是“方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM=1$, 点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 等于 （ ）

(A) $-\dfrac{4}{9}$ (B) $-\dfrac{4}{3}$ (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $\dfrac{4}{9}$

9. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数字中任取两个奇数和两个偶数, 组成没有重复数字的四位数的个数为 （ ）

(A) 300 (B) 216 (C) 180 (D) 162

10. 若正方体的棱长为 $\sqrt{2}$, 则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

11. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-y\geqslant -1\\ 2x-y\leqslant 2\end{cases}$, 目标函数 $z=ax+2y$ 仅在点 $(1,0)$ 处取得最小值, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(-1,2)$ (B) $(-4,2)$ (C) $(-4,0]$ (D) $(-2,4)$

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 x_1, $x_2\in(-\infty,0]$ $(x_1\neq x_2)$, 有 $(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1))>0$. 则当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时, 有 （ ）

(A) $f(-n)<f(n-1)<f(n+1)$ (B) $f(n-1)<f(-n)<f(n+1)$

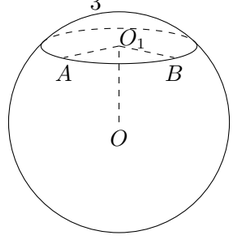
(C) $f(n+1)<f(-n)<f(n-1)$ (D) $f(n+1)<f(n-1)<f(-n)$

二、填空题

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_6=S_3=12$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=$_____.

14. 某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组, 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26, 15, 13, 同时参加数学和物理小组的有 6 人, 同时参加物理和化学小组的有 4 人, 则同时参加数学和化学小组的有_____人.

15. 如图球 O 的半径为 2, 圆 O_1 是一小圆, $O_1O=\sqrt{2}$, A, B 是圆 O_1 上两点. 若 A, B 两点间的球面距离为 $\dfrac{2\pi}{3}$, 则 $\angle AO_1B=$_____.



16. 设曲线 $y=x^{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点的横坐标为 x_n, 令 $a_n=\lg x_n$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_{99}$ 的值为_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$ (其中 $A>0$, $\omega>0$, $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$) 的图象与 x 轴的交点中, 相邻两个交点之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$, 且图象上一个最低点为 $M\left(\dfrac{2\pi}{3},-2\right)$.

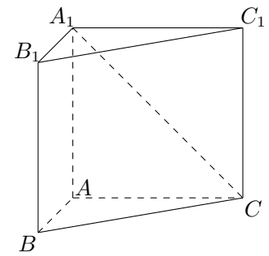
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 的值域.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=1$, $AC=AA_1=\sqrt{3}$, $\angle ABC=60^\circ$.

(1) 证明: $AB\perp A_1C$;

(2) 求二面角 $A-A_1C-B$ 的大小.



19. 某食品企业一个月内被消费者投诉的次数用 ξ 表示, 据统计, 随机变量 ξ 的概率分布如下:

ξ	0	1	2	3
p	0.1	0.3	$2a$	a

(1) 求 a 的值和 ξ 的数学期望;

(2) 假设一月份与二月份被消费者投诉的次数互不影响, 求该企业在这两个月内共被消费者投诉 2 次的概率.

20. 已知函数 $f(x)=\ln(ax+1)+\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\geqslant 0$, 其中 $a>0$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值;

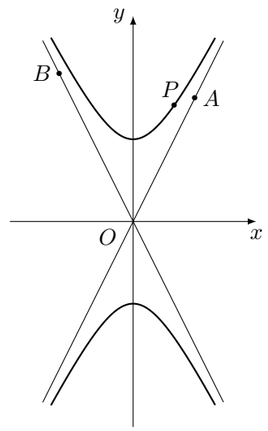
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若 $f(x)$ 的最小值为 1, 求 a 的取值范围.

21. 已知双曲线 C 的方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 顶点到渐近线的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 如图, P 是双曲线 C 上一点, A, B 两点在双曲线 C 的两条渐近线上, 且分别位于第一、二象限, 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$, $\lambda\in\left[\dfrac{1}{3},2\right]$, 求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围.



22. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 猜想数列 $\{x_n\}$ 的单调性, 并证明你的结论;

(2) 证明: $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

2009 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

文科数学

一、选择题

1. 设不等式 $x^2-x\leqslant 0$ 的解集为 M, 函数 $f(x)=\ln(1-|x|)$ 的定义域为 N, 则 $M\cap N$ 为 （ ）

(A) $[0,1)$　(B) $(0,1)$　(C) $[0,1]$　(D) $(-1,0]$

2. 若 $\tan\alpha=2$, 则 $\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$ 的值为 （ ）

(A) 0　(B) $\dfrac{3}{4}$　(C) 1　(D) $\dfrac{5}{4}$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{2x-4}$ $(x\geqslant 4)$ 的反函数为 （ ）

(A) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2+4$ $(x\geqslant 0)$　(B) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2+4$ $(x\geqslant 2)$

(C) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2$ $(x\geqslant 0)$　(D) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2$ $(x\geqslant 2)$

4. 过原点且倾斜角为 60° 的直线被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长为（ ）

(A) $\sqrt{3}$　(B) 2　(C) $\sqrt{6}$　(D) $2\sqrt{3}$

5. 某单位共有老、中、青职工 430 人, 其中青年职工 160 人, 中年职工人数是老年职工人数的 2 倍. 为了解职工身体状况, 现采用分层抽样方法进行调查, 在抽取的样本中有青年职工 32 人, 则该样本中的老年职工人数为（ ）

(A) 9　(B) 18　(C) 27　(D) 36

6. 若 $(1-2x)^{2009}=a_0+a_1x+\cdots+a_{2009}x^{2009}$ $(x\in\mathbf{R})$, 则 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{2009}}{2^{2009}}$ 的值为 （ ）

(A) 2　(B) 0　(C) -1　(D) -2

7. “$m>n>0$”是“方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

8. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM=1$, 点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{4}{9}$　(B) $\dfrac{4}{3}$　(C) $-\dfrac{4}{3}$　(D) $-\dfrac{4}{9}$

9. 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这七个数字中任取两个奇数和两个偶数, 组成没有重复数字的四位数, 其中奇数的个数为 （ ）

(A) 432　(B) 288　(C) 216　(D) 108

10. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 x_1, $x_2\in[0,+\infty)$ $(x_1\neq x_2)$, 有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$. 则 （ ）

(A) $f(3)<f(-2)<f(1)$　(B) $f(1)<f(-2)<f(3)$

(C) $f(-2)<f(1)<f(3)$　(D) $f(3)<f(1)<f(-2)$

11. 若正方体的棱长为 $\sqrt{2}$, 则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

12. 设曲线 $y=x^{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点的横坐标为 x_n, 则 $x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n$ 的值为 （ ）

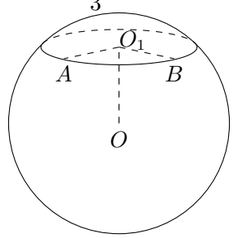
(A) $\dfrac{1}{n}$　(B) $\dfrac{1}{n+1}$　(C) $\dfrac{n}{n+1}$　(D) 1

二、填空题

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_6=S_3=12$, 则 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=$_____.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-y\geqslant -1\\ 2x-y\leqslant 2\end{cases}$, 目标函数 $z=x+2y$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

15. 如图球 O 的半径为 2, 圆 O_1 是一小圆, $O_1O=\sqrt{2}$, A, B 是圆 O_1 上两点. 若 A, B 两点间的球面距离为 $\dfrac{2\pi}{3}$, 则 $\angle AO_1B=$_____.



16. 某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组, 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26, 15, 13, 同时参加数学和物理小组的有 6 人, 同时参加物理和化学小组的有 4 人, 则同时参加数学和化学小组的有_____人.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$ (其中 $A>0$, $\omega>0$, $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$) 的周期为 π, 且图象上一个最低点为 $M\left(\dfrac{2\pi}{3},-2\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{12}\right]$ 时, 求 $f(x)$ 的最值.

18. 据统计, 某食品企业一个月内被消费者投诉的次数为 0, 1, 2 的概率分别为 0.4, 0.5, 0.1.

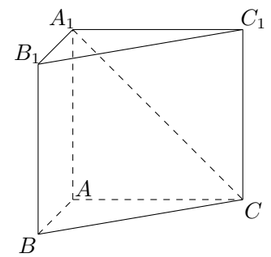
(1) 求该企业在一个月内共被消费者投诉不超过 1 次的概率;

(2) 假设一月份与二月份被消费者投诉的次数互不影响, 求该企业在这两个月内共被消费者投诉 2 次的概率.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=1$, $AC=AA_1=\sqrt{3}$, $\angle ABC=60^\circ$.

(1) 证明: $AB\perp A_1C$;

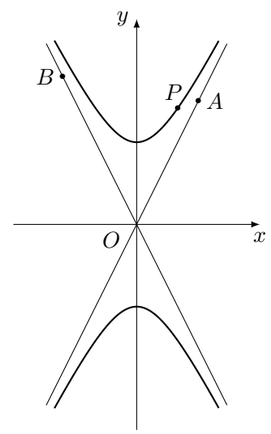
(2) 求二面角 $A-A_1C-B$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x)=x^3-3ax-1$, $a\neq 0$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值, 直线 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点, 求 m 的取值范围.

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 令 $b_n=a_{n+1}-a_n$, 证明: $\{b_n\}$ 是等比数列;
(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

22. 已知双曲线 C 的方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$), 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 顶点到渐近线的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 如图, P 是双曲线 C 上一点, A, B 两点在双曲线 C 的两条渐近线上, 且分别位于第一、二象限, 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$, $\lambda\in\left[\dfrac{1}{3},2\right]$, 求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围.



2009 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

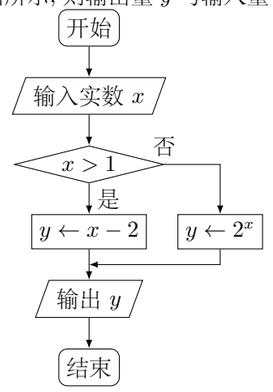
一、填空题

1. 若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则其共轭复数 $\overline{z}=$_____.

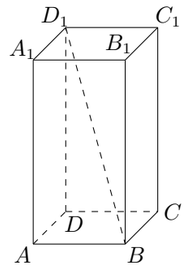
2. 已知集合 $A=\{x|x\leqslant 1\}$, $B=\{x|x\geqslant a\}$, 且 $A\cup B=\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

3. 若行列式 $\begin{vmatrix}4 & 5 & x\\ 1 & x & 3\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ 中, 元素 4 的代数余子式大于 0, 则 x 满足的条件是_____.

4. 某算法的程序框如图所示, 则输出量 y 与输入量 x 满足的关系式是_____.



5. 如图, 若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 2, 高为 4, 则异面直线 BD_1 与 AD 所成角的大小是_____. (结果用反三角函数表示)



6. 函数 $y=2\cos^2 x+\sin 2x$ 的最小值是_____.

7. 某学校要从 5 名男生和 2 名女生中选出 2 人作为上海世博会志愿者, 若用随机变量 ξ 表示选出的志愿者中女生的人数, 则数学期望 $E\xi=$_____. (结果用最简分数表示)

8. 已知三个球的半径 R_1, R_2, R_3 满足 $R_1+2R_2=3R_3$, 则它们的表面积 S_1, S_2, S_3 满足的等量关系是_____.

9. 已知 F_1、F_2 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的两个焦点, P 为椭圆 C 上一点, 且 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9, 则 $b=$_____.

10. 在极坐标系中, 由三条直线 $\theta=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$ 围成图形的面积是_____.

11. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$, 不等式 $\sin\dfrac{\pi x}{2}\geqslant kx$ 成立, 则实数 k 的取值范围是_____.

12. 已知函数 $f(x)=\sin x+\tan x$. 项数为 27 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且公差 $d\neq 0$. 若 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{27})=0$, 则当 $k=$_____时, $f(a_k)=0$.

13. 某地街道呈现东—西、南—北向的网格状, 相邻街距都为 1, 两街道相交的点称为格点. 若以互相垂直的两条街道为轴建立直角坐标系, 现有下述格点 $(-2,2)$, $(3,1)$, $(3,4)$, $(-2,3)$, $(4,5)$, $(6,6)$ 为报刊零售点. 请确定一个格点 (除零售点外) _____为发行站, 使 6 个零售点沿街道到发行站之间路程的和最短.

14. 将函数 $y=\sqrt{4+6x-x^2}-2$ $(x\in[0,6])$ 的图象绕坐标原点逆时针方向旋转角 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\alpha)$, 得到曲线 C. 若对于每一个旋转角 θ, 曲线 $AA_1=BC=AB=2$ 都是一个函数的图象, 则 α 的最大值为_____.

二、选择题

15. “$-2\leqslant a\leqslant 2$”是“实数一元二次方程 $x^2+ax+1=0$ 有虚根”的 （ ）

(A) 必要不充分条件　(B) 充分不必要条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

16. 若事件 E 与 F 相互独立, 且 $P(E)=P(F)=\dfrac{1}{4}$, 则 $P(E\cap F)$ 的值等于 （ ）

(A) 0　(B) $\dfrac{1}{16}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

17. 在发生某公共卫生事件期间, 有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续 10 天, 每天新增疑似病例不超过 7 人”. 根据过去 10 天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据, 一定符合该标志的是 （ ）

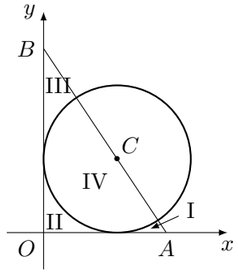
(A) 甲地: 总体均值为 3, 中位数为 4

(B) 乙地: 总体均值为 1, 总体方差大于 0

(C) 丙地: 中位数为 2, 众数为 3

(D) 丁地: 总体均值为 2, 总体方差为 3

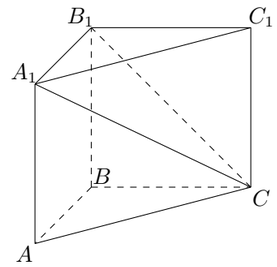
18. 过圆 C: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心, 作直线分别交 x、y 正半轴于点 A、B, $\triangle AOB$ 被圆分成四部分 (如图), 若这四部分图形面积满足 $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{IV}}=S_{\mathrm{II}}+S_{\mathrm{III}}$, 则直线 AB 有 （ ）



(A) 0 条　(B) 1 条　(C) 2 条　(D) 3 条

三、解答题

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=BC=AB=2$, $AB\perp BC$, 求二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的大小.



20. 有时可用函数 $f(x)=\begin{cases}0.1+15\ln\dfrac{a}{a-x}, & (x\leqslant 6)\\ \dfrac{x-4.4}{x-4}, & (x>6)\end{cases}$ 描述学习某学科知识的掌握程度, 其中 x 表示某学科知识的学习次数 $(x\in\mathbf{N}^*)$, $f(x)$ 表示对该学科知识的掌握程度, 正实数 a 与学科知识有关.

(1) 证明: 当 $x\geqslant 7$ 时, 掌握程度的增加量 $f(x+1)-f(x)$ 总是下降;

(2) 根据经验, 学科甲、乙、丙对应的 a 的取值区间分别为 $(115,121]$, $(121,127]$, $(121,133]$. 当学习某学科知识 6 次时, 掌握程度是 85%, 请确定相应的学科.

21. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$, 设过点 $A(-3\sqrt{2},0)$ 的直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{e}=(1,k)$.

(1) 当直线 l 与双曲线 C 的一条渐近线 m 平行时, 求直线 l 的方程及 l 与 m 的距离;

(2) 证明: 当 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 在双曲线 C 的右支上不存在点 Q, 使之到直线 l 的距离为 $\sqrt{6}$.

22. 已知函数 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 定义: 若对给定的实数 a ($a\neq 0$), 函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f^{-1}(x+a)$ 互为反函数, 则称 $y=f(x)$ 满足"a 和性质"; 若函数 $y=f(ax)$ 与 $y=f^{-1}(ax)$ 互为反函数, 则称 $y=f(x)$ 满足"a 积性质".

(1) 判断函数 $g(x)=x^2$ ($x>0$) 是否满足"1 和性质", 并说明理由;

(2) 求所有满足"2 和性质"的一次函数;

(3) 设函数 $y=f(x)$ ($x>0$) 对任何 $a>0$, 满足"a 积性质". 求 $y=f(x)$ 的表达式.

23. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

(1) 若 $a_n=3n+1$, 是否存在 m、$k\in\mathbf{N}^*$, 有 $a_m+a_{m+1}=a_k$? 请说明理由;

(2) 找出所有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 使对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$, 并说明理由;

(3) 若 $a_1=5$, $d=4$, $b_1=q=3$, 试确定所有的 p, 使数列 $\{a_n\}$ 中存在某个连续 p 项的和是数列 $\{b_n\}$ 中的一项, 请证明.

2009 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

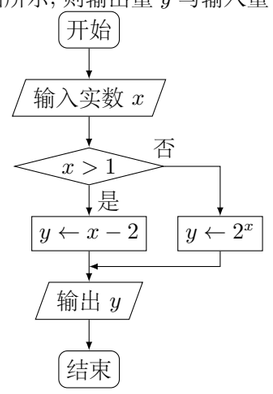
一、填空题

1. 函数 $f(x)=x^3+1$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

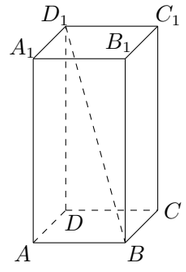
2. 已知集合 $A=\{x|x\leqslant 1\}$, $B=\{x|x\geqslant a\}$, 且 $A\cup B=\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

3. 若行列式 $\begin{vmatrix}4 & 5 & x\\ 1 & x & 3\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ 中, 元素 4 的代数余子式大于 0, 则 x 满足的条件是_____.

4. 某算法的程序框如图所示, 则输出量 y 与输入量 x 满足的关系式是_____.



5. 如图, 若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 2, 高为 4, 则异面直线 BD_1 与 AD 所成角的大小是_____. (结果用反三角函数表示)



6. 若球 O_1、O_2 表面积之比 $\dfrac{S_1}{S_2}=4$, 则它们的半径之比 $\dfrac{R_1}{R_2}=$_____.

7. 已知实数 x、y 满足 $\begin{cases}y\leqslant 2x\\ y\geqslant -2x\\ x\leqslant 3\end{cases}$, 则目标函数 $z=x-2y$ 的最小值是_____.

8. 若等腰直角三角形的直角边长为 2, 则以一直角边所在的直线为轴旋转一周所成的几何体体积是_____.

9. 过点 $A(1,0)$ 作倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线, 与抛物线 $y^2=2x$ 交于 M、N 两点, 则 $|MN|=$_____.

10. 函数 $y=2\cos^2 x+\sin 2x$ 的最小值是_____.

11. 若某学校要从 5 名男生和 2 名女生中选出 3 人作为上海世博会的志愿者, 则选出的志愿者中男女生均不少于 1 名的概率是_____. (结果用最简分数表示)

12. 已知 F_1、F_2 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的两个焦点, P 为椭圆 C 上一点, 且 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9, 则 $b=$_____.

13. 已知函数 $f(x)=\sin x+\tan x$. 项数为 27 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且公差 $d\neq 0$. 若 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{27})=0$, 则当 $k=$_____时, $f(a_k)=0$.

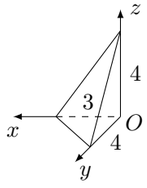
14. 某地街道呈现东—西、南—北向的网格状, 相邻街距都为 1, 两街道相交的点称为格点. 若以互相垂直的两条街道为轴建立直角坐标系, 现有下述格点 $(-2,2)$, $(3,1)$, $(3,4)$, $(-2,3)$, $(4,5)$ 为报刊零售点. 请确定一个格点_____为发行站, 使 5 个零售点沿街道到发行站之间路程的和最短.

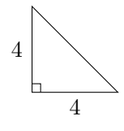
二、选择题

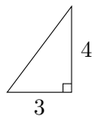
15. 已知直线 l_1: $(k-3)x+(4-k)y+1=0$ 与 l_2: $2(k-3)x-2y+3=0$ 平行, 则 k 的值是 ( )

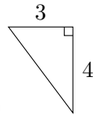
(A) 1 或 3　　(B) 1 或 5　　(C) 3 或 5　　(D) 1 或 2

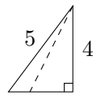
16. 如图, 已知三棱锥的底面是直角三角形, 直角边长分别为 3 和 4, 过直角顶点的侧棱长为 4, 且垂直于底面, 该三棱锥的主视图是 ( )



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

17. 点 $P(4,-2)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 上任一点连续的中点轨迹方程是 ( )

(A) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$　　(B) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

(C) $(x+4)^2+(y-2)^2=4$　　(D) $(x+2)^2+(y-1)^2=1$

18. 在发生某公共卫生事件期间, 有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续 10 天, 每天新增疑似病例不超过 7 人”. 根据过去 10 天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据, 一定符合该标志的是 ( )

(A) 甲地: 总体均值为 3, 中位数为 4

(B) 乙地: 总体均值为 1, 总体方差大于 0

(C) 丙地: 中位数为 2, 众数为 3

(D) 丁地: 总体均值为 2, 总体方差为 3

三、解答题

19. 已知复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a、b\in\mathbf{R}^+)$ (i 是虚数单位) 是方程 $x^2-4x+5=0$ 的根. 复数 $w=u+3\mathrm{i}$ $(u\in\mathbf{R})$ 满足 $|w-z|<2\sqrt{5}$, 求 u 的取值范围.

20. 已知 $\triangle ABC$ 的角 A、B、C 所对的边分别是 a、b、c, 设向量 $\boldsymbol{m}=(a,b)$, $\boldsymbol{n}=(\sin B,\sin A)$, $\boldsymbol{p}=(b-2,a-2)$.

(1) 若 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$, 求证: $\triangle ABC$ 为等腰三角形;

(2) 若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{p}$, 边长 $c=2$, 角 $C=\dfrac{\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. 有时可用函数 $f(x)=\begin{cases}0.1+15\ln\dfrac{a}{a-x}, & x\leqslant 6\\ \dfrac{x-4.4}{x-4}, & x>6\end{cases}$ 描述学习某学科知识的掌握程度, 其中 x 表示某学科知识的学习次数 ($x\in\mathbf{N}^*$), $f(x)$ 表示对该学科知识的掌握程度, 正实数 a 与学科知识有关.
(1) 证明: 当 $x\geqslant 7$ 时, 掌握程度的增加量 $f(x+1)-f(x)$ 总是下降;
(2) 根据经验, 学科甲、乙、丙对应的 a 的取值区间分别为 $(115,121]$, $(121,127]$, $(121,133]$. 当学习某学科知识 6 次时, 掌握程度是 85%, 请确定相应的学科.

22. 已知双曲线 C 的中心是原点, 右焦点为 $F(\sqrt{3},0)$, 一条渐近线 m: $x+\sqrt{2}y=0$, 设过点 $A(-3\sqrt{2},0)$ 的直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{e}=(1,k)$.
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 若过原点的直线 $a\parallel l$, 且 a 与 l 的距离为 $\sqrt{6}$, 求 k 的值;
(3) 证明: 当 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 在双曲线 C 的右支上不存在点 Q, 使之到直线 l 的距离为 $\sqrt{6}$.

23. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.
(1) 若 $a_n=3n+1$, 是否存在 m、$k\in\mathbf{N}^*$, 有 $a_m+a_{m+1}=a_k$? 请说明理由;
(2) 若 $b_n=aq^n$ (a、q 为常数, 且 $aq\neq 0$), 对任意 m 存在 k, 有 $b_m\cdot b_{m+1}=b_k$, 试求 a、q 满足的充要条件;
(3) 若 $a_n=2n+1$, $b_n=3^n$, 试确定所有的 p, 使数列 $\{b_n\}$ 中存在某个连续 p 项的和是数列 $\{a_n\}$ 中的一项, 请证明.

2009 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $S=\{x||x|<5\}$, $T=\{x|x^2+4x-21<0\}$, 则 $S\cap T=$ （　）

(A) $\{x|-7<x<-5\}$　　(B) $\{x|3<x<5\}$

(C) $\{x|-5<x<3\}$　　(D) $\{x|-7<x<5\}$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a+\log_2 x\ (\text{当 } x\geqslant 2 \text{ 时})\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}\ (\text{当 } x<2 \text{ 时})\end{cases}$ 在点 $x=2$ 处连续, 则常数 a 的值是 （　）

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

3. 复数 $\dfrac{(1+2\mathrm{i})^2}{3-4\mathrm{i}}$ 的值是 （　）

(A) -1　　(B) 1　　(C) $-\mathrm{i}$　　(D) i

4. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$, 下面结论错误的是 （　）

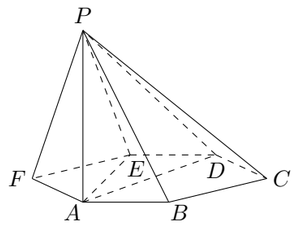
(A) 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

(B) 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

(C) 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称

(D) 函数 $f(x)$ 是奇函数

5. 如图, 已知六棱锥 $P-ABCDEF$ 的底面是正六边形, $PA\perp$ 平面 ABC, $PA=2AB$, 则下列结论正确的是 （　）



(A) $PB\perp AD$

(B) 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC

(C) 直线 $BC\parallel$ 平面 PAE

(D) 直线 PD 与平面 ABC 所成的角为 45°

6. 已知 a, b, c, d 为实数, 且 $c>d$. 则“$a>b$”是“$a-c>b-d$”的 （　）

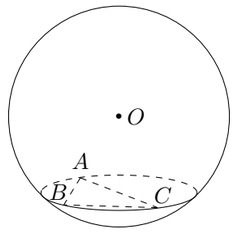
(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 其一条渐近线方程为 $y=x$, 点 $P(\sqrt{3},y_0)$ 在该双曲线上, 则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=$ （　）

(A) -12　　(B) -2　　(C) 0　　(D) 4

8. 如图, 在半径为 3 的球面上有 A、B、C 三点, $\angle ABC=90^\circ$, $BA=BC$, 球心 O 到平面 ABC 的距离是 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 B、C 两点的球面距离是 （　）



(A) $\dfrac{\pi}{3}$　　(B) π　　(C) $\dfrac{4\pi}{3}$　　(D) 2π

9. 已知直线 l_1: $4x-3y+6=0$ 和直线 l_2: $x=-1$, 抛物线 $y^2=4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是 （　）

(A) 2　　(B) 3　　(C) $\dfrac{11}{5}$　　(D) $\dfrac{37}{16}$

10. 某企业生产甲、乙两种产品, 已知生产每吨甲产品要用 A 原料 3 吨、B 原料 2 吨; 生产每吨乙产品要用 A 原料 1 吨、B 原料 3 吨. 销售每吨甲产品可获得利润 5 万元, 每吨乙产品可获得利润 3 万元, 该企业在一个生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨, B 原料不超过 18 吨, 那么该企业可获得最大利润是 （　）

(A) 12 万元　　(B) 20 万元　　(C) 25 万元　　(D) 27 万元

11. 3 位男生和 3 位女生共 6 位同学站成一排, 若男生甲不站两端, 3 位女生中有且只有两位女生相邻, 则不同排法的种数是 （　）

(A) 360　　(B) 188　　(C) 216　　(D) 96

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$, 则 $f\left(f\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$ 的值是 （　）

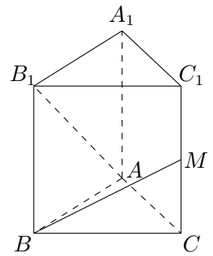
(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) 1　　(D) $\dfrac{5}{2}$

二、填空题

13. $\left(2x-\dfrac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式的常数项是_____. (用数字作答)

14. 若 $\odot O_1$: $x^2+y^2=5$ 与 $\odot O_2$: $(x-m)^2+y^2=20$ $(m\in\mathbf{R})$ 相交于 A、B 两点, 且两圆在点 A 处的切线互相垂直, 则线段 AB 的长度是_____.

15. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等, M 是侧棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AB_1 和 BM 所成的角的大小是_____.



16. 设 V 是已知平面 M 上所有向量的集合. 对于映射 f: $V\to V$, $\boldsymbol{a}\in V$, 记 $\boldsymbol{a}$ 的象为 $f(\boldsymbol{a})$. 若映射 f: $V\to V$ 满足: 对所有 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in V$ 及任意实数 λ, μ 都有 $f(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+\mu f(\boldsymbol{b})$, 则 f 称为平面 M 上的线性变换. 现有下列命题:

① 设 f 是平面 M 上的线性变换, 则 $f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$;

② 对 $\boldsymbol{a}\in V$, 设 $f(\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{a}$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;

③ 若 $\boldsymbol{e}$ 是平面 M 上的单位向量, 对 $\boldsymbol{a}\in V$, 设 $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;

④ 设 f 是平面 M 上的线性变换, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in V$, 若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线, 则 $f(\boldsymbol{a})$, $f(\boldsymbol{b})$ 也共线.

其中真命题是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B 为锐角, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c, 且 $\cos 2A=\dfrac{3}{5}$, $\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

(1) 求 $A+B$ 的值;

(2) 若 $a-b=\sqrt{2}-1$, 求 a, b, c 的值.

18. 为振兴旅游业, 四川省 2009 年面向国内发行总量为 2000 万张的熊猫优惠卡, 向省外人士发行的是熊猫金卡 (简称金卡), 向省内人士发行的是熊猫银卡 (简称银卡). 某旅游公司组织了一个有 36 名游客的旅游团到四川名胜旅游, 其中 $\dfrac{3}{4}$ 是省外游客, 其余是省内游客. 在省外游客中有 $\dfrac{1}{3}$ 持金卡, 在省内游客中有 $\dfrac{2}{3}$ 持银卡.

(1) 在该团中随机采访 3 名游客, 求恰有 1 人持金卡且持银卡者少于 2 人的概率;

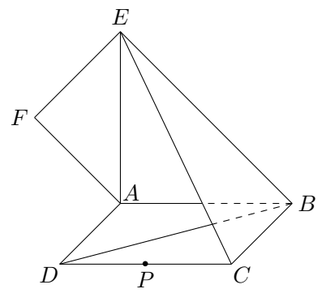
(2) 在该团的省内游客中随机采访 3 名游客, 设其中持银卡人数为随机变量 ξ, 求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, 正方形 $ABCD$ 所在平面与平面四边形 $ABEF$ 所在平面互相垂直, $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, $AB=AE$, $FA=FE$, $\angle AEF=45^{\circ}$.

(1) 求证: $EF\perp$ 平面 BCE;

(2) 设线段 CD 的中点为 P, 在直线 AE 上是否存在一点 M, 使得 $PM\parallel$ 平面 BCE? 若存在, 请指出点 M 的位置, 并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由;

(3) 求二面角 $F-BD-A$ 的大小.



20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 右准线方程为 $x=2$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过点 F_1 的直线 l 与该椭圆交于 M, N 两点, 且 $\left|\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}\right|=\dfrac{2\sqrt{26}}{3}$, 求直线 l 的方程.

21. 已知 $a>0$, 且 $a\neq 1$ 函数 $f(x)=\log_a(1-a^x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域, 并判断 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $n\in\mathbf{N}^*$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{f(n)}}{a^n+a}$;

(3) 当 $a=\mathrm{e}$ (e 为自然对数的底数) 时, 设 $h(x)=(1-\mathrm{e}^{f(x)})(x^2-m+1)$. 若函数 $h(x)$ 的极值存在, 求实数 m 的取值范围以及函数 $h(x)$ 的极值.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 对任意的正整数 n, 都有 $a_n=5S_n+1$ 成立, 记 $b_n=\dfrac{4+a_n}{1-a_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n=b_{2n}-b_{2n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 求证: 对任意正整数 n 都有 $T_n<\dfrac{3}{2}$;

(3) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n. 已知正实数 λ 满足: 对任意正整数 n, $R_n\leqslant\lambda n$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

2009 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $S=\{x||x|<5\}$, $T=\{x|(x+7)(x-3)<0\}$, 则 $S\cap T=$ （ ）

(A) $\{x|-7<x<-5\}$　(B) $\{x|3<x<5\}$

(C) $\{x|-5<x<3\}$　(D) $\{x|-7<x<5\}$

2. 函数 $y=2^{x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=1+\log_2 x$ $(x>0)$　(B) $y=\log_2(x-1)$ $(x>1)$

(C) $y=-1+\log_2 x$ $(x>0)$　(D) $y=\log_2(x+1)$ $(x>-1)$

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, 首项 $a_1=1$, a_2 是 a_1 和 a_5 的等比中项, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项之和是 （ ）

(A) 90　(B) 100　(C) 145　(D) 190

4. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$, 下面结论错误的是 （ ）

(A) 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

(B) 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

(C) 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称

(D) 函数 $f(x)$ 是奇函数

5. 设矩形的长为 a, 宽为 b, 其比满足 $b:a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$, 这种矩形给人以美感, 称为黄金矩形. 黄金矩形常应用于工艺品设计中. 下面是某工艺品厂随机抽取两个批次的初加工矩形宽度与长度的比值样本:

甲批次: 0.598　0.625　0.628　0.595　0.639

乙批次: 0.618　0.613　0.592　0.622　0.620

根据上述两个样本来估计两个批次的总体平均数, 与标准值 0.618 比较, 正确结论是 （ ）

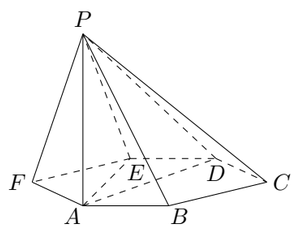
(A) 甲批次的总体平均数与标准值更接近

(B) 乙批次的总体平均数与标准值更接近

(C) 两个批次总体平均数与标准值接近程度相同

(D) 两个批次总体平均数与标准值接近程度不能确定

6. 如图, 已知六棱锥 $P-ABCDEF$ 的底面是正六边形, $PA\perp$ 平面 ABC, $PA=2AB$, 则下列结论正确的是 （ ）



(A) $PB\perp AD$

(B) 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC

(C) 直线 $BC\parallel$ 平面 PAE

(D) 直线 PD 与平面 ABC 所成的角为 45°

7. 已知 a, b, c, d 为实数, 且 $c>d$. 则“$a>b$”是“$a-c>b-d$”的 （ ）

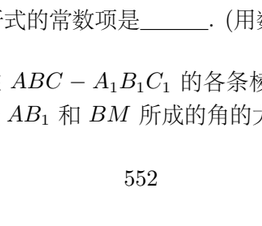
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 其一条渐近线方程为 $y=x$, 点 $P(\sqrt{3},y_0)$ 在该双曲线上, 则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=$ （ ）

(A) -12　(B) -2　(C) 0　(D) 4

9. 如图, 在半径为 3 的球面上有 A、B、C 三点, $\angle ABC=90^\circ$, $BA=BC$, 球心 O 到平面 ABC 的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 B、C 两点的球面距离是 （ ）



(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) π　(C) $\frac{4\pi}{3}$　(D) 2π

10. 某企业生产甲、乙两种产品, 已知生产每吨甲产品要用 A 原料 3 吨、B 原料 2 吨; 生产每吨乙产品要用 A 原料 1 吨、B 原料 3 吨. 销售每吨甲产品可获得利润 5 万元, 每吨乙产品可获得利润 3 万元, 该企业在一个生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨, B 原料不超过 18 吨, 那么该企业可获得最大利润是 （ ）

(A) 12 万元　(B) 20 万元　(C) 25 万元　(D) 27 万元

11. 2 位男生和 3 位女生共 5 位同学站成一排, 若男生甲不站两端, 3 位女生中有且只有两位女生相邻, 则不同排法的种数是 （ ）

(A) 60　(B) 48　(C) 42　(D) 36

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$, 则 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 的值是 （ ）

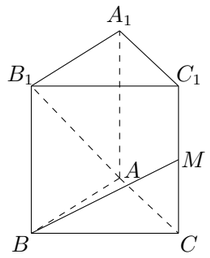
(A) 0　(B) $\frac{1}{2}$　(C) 1　(D) $\frac{5}{2}$

二、填空题

13. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点到准线的距离是_____.

14. $\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式的常数项是_____. (用数字作答)

15. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等, M 是侧棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AB_1 和 BM 所成的角的大小是_____.



16. 设 V 是已知平面 M 上所有向量的集合. 对于映射 $f\colon V\to V$, $\boldsymbol{a}\in V$, 记 $\boldsymbol{a}$ 的象为 $f(\boldsymbol{a})$. 若映射 $f\colon V\to V$ 满足: 对所有 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in V$ 及任意实数 λ, μ 都有 $f(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+\mu f(\boldsymbol{b})$, 则 f 称为平面 M 上的线性变换. 现有下列命题:

① 设 f 是平面 M 上的线性变换, $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}\in V$, 则 $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})$;

② 若 $\boldsymbol{e}$ 是平面 M 上的单位向量, 对 $\boldsymbol{a}\in V$, 设 $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;

③ 对 $\boldsymbol{a}\in V$, 设 $f(\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;

④ 设 f 是平面 M 上的线性变换, $\boldsymbol{a}\in V$, 则对任意实数 k 均有 $f(k\boldsymbol{a})=kf(\boldsymbol{a})$.

其中真命题是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B 为锐角, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c, 且 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(1) 求 $A+B$ 的值;

(2) 若 $a-b=\sqrt{2}-1$, 求 a, b, c 的值.

18. 为振兴旅游业, 四川省 2009 年面向国内发行总量为 2000 万张的熊猫优惠卡, 向省外人士发行的是熊猫金卡 (简称金卡), 向省内人士发行的是熊猫银卡 (简称银卡). 某旅游公司组织了一个有 36 名游客的旅游团到四川名胜旅游, 其中 $\frac{3}{4}$ 是省外游客, 其余是省内游客. 在省外游客中有 $\frac{1}{3}$ 持金卡, 在省内游客中有 $\frac{2}{3}$ 持银卡.

(1) 在该团中随机采访 2 名游客, 求恰有 1 人持银卡的概率;

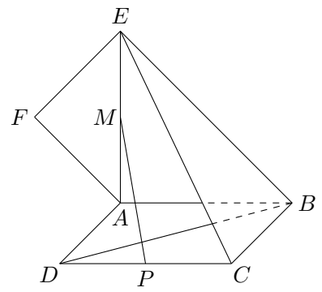
(2) 在该团中随机采访 2 名游客, 求其中持金卡与持银卡人数相等的概率.

19. 如图, 正方形 $ABCD$ 所在平面与平面四边形 $ABEF$ 所在平面互相垂直, $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, $AB=AE$, $FA=FE$, $\angle AEF=45^{\circ}$.

(1) 求证: $EF\perp$ 平面 BCE;

(2) 设线段 CD、AE 的中点分别为 P、M, 求证: $PM\parallel$ 平面 BCE;

(3) 求二面角 $F-BD-A$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x)=x^3+2bx^2+cx-2$ 的图象在与 x 轴交点处的切线方程是 $y=5x-10$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{3}mx$, 若 $g(x)$ 的极值存在, 求实数 m 的取值范围以及函数 $g(x)$ 取得极值时对应的自变量 x 的值.

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 右准线方程为 $x=2$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过点 F_1 的直线 l 与该椭圆交于 M, N 两点, 且 $\left|\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}\right|=\dfrac{2\sqrt{26}}{3}$, 求直线 l 的方程.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 对任意的正整数 n, 都有 $a_n=5S_n+1$ 成立, 记 $b_n=\dfrac{4+a_n}{1-a_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n, 是否存在正整数 k, 使得 $R_n\geqslant 4k$ 成立? 若存在, 找出一个正整数 k; 若不存在, 请说明理由;

(3) 记 $c_n=b_{2n}-b_{2n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 求证: 对任意正整数 n 都有 $T_n<\dfrac{3}{2}$.

2009 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $-1-2\mathrm{i}$　(C) $1-2\mathrm{i}$　(D) $-1+2\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant 3 \\ x-y\geqslant -1 \\ 2x-y\leqslant 3 \end{cases}$, 则目标函数 $z=2x+3y$ 的最小值为 （　）

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 23

3. 命题“存在 $x_0\in\mathbf{R}$, $2^{x_0}\leqslant 0$”的否定是 （　）

(A) 不存在 $x_0\in\mathbf{R}$, $2^{x_0}>0$　(B) 存在 $x_0\in\mathbf{R}$, $2^{x_0}\geqslant 0$

(C) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $2^x\leqslant 0$　(D) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $2^x>0$

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x-\ln x$ $(x>0)$, 则 $y=f(x)$ （　）

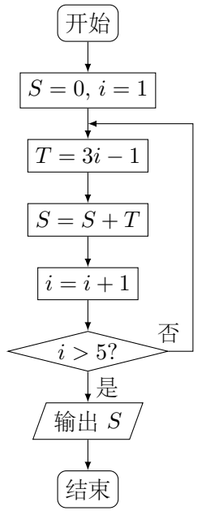
(A) 在区间 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$, $(1,\mathrm{e})$ 内均有零点

(B) 在区间 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$, $(1,\mathrm{e})$ 内均无零点

(C) 在区间 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 内有零点, 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内无零点

(D) 在区间 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 内无零点, 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内有零点

5. 阅读如图的程序框图, 则输出的 $S=$ （　）



(A) 26　(B) 35　(C) 40　(D) 57

6. 设 $a>0, b>0$. 若 $\sqrt{3}$ 是 3^a 与 3^b 的等比中项, 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为（　）

(A) 8　(B) 4　(C) 1　(D) $\dfrac{1}{4}$

7. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(x\in\mathbf{R},\ \omega>0)$ 的最小正周期为 π. 为了得到函数 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象, 只要将 $y=f(x)$ 的图象 （　）

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度　(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度　(D) 向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+4x, & x\geqslant 0 \\ 4x-x^2, & x<0 \end{cases}$. 若 $f(2-a^2)>f(a)$, 则实数 a 的取值范围是 （　）

(A) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　(B) $(-1,2)$

(C) $(-2,1)$　(D) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

9. 设抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F, 过点 $M(\sqrt{3},0)$ 的直线与抛物线相交于 A, B 两点, 与抛物线的准线相交于 C, $|BF|=2$, 则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比 $\dfrac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=$ （　）

(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{4}{7}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

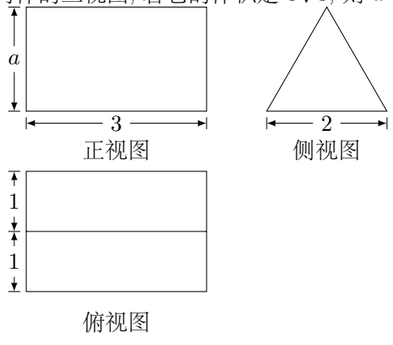
10. $0<b<1+a$. 若关于 x 的不等式 $(x-b)^2>(ax)^2$ 的解集中的整数恰有 3 个, 则 （　）

(A) $-1<a<0$　(B) $0<a<1$　(C) $1<a<3$　(D) $3<a<6$

二、填空题

11. 某学院的 A, B, C 三个专业共有 1200 名学生. 为了调查这些学生勤工俭学的情况, 拟采用分层抽样的方法抽取一个容量为 120 的样本. 已知该学院的 A 专业有 380 名学生, B 专业有 420 名学生, 则在该学院的 C 专业应抽取_____名学生.

12. 如图是一个几何体的三视图, 若它的体积是 $3\sqrt{3}$, 则 $a=$_____.



13. 设直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+3t \end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的方程为 $y=3x+4$, 则 l_1 与 l_2 的距离为_____.

14. 若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ay-6=0$ $(a>0)$ 的公共弦的长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a=$_____.

15. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1,1)$, $\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}\overrightarrow{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|}\overrightarrow{BD}$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为_____.

16. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成没有重复数字的四位数, 其中个位、十位和百位上的数字之和为偶数的四位数共有_____个. (用数字作答)

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=\sqrt{5}$, $AC=3$, $\sin C=2\sin A$.
(1) 求 AB 的值;
(2) 求 $\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

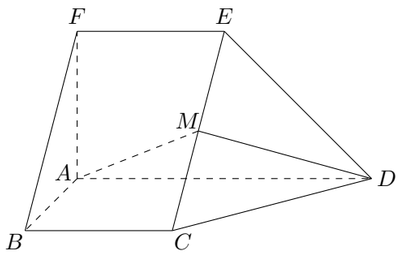
18. 在 10 件产品中, 有 3 件一等品, 4 件二等品, 3 件三等品. 从这 10 件产品中任取 3 件, 求:
(1) 取出的 3 件产品中一等品件数 X 的分布列和数学期望;
(2) 取出的 3 件产品中一等品件数多于二等品件数的概率.

19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, $FA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC \parallel FE$, $AB \perp AD$, M 为 EC 的中点, $AF = AB = BC = FE = \dfrac{1}{2}AD$.

(1) 求异面直线 BF 与 DE 所成的角的大小;

(2) 证明平面 $AMD \perp$ 平面 CDE;

(3) 求二面角 $A - CD - E$ 的余弦值.



20. 已知函数 $f(x) = (x^2 + ax - 2a^2 + 3a)\mathrm{e}^x$ $(x \in \mathbf{R})$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率;

(2) 当 $a \neq \dfrac{2}{3}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-c, 0)$ 和 $F_2(c, 0)$ $(c > 0)$, 过点 $E\left(\dfrac{a^2}{c}, 0\right)$ 的直线与椭圆相交与 A, B 两点, 且 $F_1A \parallel F_2B$, $|F_1A| = 2\,|F_2B|$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 求直线 AB 的斜率;

(3) 设点 C 与点 A 关于坐标原点对称, 直线 F_2B 上有一点 $H(m, n)$ $(m \neq 0)$ 在 $\triangle AF_1C$ 的外接圆上, 求 $\dfrac{n}{m}$ 的值.

22. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d $(d \neq 0)$, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q $(q > 1)$. 设 $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, $T_n = a_1b_1 - a_2b_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_nb_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 若 $a_1 = b_1 = 1$, $d = 2$, $q = 3$, 求 S_3 的值;

(2) 若 $b_1 = 1$, 证明 $(1 - q)S_{2n} - (1 + q)T_{2n} = \dfrac{2dq(1 - q^{2n})}{1 - q^2}$, $n \in \mathbf{N}^*$;

(3) 若正整数 n 满足 $2 \leqslant n \leqslant q$, 设 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 和 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的两个不同的排列, $c_1 = a_{k_1}b_1 + a_{k_2}b_2 + \cdots + a_{k_n}b_n$, $c_2 = a_{l_1}b_1 + a_{l_2}b_2 + \cdots + a_{l_n}b_n$, 证明 $c_1 \neq c_2$.

2009 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $-1-2\mathrm{i}$　(C) $1-2\mathrm{i}$　(D) $-1+2\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 3\\ x-y\geqslant -1\\ 2x-y\leqslant 3\end{cases}$, 则目标函数 $z=2x+3y$ 的最小值为 （ ）

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 23

3. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$x=1$”是“$x^3=x$”的

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

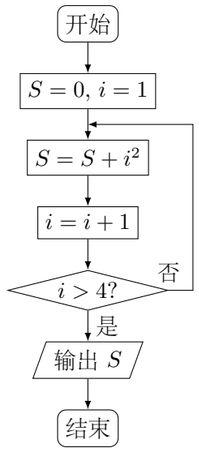
4. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的虚轴长为 2, 焦距为 $2\sqrt{3}$, 则双曲线的渐近线方程为 （ ）

(A) $y=\pm\sqrt{2}x$　(B) $y=\pm 2x$　(C) $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　(D) $y=\pm\dfrac{1}{2}x$

5. 设 $a=\log_{\frac{1}{3}}2$, $b=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$, $c=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.3}$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$　(B) $a<c<b$　(C) $b<c<a$　(D) $b<a<c$

6. 阅读如图的程序框图, 则输出的 $S=$ （ ）



(A) 14　(B) 20　(C) 30　(D) 55

7. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(x\in\mathbf{R},\ \omega>0)$ 的最小正周期为 π. 将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $|\varphi|$ 个单位长度, 所得图象关于 y 轴对称, 则 φ 的一个值是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{3\pi}{8}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{8}$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6,\ x\geqslant 0\\ x+6,\ x<0\end{cases}$, 则不等式 $f(x)>f(1)$ 的解集是 （ ）

(A) $(-3,1)\cup(3,+\infty)$　(B) $(-3,1)\cup(2,+\infty)$

(C) $(-1,1)\cup(3,+\infty)$　(D) $(-\infty,-3)\cup(1,3)$

9. 设 x, $y\in\mathbf{R}$, $a>1$, $b>1$. 若 $a^x=b^y=3$, $a+b=2\sqrt{3}$, 则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最大值为 （ ）

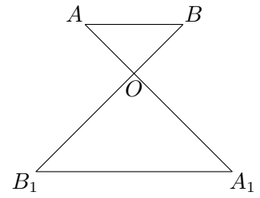
(A) 2　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) 1　(D) $\dfrac{1}{2}$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数为 $f'(x)$, 且 $2f(x)+xf'(x)>x^2$. 下面的不等式在 $\mathbf{R}$ 内恒成立的是 （ ）

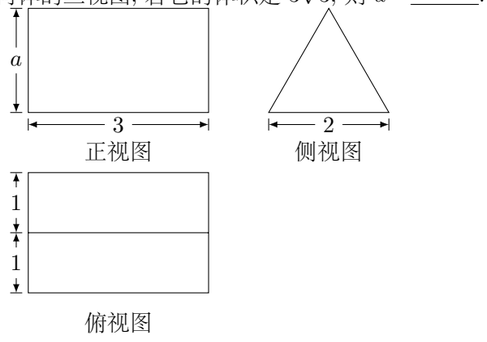
(A) $f(x)>0$　(B) $f(x)<0$　(C) $f(x)>x$　(D) $f(x)<x$

二、填空题

11. 如图, AA_1 与 BB_1 相交于点 O, $AB\parallel A_1B_1$ 且 $AB=\dfrac{1}{2}A_1B_1$, 若 $\triangle AOB$ 得外接圆直径为 1, 则 $\triangle A_1OB_1$ 的外接圆直径为_____.



12. 如图是一个几何体的三视图, 若它的体积是 $3\sqrt{3}$, 则 $a=$_____.



13. 设全集 $U=A\cup B=\{x\in\mathbf{N}^*|\lg x<1\}$, 若 $A\cap(\complement_U B)=\{m|m=2n+1, n=0,1,2,3,4\}$, 则集合 $B=$_____.

14. 若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ay-6=0$ $(a>0)$ 的公共弦的长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a=$_____.

15. 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 平面内一点 M 满足 $\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{CB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, 则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$_____.

16. 若关于 x 的不等式 $(2x-1)^2<ax^2$ 的解集中的整数恰好有 3 个, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=\sqrt{5}$, $AC=3$, $\sin C=2\sin A$.

(1) 求 AB 的值;

(2) 求 $\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

18. 为了了解某工厂开展群众体育活动的情况, 拟采用分层抽样的方法从 A, B, C 三个区中抽取 7 个工厂进行调查, 已知 A, B, C 区中分别有 18, 27, 18 个工厂.

(1) 求从 A, B, C 区中分别抽取的工厂个数;

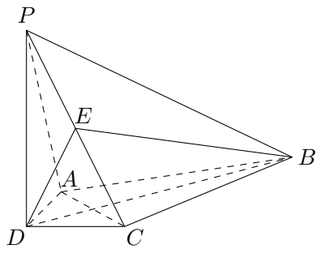
(2) 若从抽取的 7 个工厂中随机抽取 2 个进行调查结果的对比, 用列举法计算这 2 个工厂中至少有 1 个来自 A 区的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $AD\perp CD$, 且 DB 平分 $\angle ADC$, E 为 PC 的中点, $AD=CD=1$, $DB=2\sqrt{2}$.

(1) 证明 $PA\parallel$ 平面 BDE;

(2) 证明 $AC\perp$ 平面 PBD;

(3) 求直线 BC 与平面 PBD 所成的角的正切值.



20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, 设 $S_n=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$, $T_n=a_1-a_2q+\cdots+(-1)^{n-1}a_nq^{n-1}$, $q\neq 0$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $q=1$, $a_1=1$, $S_3=15$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1=d$, S_1, S_2, S_3 成等比数列, 求 q 的值.

(3) 若 $q\neq\pm1$, 证明 $(1-q)S_{2n}-(1+q)T_{2n}=\dfrac{2dq(1-q^{2n})}{1-q^2}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

21. 设函数 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+(m^2-1)x$ $(x\in\mathbf{R})$, 其中 $m>0$.

(1) 当 $m=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率;

(2) 求函数的单调区间与极值;

(3) 已知函数 $f(x)$ 有三个互不相同的零点 0, x_1, x_2, 且 $x_1<x_2$. 若对任意的 $x\in[x_1,x_2]$, $f(x)>f(1)$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

22. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$ $(c>0)$, 过点 $E\left(\dfrac{a^2}{c},0\right)$ 的直线与椭圆相交与 A, B 两点, 且 $F_1A\parallel F_2B$, $|F_1A|=2|F_2B|$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 求直线 AB 的斜率;

(3) 设点 C 与点 A 关于坐标原点对称, 直线 F_2B 上有一点 $H(m,n)$ $(m\neq 0)$ 在 $\triangle AF_1C$ 的外接圆上, 求 $\dfrac{n}{m}$ 的值.

2009 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x|x>0\}$, $B=\{x|x>1\}$, 则 $A\cap\complement_U B=$ （ ）

(A) $\{x|0\leqslant x<1\}$ (B) $\{x|0<x\leqslant 1\}$ (C) $\{x|x<0\}$ (D) $\{x|x>1\}$

2. 已知 a, b 是实数, 则“$a>0$ 且 $b>0$”是“$a+b>0$ 且 $ab>0$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 设 $z=1+\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 $\dfrac{2}{z}+z^2=$ （ ）

(A) $-1-\mathrm{i}$ (B) $-1+\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $1+\mathrm{i}$

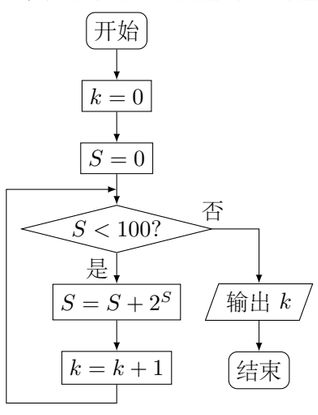
4. 在二项式 $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中, 含 x^4 的项的系数是 （ ）

(A) -10 (B) 10 (C) -5 (D) 5

5. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 各棱长相等, 侧掖垂直于底面, 点 D 是侧面 BB_1C_1C 的中心, 则 AD 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小是 （ ）

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

6. 某程序框图如图所示, 该程序运行后输出的 k 的值是 （ ）

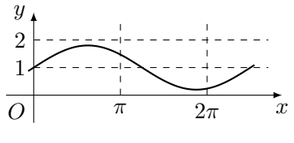


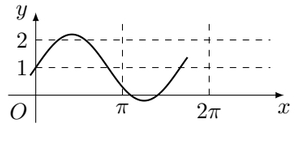
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

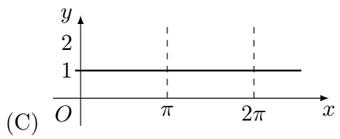
7. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足: $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的模为边长构成三角形, 则它的边与半径为 1 的圆的公共点个数最多为 （ ）

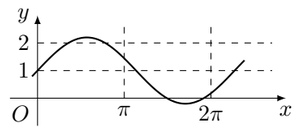
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

8. 已知 a 是实数, 则函数 $f(x)=1+a\sin ax$ 的图象不可能是 （ ）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

9. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的右顶点 A 作斜率为 -1 的直线, 该直线与双曲线的两条渐近线的交点分别为 B, C. 若 $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, 则双曲线的离心率是 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{10}$

10. 对于正实数 α, 记 M_α 为满足下述条件的函数 $f(x)$ 构成的集合: $\forall x_1$, $x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_2>x_1$, 有 $-\alpha(x_2-x_1)<f(x_2)-f(x_1)<\alpha(x_2-x_1)$. 下列结论中正确的是 （ ）

(A) 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$, $g(x)\in M_{\alpha_2}$, 则 $f(x)\cdot g(x)\in M_{\alpha_1\cdot\alpha_2}$

(B) 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$, $g(x)\in M_{\alpha_2}$ 且 $g(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\in M_{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$

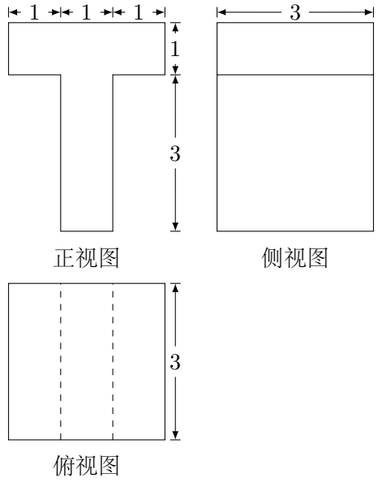
(C) 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$, $g(x)\in M_{\alpha_2}$, 则 $f(x)+g(x)\in M_{\alpha_1+\alpha_2}$

(D) 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$, $g(x)\in M_{\alpha_2}$ 且 $\alpha_1>\alpha_2$, 则 $f(x)-g(x)\in M_{\alpha_1-\alpha_2}$

二、填空题

11. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=\dfrac{1}{2}$, 前 n 项和为 S_n, 则 $\dfrac{S_4}{a_4}=$_____.

12. 若某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的体积是_____cm^3.



13. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 2\\ 2x-y\leqslant 4\\ x-y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $2x+3y$ 的最小值是_____.

14. 某地区居民生活用电分为高峰和低谷两个时间段进行分时计价. 该地区的电网销售电价表如下:

高峰时间段用电价格表

高峰月用电量 (单位: 千瓦时)	高峰电价 (单位: 元/千瓦时)
50 及以下的部分	0.568
超过 50 至 200 的部分	0.598
超过 200 的部分	0.668

低谷时间段用电价格表

高峰月用电量 (单位: 千瓦时)	高峰电价 (单位: 元/千瓦时)
50 及以下的部分	0.288
超过 50 至 200 的部分	0.318
超过 200 的部分	0.388

若某家庭 5 月份的高峰时间段用电量为 200 千瓦时, 低谷时间段用电量为 100 千瓦时, 则按这种计费方式该家庭本月应付的电费为_____元. (用数字作答)

15. 观察下列等式:

$\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_5^5=2^3-2$,

$\mathrm{C}_9^1+\mathrm{C}_9^5+\mathrm{C}_9^9=2^7+2^3$,

$\mathrm{C}_{13}^1+\mathrm{C}_{13}^5+\mathrm{C}_{13}^9+\mathrm{C}_{13}^{13}=2^{11}-2^5$,

$\mathrm{C}_{17}^1+\mathrm{C}_{17}^5+\mathrm{C}_{17}^9+\mathrm{C}_{17}^{13}+\mathrm{C}_{17}^{17}=2^{15}+2^7$,

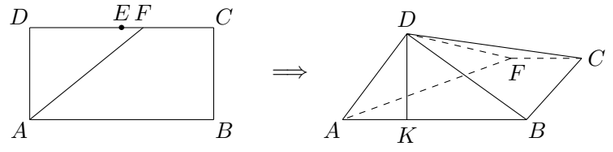
……

由以上等式推测到一个一般的结论:

对于 $n\in\mathbf{N}^*$, $\mathrm{C}_{4n+1}^1+\mathrm{C}_{4n+1}^5+\mathrm{C}_{4n+1}^9+\cdots+\mathrm{C}_{4n+1}^{4n+1}=$_____.

16. 甲、乙、丙 3 人站到共有 7 级的台阶上, 若每级台阶最多站 2 人, 同一级台阶上的人不区分站的位置, 则不同的站法种数是_____. (用数字作答)

17. 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=1$, E 为 DC 的中点, F 为线段 EC (端点除外) 上一动点. 现将 $\triangle AFD$ 沿 AF 折起, 使平面 $ABD\perp$ 平面 ABC. 在平面 ABD 内过点 D 作 $DK\perp AB$, K 为垂足. 设 $AK=t$, 则 t 的取值范围是_____.



三、解答题

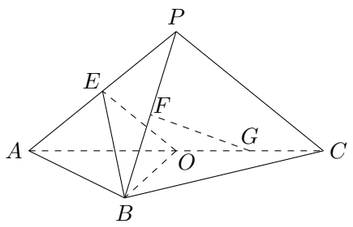
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且满足 $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $b+c=6$, 求 a 的值.

19. 在 1, 2, 3, $\cdots$, 9 这 9 个自然数中, 任取 3 个数.
(1) 求这 3 个数中恰有 1 个是偶数的概率;
(2) 设 ξ 为这 3 个数中两数相邻的组数 (例如: 若取出的数为 1, 2, 3, 则有两组相邻的数 1, 2 和 2, 3, 此时 ξ 的值是 2). 求随机变量 ξ 的分布列及其数学期望 $E\xi$.

20. 如图, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC, $\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形, E, F, O 分别为 PA, PB, AC 的中点, $AC = 16$, $PA = PC = 10$.
(1) 设 G 是 OC 的中点, 证明: $FG \parallel$ 平面 BOE;
(2) 证明: 在 $\triangle ABO$ 内存在一点 M, 使 $FM \perp$ 平面 BOE, 并求点 M 到 OA, OB 的距离.



21. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的右顶点为 $A(1, 0)$, 过 C_1 的焦点且垂直长轴的弦长为 1.
(1) 求椭圆 C_1 的方程;
(2) 设点 P 在抛物线 C_2: $y = x^2 + h$ $(h \in \mathbf{R})$ 上, C_2 在点 P 处的切线与 C_1 交于点 M, N. 当线段 AP 的中点与 MN 的中点的横坐标相等时, 求 h 的最小值.

22. 已知函数 $f(x) = x^3 - (k^2 - k + 1)x^2 + 5x - 2$, $g(x) = k^2x^2 + kx + 1$, 其中 $k \in \mathbf{R}$.
(1) 设函数 $p(x) = f(x) + g(x)$. 若 $p(x)$ 在区间 $(0, 3)$ 上不单调, 求 k 的取值范围;
(2) 设函数 $q(x) = \begin{cases} g(x), & x \geqslant 0 \\ f(x), & x < 0 \end{cases}$. 是否存在 k, 对任意给定的非零实数 x_1, 存在惟一的非零实数 x_2 $(x_2 \neq x_1)$, 使得 $q'(x_2) = q'(x_1)$ 成立? 若存在, 求 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

2009 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x|x>0\}$, $B=\{x|x>1\}$, 则 $A\cap\complement_U B=$ （ ）

(A) $\{x|0\leqslant x<1\}$ (B) $\{x|0<x\leqslant 1\}$ (C) $\{x|x<0\}$ (D) $\{x|x>1\}$

2. “$x>0$”是“$x\neq 0$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 设 $z=1+\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 $\dfrac{2}{z}+z^2=$ （ ）

(A) $1+\mathrm{i}$ (B) $-1+\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

4. 设 α, β 是两个不同的平面, l 是一条直线, 以下命题正确的是 （ ）

(A) 若 $l\perp\alpha$, $\alpha\perp\beta$, 则 $l\subset\beta$ (B) 若 $l\parallel\alpha$, $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\subset\beta$

(C) 若 $l\perp\alpha$, $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\perp\beta$ (D) 若 $l\parallel\alpha$, $\alpha\perp\beta$, 则 $l\perp\beta$

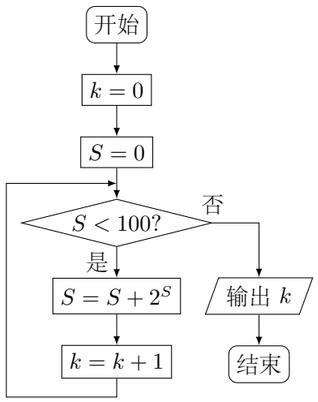
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-3)$. 若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\parallel\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{c}=$ （ ）

(A) $\left(\dfrac{7}{9},\dfrac{7}{3}\right)$ (B) $\left(-\dfrac{7}{3},-\dfrac{7}{9}\right)$ (C) $\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{7}{9}\right)$ (D) $\left(-\dfrac{7}{9},-\dfrac{7}{3}\right)$

6. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左焦点为 F, 右顶点为 A, 点 B 在椭圆上, 且 $BF\perp x$ 轴, 直线 AB 交 y 轴于点 P. 若 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$, 则椭圆的离心率是 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

7. 某程序框图如图所示, 该程序运行后输出的 k 的值是 （ ）



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

8. 若函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ ($a\in\mathbf{R}$), 则下列结论正确的是 （ ）

(A) $\forall a\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

(B) $\forall a\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

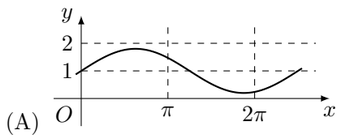
(C) $\exists a\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 是偶函数

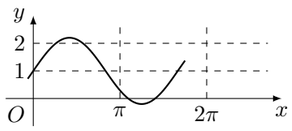
(D) $\exists a\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 是奇函数

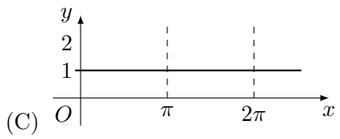
9. 已知三角形的三边长分别为 3, 4, 5, 则它的边与半径为 1 的圆的公共点个数最多为 （ ）

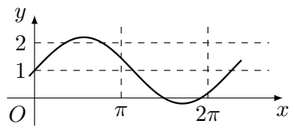
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

10. 已知 a 是实数, 则函数 $f(x)=1+a\sin ax$ 的图象不可能是 （ ）

(A)


(B)


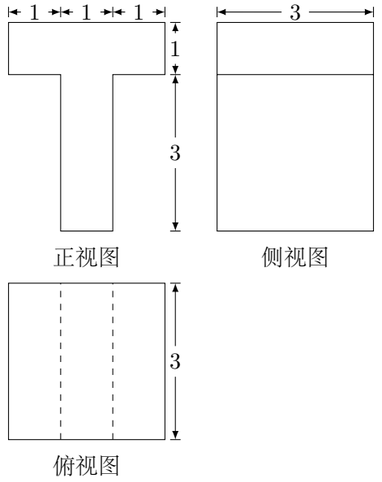
(C)


(D)


二、填空题

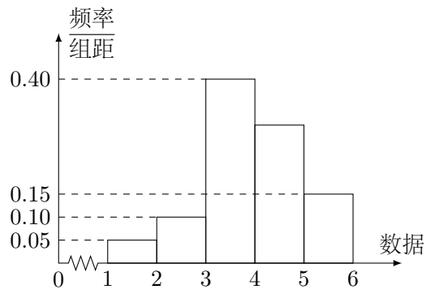
11. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=\dfrac{1}{2}$, 前 n 项和为 S_n, 则 $\dfrac{S_4}{a_4}=$_____.

12. 若某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的体积是_____cm^3.



13. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 2\\ 2x-y\leqslant 4\\ x-y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $2x+3y$ 的最小值是_____.

14. 某个容量为 100 的样本的频率分布直方图如下, 则在区间 $[4,5)$ 上的数据的频数为_____.



15. 某地区居民生活用电分为高峰和低谷两个时间段进行分时计价. 该地区的电网销售电价表如下:

高峰时间段用电价格表

高峰月用电量 (单位: 千瓦时)	高峰电价 (单位: 元/千瓦时)
50 及以下的部分	0.568
超过 50 至 200 的部分	0.598
超过 200 的部分	0.668

低谷时间段用电价格表

高峰月用电量 (单位: 千瓦时)	高峰电价 (单位: 元/千瓦时)
50 及以下的部分	0.288
超过 50 至 200 的部分	0.318
超过 200 的部分	0.388

若某家庭 5 月份的高峰时间段用电量为 200 千瓦时, 低谷时间段用电量为 100 千瓦时, 则按这种计费方式该家庭本月应付的电费为_____元. (用数字作答)

16. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 S_4, S_8-S_4, $S_{12}-S_8$, $S_{16}-S_{12}$ 成等差数列. 类比以上结论有: 设等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n, 则 T_4, _____, _____, $\dfrac{T_{16}}{T_{12}}$ 成等比数列.

17. 有 20 张卡片, 每张卡片上分别标有两个连续的自然数 k, $k+1$, 其中 $k=0$, 1, 2, $\cdots$, 19. 从这 20 张卡片中任取一张, 记事件“该卡片上两个数的各位数字之和 (例如: 若取到标有 9, 10 的卡片, 则卡片上两个数的各位数字之和为 $9+1+0=10$) 不小于 14”为 A, 则 $P(A)=$_____.

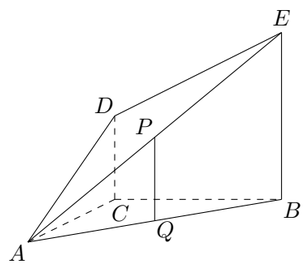
三、解答题

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且满足 $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $c=1$, 求 a 的值.

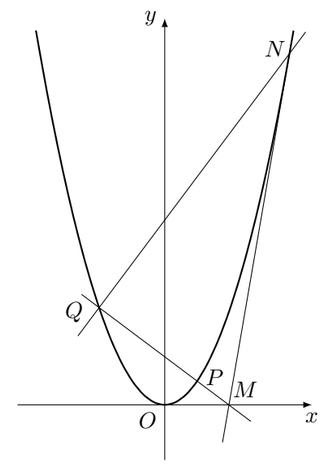
19. 如图, $DC \perp$ 平面 ABC, $EB \parallel DC$, $AC = BC = EB = 2DC = 2$, $\angle ACB = 120°$, P, Q 分别为 AE, AB 的中点.
(1) 证明: $PQ \parallel$ 平面 ACD;
(2) 求 AD 与平面 ABE 所成角的正弦值.



20. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = kn^2 + n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 其中 k 是常数.
(1) 求 a_1 及 a_n;
(2) 若对于任意的 $m \in \mathbf{N}^*$, a_m, a_{2m}, a_{4m} 成等比数列, 求 k 的值.

21. 已知函数 $f(x) = x^3 + (1-a)x^2 - a(a+2)x + b$ $(a,\ b \in \mathbf{R})$.
(1) 若函数 $f(x)$ 的图象过原点, 且在原点处的切线斜率是 -3, 求 a, b 的值;
(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上不单调, 求 a 的取值范围.

22. 已知抛物线 C: $x^2 = 2py$ $(p > 0)$ 上一点 $A(m, 4)$ 到其焦点的距离为 $\dfrac{17}{4}$.
(1) 求 p 与 m 的值;
(2) 设抛物线 C 上一点 P 的横坐标为 t $(t > 0)$, 过 P 的直线交 C 于另一点 Q, 交 x 轴于点 M, 过点 Q 作 PQ 的垂线交 C 于另一点 N. 若 MN 是 C 的切线, 求 t 的最小值.



2010 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\mathrm{i}$　(B) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\mathrm{i}$　(C) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$　(D) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$

2. 若集合 $A=\left\{x\,|\,\log_{\frac{1}{2}}x\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$ （　）

(A) $(-\infty,0]\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

(C) $(-\infty,0]\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$　(D) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

3. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$, $\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 则下列结论中正确的是 （　）

(A) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　(B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直　(D) $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$

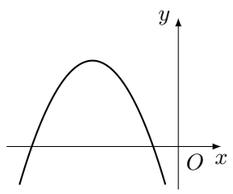
4. 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 5 的奇函数, 且满足 $f(1)=1$, $f(2)=2$, 则 $f(3)-f(4)=$ （　）

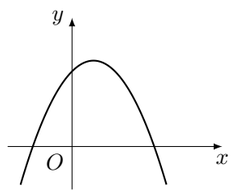
(A) -1　(B) 1　(C) -2　(D) 2

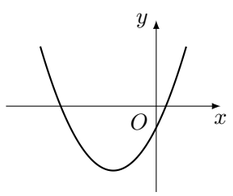
5. 双曲线方程为 $x^2-2y^2=1$, 则它的右焦点坐标为 （　）

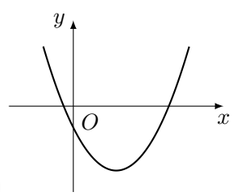
(A) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},0\right)$　(C) $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},0\right)$　(D) $(\sqrt{3},0)$

6. 设 $abc>0$, 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象可能是 （　）

(A)


(B)


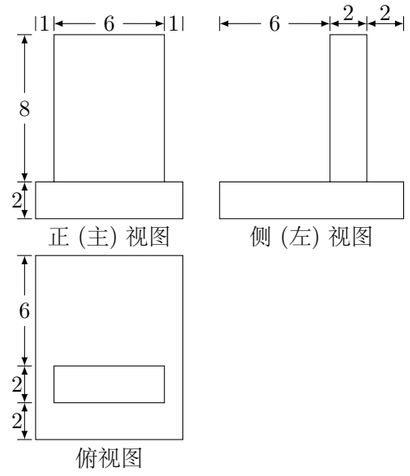
(C)


(D)


7. 设曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+3\cos\theta\\y=-1+3\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的方程为 $x-3y+2=0$, 则曲线 C 上到直线 l 的距离为 $\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$ 的点的个数为(　)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

8. 一个几何体的三视图如图, 该几何体的表面积为 （　）



(A) 280　(B) 292　(C) 360　(D) 372

9. 动点 $A(x,y)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上绕坐标原点沿逆时针方向匀速旋转, 12 秒旋转一周. 已知时间 $t=0$ 时, 点 A 的坐标是 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则当 $0\leqslant t\leqslant 12$ 时, 动点 A 的纵坐标 y 关于 t (单位: 秒) 的函数的单调递增区间是 （　）

(A) $[0,1]$　(B) $[1,7]$　(C) $[7,12]$　(D) $[0,1]$ 和 $[7,12]$

10. 设 $\{a_n\}$ 是任意等比数列, 它的前 n 项和, 前 $2n$ 项和与前 $3n$ 项和分别为 X, Y, Z, 则下列等式中恒成立的是 （　）

(A) $X+Z=2Y$　(B) $Y(Y-X)=Z(Z-X)$

(C) $Y^2=XZ$　(D) $Y(Y-X)=X(Z-X)$

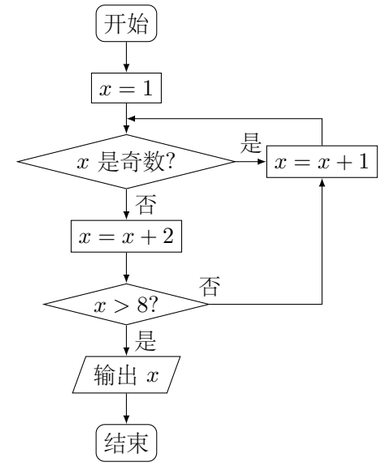
二、填空题

11. 命题“对任何 $x\in\mathbf{R}$, $|x-2|+|x-4|>3$”的否定是_____.

12. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}-\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中, x^3 的系数等于_____.

13. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0\\8x-y-4\leqslant 0\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$. 若目标函数 $z=abx+y$ ($a>0$, $b>0$) 的最大值为 8, 则 $a+b$ 的最小值为_____.

14. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出值 $x=$_____.



15. 甲罐中有 5 个红球, 2 个白球和 3 个黑球, 乙罐中有 4 个红球, 3 个白球和 3 个黑球, 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐, 分别以 A_1, A_2 和 A_3 表示由甲罐取出的球是红球, 白球和黑球的事件; 再从乙罐中随机取出一球, 以 B 表示由乙罐取出的球是红球的事件, 则下列结论中正确的是_____. (写出所有正确结论的编号)

① $P(B)=\dfrac{2}{5}$;

② $P(B|A_1)=\dfrac{5}{11}$;

③ 事件 B 与事件 A_1 相互独立;

④ A_1, A_2, A_3 是两两互斥的事件;

⑤ $P(B)$ 的值不能确定, 因为它与 A_1, A_2, A_3 中究竟哪一个发生有关.

三、解答题

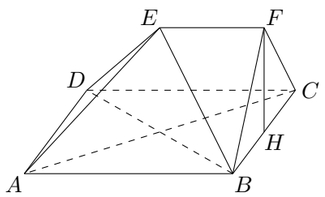
16. 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, a, b, c 分别是内角 A、B、C 所对边长, 并且 $\sin^2A=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+B\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)+\sin^2B$.

(1) 求角 A 的值;

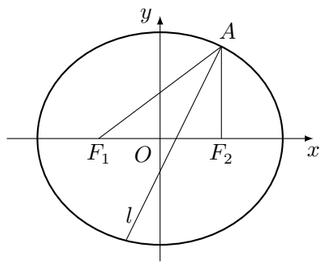
(2) 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$, $a=2\sqrt{7}$, 求 b, c (其中 $b<c$).

17. 设 a 为实数, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-2x+2a$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值;
(2) 求证: 当 $a>\ln 2-1$ 且 $x>0$ 时, $\mathrm{e}^x>x^2-2ax+1$.

18. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $EF\parallel AB$, $EF\perp FB$, $AB=2EF$, $\angle BFC=90^\circ$, $BF=FC$, H 为 BC 的中点.
(1) 求证: $FH\parallel$ 平面 EDB;
(2) 求证: $AC\perp$ 平面 EDB;
(3) 求二面角 $B-DE-C$ 的大小.



19. 如图, 已知椭圆 E 经过点 $A(2,3)$, 对称轴为坐标轴, 焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, 离心率 $e=\dfrac{1}{2}$.
(1) 求椭圆 E 的方程;
(2) 求 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线 l 的方程;
(3) 在椭圆 E 上是否存在关于直线 l 对称的相异两点? 若存在, 请找出; 若不存在, 说明理由.



20. 设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 中的每一项都不为 0. 证明: $\{a_n\}$ 为等差数列的充分必要条件是: 对任何 $n\in\mathbf{N}_+$, 都有 $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{n}{a_1a_{n+1}}$.

21. 品酒师需定期接受酒味鉴别功能测试, 一般通常采用的测试方法如下: 拿出 n 瓶外观相同但品质不同的酒让其品尝, 要求其按品质优劣为它们排序; 经过一段时间, 等其记忆淡忘之后, 再让其品尝这 n 瓶酒, 并重新按品质优劣为它们排序, 这称为一轮测试. 根据一轮测试中的两次排序的偏离程度的高低为其评分.
现设 $n=4$, 分别以 a_1, a_2, a_3, a_4 表示第一次排序时被排为 1, 2, 3, 4 的四种酒在第二次排序时的序号, 并令 $X=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|$, 则 X 是对两次排序的偏离程度的一种描述.
(1) 写出 X 的可能值集合;
(2) 假设 a_1, a_2, a_3, a_4 等可能的为 1, 2, 3, 4 的各种排列, 求 X 的分布列;
(3) 某品酒师在相继进行的三轮测试中, 都有 $X\leqslant 2$,
① 试按 (2) 中的结果, 计算出现这种现象的概率 (假定各轮测试相互独立);
② 你认为该品酒师的酒味鉴别功能如何? 说明理由.

2010 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

1. 若 $A=\{x\mid x+1>0\}$, $B=\{x\mid x-3<0\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $(-1,+\infty)$　(B) $(-\infty,3)$　(C) $(-1,3)$　(D) $(1,3)$

2. 已知 $\mathrm{i}^2=-1$, 则 $\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)=$ （　）

(A) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$　(B) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$　(C) $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$　(D) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$

3. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$, $\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, 则下列结论中正确的是 （　）

(A) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　(B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　(D) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直

4. 过点 $(1,0)$ 且与直线 $x-2y-2=0$ 平行的直线方程是 （　）

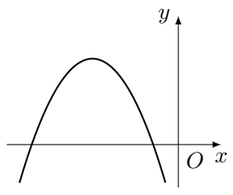
(A) $x-2y-1=0$　(B) $x-2y+1=0$

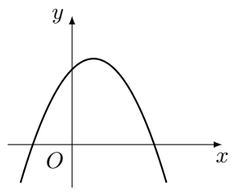
(C) $2x+y-2=0$　(D) $x+2y-1=0$

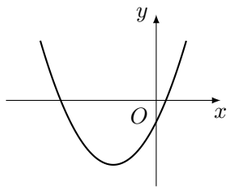
5. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$, 则 a_8 的值为 （　）

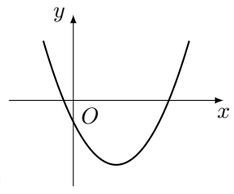
(A) 15　(B) 16　(C) 49　(D) 64

6. 设 $abc>0$, 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象可能是 （　）

(A)


(B)


(C)


(D)


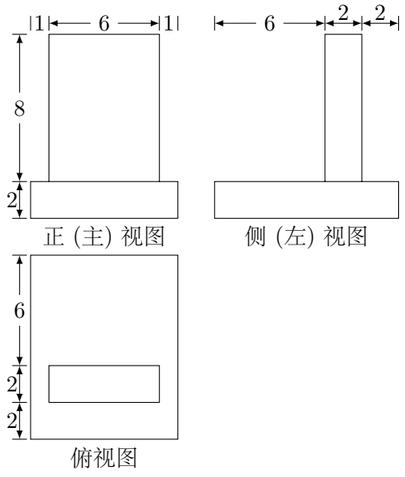
7. 设 $a=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, $b=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$, $c=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 （　）

(A) $a>c>b$　(B) $a>b>c$　(C) $c>a>b$　(D) $b>c>a$

8. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-6\geqslant 0\\ x+2y-6\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=x+y$ 的最大值是 （　）

(A) 3　(B) 4　(C) 6　(D) 8

9. 一个几何体的三视图如图, 该几何体的表面积为 （　）



(A) 372　(B) 360　(C) 292　(D) 280

10. 甲从正方形四个顶点中任意选择两个顶点连成直线, 乙也从该正方形四个顶点中任意选择两个顶点连成直线, 则所得的两条直线相互垂直的概率是 （　）

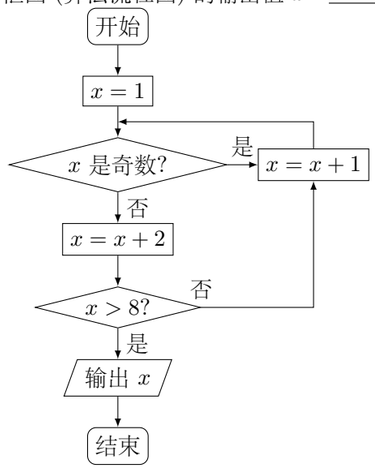
(A) $\frac{3}{18}$　(B) $\frac{3}{18}$　(C) $\frac{5}{18}$　(D) $\frac{6}{18}$

二、填空题

11. 命题“存在 $x\in\mathbf{R}$, 使得 $x^2+2x+5=0$”的否定是_____.

12. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标是_____.

13. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出值 $x=$_____.



14. 某地有居民 100000 户, 其中普通家庭 99000 户, 高收入家庭 1000 户. 从普通家庭中以简单随机抽样方式抽取 990 户, 从高收入家庭中以简单随机抽样方式抽取 100 户进行调查, 发现共有 120 户家庭拥有 3 套或 3 套以上住房, 其中普通家庭 50 户, 高收入家庭 70 户. 依据这些数据并结合所掌握的统计知识, 你认为该地拥有 3 套或 3 套以上住房的家庭所占比例的合理估计是_____.

15. 若 $a>0$, $b>0$, $a+b=2$, 则下列不等式对一切满足条件的 a, b 恒成立的是_____. (写出所有正确命题的编号)

① $ab\leqslant 1$;

② $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$;

③ $a^2+b^2\geqslant 2$;

④ $a^3+b^3\geqslant 3$;

⑤ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2$.

三、解答题

16. $\triangle ABC$ 的面积是 30, 内角 A, B, C 所对边长分别为 a, b, c, $\cos A=\frac{12}{13}$.

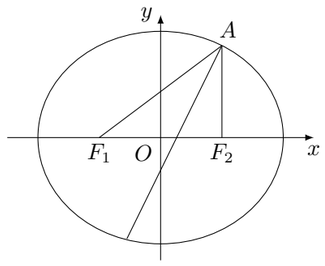
(1) 求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;

(2) 若 $c-b=1$, 求 a 的值.

17. 椭圆 E 经过点 $A(2,3)$, 对称轴为坐标轴, 焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, 离心率 $e=\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 求 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线的方程.

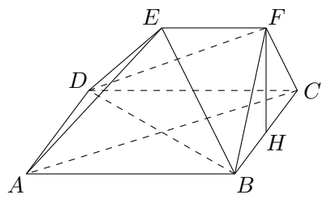


18. 某市 2010 年 4 月 1 日—4 月 30 日对空气污染指数的监测数据如下 (主要污染物为可吸入颗粒物):

61, 76, 70, 56, 81, 91, 92, 91, 75, 81, 88, 67, 101, 103, 95, 91, 77, 86, 81, 83, 82, 82, 64, 79, 86, 85, 75, 71, 49, 45.

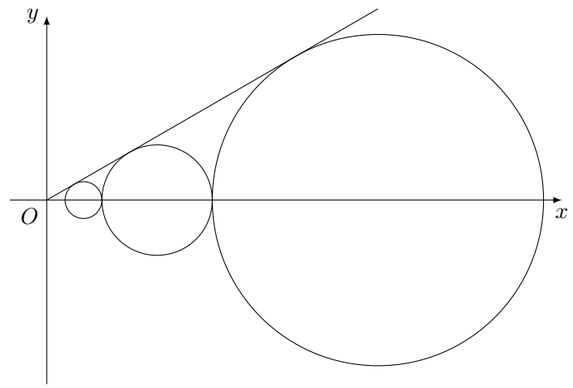
(1) 完成频率分布表;
(2) 作出频率分布直方图;
(3) 根据国家标准, 污染指数在 $0 \sim 50$ 之间时, 空气质量为优; 在 $51 \sim 100$ 之间时, 为良; 在 $101 \sim 150$ 之间时, 为轻微污染; 在 $151 \sim 200$ 之间时, 为轻度污染. 请你依据所给数据和上述标准, 对该市的空气质量给出一个简短评价.

19. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $EF \parallel AB$, $EF \perp FB$, $AB = 2EF$, $\angle BFC = 90°$, $BF = FC$, H 为 BC 的中点.
(1) 求证: $FH \parallel$ 平面 EDB;
(2) 求证: $AC \perp$ 平面 EDB;
(3) 求四面体 $B - DEF$ 的体积.



20. 设函数 $f(x) = \sin x - \cos x + x + 1$, $0 < x < 2\pi$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

21. 设 C_1, C_2, $\cdots$, C_n, $\cdots$ 是坐标平面上的一列圆, 它们的圆心都在 x 轴的正半轴上, 且都与直线 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 相切, 对每一个正整数 n, 圆 C_n 都与圆 C_{n+1} 相互外切, 以 r_n 表示 C_n 的半径, 已知 $\{r_n\}$ 为递增数列.
(1) 证明: $\{r_n\}$ 为等比数列;
(2) 设 $r_1 = 1$, 求数列 $\left\{\dfrac{n}{r_n}\right\}$ 的前 n 项和.



2010 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 集合 $P=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,0\leqslant x<3\}$, $M=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x^2\leqslant 9\}$, 则 $P\cap M=$（　）

(A) $\{1,2\}$　　(B) $\{0,1,2\}$

(C) $\{x\,|\,0\leqslant x<3\}$　　(D) $\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 3\}$

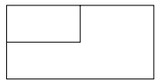
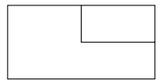
2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 公比 $|q|\neq 1$. 若 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$, 则 $m=$（　）

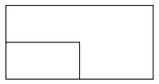
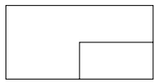
(A) 9　　(B) 10　　(C) 11　　(D) 12

3. 一个长方体去掉一个小长方体, 所得几何体的正 (主) 视图与侧 (左) 视图分别如图所示, 则该几何体的俯视图为（　）



正 (主) 视图　侧 (左) 视图

(A)  　(B) 

(C)  　(D) 

4. 8 名学生和 2 位老师站成一排合影, 2 位老师不相邻的排法种数为（　）

(A) $A_8^8A_9^2$　　(B) $A_8^8C_9^2$　　(C) $A_8^8A_7^2$　　(D) $A_8^8C_7^2$

5. 极坐标方程 $(\rho-1)(\theta-\pi)=0$ $(\rho\geqslant 0)$ 表示的图形是（　）

(A) 两个圆　　(B) 两条直线

(C) 一个圆和一条射线　　(D) 一条直线和一条射线

6. $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为非零向量. "$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$"是"函数 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(x\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 为一次函数"的（　）

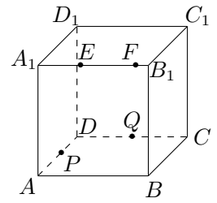
(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 设不等式组 $\begin{cases}x+y-11\geqslant 0\\3x-y+3\geqslant 0\\5x-3y+9\leqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域为 D. 若指数函数 $y=a^x$ 的图象上存在区域 D 内的点, 则 a 的取值范围是（　）

(A) $(1,3]$　　(B) $[2,3]$　　(C) $(1,2]$　　(D) $[3,+\infty)$

8. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 动点 E, F 在棱 A_1B_1 上, 动点 P, Q 分别在棱 AD, CD 上, 若 $EF=1$, $A_1E=x$, $DQ=y$, $DP=z$ (x, y, z 大于零), 则四面体 $PEFQ$ 的体积（　）



(A) 与 x, y, z 都有关　　(B) 与 x 有关, 与 y, z 无关

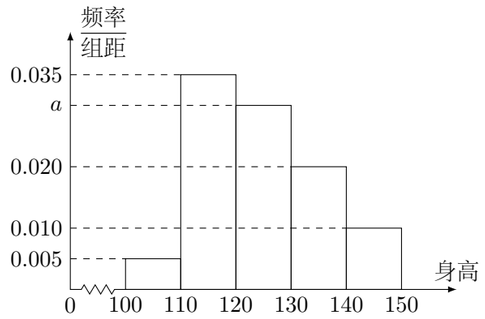
(C) 与 y 有关, 与 x, z 无关　　(D) 与 z 有关, 与 x, y 无关

二、填空题

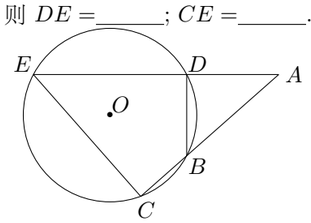
9. 在复平面内, 复数 $\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 对应的点的坐标为_____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $\angle C=\dfrac{2\pi}{3}$, 则 $a=$_____.

11. 从某小学随机抽取 100 名同学, 将他们的身高 (单位: 厘米) 数据绘制成频率分布直方图 (如图). 由图中数据可知 $a=$_____. 若要从身高在 $[120,130)$, $[130,140)$, $[140,150]$ 三组内的学生中, 用分层抽样的方法选取 18 人参加一项活动, 则从身高在 $[140,150]$ 内的学生中选取的人数应为_____.



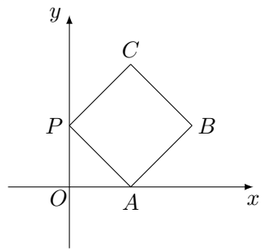
12. 如图, $\odot O$ 的弦 ED, CB 的延长线交于点 A. 若 $BD\perp AE$, $AB=4$, $BC=2$, $AD=3$, 则 $DE=$_____; $CE=$_____.



13. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 2, 焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点相同, 那么双曲线的焦点坐标为_____; 渐近线方程为_____.

14. 如图放置的边长为 1 的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动. 设顶点 $P(x,y)$ 的轨迹方程是 $y=f(x)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为; $y=f(x)$ 在其两个相邻零点间的图象与 x 轴所围区域的面积为_____.

说明: "正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动"包括沿 x 轴正方向和沿 x 轴负方向滚动. 沿 x 轴正方向滚动指的是先以顶点 A 为中心顺时针旋转, 当顶点 B 落在 x 轴上时, 再以顶点 B 为中心顺时针旋转, 如此继续. 类似地, 正方形 $PABC$ 可以沿 x 轴负方向滚动.



三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=2\cos 2x+\sin^2 x$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值;

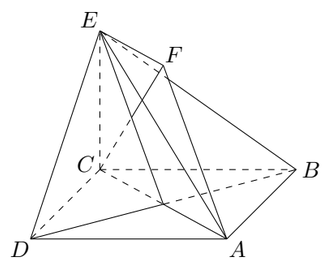
(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

16. 如图, 正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $CE\perp AC$, $EF/\!/AC$, $AB=\sqrt{2}$, $CE=EF=1$.

(1) 求证: $AF/\!/$ 平面 BDE;

(2) 求证: $CF\perp$ 平面 BDE;

(3) 求二面角 $A-BE-D$ 的大小.



17. 某同学参加 3 门课程的考试. 假设该同学第一门课程取得优秀成绩的概率为 $\frac{4}{5}$, 第二、第三门课程取得优秀成绩的概率分别为 p, q $(p>q)$, 且不同课程是否取得优秀成绩相互独立. 记 ξ 为该生取得优秀成绩的课程数, 其分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{6}{125}$	a	b	$\frac{24}{125}$

(1) 求该生至少有 1 门课程取得优秀成绩的概率;
(2) 求 p, q 的值;
(3) 求数学期望 $E\xi$.

18. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{k}{2}x^2$ $(k\geqslant 0)$.
(1) 当 $k=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称, P 是动点, 且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$.
(1) 求动点 P 的轨迹方程;
(2) 设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x=3$ 交于点 M, N, 问: 是否存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. 已知集合 $S_n=\{X\mid X=(x_1,x_2,\ldots,x_n),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}$ $(n\geqslant 2)$, 对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=(b_1,b_2,\cdots b_n)\in S_n$, 定义 A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$; A 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$.
(1) 证明: $\forall A$, B, $C\in S_n$, 有 $A-B\in S_n$, 且 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$;
(2) 证明: $\forall A$, B, $C\in S_n$, $d(A,B)$, $d(A,C)$, $d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数;
(3) 设 $P\subseteq S_n$, P 中有 m $(m\geqslant 2)$ 个元素, 记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\overline{d}(P)$. 证明: $\overline{d}(P)\leqslant\frac{mn}{2(m-1)}$.

2010 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 集合 $P=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,0\leqslant x<3\}$, $M=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x^2\leqslant 9\}$, 则 $P\cap M=$（　）

(A) $\{1,2\}$　(B) $\{0,1,2\}$　(C) $\{1,2,3\}$　(D) $\{0,1,2,3\}$

2. 在复平面内, 复数 $6+5\mathrm{i}$, $-2+3\mathrm{i}$ 对应的点分别为 A, B. 若 C 为线段 AB 的中点, 则点 C 对应的复数是（　）

(A) $4+8\mathrm{i}$　(B) $8+2\mathrm{i}$　(C) $2+4\mathrm{i}$　(D) $4+\mathrm{i}$

3. 从 $\{1,2,3,4,5\}$ 中随机选取一个数为 a, 从 $\{1,2,3\}$ 中随机选取一个数为 b, 则 $b>a$ 的概率是（　）

(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{1}{5}$

4. 若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是非零向量, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$, 则函数 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(x\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 是（　）

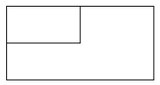
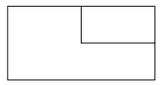
(A) 一次函数且是奇函数　(B) 一次函数但不是奇函数

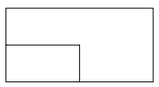
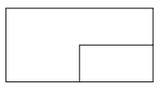
(C) 二次函数且是偶函数　(D) 二次函数但不是偶函数

5. 一个长方体去掉一个小长方体, 所得几何体的正 (主) 视图与侧 (左) 视图分别如图所示, 则该几何体的俯视图为（　）



正 (主) 视图　侧 (左) 视图

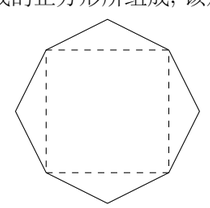
(A)  　(B) 

(C)  　(D) 

6. 给定函数: ① $y=x^{\frac{1}{2}}$, ② $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$, ③ $y=|x-1|$, ④ $y=2^{x+1}$, 其中在区间 $(0,1)$ 上单调递减的函数序号是（　）

(A) ①②　(B) ②③　(C) ③④　(D) ①④

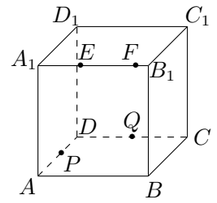
7. 某班设计了一个八边形的班徽 (如图), 它由腰长为 1、顶角为 α 的四个等腰三角形, 及其底边构成的正方形所组成, 该八边形的面积为（　）



(A) $2\sin\alpha-2\cos\alpha+2$　(B) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+3$

(C) $3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+1$　(D) $2\sin\alpha-\cos\alpha+1$

8. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 动点 E, F 在棱 A_1B_1 上. 点 Q 是棱 CD 的中点, 动点 P 在棱 AD 上, 若 $EF=1$, $DP=x$, $A_1E=y$ (x, y 大于零), 则三棱锥 $P-EFQ$ 的体积（　）

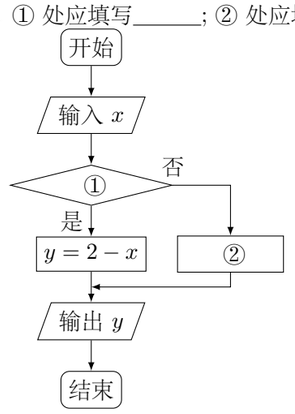


(A) 与 x, y 都有关　(B) 与 x, y 都无关

(C) 与 x 有关, 与 y 无关　(D) 与 y 有关, 与 x 无关

二、填空题

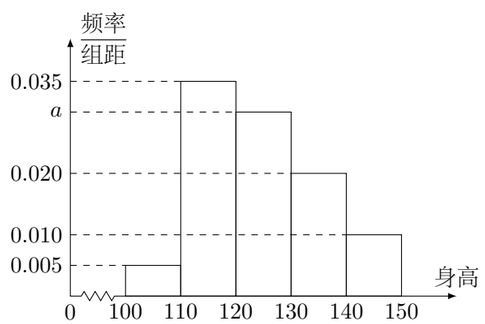
9. 已知函数 $y=\begin{cases}\log_2 x, & x\geqslant 2\\ 2-x, & x<2\end{cases}$. 如图表示的是给定 x 的值, 求其对应的函数值 y 的程序框图. ① 处应填写_____; ② 处应填写_____.



10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $\angle C=\dfrac{2\pi}{3}$, 则 $a=$_____.

11. 若点 $P(m,3)$ 到直线 $4x-3y+1=0$ 的距离为 4, 且点 P 在不等式 $2x+y<3$ 表示的平面区域内, 则 $m=$_____.

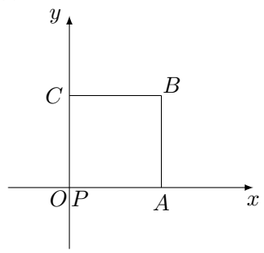
12. 从某小学随机抽取 100 名同学, 将他们的身高 (单位: 厘米) 数据绘制成频率分布直方图 (如图). 由图中数据可知 $a=$_____. 若要从身高在 $[120,130)$, $[130,140)$, $[140,150]$ 三组内的学生中, 用分层抽样的方法选取 18 人参加一项活动, 则从身高在 $[140,150]$ 内的学生中选取的人数应为_____.



13. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的离心率为 2, 焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点相同, 那么双曲线的焦点坐标为_____; 渐近线方程为_____.

14. 如图放置的边长为 1 的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动. 设顶点 $P(x,y)$ 的纵坐标与横坐标的函数关系是 $y=f(x)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____; $y=f(x)$ 在其两个相邻零点间的图象与 x 轴所围区域的面积为_____.

说明: "正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动"包括沿 x 轴正方向和沿 x 轴负方向滚动. 沿 x 轴正方向滚动指的是先以顶点 A 为中心顺时针旋转, 当顶点 B 落在 x 轴上时, 再以顶点 B 为中心顺时针旋转, 如此继续. 类似地, 正方形 $PABC$ 可以沿 x 轴负方向滚动.



三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=2\cos 2x+\sin^2 x$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值;

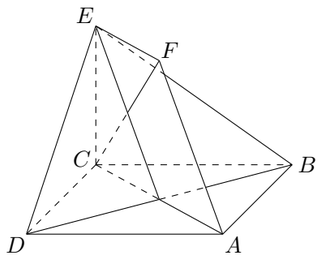
(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

16. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_3=-6$, $a_6=0$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=-8$, $b_2=a_1+a_2+a_3$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和公式.

17. 如图, 正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $EF \parallel AC$, $AB=\sqrt{2}$, $CE=EF=1$.
(1) 求证: $AF \parallel$ 平面 BDE;
(2) 求证: $CF \perp$ 平面 BDE;



18. 设函数 $f(x)=\dfrac{a}{3}x^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$, 且方程 $f'(x)-9x=0$ 的两个根分别为 1, 4.
(1) 当 $a=3$ 且曲线 $y=f(x)$ 过原点时, 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无极值点, 求 a 的取值范围.

19. 已知椭圆 C 的左、右焦点坐标分别是 $\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\left(\sqrt{2},0\right)$, 离心率是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 直线 $y=t$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N, 以线段 MN 为直径作圆 P, 圆心为 P.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 若圆 P 与 x 轴相切, 求圆心 P 的坐标;
(3) 设 $Q(x,y)$ 是圆 P 上的动点, 当 t 变化时, 求 y 的最大值.

20. 已知集合 $S_n=\{X \mid X=(x_1,x_2,\ldots,x_n), x_i \in \{0,1\}, i=1,2,\cdots,n\}$ $(n \geqslant 2)$, 对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=(b_1,b_2,\cdots b_n) \in S_n$, 定义 A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$; A 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$.
(1) 当 $n=5$ 时, 设 $A=(0,1,0,0,1)$, $B=(1,1,1,0,0)$, 求 $A-B$, $d(A,B)$;
(2) 证明: $\forall A$, B, $C \in S_n$, 有 $A-B \in S_n$, 且 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$;
(3) 证明: $\forall A$, B, $C \in S_n$, $d(A,B)$, $d(A,C)$, $d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数.

2010 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{2010}=8a_{2007}$, 则公比 q 的值为 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$ （ ）

(A) 0 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) 8

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=$ （ ）

(A) -1 (B) $-\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) 1

4. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}y\geqslant 0\\ x-y+1\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值为 （ ）

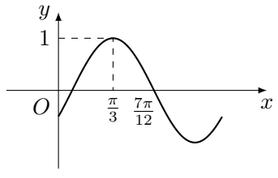
(A) -2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

5. 函数 $f(x)=\dfrac{4^x+1}{2^x}$ 的图象 （ ）

(A) 关于原点对称 (B) 关于直线 $y=x$ 对称

(C) 关于 x 轴对称 (D) 关于 y 轴对称

6. 已知函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示, 则( )



(A) $\omega=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\omega=1$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$

(C) $\omega=2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\omega=2$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$

7. 已知 $x>0$, $y>0$, $x+2y+2xy=8$, 则 $x+2y$ 的最小值是 （ ）

(A) 3 (B) 4 (C) $\dfrac{9}{2}$ (D) $\dfrac{11}{2}$

8. 直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{2}$ 与圆心为 D 的圆 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ $(\theta\in[0,2\pi))$ 交于 A, B 两点, 则直线 AD 与 BD 的倾斜角之和为 （ ）

(A) $\dfrac{7}{6}\pi$ (B) $\dfrac{5}{4}\pi$ (C) $\dfrac{4}{3}\pi$ (D) $\dfrac{5}{3}\pi$

9. 某单位安排 7 位员工在 10 月 1 日至 7 日值班, 每天 1 人, 每人值班 1 天, 若 7 位员工中的甲、乙排在相邻两天, 丙不排在 10 月 1 日, 丁不排在 10 月 7 日, 则不同的安排方案共有 （ ）

(A) 504 种 (B) 960 种 (C) 1008 种 (D) 1108 种

10. 到两互相垂直的异面直线的距离相等的点, 在过其中一条直线且平行于另一条直线的平面内的轨迹是 （ ）

(A) 直线 (B) 椭圆 (C) 抛物线 (D) 双曲线

二、填空题

11. 已知复数 $z=1+\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{2}{z}-z=$_____.

12. 设 $U=\{0,1,2,3\}$, $A=\{x\in U\mid x^2+mx=0\}$, 若 $\complement_U A=\{1,2\}$, 则实数 $m=$_____.

13. 某篮球队员在比赛中每次罚球的命中率相同, 且在两次罚球中至多命中一次的概率为 $\dfrac{16}{25}$, 则该队员每次罚球的命中率为_____.

14. 已知以 F 为焦点的抛物线 $y^2=4x$ 上的两点 A、B 满足 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$, 则弦 AB 的中点到准线的距离为_____.

15. 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(1)=\dfrac{1}{4}$, $4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ $(x,\ y\in\mathbf{R})$, 则 $f(2010)=$_____.

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)+2\cos^2\dfrac{x}{2}$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c, 若 $f(B)=1$, $b=1$, $c=\sqrt{3}$, 求 a 的值.

17. 在甲、乙等 6 个单位参加的一次“唱读讲传”演出活动中, 每个单位的节目集中安排在一起, 若采用抽签的方式随机确定各单位的演出顺序 (序号为 $1,2,\cdots,6$), 求:

(1) 甲、乙两单位的演出序号至少有一个为奇数的概率;

(2) 甲、乙两单位之间的演出单位个数 ξ 的分布列与期望.

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+a}+\ln(x+1)$, 其中实数 $a\neq 1$.

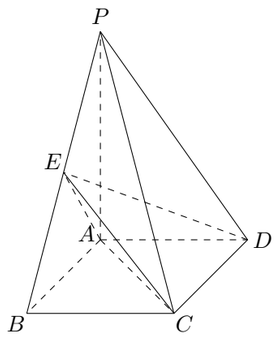
(1) 若 $a=2$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 试讨论 $f(x)$ 的单调性.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $PA=AB=\sqrt{6}$, 点 E 是棱 PB 的中点.

(1) 求直线 AD 与平面 PBC 的距离;

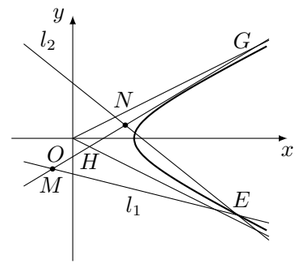
(2) 若 $AD=\sqrt{3}$, 求二面角 $A-EC-D$ 的平面角的余弦值.



20. 已知以原点 O 为中心, $F\left(\sqrt{5},0\right)$ 为右焦点的双曲线 C 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程及其渐近线方程;

(2) 如图, 已知过点 $M\left(x_1,y_1\right)$ 的直线 l_1: $x_1x+4y_1y=4$ 与过点 $N\left(x_2,y_2\right)$ (其中 $x_2\neq x_1$) 的直线 l_2: $x_2x+4y_2y=4$ 的交点 E 在双曲线 C 上, 直线 MN 与两条渐近线分别交于 G、H 两点, 求 $\triangle OGH$ 的面积.



21. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=ca_n+c^{n+1}(2n+1)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中实数 $c\neq 0$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若对一切 $k\in\mathbf{N}^*$ 有 $a_{2k}>a_{2k-1}$, 求 c 的取值范围.

2010 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. $(x+1)^4$ 的展开式中 x^2 的系数为 （ ）

(A) 4 (B) 6 (C) 10 (D) 20

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_9=10$, 则 a_5 的值为 （ ）

(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10

3. 若向量 $\boldsymbol{a}=(3,m)$, $\boldsymbol{b}=(2,-1)$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则实数 m 的值为 （ ）

(A) $-\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) 2 (D) 6

4. 函数 $y=\sqrt{16-4^x}$ 的值域是 （ ）

(A) $[0,+\infty)$ (B) $[0,4]$ (C) $[0,4)$ (D) $(0,4)$

5. 某单位有职工 750 人, 其中青年职工 350 人, 中年职工 250 人, 老年职工 150 人, 为了了解该单位职工的健康情况, 用分层抽样的方法从中抽取样本. 若样本中的青年职工为 7 人, 则样本容量为 （ ）

(A) 7 (B) 15 (C) 25 (D) 35

6. 下列函数中, 周期为 π, 且在 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数的是 （ ）

(A) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (B) $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

(C) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (D) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

7. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x-y\geqslant 0\\ 2x-y-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-2y$ 的最大值为 （ ）

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6

8. 若直线 $y=x-b$ 与曲线 $\begin{cases}x=2+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ $(\theta\in[0,2\pi))$ 有两个不同的公共点, 则实数 b 的取值范围为 （ ）

(A) $\left(2-\sqrt{2},1\right)$ (B) $\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$

(C) $\left(-\infty,2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2},+\infty\right)$ (D) $\left(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$

9. 到两互相垂直的异面直线的距离相等的点 （ ）

(A) 只有 1 个 (B) 恰有 3 个 (C) 恰有 4 个 (D) 有无穷多个

10. 某单位拟安排 6 位员工在今年 6 月 14 日至 16 日 (端午节假期) 值班, 每天安排 2 人, 每人值班 1 天. 若 6 位员工中的甲不值 14 日, 乙不值 16 日, 则不同的安排方法共有 （ ）

(A) 30 种 (B) 36 种 (C) 42 种 (D) 48 种

二、填空题

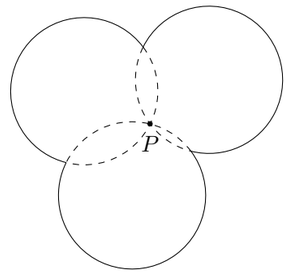
11. 设 $A=\{x\mid x+1>0\}$, $B=\{x\mid x<0\}$, 则 $A\cap B=$_____.

12. 已知 $t>0$, 则函数 $y=\dfrac{t^2-4t+1}{t}$ 的最小值为_____.

13. 已知过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A、B 两点, $|AF|=2$, 则 $|BF|=$_____.

14. 加工某一零件需经过三道工序, 设第一、二、三道工序的次品率分别为 $\dfrac{1}{70}$、$\dfrac{1}{69}$、$\dfrac{1}{68}$, 且各道工序互不影响, 则加工出来的零件的次品率为_____.

15. 如图, 图中的实线是由三段圆弧连接而成的一条封闭曲线 C, 各段弧所在的圆经过同一点 P (点 P 不在 C 上) 且半径相等. 设第 i 段弧所对的圆心角 α_i $(i=1,2,3)$, 则 $\cos\dfrac{\alpha_1}{3}\cos\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{3}-\sin\dfrac{\alpha_1}{3}\sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{3}=$_____.



三、解答题

16. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 19, 公差为 -2 的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 求通项 a_n 及 S_n;

(2) 设 $\{b_n-a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 3 的等比数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 T_n.

17. 在甲、乙等 6 个单位参加的一次“唱读讲传”演出活动中, 每个单位的节目集中安排在一起. 若采用抽签的方式随机确定各单位的演出顺序 (序号为 $1,2,\cdots,6$), 求:

(1) 甲、乙两单位的演出序号均为偶数的概率;

(2) 甲、乙两单位的演出序号不相邻的概率.

18. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c, 且 $3b^2+3c^2-3a^2=4\sqrt{2}bc$.

(1) 求 $\sin A$ 的值;

(2) 求 $\dfrac{2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(B+C+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1-\cos 2A}$ 的值.

19. 已知函数 $f(x)=ax^3+x^2+bx$ (其中常数 $a,b\in\mathbf{R}$), $g(x)=f(x)+f'(x)$ 是奇函数.

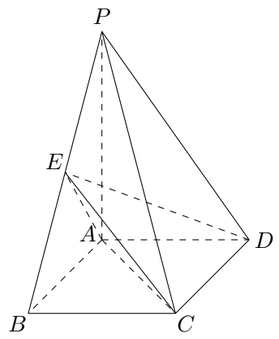
(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 讨论 $g(x)$ 的单调性, 并求 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值和最小值.

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $PA=AB=\sqrt{2}$, 点 E 是棱 PB 的中点.

(1) 证明: $AE\perp$ 平面 PBC;

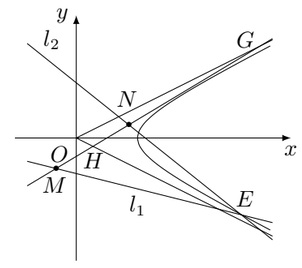
(2) 若 $AD=1$, 求二面角 $B-EC-D$ 的平面角的余弦值.



21. 已知以原点 O 为中心, $F\left(\sqrt{5},0\right)$ 为右焦点的双曲线 C 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程及其渐近线方程;

(2) 如图, 已知过点 $M(x_1,y_1)$ 的直线 l_1: $x_1x+4y_1y=4$ 与过点 $N(x_2,y_2)$ (其中 $x_2\neq x_1$) 的直线 l_2: $x_2x+4y_2y=4$ 的交点 E 在双曲线 C 上, 直线 MN 与两条渐近线分别交于 G、H 两点, 求 $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OH}$ 的值.



2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{3+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=$ （　）

(A) i　(B) $-\mathrm{i}$　(C) $12-13\mathrm{i}$　(D) $12+13\mathrm{i}$

2. 记 $\cos(-80^\circ)=k$, 那么 $\tan 100^\circ=$ （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　(B) $-\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　(C) $\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　(D) $-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

3. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant 1 \\ x+y\geqslant 0 \\ x-y-2\leqslant 0 \end{cases}$, 则 $z=x-2y$ 的最大值为 （　）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

4. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, $a_1a_2a_3=5$, $a_7a_8a_9=10$, 则 $a_4a_5a_6=$ （　）

(A) $5\sqrt{2}$　(B) 7　(C) 6　(D) $4\sqrt{2}$

5. $(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5$ 的展开式中 x 的系数是 （　）

(A) -4　(B) -2　(C) 2　(D) 4

6. 某校开设 A 类选修课 3 门, B 类选修课 4 门, 一位同学从中共选 3 门. 若要求两类课程中各至少选一门, 则不同的选法共有 （　）

(A) 30 种　(B) 35 种　(C) 42 种　(D) 48 种

7. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, BB_1 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为（　）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

8. 设 $a=\log_3 2$, $b=\ln 2$, $c=5^{-\frac{1}{2}}$, 则 （　）

(A) $a<b<c$　(B) $b<c<a$　(C) $c<a<b$　(D) $c<b<a$

9. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 则 P 到 x 轴的距离为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{6}$

10. 已知函数 $f(x)=|\lg x|$, 若 $0<a<b$, 且 $f(a)=f(b)$, 则 $a+2b$ 的取值范围是 （　）

(A) $\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$　(B) $\left[2\sqrt{2},+\infty\right)$　(C) $(3,+\infty)$　(D) $[3,+\infty)$

11. 已知圆 O 的半径为 1, PA、PB 为该圆的两条切线, A、B 为两切点, 那么 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 （　）

(A) $-4+\sqrt{2}$　(B) $-3+\sqrt{2}$　(C) $-4+2\sqrt{2}$　(D) $-3+2\sqrt{2}$

12. 已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点, 若 $AB=CD=2$, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为 （　）

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　(C) $2\sqrt{3}$　(D) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

二、填空题

13. 不等式 $\sqrt{2x^2+1}-x\leqslant 1$ 的解集是_____.

14. 已知 α 为第三象限的角, $\cos 2\alpha=-\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)=$_____.

15. 直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$ 有四个交点, 则 a 的取值范围是_____.

16. 已知 F 是椭圆 C 的一个焦点, B 是短轴的一个端点, 线段 BF 的延长线交 C 于点 D, 且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$, 则 C 的离心率为_____.

三、解答题

17. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B 及其对边 a, b 满足 $a+b=a\cot A+b\cot B$, 求内角 C.

18. 投到某杂志的稿件, 先由两位初审专家进行评审. 若能通过两位初审专家的评审, 则予以录用; 若两位初审专家都未予通过, 则不予录用; 若恰能通过一位初审专家的评审, 则再由第三位专家进行复审, 若能通过复审专家的评审, 则予以录用, 否则不予录用. 设稿件能通过各初审专家评审的概率均为 0.5, 复审的稿件能通过评审的概率为 0.3. 各专家独立评审.

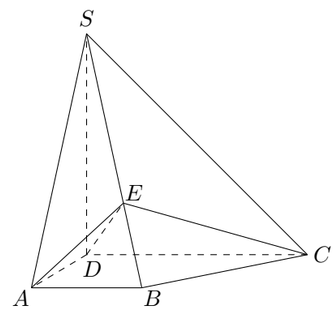
(1) 求投到该杂志的 1 篇稿件被录用的概率;

(2) 记 X 表示投到该杂志的 4 篇稿件中被录用的篇数, 求 X 的分布列及期望.

19. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SD\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\parallel DC$, $AD\perp DC$, $AB=AD=1$, $DC=SD=2$, E 为棱 SB 上的一点, 平面 $EDC\perp$ 平面 SBC.

(1) 证明: $SE=2EB$;

(2) 求二面角 $A-DE-C$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1$.

(1) 若 $xf'(x)\leqslant x^2+ax+1$, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: $(x-1)f(x)\geqslant 0$.

21. 已知抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F, 过点 $K(-1,0)$ 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 点 A 关于 x 轴的对称点为 D.

(1) 证明: 点 F 在直线 BD 上;

(2) 设 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=\dfrac{8}{9}$, 求 $\triangle BDK$ 的内切圆 M 的方程.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=c-\dfrac{1}{a_n}$.

(1) 设 $c=\dfrac{5}{2}$, $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求使不等式 $a_n<a_{n+1}<3$ 成立的 c 的取值范围.

2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷 I）

文科数学

一、选择题

1. $\cos 300^\circ =$ （ ）

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $M=\{1,4\}$, $N=\{1,3,5\}$, 则 $N\cap(\complement_U M)=$ （ ）

(A) $\{1,3\}$ (B) $\{1,5\}$ (C) $\{3,5\}$ (D) $\{4,5\}$

3. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant 1 \\ x+y\geqslant 0 \\ x-y-2\leqslant 0 \end{cases}$, 则 $z=x-2y$ 的最大值为 （ ）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

4. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, $a_1a_2a_3=5$, $a_7a_8a_9=10$, 则 $a_4a_5a_6=$ （ ）

(A) $5\sqrt{2}$ (B) 7 (C) 6 (D) $4\sqrt{2}$

5. $(1-x)^4(1-\sqrt{x})^3$ 的展开式中 x^2 的系数是 （ ）

(A) -6 (B) -3 (C) 0 (D) 3

6. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=AA_1$, 则异面直线 BA_1 与 AC_1 所成的角等于 （ ）

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

7. 已知函数 $f(x)=|\lg x|$. 若 $a\neq b$ 且 $f(a)=f(b)$, 则 $a+b$ 的取值范围是 （ ）

(A) $(1,+\infty)$ (B) $[1,+\infty)$ (C) $(2,+\infty)$ (D) $[2,+\infty)$

8. 已知 F_1、F_2 为双曲线 C: $x^2-y^2=1$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$ （ ）

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

9. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, BB_1 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为（ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

10. 设 $a=\log_3 2$, $b=\ln 2$, $c=5^{-\frac{1}{2}}$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$ (B) $b<c<a$ (C) $c<a<b$ (D) $c<b<a$

11. 已知圆 O 的半径为 1, PA、PB 为该圆的两条切线, A、B 为两切点, 那么 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 （ ）

(A) $-4+\sqrt{2}$ (B) $-3+\sqrt{2}$ (C) $-4+2\sqrt{2}$ (D) $-3+2\sqrt{2}$

12. 已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点, 若 $AB=CD=2$, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为 （ ）

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

二、填空题

13. 不等式 $\dfrac{x-2}{x^2+3x+2}>0$ 的解集是_____.

14. 已知 α 为第二象限的角, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan 2\alpha=$_____.

15. 某学校开设 A 类选修课 3 门, B 类选修课 4 门, 一位同学从中共选 3 门, 若要求两类课程中各至少选一门, 则不同的选法共有_____种. (用数字作答)

16. 已知 F 是椭圆 C 的一个焦点, B 是短轴的一个端点, 线段 BF 的延长线交 C 于点 D, 且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$, 则 C 的离心率为_____.

三、解答题

17. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n, 设 $S_3=12$, 且 $2a_1, a_2, a_3+1$ 成等比数列, 求 S_n.

18. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B 及其对边 a, b 满足 $a+b=a\cot A+b\cot B$, 求内角 C.

19. 投到某杂志的稿件, 先由两位初审专家进行评审. 若能通过两位初审专家的评审, 则予以录用; 若两位初审专家都未予通过, 则不予录用; 若恰能通过一位初审专家的评审, 则再由第三位专家进行复审, 若能通过复审专家的评审, 则予以录用, 否则不予录用. 设稿件能通过各初审专家评审的概率均为 0.5, 复审的稿件能通过评审的概率为 0.3. 各专家独立评审.

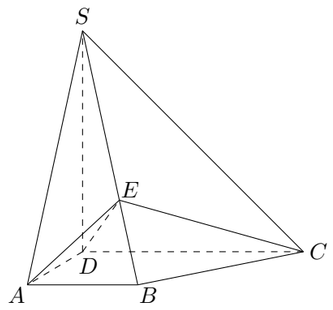
(1) 求投到该杂志的 1 篇稿件被录用的概率;

(2) 求投到该杂志的 4 篇稿件中, 至少有 2 篇被录用的概率.

20. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SD \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, $AB=AD=1$, $DC=SD=2$, E 为棱 SB 上的一点, 平面 $EDC \perp$ 平面 SBC.

(1) 证明: $SE=2EB$;

(2) 求二面角 $A-DE-C$ 的大小.



21. 求函数 $f(x)=x^3-3x$ 在 $[-3,3]$ 上的最值.

22. 已知抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F, 过点 $K(-1,0)$ 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 点 A 关于 x 轴的对称点为 D.

(1) 证明: 点 F 在直线 BD 上;

(2) 设 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB}=\dfrac{8}{9}$, 求 $\triangle BDK$ 的内切圆 M 的方程.

2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\left(\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2=$ （　）

(A) $-3-4\mathrm{i}$　(B) $-3+4\mathrm{i}$　(C) $3-4\mathrm{i}$　(D) $3+4\mathrm{i}$

2. 函数 $y=\dfrac{1+\ln(x-1)}{2}$ $(x>1)$ 的反函数是 （　）

(A) $y=\mathrm{e}^{2x+1}-1$ $(x>0)$　(B) $y=\mathrm{e}^{2x-1}+1$ $(x>0)$

(C) $y=\mathrm{e}^{2x+1}-1$ $(x\in\mathbf{R})$　(D) $y=\mathrm{e}^{2x-1}+1$ $(x\in\mathbf{R})$

3. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant -1\\ y\geqslant x\\ 3x+2y\leqslant 5\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为（　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

4. 如果等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_4+a_5=12$，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$（　）

(A) 14　(B) 21　(C) 28　(D) 35

5. 不等式 $\dfrac{x^2-x-6}{x-1}>0$ 的解集为 （　）

(A) $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>3\}$　(B) $\{x\,|\,x<-2$ 或 $1<x<3\}$

(C) $\{x\,|\,-2<x<1$ 或 $x>3\}$　(D) $\{x\,|\,-2<x<1$ 或 $1<x<3\}$

6. 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中，若每个信封放 2 张，其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封，则不同的放法共有 （　）

(A) 12 种　(B) 18 种　(C) 36 种　(D) 54 种

7. 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图像，只需把函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图像 （　）

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个长度单位　(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个长度单位

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个长度单位　(D) 向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个长度单位

8. $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，CD 平分 $\angle ACB$. 若 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $\overrightarrow{CD}=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$　(B) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　(C) $\dfrac{3}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{b}$　(D) $\dfrac{4}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{5}\boldsymbol{b}$

9. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA=2\sqrt{3}$，那么当该棱锥的体积最大时，它的高为 （　）

(A) 1　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) 3

10. 若曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $\left(a,a^{-\frac{1}{2}}\right)$ 处的切线与两个坐标轴围成的三角形的面积为 18，则 $a=$ （　）

(A) 64　(B) 32　(C) 16　(D) 8

11. 与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB、CC_1、A_1D_1 所在直线的距离相等的点 （　）

(A) 有且只有 1 个　(B) 有且只有 2 个

(C) 有且只有 3 个　(D) 有无数个

12. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 k $(k>0)$ 的直线与 C 相交于 A、B 两点. 若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则 $k=$（　）

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

二、填空题

13. 已知 α 是第二象限的角，$\tan(\pi+2\alpha)=-\dfrac{4}{3}$，则 $\tan\alpha=$_____.

14. 若 $\left(x-\dfrac{a}{x}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数是 -84，则 $a=$_____.

15. 已知抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线为 l，过 $M(1,0)$ 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 l 相交于点 A，与 C 的一个交点为 B. 若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，则 $p=$_____.

16. 已知球 O 的半径为 4，圆 M 与圆 N 为该球的两个小圆，AB 为圆 M 与圆 N 的公共弦，$AB=4$. 若 $OM=ON=3$，则两圆圆心的距离 $MN=$_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 上的一点，$BD=33$，$\sin B=\dfrac{5}{13}$，$\cos\angle ADC=\dfrac{3}{5}$，求 AD.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=(n^2+n)\cdot 3^n$.

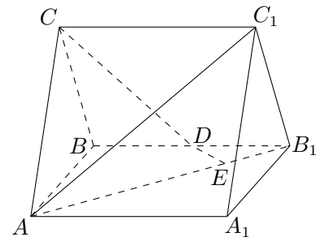
(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$;

(2) 证明: $\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}>3^n$.

19. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC$，$AA_1=AB$，D 为 BB_1 的中点，E 为 AB_1 上的一点，$AE=3EB_1$.

(1) 证明: DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线;

(2) 设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 $45°$，求二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的大小.

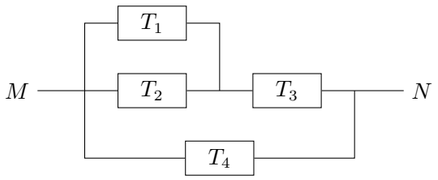


20. 如图, 由 M 到 N 的电路中有 4 个组件, 分别标为 T_1, T_2, T_3, T_4, 电流能通过 T_1, T_2, T_3 的概率都是 p, 电流能通过 T_4 的概率是 0.9. 电流能否通过各组件相互独立. 已知 T_1, T_2, T_3 中至少有一个能通过电流的概率为 0.999.

(1) 求 p;

(2) 求电流能在 M 与 N 之间通过的概率;

(3) ξ 表示 T_1, T_2, T_3, T_4 中能通过电流的组件个数, 求 ξ 的期望.



21. 已知斜率为 1 的直线 l 与双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 相交于 B、D 两点, 且 BD 的中点为 $M(1,3)$.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 设 C 的右顶点为 A, 右焦点为 F, $|DF|\cdot|BF|=17$, 证明: 过 A、B、D 三点的圆与 x 轴相切.

22. 设函数 $f(x)=1-\mathrm{e}^{-x}$.

(1) 证明: 当 $x>-1$ 时, $f(x)\geqslant\dfrac{x}{x+1}$;

(2) 设当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant\dfrac{x}{ax+1}$, 求 a 的取值范围.

2010 年普通高等学校招生考试（大纲卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 设全集 $U=\{x\in\mathbf{N}^*|x<6\}$，集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{3,5\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$（　）

(A) $\{1,4\}$　(B) $\{1,5\}$　(C) $\{2,4\}$　(D) $\{2,5\}$

2. 不等式 $\dfrac{x-3}{x+2}<0$ 的解集为（　）

(A) $\{x|\,-2<x<3\}$　(B) $\{x|\,x<-2\}$

(C) $\{x|\,x<-2$ 或 $x>3\}$　(D) $\{x|\,x>3\}$

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，则 $\cos(\pi-2\alpha)=$（　）

(A) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(B) $-\dfrac{1}{9}$　(C) $\dfrac{1}{9}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

4. 函数 $y=1+\ln(x-1)$ $(x>1)$ 的反函数是（　）

(A) $y=\mathrm{e}^{x+1}-1$ $(x>0)$　(B) $y=\mathrm{e}^{x-1}+1$ $(x>0)$

(C) $y=\mathrm{e}^{x+1}-1$ $(x\in\mathbf{R})$　(D) $y=\mathrm{e}^{x-1}+1$ $(x\in\mathbf{R})$

5. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant -1\\ y\geqslant x\\ 3x+2y\leqslant 5\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为(　)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

6. 如果等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_4+a_5=12$，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$(　)

(A) 14　(B) 21　(C) 28　(D) 35

7. 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 在点 $(0,b)$ 处的切线方程是 $x-y+1=0$，则(　)

(A) $a=1,b=1$　(B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$　(D) $a=-1,b=-1$

8. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 ABC 为边长等于 2 的等边三角形，SA 垂直于底面 ABC，$SA=3$，那么直线 AB 与平面 SBC 所成角的正弦值为(　)

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

9. 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中，若每个信封放 2 张，其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封，则不同的放法共有（　）

(A) 12 种　(B) 18 种　(C) 36 种　(D) 54 种

10. $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，CD 平分 $\angle ACB$．若 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $\overrightarrow{CD}=$（　）

(A) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$　(B) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　(C) $\dfrac{3}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{b}$　(D) $\dfrac{4}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{5}\boldsymbol{b}$

11. 与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB、CC_1、A_1D_1 所在直线的距离相等的点（　）

(A) 有且只有 1 个　(B) 有且只有 2 个

(C) 有且只有 3 个　(D) 有无数个

12. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 k $(k>0)$ 的直线与 C 相交于 A、B 两点．若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则 $k=$(　)

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

二、填空题

13. 已知 α 是第二象限的角，$\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$，则 $\cos\alpha=$_____.

14. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数是_____.

15. 已知抛物线 C：$y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线为 l，过 $M(1,0)$ 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 l 相交于点 A，与 C 的一个交点为 B．若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，则 $p=$_____.

16. 已知球 O 的半径为 4，圆 M 与圆 N 为该球的两个小圆，AB 为圆 M 与圆 N 的公共弦，$AB=4$．若 $OM=ON=3$，则两圆圆心的距离 $MN=$_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 上的一点，$BD=33$，$\sin B=\dfrac{5}{13}$，$\cos\angle ADC=\dfrac{3}{5}$，求 AD.

18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，且 $a_1+a_2=2\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}\right)$，$a_3+a_4+a_5=64\left(\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}\right)$.

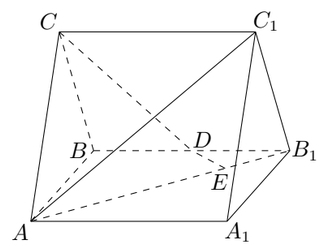
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)^2$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

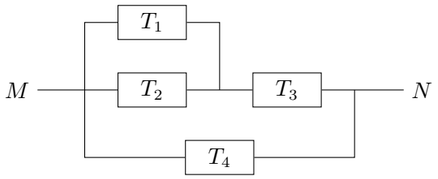
19. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC$，$AA_1=AB$，D 为 BB_1 的中点，E 为 AB_1 上的一点，$AE=3EB_1$.

(1) 证明：DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线;

(2) 设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 $45°$，求二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的大小.



20. 如图, 由 M 到 N 的电路中有 4 个组件, 分别标为 T_1, T_2, T_3, T_4, 电流能通过 T_1, T_2, T_3 的概率都是 p, 电流能通过 T_4 的概率是 0.9. 电流能否通过各组件相互独立. 已知 T_1, T_2, T_3 中至少有一个能通过电流的概率为 0.999.
(1) 求 p;
(2) 求电流能在 M 与 N 之间通过的概率.



21. 已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2+3x+1$.
(1) 设 $a=2$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 设 $f(x)$ 在区间 $(2,3)$ 中至少有一个极值点, 求 a 的取值范围.

22. 已知斜率为 1 的直线 l 与双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 相交于 B、D 两点, 且 BD 的中点为 $M(1,3)$.
(1) 求 C 的离心率;
(2) 设 C 的右顶点为 A, 右焦点为 F, $|DF|\cdot|BF|=17$, 证明: 过 A、B、D 三点的圆与 x 轴相切.

2010 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 计算 $\sin 43^\circ \cos 13^\circ - \cos 43^\circ \sin 13^\circ$ 的结果等于（　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. 以抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为圆心, 且过坐标原点的圆的方程为（　）

(A) $x^2+y^2+2x=0$　(B) $x^2+y^2+x=0$

(C) $x^2+y^2-x=0$　(D) $x^2+y^2-2x=0$

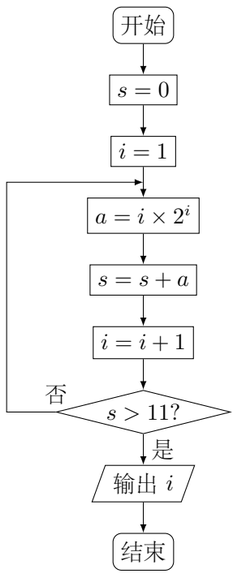
3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=-11$, $a_4+a_6=-6$, 则当 S_n 取最小值时, n 等于（　）

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leqslant 0\\ -2+\ln x, & x>0\end{cases}$ 的零点个数为（　）

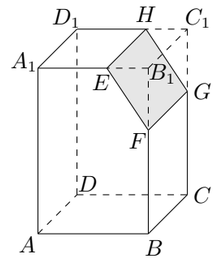
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

5. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 i 值等于（　）



(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

6. 如图, 若 Ω 是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 $EFGH$ 截去几何体 $EFGHB_1C_1$ 后得到的几何体, 其中 E 为线段 A_1B_1 上异于 B_1 的点, F 为线段 BB_1 上异于 B_1 的点, 且 $EH\parallel A_1D_1$, 则下列结论中不正确的是(　)



(A) $EH\parallel FG$　(B) 四边形 $EFGH$ 是矩形

(C) Ω 是棱柱　(D) Ω 是棱台

7. 若点 O 和点 $F(-2,0)$ 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ $(a>0)$ 的中心和左焦点, 点 P 为双曲线右支上的任意一点, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的取值范围为（　）

(A) $\left[3-2\sqrt{3},+\infty\right)$　(B) $\left[3+2\sqrt{3},+\infty\right)$

(C) $\left[-\dfrac{7}{4},+\infty\right)$　(D) $\left[\dfrac{7}{4},+\infty\right)$

8. 设不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x-2y+3\geqslant 0\\ y\geqslant x\end{cases}$ 所表示的平面区域是 Ω_1, 平面区域 Ω_2 与 Ω_1 关于直线 $3x-4y-9=0$ 对称. 对于 Ω_1 中的任意点 A 与 Ω_2 中的任意点 B, $|AB|$ 的最小值等于（　）

(A) $\dfrac{28}{5}$　(B) 4　(C) $\dfrac{12}{5}$　(D) 2

9. 对于复数 a, b, c, d, 若集合 $S=\{a,b,c,d\}$ 具有性质“对任意 x, $y\in S$, 必有 $xy\in S$”, 则当 $\begin{cases}a=1\\ b^2=1\\ c^2=b\end{cases}$ 时, $b+c+d$ 等于（　）

(A) 1　(B) -1　(C) 0　(D) i

10. 对于具有相同定义域 D 的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若存在函数 $h(x)=kx+b$ (k, b 为常数), 对任给的正数 m, 存在相应的 $x_0\in D$, 使得当 $x\in D$ 且 $x>x_0$ 时, 总有 $\begin{cases}0<f(x)-h(x)<m\\ 0<h(x)-g(x)<m\end{cases}$, 则称直线 l: $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的“分渐近线”. 给出定义域均为 $D=\{x\mid x>1\}$ 的四组函数如下:

① $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$;

② $f(x)=10^{-x}+2$, $g(x)=\dfrac{2x-3}{x}$;

③ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}$;

④ $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}$, $g(x)=2(x-1-\mathrm{e}^{-x})$.

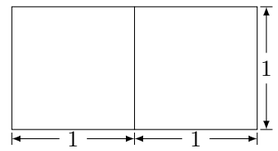
其中, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 存在“分渐近线”的是（　）

(A) ①④　(B) ②③　(C) ②④　(D) ③④

二、填空题

11. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若公比 $q=4$, 且前 3 项之和等于 21, 则该数列的通项公式为 $a_n=$_____.

12. 若一个底面是正三角形的三棱柱的正视图如图所示, 则其表面积等于_____.



13. 某次知识竞赛规则如下: 在主办方预设的 5 个问题中, 选手若能连续正确回答出两个问题, 即停止答题, 晋级下一轮. 假设某选手正确回答每个问题的概率都是 0.8, 且每个问题的回答结果相互独立, 则该选手恰好回答了 4 个问题就晋级下一轮的概率等于_____.

14. 已知函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ $(\omega>0)$ 和 $g(x)=2\cos(2x+\varphi)+1$ 的图象的对称轴完全相同. 若 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 则 $f(x)$ 的取值范围是_____.

15. 已知定义域为 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足, (1) 对任意 $x\in(0,+\infty)$, 恒有 $f(2x)=2f(x)$ 成立; (2) 当 $x\in(1,2]$ 时, $f(x)=2-x$, 给出结论如下:

① 对任意 $m\in\mathbf{Z}$, 有 $f(2^m)=0$;

② 函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$;

③ 存在 $n\in\mathbf{Z}$, 使得 $f(2^n+1)=9$;

④ “函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递减”的充要条件是“存在 $k\in\mathbf{Z}$, 使得 $(a,b)\subseteq\left(2^k,2^{k+1}\right)$”.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题

16. 设 S 是不等式 $x^2-x-6\leqslant 0$ 的解集, 整数 m, $n\in S$.

(1) 记使得“$m+n=0$ 成立的有序数组 (m,n)”为事件 A, 试列举 A 包含的基本事件;

(2) 设 $\xi=m^2$, 求 ξ 的分布列及其数学期望 $E\xi$.

17. 已知中心在坐标原点 O 的椭圆 C 经过点 $A(2,3)$, 且点 $F(2,0)$ 为其右焦点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 是否存在平行于 OA 的直线 l, 使得直线 l 与椭圆 C 有公共点, 且直线 OA 与 l 的距离等于 4? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

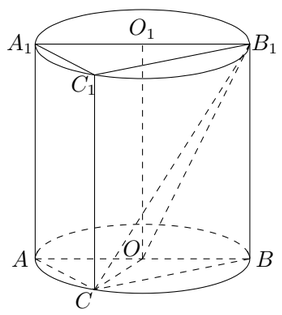
18. 如图, 圆柱 OO_1 内有一个三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 三棱柱的底面为圆柱底面的内接三角形, 且 AB 是圆 O 直径.

(1) 证明: 平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 B_1BCC_1;

(2) 设 $AB=AA_1$, 在圆柱 OO_1 内随机选取一点, 记该点取自于三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内的概率为 p.

① 当点 C 在圆周上运动时, 求 p 的最大值;

② 记平面 A_1ACC_1 与平面 B_1OC 所成的角为 θ $(0^\circ<\theta\leqslant 90^\circ)$, 当 p 取最大值时, 求 $\cos\theta$ 的值.



19. 某港口 O 要将一件重要物品用小艇送到一艘正在航行的轮船上. 在小艇出发时, 轮船位于港口 O 北偏西 30° 且与该港口相距 20 海里的 A 处, 并以 30 海里/小时的航行速度沿正东方向匀速行驶. 假设该小艇沿直线方向以 v 海里/小时的航行速度匀速行驶, 经过 t 小时与轮船相遇.

(1) 若希望相遇时小艇的航行距离最小, 则小艇航行速度的大小应为多少?

(2) 假设小艇的最高航行速度只能达到 30 海里/小时, 试设计航行方案 (即确定航行方向与航行速度的大小), 使得小艇能以最短时间与轮船相遇, 并说明理由.

20. (1) 已知函数 $f(x)=x^3-x$, 其图象记为曲线 C.

① 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

② 证明: 若对于任意非零实数 x_1, 曲线 C 与其在点 $P_1(x_1,f(x_1))$ 处的切线交于另一点 $P_2(x_2,f(x_2))$, 曲线 C 与其在点 $P_2(x_2,f(x_2))$ 处的切线交于另一点 $P_3(x_3,f(x_3))$, 线段 P_1P_2, P_2P_3 与曲线 C 所围成封闭图形的面积分别记为 S_1, S_2, 则 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 为定值;

(2) 对于一般的三次函数 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$, 请给出类似于 (1) ②的正确命题, 并予以证明.

21. 三选二.

【A】已知矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}c & 2\\ 0 & d\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

(1) 求实数 a, b, c, d 的值;

(2) 求直线 $y=3x$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 所对应的线性变换下的像的方程.

【B】在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数). 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 圆 C 的方程为 $\rho=2\sqrt{5}\sin\theta$.

(1) 求圆 C 的直角坐标方程;

(2) 设圆 C 与直线 l 交于点 A、B, 若点 P 的坐标为 $\left(3,\sqrt{5}\right)$, 求 $|PA|+|PB|$.

【C】已知函数 $f(x)=|x-a|$.

(1) 若不等式 $f(x)\leqslant 3$ 的解集为 $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 5\}$, 求实数 a 的值;

(2) 在 (1) 的条件下, 若 $f(x)+f(x+5)\geqslant m$ 对一切实数 x 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

2010 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x\mid x>2\}$, 则 $A\cap B$ 等于 （ ）

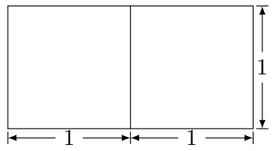
(A) $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$ (B) $\{x\mid x\geqslant 1\}$

(C) $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$ (D) $\{x\mid x>2\}$

2. 计算 $1-2\sin^2 22.5^\circ$ 的结果等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. 若一个底面是正三角形的三棱柱的正视图如图所示, 则其侧面积等于（ ）



(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 6

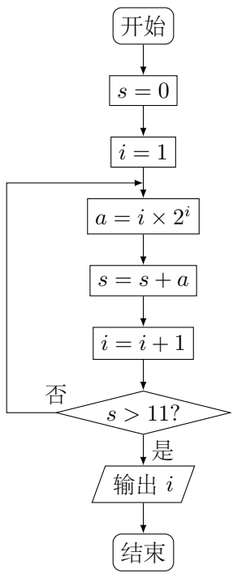
4. i 是虚数单位, $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4$ 等于 （ ）

(A) i (B) $-\mathrm{i}$ (C) 1 (D) -1

5. 若 $x, y\in\mathbf{R}$, 且 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x-2y+3\geqslant 0\\ y\geqslant x\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最小值等于 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 9

6. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 i 值等于 （ ）



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leqslant 0\\ -2+\ln x, & x>0\end{cases}$ 的零点个数为 （ ）

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

8. 若向量 $\boldsymbol{a}=(x,3)$ $(x\in\mathbf{R})$, 则“$x=4$”是“$|\boldsymbol{a}|=5$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 若某校高一年级 8 个班参加合唱比赛的得分如茎叶图所示, 则这组数据的中位数和平均数分别是 （ ）

8	9 7
9	3 1 6 4 0 2

(A) 91.5 和 91.5 (B) 91.5 和 92 (C) 91 和 91.5 (D) 92 和 92

10. 将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位, 若所得图象与原图象重合, 则 ω 的值不可能等于 （ ）

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

11. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的中心和左焦点, 点 P 为椭圆上的任意一点, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的最大值为 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 8

12. 设非空集合 $S=\{x\mid m\leqslant x\leqslant l\}$ 满足: 当 $x\in S$ 时, 有 $x^2\in S$. 给出如下三个命题:

① 若 $m=1$, 则 $S=\{1\}$;

② 若 $m=-\dfrac{1}{2}$, 则 $\dfrac{1}{4}\leqslant l\leqslant 1$;

③ 若 $l=\dfrac{1}{2}$, 则 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$.

其中正确命题的个数是 （ ）

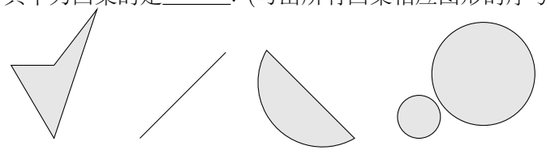
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题

13. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$, 则 b 等于_____.

14. 将容量为 n 的样本中的数据分成 6 组, 绘制频率分步直方图. 若第一组至第六组数据的频率之比为 $2:3:4:6:4:1$, 且前三组数据的频数之和等于 27, 则 n 等于_____.

15. 对于平面上的点集 Ω, 如果连接 Ω 中任意两点的线段必定包含于 Ω, 则称 Ω 为平面上的凸集, 给出平面上 4 个点集的图形如图所示 (阴影区域及其边界), 其中为凸集的是_____. (写出所有凸集相应图形的序号)



① ② ③ ④

16. 观察下列等式:

① $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

② $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$;

③ $\cos 6\alpha=32\cos^6\alpha-48\cos^4\alpha+18\cos^2\alpha-1$;

④ $\cos 8\alpha=128\cos^8\alpha-256\cos^6\alpha+160\cos^4\alpha-32\cos^2\alpha+1$;

⑤ $\cos 10\alpha=m\cos^{10}\alpha-1280\cos^8\alpha+1120\cos^6\alpha+n\cos^4\alpha+p\cos^2\alpha-1$.

可以推测, $m-n+p=$_____.

三、解答题

17. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{3}$, 前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1}-S_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 以及前 n 项和 S_n;

(2) 若 $S_1, t(S_1+S_2), 3(S_2+S_3)$ 成等差数列, 求实数 t 的值.

18. 设平面向量 $\boldsymbol{a_m}=(m,1)$, $\boldsymbol{b_n}=(2,n)$, 其中 $m, n\in\{1,2,3,4\}$.

(1) 请列出有序数组 (m,n) 的所有可能结果;

(2) 记“使得 $\boldsymbol{a_m}\perp(\boldsymbol{a_m}-\boldsymbol{b_n})$ 成立的 (m,n)”为事件 A, 求事件 A 发生的概率.

19. 已知抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 过点 $A(1,-2)$.

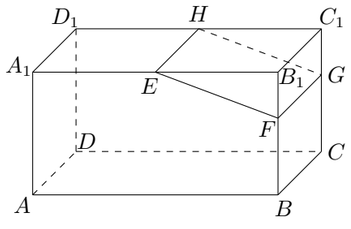
(1) 求抛物线 C 的方程, 并求其准线方程;

(2) 是否存在平行于 OA (O 为坐标原点) 的直线 l, 使得直线 l 与抛物线 C 有公共点, 且直线 OA 与 l 的距离等于 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

20. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, H 分别是棱 A_1B_1, D_1C_1 上的点 (点 E 与 B_1 不重合), 且 $EH\parallel A_1D_1$. 过 EH 的平面与棱 BB_1, CC_1 相交, 交点分别为 F, G.

(1) 证明: $AD\parallel$ 平面 $EFGH$;

(2) 设 $AB=2AA_1=2a$. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内随机选取一点. 记该点取自几何体 $A_1ABFE-D_1DCGH$ 内的概率为 p, 当点 E, F 分别在棱 A_1B_1, B_1B 上运动且满足 $EF=a$ 时, 求 p 的最小值.



21. 某港口 O 要将一件重要物品用小艇送到一艘正在航行的轮船上. 在小艇出发时, 轮船位于港口 O 北偏西 30° 且与该港口相距 20 海里的 A 处, 并以 30 海里/小时的航行速度沿正东方向匀速行驶. 假设该小艇沿直线方向以 v 海里/小时的航行速度匀速行驶, 经过 t 小时与轮船相遇.

(1) 若希望相遇时小艇的航行距离最小, 则小艇航行速度的大小应为多少?

(2) 为保证小艇在 30 分钟内 (含 30 分钟) 能与轮船相遇, 试确定小艇航行速度的最小值;

(3) 是否存在 v, 使得小艇以 v 海里/小时的航行速度行驶, 总能有两种不同的航行方向与轮船相遇? 若存在, 试确定 v 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+ax+b$ 的图象在点 $P(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=3x-2$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 设 $g(x)=f(x)+\dfrac{m}{x-1}$ 是 $[2,+\infty)$ 上的增函数.

① 求实数 m 的最大值;

② 当 m 取最大值时, 是否存在点 Q, 使得过点 Q 的直线若能与曲线 $y=g(x)$ 围成两个封闭图形, 则这两个封闭图形的面积总相等? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.

2010 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x\,|\,-2<x<1\}$, $B=\{x\,|\,0<x<2\}$, 则集合 $A\cap B=$（　）

(A) $\{x\,|\,-1<x<1\}$　(B) $\{x\,|\,-2<x<1\}$

(C) $\{x\,|\,-2<x<2\}$　(D) $\{x\,|\,0<x<1\}$

2. 若复数 $z_1=1+\mathrm{i}$, $z_2=3-\mathrm{i}$, 则 $z_1\cdot z_2=$（　）

(A) $4+2\mathrm{i}$　(B) $2+\mathrm{i}$　(C) $2+2\mathrm{i}$　(D) $3+\mathrm{i}$

3. 若函数 $f(x)=3^x+3^{-x}$ 与 $g(x)=3^x-3^{-x}$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 则（　）

(A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数　(B) $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数

(C) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数　(D) $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 是它的前 n 项和, 若 $a_2\cdot a_3=2a_1$, 且 a_4 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\dfrac{5}{4}$, 则 $S_5=$（　）

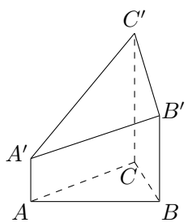
(A) 35　(B) 33　(C) 31　(D) 29

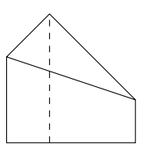
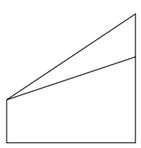
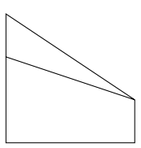
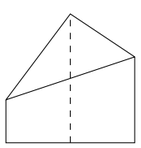
5. “$m<\dfrac{1}{4}$”是“一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数解”的（　）

(A) 充分非必要条件　(B) 充分必要条件

(C) 必要非充分条件　(D) 非充分非必要条件

6. 如图, $\triangle ABC$ 为正三角形, $AA'\ /\!/\ BB'\ /\!/\ CC'$, $CC'\perp$ 平面 ABC, 且 $3AA'=\dfrac{3}{2}BB'=CC'=AB$, 则多面体 $ABC-A'B'C'$ 的正视图 (也称主视图) 是（　）



(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

7. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(3,1)$, 且 $P(2\leqslant X\leqslant 4)=0.6826$, 则 $P(X>4)=$（　）

(A) 0.1588　(B) 0.1587　(C) 0.1586　(D) 0.1585

8. 为了迎接 2010 年广州亚运会, 某大楼安装 5 个彩灯, 它们闪亮的顺序不固定, 每个彩灯闪亮只能是红、橙、黄、绿、蓝中的一种颜色, 且这 5 个彩灯所闪亮的颜色各不相同. 记这 5 个彩灯有序地闪亮一次为一个闪烁, 在每个闪烁中, 每秒钟有且仅有一个彩灯闪亮, 而相邻两个闪烁的时间间隔均为 5 秒. 如果要实现所有不同的闪烁, 那么需要的时间至少是（　）

(A) 1205 秒　(B) 1200 秒　(C) 1195 秒　(D) 1190 秒

二、填空题

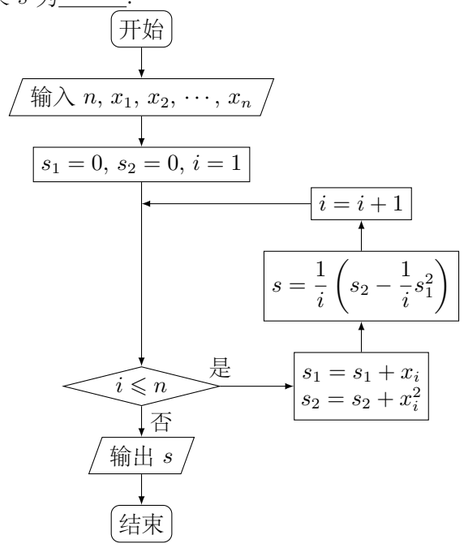
9. 函数 $f(x)=\lg(x-2)$ 的定义域是_____.

10. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,x)$, $\boldsymbol{b}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{c}=(1,1,1)$, 满足条件 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(2\boldsymbol{b})=-2$, 则 $x=$_____.

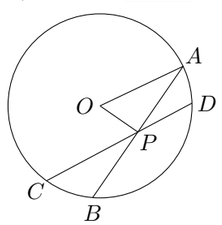
11. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边. 若 $a=1$, $b=\sqrt{3}$, $A+C=2B$, 则 $\sin C=$_____.

12. 若圆心在 x 轴上、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆 O 位于 y 轴左侧, 且与直线 $x+y=0$ 相切, 则圆 O 的方程是_____.

13. 某城市缺水问题比较突出, 为了制定节水管理办法, 对全市居民某年的月均用水量进行了抽样调查, 其中 n 位居民的月均用水量分别为 $x_1,\cdots,x_n$ (单位: 吨). 根据如图所示的程序框图, 若 $n=2$, 且 x_1, x_2 分别为 1, 2, 则输出的结果 s 为_____.



14. 如图, AB, CD 是半径为 a 的圆 O 的两条弦, 它们相交于 AB 的中点 P, $PD=\dfrac{2a}{3}$, $\angle OAP=30^\circ$, 则 $CP=$_____.



15. 在极坐标系 (ρ,θ) $(0\leqslant\theta<2\pi)$ 中, 曲线 $\rho=2\sin\theta$ 与 $\rho\cos\theta=-1$ 的交点的极坐标为_____.

三、解答题

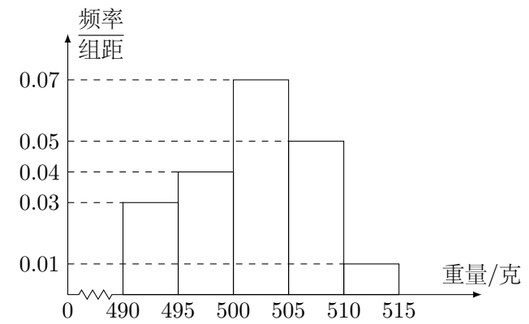
16. 已知函数 $f(x)=A\sin(3x+\varphi)$ $(A>0,\ x\in(-\infty,+\infty),\ 0<\varphi<\pi)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 时取得最大值 4.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的解析式;

(3) 若 $f\left(\dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{12}{5}$, 求 $\sin\alpha$.

17. 某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况, 随机抽取该流水线上的 40 件产品作为样本称出它们的重量 (单位: 克), 重量的分组区间为 $(490,495]$, $(495,500]$, $\cdots$, $(510,515]$, 由此得到样本的频率分布直方图, 如图所示.



(1) 根据频率分布直方图, 求重量超过 505 克的产品数量;

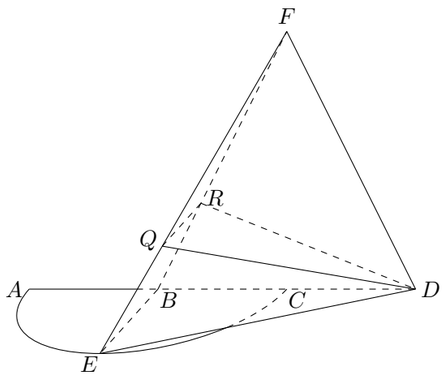
(2) 在上述抽取的 40 件产品中任取 2 件, 设 Y 为重量超过 505 克的产品数量, 求 Y 的分布列;

(3) 从流水线上任取 5 件产品, 求恰有 2 件产品合格的重量超过 505 克的概率.

18. 如图, $\widehat{AEC}$ 是半径为 a 的半圆, AC 为直径, 点 E 为 $\widehat{AC}$ 的中点, 点 B 和点 C 为线段 AD 的三等分点, 平面 AEC 外一点 F 满足 $FB=FD=\sqrt{5}a$, $EF=\sqrt{6}a$.

(1) 证明: $EB\perp FD$;

(2) 已知点 Q, R 分别为线段 FE, FB 上的点, 使得 $FQ=\dfrac{2}{3}FE$, $FR=\dfrac{2}{3}FB$, 求平面 BED 与平面 RQD 所成二面角的正弦值.



19. 某营养师要为某个儿童预定午餐和晚餐. 已知一个单位的午餐含 12 个单位的碳水化合物, 6 个单位的蛋白质和 6 个单位的维生素 C; 一个单位的晚餐含 8 个单位的碳水化合物, 6 个单位的蛋白质和 10 个单位的维生素 C. 另外, 该儿童这两餐需要的营养中至少含 64 个单位的碳水化合物, 42 个单位的蛋白质和 54 个单位的维生素 C. 如果一个单位的午餐、晚餐的费用分别是 2.5 元和 4 元, 那么要满足上述的营养要求, 并且花费最少, 应当为该儿童分别预订多少个单位的午餐和晚餐?

20. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2, 点 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_1,-y_1)$ 是双曲线上不同的两个动点.

(1) 求直线 A_1P 与 A_2Q 交点的轨迹 E 的方程;

(2) 若过点 $H(0,h)$ $(h>1)$ 的两条直线 l_1 和 l_2 与轨迹 E 都只有一个交点, 且 $l_1\perp l_2$, 求 h 的值.

21. 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是平面直角坐标系 xOy 上的两点, 现定义由点 A 到点 B 的一种折线距离 $\rho(A,B)$ 为 $\rho(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$. 对于平面 xOy 上给定的不同的两点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

(1) 若点 $C(x,y)$ 是平面 xOy 上的点, 试证明 $\rho(A,C)+\rho(C,B)\geqslant\rho(A,B)$;

(2) 在平面 xOy 上是否存在点 $C(x,y)$, 同时满足① $\rho(A,C)+\rho(C,B)=\rho(A,B)$; ② $\rho(A,C)=\rho(C,B)$. 若存在, 请求出所有符合条件的点; 若不存在, 请予以证明.

2010 年普通高等学校招生考试（广东卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{1,2,4\}$, 则集合 $A\cup B=$ （　）

(A) $\{0,1,2,3,4\}$　(B) $\{1,2,3,4\}$　(C) $\{1,2\}$　(D) $\{0\}$

2. 函数 $f(x)=\lg(x-1)$ 的定义域是 （　）

(A) $(2,+\infty)$　(B) $(1,+\infty)$　(C) $[1,+\infty)$　(D) $[2,+\infty)$

3. 若函数 $f(x)=3^x+3^{-x}$ 与 $g(x)=3^x-3^{-x}$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 则 （　）

(A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数　(B) $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数

(C) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数　(D) $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 是它的前 n 项和, 若 $a_2\cdot a_3=2a_1$, 且 a_4 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\dfrac{5}{4}$, 则 $S_5=$ （　）

(A) 35　(B) 33　(C) 31　(D) 29

5. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,5)$, $\boldsymbol{c}=(3,x)$ 满足条件 $(8\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=30$, 则 $x=$ （　）

(A) 6　(B) 5　(C) 4　(D) 3

6. 若圆心在 x 轴上、半径为 $\sqrt{5}$ 的圆 O 位于 y 轴左侧, 且与直线 $x+2y=0$ 相切, 则圆 O 的方程是 （　）

(A) $\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2=5$　(B) $\left(x+\sqrt{5}\right)^2+y^2=5$

(C) $(x-5)^2+y^2=5$　(D) $(x+5)^2+y^2=5$

7. 若一个椭圆长轴的长度、短轴的长度和焦距成等差数列, 则该椭圆的离心率是 （　）

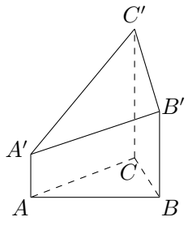
(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{1}{5}$

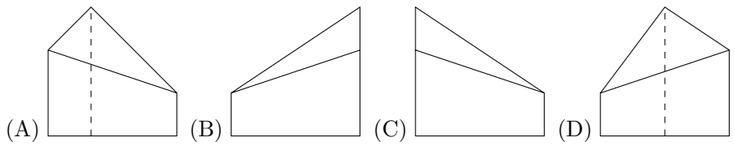
8. “$x>0$”是“$\sqrt[3]{x^2}>0$”的 （　）

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 非充分非必要条件　(D) 充要条件

9. 如图, $\triangle ABC$ 为正三角形, $AA'\ /\!/\ BB'\ /\!/\ CC'$, $CC'\perp$ 平面 ABC, 且 $3AA'=\dfrac{3}{2}BB'=CC'=AB$, 则多面体 $ABC-A'B'C'$ 的正视图 (也称主视图) 是 （　）





10. 在集合 $\{a,b,c,d\}$ 上定义两种运算 $\oplus$ 和 $\otimes$ 如下:

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	b	b
c	c	b	c	b
d	d	b	b	d

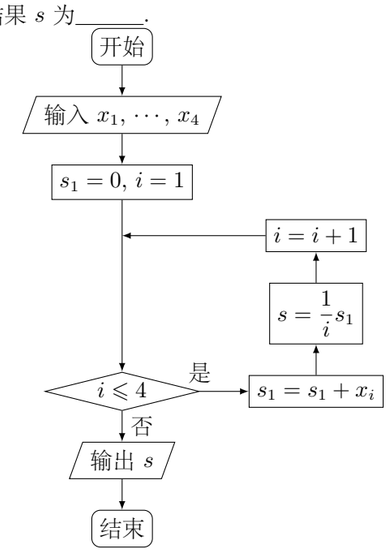
$\otimes$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	c	a
d	a	d	a	d

那么 $d\otimes(a\oplus c)=$ （　）

(A) a　(B) b　(C) c　(D) d

二、填空题

11. 某城市缺水问题比较突出, 为了制定节水管理办法, 对全市居民某年的月均用水量进行了抽样调查, 其中 4 位居民的月均用水量分别为 $x_1,\cdots,x_4$ (单位: 吨). 根据如图所示的程序框图, 若 x_1, x_2, x_3, x_4 分别为 1, 1.5, 1.5, 2, 则输出的结果 s 为_____.



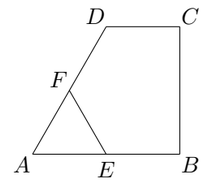
12. 某市居民 2005 – 2009 年家庭年平均收入 x (单位: 万元) 与年平均支出 Y (单位: 万元) 的统计资料如下表所示:

年份	2005	2006	2007	2008	2009
收入 x	11.5	12.1	13	13.3	15
支出 Y	6.8	8.8	9.8	10	12

根据统计资料, 居民家庭年平均收入的中位数是_____, 家庭年平均收入与年平均支出有_____(填“正”或“负”) 线性相关关系.

13. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边. 若 $a=1$, $b=\sqrt{3}$, $A+C=2B$, 则 $\sin A=$_____.

14. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $DC\ /\!/\ AB$, $CB\perp AB$, $AB=AD=a$, $CD=\dfrac{a}{2}$, 点 E, F 分别为线段 AB, AD 的中点, 则 $EF=$_____.



15. 在极坐标系 (ρ,θ) $(0\leqslant\theta<2\pi)$ 中, 曲线 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=1$ 与 $\rho(\sin\theta-\cos\theta)=1$ 的交点的极坐标为_____.

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\omega>0$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 且以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为最小正周期.

(1) 求 $f(0)$;

(2) 求 $f(x)$ 的解析式;

(3) 已知 $f\left(\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{9}{5}$, 求 $\sin\alpha$ 的值.

17. 某电视台在一次对收看文艺节目和新闻节目观众的抽样调查中, 随机抽取了 100 名电视观众, 相关的数据如下表所示:

	文艺节目	新闻节目	总计
20 到 40 岁	40	18	58
大于 40 岁	15	27	42
总计	55	45	100

(1) 由表中数据直观分析, 收看新闻节目的观众是否与年龄有关?

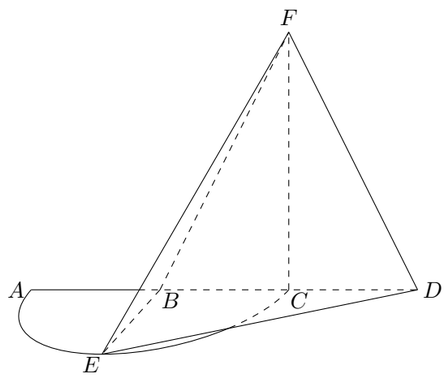
(2) 用分层抽样方法在收看新闻节目的观众中随机抽取 5 名, 大于 40 岁的观众应该抽取几名?

(3) 在上述抽取的 5 名观众中任取 2 名, 求恰有 1 名观众的年龄为 20 至 40 岁的概率.

18. 如图, $\overset{\frown}{AEC}$ 是半径为 a 的半圆, AC 为直径, 点 E 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点, 点 B 和点 C 为线段 AD 的三等分点, 平面 AEC 外一点 F 满足 $FC \perp$ 平面 BED, $FB = \sqrt{5}a$. .

(1) 证明: $EB \perp FD$;

(2) 求点 B 到平面 FED 的距离.



19. 某营养师要为某个儿童预定午餐和晚餐. 已知一个单位的午餐含 12 个单位的碳水化合物, 6 个单位的蛋白质和 6 个单位的维生素 C; 一个单位的晚餐含 8 个单位的碳水化合物, 6 个单位的蛋白质和 10 个单位的维生素 C. 另外, 该儿童这两餐需要的营养中至少含 64 个单位的碳水化合物, 42 个单位的蛋白质和 54 个单位的维生素 C. 如果一个单位的午餐、晚餐的费用分别是 2.5 元和 4 元, 那么要满足上述的营养要求, 并且花费最少, 应当为该儿童分别预订多少个单位的午餐和晚餐?

20. 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x 均有 $f(x) = kf(x+2)$, 其中常数 k 为负数, 且 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上有表达式 $f(x) = x(x-2)$.

(1) 求 $f(-1)$, $f(2.5)$ 的值;

(2) 写出 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的表达式, 并讨论函数 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的单调性;

(3) 求出 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最小值与最大值, 并求出相应的自变量的取值.

21. 已知曲线 C_n: $y = nx^2$, 点 $P_n(x_n, y_n)$ $(x_n > 0,\ y_n > 0)$ 是曲线 C_n 上的点 $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$.

(1) 试写出曲线 C_n 在点 P_n 处的切线 l_n 的方程, 并求出 l_n 与 y 轴的交点 Q_n 的坐标;

(2) 若原点 $O(0,0)$ 到 l_n 的距离与线段 P_nQ_n 的长度之比取得最大值, 试求点 P_n 的坐标 (x_n, y_n);

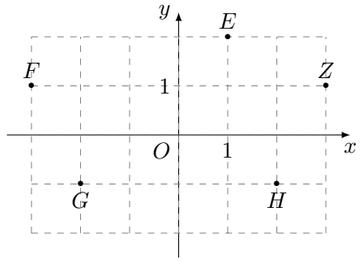
(3) 设 m 与 k 为两个给定的不同的正整数, x_n 与 y_n 是满足 (2) 中条件的点 P_n 的坐标, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{s}\left|\sqrt{\dfrac{(m+1)x_n}{2}} - \sqrt{(k+1)y_n}\right| < \left|\sqrt{ms} - \sqrt{ks}\right|$ $(s = 1,\ 2,\ \cdots)$.

2010 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 若 i 为虚数单位, 图中复平面内点 Z 表示复数 z, 则表示复数 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}$ 的点是 （　）



(A) E　　(B) F　　(C) G　　(D) H

2. 设集合 $A=\left\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1\right\}$, $B=\{(x,y)\mid y=3^x\}$, 则 $A\cap B$ 的子集的个数是 （　）

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=15$, $b=10$, $A=60^\circ$, 则 $\cos B=$ （　）

(A) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　(C) $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4. 投掷一枚均匀硬币和一枚均匀骰子各一次, 记“硬币正面向上”为事件 A, “骰子向上的点数是 3”为事件 B, 则事件 A, B 中至少有一件发生的概率是 （　）

(A) $\dfrac{5}{12}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{7}{12}$　　(D) $\dfrac{3}{4}$

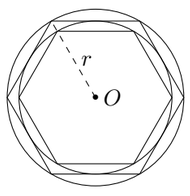
5. 已知 $\triangle ABC$ 和点 M 满足 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$. 若存在实数 m 使得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$ 成立, 则 $m=$ （　）

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

6. 将参加夏令营的 600 名学生编号为: 001, 002, $\cdots$, 600. 采用系统抽样方法抽取一个容量为 50 的样本, 且随机抽得的号码为 003. 这 600 名学生分住在三个营区, 从 001 到 300 在第 I 营区, 从 301 到 495 住在第 II 营区, 从 496 到 600 住在第 III 营区. 三个营区被抽中的人数依次为 （　）

(A) 26, 16, 8　　(B) 25, 17, 8　　(C) 25, 16, 9　　(D) 24, 17, 9

7. 如图, 在半径为 r 的圆内作内接正六边形, 再作正六边形的内切圆, 又在此内切圆内作内接正六边形, 如此无限继续下去, 设 S_n 为前 n 个圆的面积之和, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ （　）



(A) $2\pi r^2$　　(B) $\dfrac{8}{3}\pi r^2$　　(C) $4\pi r^2$　　(D) $6\pi r^2$

8. 现安排甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学参加上海世博会志愿者服务活动, 每人从事翻译、导游、礼仪、司机四项工作之一, 每项工作至少有一人参加. 甲、乙不会开车但能从事其他三项工作, 丙、丁、戊都能胜任四项工作, 则不同安排方案的种数是 （　）

(A) 152　　(B) 126　　(C) 90　　(D) 54

9. 若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 有公共点, 则 b 的取值范围是 （　）

(A) $\left[-1,1+2\sqrt{2}\right]$　　(B) $\left[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}\right]$

(C) $\left[1-2\sqrt{2},3\right]$　　(D) $\left[1-\sqrt{2},3\right]$

10. 记实数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 中的最大数为 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 最小数为 $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 已知 $\triangle ABC$ 的三边边长为 a, b, c $(a\leqslant b\leqslant c)$, 定义它的倾斜度为 $t=\max\left\{\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}\right\}\cdot\min\left\{\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}\right\}$, 则“$t=1$”是“$\triangle ABC$ 为等边三角形”的 （　）

(A) 必要而不充分的条件　　(B) 充分而不必要的条件

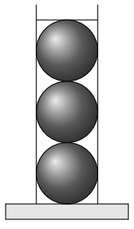
(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要的条件

二、填空题

11. 在 $\left(x+\sqrt[4]{3}y\right)^{20}$ 的展开式中, 系数为有理数的项共有_____项.

12. 已知 $z=2x-y$, 式中变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant x\\ x+y\geqslant 1\\ x\leqslant 2\end{cases}$, 则 z 的最大值为_____.

13. 圆柱形容器内部盛有高度为 8 cm 的水, 若放入三个相同的球 (球的半径与圆柱的底面半径相同) 后, 水恰好淹没最上面的球 (如图所示), 则球的半径是_____cm.

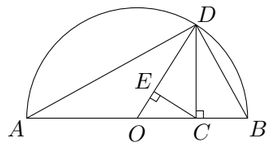


14. 某射手射击所得环数 ξ 的分布列如下:

ξ	7	8	9	10
P	x	0.1	0.3	y

已知 ξ 的期望 $E\xi=8.9$, 则 y 的值为_____.

15. 设 $a>0$, $b>0$, 称 $\dfrac{2ab}{a+b}$ 为 a, b 的调和平均数. 如图, C 为线段 AB 上的点, 且 $AC=a$, $CB=b$, O 为 AB 中点, 以 AB 为直径做半圆. 过点 C 作 AB 的垂线交半圆于 D. 连接 OD, AD, BD. 过点 C 作 OD 的垂线, 垂足为 E. 则图中线段 OD 的长度是 a, b 的算术平均数, 线段_____的长度是 a, b 的几何平均数, 线段_____的长度是 a, b 的调和平均数.

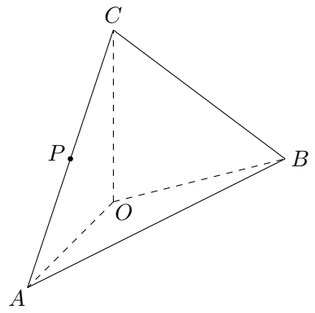


三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{4}$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的最大值, 并求使 $h(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

17. 为了在夏季降温和冬季供暖时减少能源损耗, 房屋的屋顶和外墙需要建造隔热层. 某幢建筑物要建造可使用 20 年的隔热层, 每厘米厚的隔热层建造成本为 6 万元. 该建筑物每年的能源消耗费用 C (单位: 万元) 与隔热层厚度 x (单位: cm) 满足关系: $C(x)=\dfrac{k}{3x+5}$ $(0\leqslant x\leqslant 10)$, 若不建隔热层, 每年能源消耗费用为 8 万元. 设 $f(x)$ 为隔热层建造费用与 20 年的能源消耗费用之和.
(1) 求 k 的值及 $f(x)$ 的表达式.
(2) 隔热层修建多厚时, 总费用 $f(x)$ 达到最小, 并求最小值.

18. 如图, 在四面体 $ABOC$ 中, $OC \perp OA$, $OC \perp OB$, $\angle AOB = 120°$, 且 $OA = OB = OC = 1$.
(1) 设 P 为 AC 的中点, 证明: 在 AB 上存在一点 Q, 使 $PQ \perp OA$, 并计算 $\dfrac{AB}{AQ}$ 的值;
(2) 求二面角 $O - AC - B$ 的平面角的余弦值.



19. 已知一条曲线 C 在 y 轴的右边, C 上每一点到点 $F(1,0)$ 的距离减去它到 y 轴距离的差都是 1.
(1) 求曲线 C 的方程;
(2) 是否存在正数 m, 对于过点 $M(m,0)$ 且与曲线 C 有两个交点 A、B 的任一直线, 都有 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} < 0$? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3(1+a_{n+1})}{1-a_n} = \dfrac{2(1+a_n)}{1-a_{n+1}}$, $a_n a_{n+1} < 0$ $(n \geqslant 1)$; 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ $(n \geqslant 1)$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 中的任意三项不可能成等差数列.

21. 已知函数 $f(x) = ax + \dfrac{b}{x} + c$ $(a > 0)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.
(1) 用 a 表示出 b, c;
(2) 若 $f(x) \geqslant \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.
(3) 证明: $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} > \ln(n+1) + \dfrac{n}{2(n+1)}$ $(n \geqslant 1)$.

2010 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{1,2,4,8\}$, $N=\{x\mid x$ 是 2 的倍数$\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{2,4\}$ (B) $\{1,2,4\}$ (C) $\{2,4,8\}$ (D) $\{1,2,4,8\}$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $x\in\mathbf{R}$ 的最小正周期为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_3 x, & x>0\\ 2^x, & x\leqslant 0\end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\dfrac{1}{9}\right)\right)=$ （ ）

(A) 4 (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) -4 (D) $-\dfrac{1}{4}$

4. 用 a、b、c 表示三条不同的直线, γ 表示平面, 给出下列命题:
① 若 $a\parallel b$, $b\parallel c$, 则 $a\parallel c$;
② 若 $a\perp b$, $b\perp c$, 则 $a\perp c$;
③ 若 $a\parallel\gamma$, $b\parallel\gamma$, 则 $a\parallel b$;
④ 若 $a\perp\gamma$, $b\perp\gamma$, 则 $a\parallel b$.
正确的有 （ ）

(A) ①② (B) ②③ (C) ①④ (D) ③④

5. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}}$ 的定义域为 （ ）

(A) $\left(\dfrac{3}{4},1\right)$ (B) $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$

(C) $(1,+\infty)$ (D) $\left(\dfrac{3}{4},1\right)\cup(1,+\infty)$

6. 现有 6 名同学去听同时进行的 5 个课外知识讲座, 每名同学可自由选择其中的一个讲座, 不同选法的种数是 （ ）

(A) 5^6 (B) 6^5

(C) $\dfrac{5\times6\times5\times4\times3\times2}{2}$ (D) $6\times5\times4\times3\times2$

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, 各项都是正数, 且 a_1, $\dfrac{1}{2}a_3$, $2a_2$ 成等差数列, 则 $\dfrac{a_9+a_{10}}{a_7+a_8}=$ （ ）

(A) $1+\sqrt{2}$ (B) $1-\sqrt{2}$ (C) $3+2\sqrt{2}$ (D) $3-2\sqrt{2}$

8. 已知 $\triangle ABC$ 和点 M 满足 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$. 若存在实数 m 使得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$ 成立, 则 $m=$ （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

9. 若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 有公共点, 则 b 的取值范围是 （ ）

(A) $\left[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}\right]$ (B) $\left[1-\sqrt{2},3\right]$

(C) $\left[-1,1+2\sqrt{2}\right]$ (D) $\left[1-2\sqrt{2},3\right]$

10. 记实数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 中的最大数为 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 最小数为 $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 已知 $\triangle ABC$ 的三边边长为 a, b, c $(a\leqslant b\leqslant c)$, 定义它的倾斜度为 $t=\max\left\{\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}\right\}\cdot\min\left\{\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}\right\}$, 则“$t=1$”是“$\triangle ABC$ 为等边三角形”的 （ ）

(A) 必要而不充分的条件 (B) 充分而不必要的条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要的条件

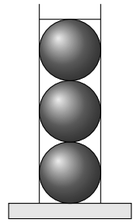
二、填空题

11. 在 $(1-x^2)^{10}$ 的展开中, x^4 的系数为_____.

12. 已知 $z=2x-y$, 式中变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant x\\ x+y\geqslant 1\\ x\leqslant 2\end{cases}$, 则 z 的最大值为_____.

13. 一个病人服用某种新药后被治愈的概率为 0.9. 则服用这种新药的 4 个病人中至少 3 人被治愈的概率为_____. (用数字作答)

14. 圆柱形容器内部盛有高度为 8 cm 的水, 若放入三个相同的球 (球的半径与圆柱的底面半径相同) 后, 水恰好淹没最上面的球 (如图所示), 则球的半径是_____cm.

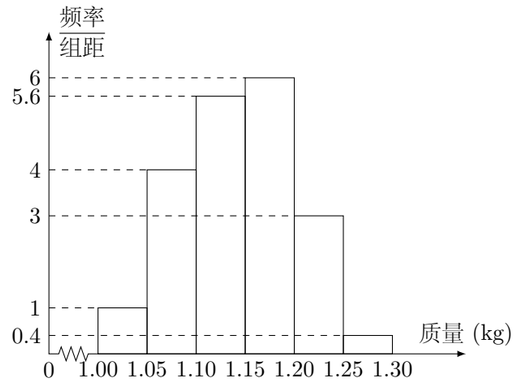


15. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的两焦点为 F_1, F_2, 点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $0<\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2<1$, 则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围为, 直线 $\dfrac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 与椭圆 C 的公共点个数为_____.

三、解答题

16. 已经函数 $f(x)=\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{2}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{4}$.
(1) 函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)$ 的图象经过怎样变化得出?
(2) 求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的最小值, 并求使用 $h(x)$ 取得最小值的 x 的集合.

17. 为了了解一个小水库中养殖的鱼的有关情况, 从这个水库中多个不同位置捕捞出 100 条鱼, 称得每条鱼的质量 (单位: 千克), 并将所得数据分组, 画出频率分布直方图 (如图所示).

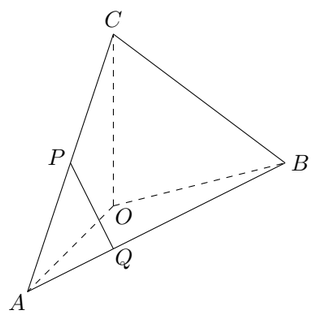


(1) 在下面表格中填写相应的频率;

分组	频率
$[1.00,1.05)$	
$[1.05,1.10)$	
$[1.10,1.15)$	
$[1.15,1.20)$	
$[1.20,1.25)$	
$[1.25,1.30)$	

(2) 估计数据落在 $[1.15,1.30)$ 中的概率为多少;
(3) 将上面捕捞的 100 条鱼分别作一记号后再放回水库, 几天后再从水库的多处不同位置捕捞出 120 条鱼, 其中带有记号的鱼有 6 条, 请根据这一情况来估计该水库中鱼的总条数.

18. 如图, 在四面体 $ABOC$ 中, $OC \perp OA$, $OC \perp OB$, $\angle AOB = 120°$, 且 $OA = OB = OC = 1$.
(1) 设 P 为 AC 的中点, Q 在 AB 上且 $AB = 3AQ$, 证明: $PQ \perp OA$;
(2) 求二面角 $O - AC - B$ 的平面角的余弦值.



19. 已知某地今年年初拥有居民住房的总面积为 a (单位: m^2), 其中有部分旧住房需要拆除. 当地有关部门决定每年以当年年初住房面积的 10% 建设新住房, 同时也拆除面积为 b (单位: m^2) 的旧住房.
(1) 分别写出第一年末和第二年末的实际住房面积的表达式:
(2) 如果第五年末该地的住房面积正好比今年年初的住房面积增加了 30%, 则每年拆除的旧住房面积 b 是多少? (计算时取 $1.1^5 = 1.6$)

20. 已知一条曲线 C 在 y 轴的右边, C 上每一点到点 $F(1,0)$ 的距离减去它到 y 轴距离的差都是 1.
(1) 求曲线 C 的方程;
(2) 是否存在正数 m, 对于过点 $M(m,0)$ 且与曲线 C 有两个交点 A、B 的任一直线, 都有 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} < 0$? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

21. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + bx + c$, 其中 $a > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 1$.
(1) 确定 b, c 的值;
(2) 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 及 $(x_2, f(x_2))$ 处的切线都过点 $(0,2)$. 证明: 当 $x_1 \neq x_2$ 时, $f'(x_1) \neq f'(x_2)$;
(3) 若过点 $(0,2)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条不同切线, 求 a 的取值范围.

2010 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{1,2,3\}$, $N=\{2,3,4\}$, 则 （　）

(A) $M\subseteq N$　　(B) $N\subseteq M$

(C) $M\cap N=\{2,3\}$　　(D) $M\cup N=\{1,4\}$

2. 下列命题中是假命题的是 （　）

(A) $\forall x\in\mathbf{R}$, $2^{x-1}>0$　　(B) $\forall x\in\mathbf{N}^*$, $(x-1)^2>0$

(C) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\lg x<1$　　(D) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\tan x=2$

3. 极坐标方程 $\rho=\cos\theta$ 和参数方程 $\begin{cases}x=-1-t\\ y=2+3t\end{cases}$ (t 为参数) 所表示的图形分别是 （　）

(A) 圆、直线　　(B) 直线、圆　　(C) 圆、圆　　(D) 直线、直线

4. 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=4$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 等于 （　）

(A) -16　　(B) -8　　(C) 8　　(D) 16

5. $\int_2^4\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 等于 （　）

(A) $-2\ln 2$　　(B) $2\ln 2$　　(C) $-\ln 2$　　(D) $\ln 2$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c, 若 $\angle C=120^\circ$, $c=\sqrt{2}a$, 则 （　）

(A) $a>b$　　(B) $a<b$

(C) $a=b$　　(D) a 与 b 的大小关系不能确定

7. 在某种信息传输过程中, 用 4 个数字的一个排列 (数字允许重复) 表示一个信息, 不同排列表示不同信息, 若所用数字只有 0 和 1, 则与信息 0110 至多有两个对应位置上的数字相同的信息个数为 （　）

(A) 10　　(B) 11　　(C) 12　　(D) 15

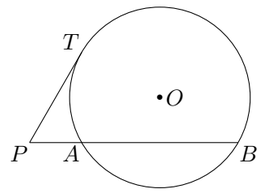
8. 用 $\min\{a,b\}$ 表示 a,b 两数中的最小值. 若函数 $f(x)=\min\{|x|,|x+t|\}$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称, 则 t 的值为 （　）

(A) -2　　(B) 2　　(C) -1　　(D) 1

二、填空题

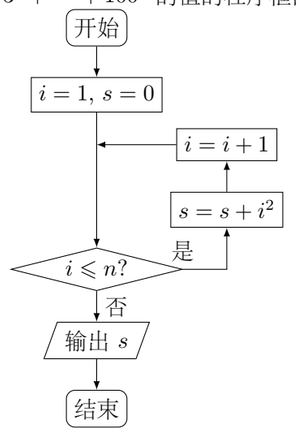
9. 已知一种材料的最佳加入量在 110 g 到 210 g 之间. 若用 0.618 法安排实验, 则第一次试点的加入量可以是_____g.

10. 如图所示, 过 $\odot O$ 外一点 P 作一条直线与 $\odot O$ 交于 A, B 两点. 已知 $PA=2$, 点 P 到 $\odot O$ 的切线长 $PT=4$, 则弦 AB 的长为_____.

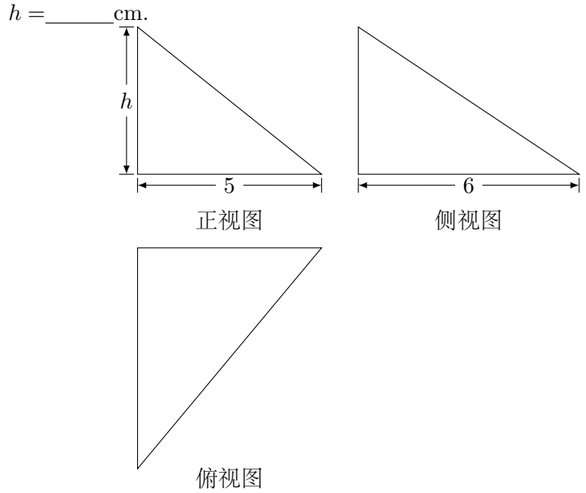


11. 在区间 $[-1,2]$ 上随机取一个数 x, 则 $|x|\leqslant 1$ 的概率为_____.

12. 如图是求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$ 的值的程序框图, 则正整数 $n=$_____.



13. 图中的三个直角三角形是一个体积为 20 cm^3 的几何体的三视图, 则 $h=$_____cm.



14. 过抛物线 $x^2=2py$ ($p>0$) 的焦点作斜率为 1 的直线与该抛物线交于 A, B 两点, A, B 在 x 轴上的正射影分别为 D, C. 若梯形 $ABCD$ 的面积为 $12\sqrt{2}$, 则 $p=$_____.

15. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 只有有限个正整数 m 使得 $a_m<n$ 成立, 记这样的 m 的个数为 $(a_n)^*$, 则得到一个新数列 $\{(a_n)^*\}$. 例如, 若数列 $\{a_n\}$ 是 1, 2, 3, $\cdots$, n, $\cdots$, 则数列 $\{(a_n)^*\}$ 是 0, 1, 2, $\cdots$, $n-1$, $\cdots$. 已知对任意的 $n\in\mathrm{N}^*$, $a_n=n^2$, 则 $(a_5)^*=$_____, $((a_n)^*)^*=$_____.

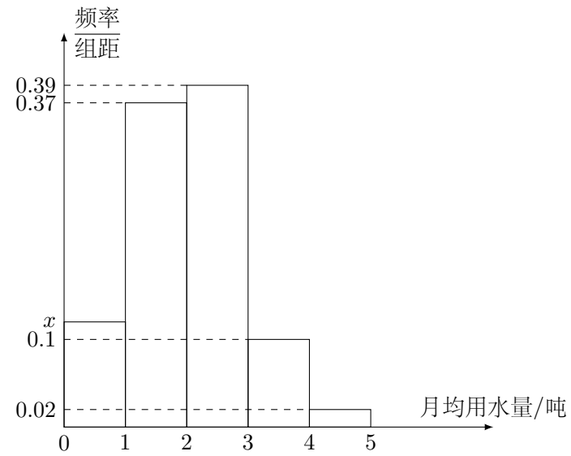
三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的零点的集合.

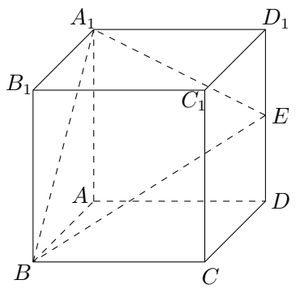
17. 如图, 是某城市通过抽样得到的居民某年的月均用水量 (单位: 吨) 的频率分布直方图.



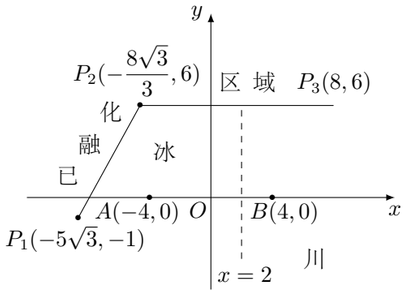
(1) 求直方图中 x 的值;

(2) 若将频率视为概率, 从这个城市随机抽取 3 位居民 (看作有放回的抽样), 求月均用水量在 3 至 4 吨的居民数 X 的分布列和数学期望.

18. 如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 DD_1 的中点.
(1) 求直线 BE 和平面 ABB_1A_1 所成的角的正弦值;
(2) 在棱 C_1D_1 上是否存在一点 F, 使 $B_1F\ /\!/$ 平面 A_1BE? 证明你的结论.



19. 为了考察冰川的融化状况, 一支科考队在某冰川上相距 8 km 的 A, B 两点各建一个考察基地. 视冰川面为平面形, 以过 A, B 两点的直线为 x 轴, 线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系 (如图). 在直线 $x=2$ 的右侧, 考察范围为到点 B 的距离不超过 $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ km 的区域; 在直线 $x=2$ 的左侧, 考察范围为到 A, B 两点的距离之和不超过 $4\sqrt{5}$ km 的区域.
(1) 求考察区域边界曲线的方程;
(2) 如图所示, 设线段 P_1P_2, P_2P_3 是冰川的部分边界线 (不考虑其他边界), 当冰川融化时, 边界线沿与其垂直的方向朝考察区域平行移动, 第一年移动 0.2 km, 以后每年移动的距离为前一年的 2 倍. 求冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间.



20. 已知函数 $f(x)=x^2+bx+c$ $(b,\ c\in\mathbf{R})$, 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 恒有 $f'(x)\leqslant f(x)$.
(1) 证明: 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant (x+c)^2$;
(2) 若对满足题设条件的任意 b, c, 不等式 $f(c)-f(b)\leqslant M(c^2-b^2)$ 恒成立, 求 M 的最小值.

21. 数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 中, $a_1=a$, a_{n+1} 是函数 $f_n(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(3a_n+n^2)x^2+3n^2a_nx$ 的极小值点.
(1) 当 $a=0$ 时, 求通项 a_n;
(2) 是否存在 a, 使数列 $\{a_n\}$ 是等比数列? 若存在, 求 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

2010 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$ 等于 （ ）

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

2. 下列命题中的假命题是 （ ）

(A) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\lg x=0$　(B) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\tan x=1$

(C) $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^3>0$　(D) $\forall x\in\mathbf{R}$, $2^x>0$

3. 某商品销售量 y (件) 与销售价格 x (元/件) 负相关, 则其回归方程可能是 （ ）

(A) $\hat{y}=-10x+200$　(B) $\hat{y}=10x+200$

(C) $\hat{y}=-10x-200$　(D) $\hat{y}=10x-200$

4. 极坐标 $\rho=\cos\theta$ 和参数方程 $\begin{cases}x=-1-t\\ y=2+t\end{cases}$ (t 为参数) 所表示的图形分别是 （ ）

(A) 直线、直线　(B) 直线、圆　(C) 圆、圆　(D) 圆、直线

5. 设抛物线 $y^2=8x$ 上一点 P 到 y 轴的距离是 4, 则点 P 到该抛物线焦点的距离是 （ ）

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 12

6. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为( )

(A) 30°　(B) 60°　(C) 120°　(D) 150°

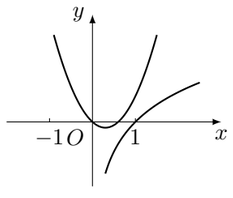
7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c, 若 $\angle C=120°$, $c=\sqrt{2}a$, 则 （ ）

(A) $a>b$　(B) $a<b$

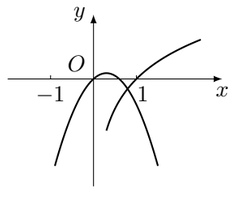
(C) $a=b$　(D) a 与 b 的大小关系不能确定

8. 函数 $y=ax^2+bx$ 与 $y=\log_{|\frac{b}{a}|}x$ ($ab\neq0$, $|a|\neq|b|$) 在同一直角坐标系中的图像可能是 （ ）

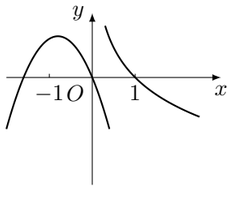
(A)



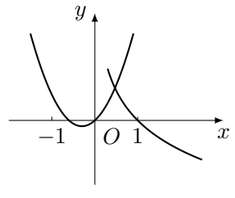
(B)



(C)



(D)



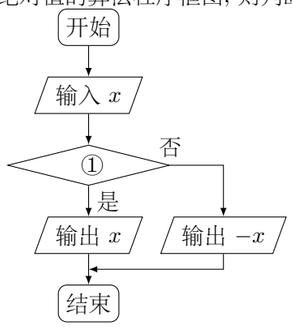
二、填空题

9. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,m,4\}$, $A\cap B=\{2,3\}$, 则 $m=$_____.

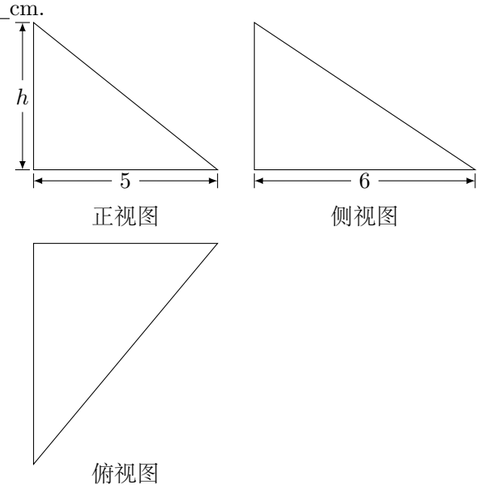
10. 已知一种材料的最佳加入量在 100 g 到 200 g 之间. 若用 0.618 法安排实验, 则第一次试点的加入量可以是_____g.

11. 在区间 $[-1,2]$ 上随机取一个数 x, 则 $x\in[0,1]$ 的概率为_____.

12. 下图是求实数 x 的绝对值的算法程序框图, 则判断框①中可填_____.



13. 图中的三个直角三角形是一个体积为 20 cm^3 的几何体的三视图, 则 $h=$_____cm.



14. 若不同两点 P, Q 的坐标分别为 (a,b), $(3-b,3-a)$, 则线段 PQ 的垂直平分线 l 的斜率为, 圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 关于直线 l 对称的圆的方程为_____.

15. 若规定 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$ 的子集 $\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}\}$ 为 E 的第 k 个子集, 其中 $k=2^{i_1-1}+2^{i_2-1}+2^{i_3-1}+\cdots+2^{i_n-1}$, 则

(1) $\{a_1,a_3\}$ 是 E 的第_____个子集;

(2) E 的第 211 个子集是_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\sin 2x-2\sin^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最大值及 $f(x)$ 取最大值时 x 的集合.

17. 为了对某课题进行研究, 用分层抽样方法从三所高校 A, B, C 的相关人员中, 抽取若干人组成研究小组、有关数据见下表 (单位: 人):

高校	相关人数	抽取人数
A	18	x
B	36	2
C	54	y

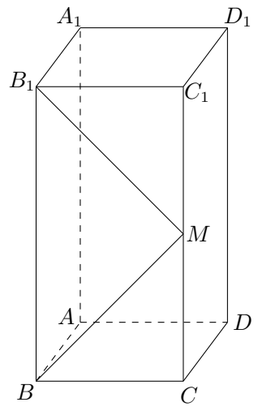
(1) 求 x, y;

(2) 若从高校 B, C 抽取的人中选 2 人作专题发言, 求这二人都来自高校 C 的概率.

18. 如图所示, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=1$, $AA_1=2$, M 是棱 CC_1 的中点.

(1) 求异面直线 A_1M 和 C_1D_1 所成的角的正切值;

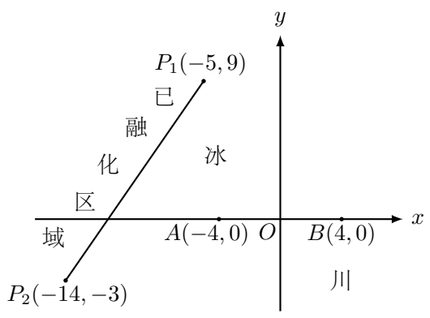
(2) 证明: 平面 $ABM\perp$ 平面 A_1B_1M.



19. 为了考察冰川的融化状况, 一支科考队在某冰川上相距 8 km 的 A, B 两点各建一个考察基地. 视冰川面为平面形, 以过 A, B 两点的直线为 x 轴, 线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系 (下图). 考察范围到 A, B 两点的距离之和不超过 10km 的区域.

(1) 求考察区域边界曲线的方程;

(2) 如图所示, 设线段 P_1P_2 是冰川的部分边界线 (不考虑其他边界), 当冰川融化时, 边界线沿与其垂直的方向朝考察区域平行移动, 第一年移动 0.2 km, 以后每年移动的距离为前一年的 2 倍. 问: 经过多长时间, 点 A 恰好在冰川边界线上?



20. 给出下面的数表序列:

表 1	表 2		表 3			$\cdots$
1	1	3	1	3	5	
	4			4	8	
				12		

其中表 n ($n=1,2,3\cdots$) 有 n 行, 第 1 行的 n 个数是 $1,3,5,\cdots,2n-1$, 从第 2 行起, 每行中的每个数都等于它肩上的两数之和.

(1) 写出表 4, 验证表 4 各行中数的平均数按从上到下的顺序构成等比数列, 并将结论推广到表 n ($n\geqslant 3$) (不要求证明);

(2) 每个数列中最后一行都只有一个数, 它们构成数列 1, 4, 12, $\cdots$, 记此数列为 $\{b_n\}$, 求和: $\dfrac{b_3}{b_1b_2}+\dfrac{b_4}{b_2b_3}+\cdots\dfrac{b_{n+2}}{b_nb_{n+1}}$ ($n\in\mathbf{N}^*$).

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+x+(a-1)\ln x+15a$, 其中 $a<0$, 且 $a\neq -1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设函数 $g(x)=\begin{cases}(-2x^3+3ax^2+6ax-4a^2-6a)\,\mathrm{e}^x, & x\leqslant 1\\ \mathrm{e}\cdot f(x), & x>1\end{cases}$ (e 是自然数的底数). 是否存在 a, 使 $g(x)$ 在 $[a,-a]$ 上为减函数? 若存在, 求 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

2010 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

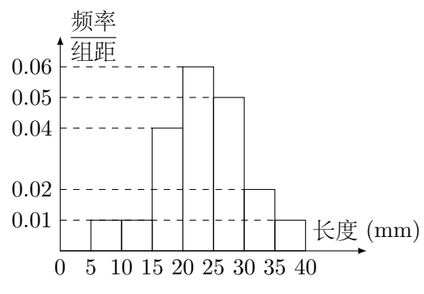
一、填空题

1. 设集合 $A=\{-1,1,3\}$, $B=\{a+2,a^2+4\}$, $A\cap B=\{3\}$, 则实数 $a=$_____.

2. 设复数 z 满足 $z(2-3\mathrm{i})=6+4\mathrm{i}$ (其中 i 为虚数单位), 则 z 的模为_____.

3. 盒子中有大小相同的 3 只白球, 1 只黑球, 若从中随机地摸出两只球, 则它们颜色不同的概率是_____.

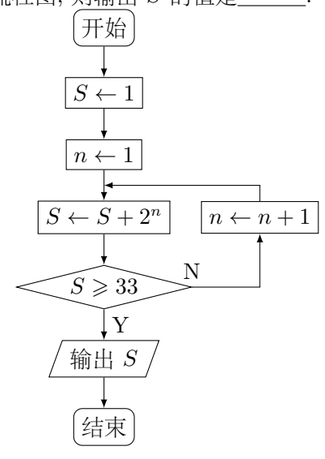
4. 某棉纺厂为了了解一批棉花的质量, 从中随机抽取了 100 根棉花纤维的长度 (棉花纤维的长度是棉花质量的重要指标), 所得数据都在区间 $[5,40]$ 中, 其频率分布直方图如图所示, 则其抽样的 100 根中, 有_____根棉花纤维的长度小于 20 mm.



5. 设函数 $f(x)=x(\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x})$, $x\in\mathbf{R}$ 是偶函数, 则实数 a 的值为_____.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上一点 M 的横坐标为 3, 则点 M 到此双曲线的右焦点的距离为_____.

7. 如图是一个算法流程图, 则输出 S 的值是_____.



8. 函数 $y=x^2$ $(x>0)$ 的图象在点 (a_k,a_k^2) 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 a_{k+1}, 其中 $k\in\mathrm{N}^*$. 若 $a_1=16$, 则 $a_1+a_3+a_5$ 的值是_____.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $x^2+y^2=4$ 上有且仅有四个点到直线 $12x-5y+c=0$ 的距离为 1, 则实数 c 的取值范围是_____.

10. 定义在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的函数 $y=6\cos x$ 的图象与 $y=5\tan x$ 的图象的交于点 P, 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 P_1, 直线 PP_1 与 $y=\sin x$ 的图象交于点 P_2, 则线段 P_1P_2 的长为_____.

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0\\ 1, & x<0\end{cases}$, 则满足不等式 $f(1-x^2)>f(2x)$ 的 x 的取值范围是_____.

12. 设实数 x, y 满足 $3\leqslant xy^2\leqslant 8$, $4\leqslant\dfrac{x^2}{y}\leqslant 9$, 则 $\dfrac{x^3}{y^4}$ 的最大值是_____.

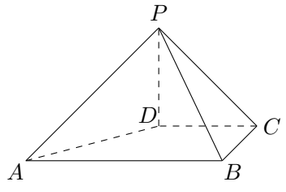
13. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 若 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=6\cos C$, 则 $\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}$ 的值是_____.

14. 将边长为 1 m 的正三角形薄铁皮沿一条平行于某边的直线剪成两块, 其中一块是梯形, 记 $s=\dfrac{(\text{梯形的周长})^2}{\text{梯形的面积}}$, 则 s 的最小值是_____.

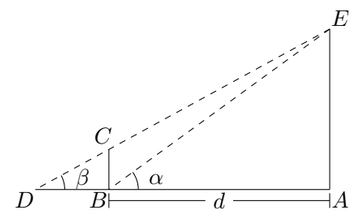
二、解答题

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(-1,-2)$、$B(2,3)$、$C(-2,-1)$.
(1) 求以线段 AB、AC 为邻边的平行四边形的两条对角线的长;
(2) 设实数 t 满足 $\left(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=0$, 求 t 的值.

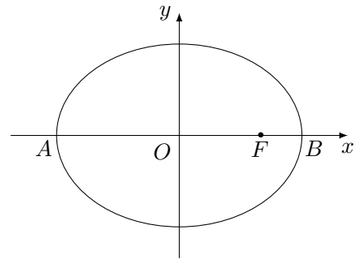
16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $PD=DC=BC=1$, $AB=2$, $AB\parallel DC$, $\angle BCD=90^\circ$.
(1) 求证: $PC\perp BC$;
(2) 求点 A 到平面 PBC 的距离.



17. 某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H (单位: m). 如示意图, 垂直放置的标杆 BC 的高度 $h=4$ m, 仰角 $\angle ABE=\alpha$, $\angle ADE=\beta$.
(1) 该小组已经测得一组 α, β 的值, 算出了 $\tan\alpha=1.24$, $\tan\beta=1.20$, 请据此算出 H 的值;
(2) 该小组分析若干测得的数据后, 发现适当调整标杆到电视塔的距离 d (单位: m), 使 α 与 β 之差较大, 可以提高测量精度. 若电视塔实际高度为 125 m, 试问 d 为多少时, $\alpha-\beta$ 最大.



18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 如图, 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左、右顶点为 A、B, 右焦点为 F. 设过点 $T(t,m)$ 的直线 TA、TB 与此椭圆分别交于点 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, 其中 $m>0$, $y_1>0$, $y_2<0$.
(1) 设动点 P 满足 $PF^2-PB^2=4$, 求点 P 的轨迹;
(2) 设 $x_1=2$, $x_2=\dfrac{1}{3}$, 求点 T 的坐标;
(3) 设 $t=9$, 求证: 直线 MN 必过 x 轴上的一定点 (其坐标与 m 无关).



19. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $2a_2=a_1+a_3$, 数列 $\left\{\sqrt{S_n}\right\}$ 是公差为 d 的等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 (用 n, d 表示);

(2) 设 c 为实数, 对满足 $m+n=3k$ 且 $m\neq n$ 的任意正整数 m, n, k, 不等式 $S_m+S_n>cS_k$ 都成立. 求证: c 的最大值为 $\dfrac{9}{2}$.

20. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(1,+\infty)$ 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$. 如果存在实数 a 和函数 $h(x)$, 其中 $h(x)$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $h(x)>0$, 使得 $f'(x)=h(x)(x^2-ax+1)$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(a)$.

(1) 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{b+2}{x+1}(x>1)$, 其中 b 为实数.

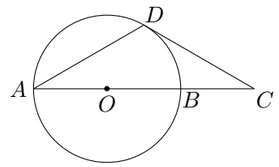
① 求证: 函数 $f(x)$ 具有性质 $P(b)$;

② 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 已知函数 $g(x)$ 具有性质 $P(2)$, 给定 x_1, $x_2\in(1,+\infty)$, $x_1<x_2$, 设 m 为实数. $\alpha=mx_1+(1-m)x_2$, $\beta=(1-m)x_1+mx_2$, 且 $\alpha>1$, $\beta>1$, 若 $|g(\alpha)-g(\beta)|<|g(x_1)-g(x_2)|$, 求 m 的取值范围.

21. 四选二.

【A】如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, D 为 $\odot O$ 上一点, 过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 AB 延长线于点 C. 若 $DA=DC$, 求证: $AB=2BC$.



【B】在平面直角坐标系 xOy 中, $A(0,0)$, $B(-2,0)$, $C(-2,1)$, 设 k 为非零实数. 矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}k&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 点 A、B、C 在矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 对应的变换下得到的点分别为 A_1、B_1、C_1, $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 2 倍, 求实数 k 的值.

【C】在极坐标系中, 圆 $\rho=2\cos\theta$ 与直线 $3\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta+a=0$ 相切, 求实数 a 的值.

【D】设 a, b 是非负实数, 求证: $a^3+b^3\geqslant\sqrt{ab}\,(a^2+b^2)$.

22. 某工厂生产甲、乙两种产品. 甲产品的一等品率为 80%, 二等品率为 20%; 乙产品的一等品率为 90%, 二等品率为 10%. 生产 1 件甲产品, 若是一等品则获得利润 4 万元, 若是二等品则亏损 1 万元; 生产 1 件乙产品, 若是一等品则获得利润 6 万元, 若是二等品则亏损 2 万元. 设生产各种产品相互独立.

(1) 记 X (单位: 万元) 为生产 1 件甲产品和 1 件乙产品可获得的总利润, 求 X 的分布列;

(2) 求生产 4 件甲产品所获得的利润不少于 10 万元的概率.

23. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长都是有理数.

(1) 求证: $\cos A$ 是有理数;

(2) 求证: 对任意正整数 n, $\cos nA$ 是有理数.

2010 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $(x+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=y$, 则实数 x, y 分别为 （ ）

(A) $x=-1$, $y=1$　(B) $x=-1$, $y=2$

(C) $x=1$, $y=1$　(D) $x=1$, $y=2$

2. 已知集合 $A=\{x\,||x|\leqslant 1, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y\,|y=x^2, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$（ ）

(A) $\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 1\}$　(B) $\{x\,|x\geqslant 0\}$

(C) $\{x\,|0\leqslant x\leqslant 1\}$　(D) $\varnothing$

3. 不等式 $\left|\dfrac{x-2}{x}\right|>\dfrac{x-2}{x}$ 的解集是 （ ）

(A) $(0,2)$　(B) $(-\infty,0)$

(C) $(2,+\infty)$　(D) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)=$ （ ）

(A) $\dfrac{5}{3}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) 2　(D) 不存在

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_8=4$, 函数 $f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_8)$, 则 $f'(0)=$ （ ）

(A) 2^6　(B) 2^9　(C) 2^{12}　(D) 2^{15}

6. $(2-\sqrt{x})^8$ 展开式中不含 x^4 项的系数的和为 （ ）

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

7. E, F 是等腰直角 $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的三等分点, 则 $\tan\angle ECF=$（ ）

(A) $\dfrac{16}{27}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

8. 直线 $y=kx+3$ 与圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 M, N 两点, 若 $|MN|\geqslant 2\sqrt{3}$, 则 k 的取值范围是 （ ）

(A) $\left[-\dfrac{3}{4},0\right]$　(B) $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right]\cup[0,+\infty)$

(C) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$　(D) $\left[-\dfrac{2}{3},0\right]$

9. 给出下列三个命题:

① 函数 $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 与 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 是同一函数;

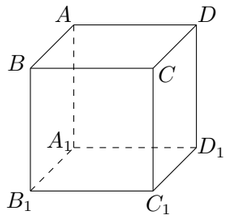
② 若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则函数 $y=f(2x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2}g(x)$ 的图象也关于直线 $y=x$ 对称;

③ 若奇函数 $f(x)$ 对定义域内任意 x 都有 $f(x)=f(2-x)$, 则 $f(x)$ 为周期函数.

其中真命题是 （ ）

(A) ①②　(B) ①③　(C) ②③　(D) ②

10. 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 作直线 l, 使 l 与棱 AB, AD, AA_1 所成的角都相等, 这样的直线 l 可以作 （ ）



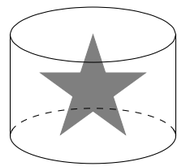
(A) 1 条　(B) 2 条　(C) 3 条　(D) 4 条

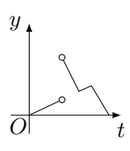
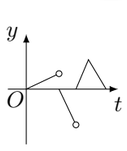
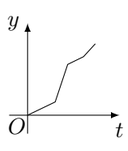
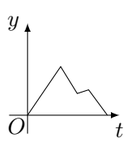
11. 一位国王的铸币大臣在每箱 100 枚的硬币中各掺入了一枚劣币, 国王怀疑大臣作弊, 他用两种方法来检测. 方法一: 在 10 箱中各任意抽查一枚; 方法二: 在 5 箱中各任意抽查两枚. 国王用方法一、二能发现至少一枚劣币的概率分别记为 p_1 和 p_2. 则 （ ）

(A) $p_1=p_2$　(B) $p_1<p_2$

(C) $p_1>p_2$　(D) 以上三种情况都有可能

12. 如图, 一个正五角星薄片 (其对称轴与水面垂直) 匀速地升出水面, 记 t 时刻五角星露出水面部分的图形面积为 $S(t)$ $(S(0)=0)$, 则导函数 $y=S'(t)$ 的图象大致为 （ ）



(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

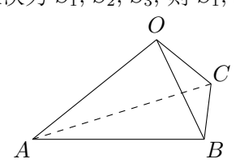
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$_____.

14. 将 6 位志愿者分成 4 组, 其中两个组各 2 人, 另两个组各 1 人, 分赴世博会的四个不同场馆服务, 不同的分配方案有_____种. (用数字作答)

15. 点 $A(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{32}=1$ 的右支上, 若点 A 到右焦点的距离等于 $2x_0$, 则 $x_0=$_____.

16. 如图, 在三棱锥 $O-ABC$ 中, 三条棱 OA, OB, OC 两两垂直, 且 $OA>OB>OC$, 分别经过三条棱 OA, OB, OC 作一个截面平分三棱锥的体积, 截面面积依次为 S_1, S_2, S_3, 则 S_1, S_2, S_3 的大小关系为_____.



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=(1+\cot x)\sin^2 x+m\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 当 $m=0$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上的取值范围;

(2) 当 $\tan\alpha=2$ 时, $f(\alpha)=\dfrac{3}{5}$, 求 m 的值.

18. 某迷宫有三个通道, 进入迷宫的每个人都要经过一个智能门. 首次到达此门, 系统会随机 (即等可能) 为你打开一个通道. 若是 1 号通道, 则需要 1 小时走出迷宫; 若是 2 号、3 号通道, 则分别需要 2 小时、3 小时返回智能门. 再次到达智能门时, 系统会随机打开一个你未到过的通道, 直至走出迷宫为止. 令 ξ 表示走出迷宫所需的时间.

(1) 求 ξ 的分布列;

(2) 求 ξ 的数学期望.

19. 设函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)+ax$ $(a>0)$.

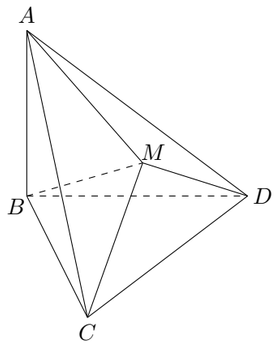
(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 $\dfrac{1}{2}$, 求 a 的值.

20. 如图, $\triangle BCD$ 与 $\triangle MCD$ 都是边长为 2 的正三角形, 平面 $MCD\perp$ 平面 BCD, $AB\perp$ 平面 BCD, $AB=2\sqrt{3}$.

(1) 求点 A 到平面 MBC 的距离;

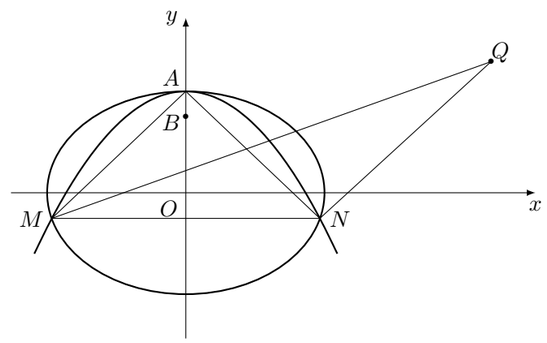
(2) 求平面 ACM 与平面 BCD 所成二面角的正弦值.



21. 设椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 抛物线 C_2: $x^2+by=b^2$.

(1) 若 C_2 经过 C_1 的两个焦点, 求 C_1 的离心率;

(2) 设 $A(0,b)$, $Q\left(3\sqrt{3},\dfrac{5}{4}b\right)$, 又 M、N 为 C_1 与 C_2 不在 y 轴上的两个交点, 若 $\triangle AMN$ 的垂心为 $B\left(0,\dfrac{3}{4}b\right)$, 且 $\triangle QMN$ 的重心在 C_2 上, 求椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的方程.



22. 证明以下命题:

(1) 对任一正整数 a, 都存在正整数 b, c $(b<c)$, 使得 a^2, b^2, c^2 成等差数列;

(2) 存在无穷多个互不相似的三角形 $\triangle_n$, 其边长 a_n, b_n, c_n 为正整数且 a_n^2, b_n^2, c_n^2 成等差数列.

2010 年普通高等学校招生考试（江西卷）

文科数学

一、选择题

1. 对于实数 a, b, c, “$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

2. 若集合 $A=\{x\,|\,|x|\leqslant 1\}$, $B=\{x\,|\,x\geqslant 0\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1\}$　(B) $\{x\,|\,x\geqslant 0\}$

(C) $\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$　(D) $\varnothing$

3. $(1-x)^{10}$ 展开式中 x^3 项的系数为 （　）

(A) -720　(B) 720　(C) 120　(D) -120

4. 若函数 $f(x)=ax^4+bx^2+c$ 满足 $f'(1)=2$, 则 $f'(-1)=$ （　）

(A) -1　(B) -2　(C) 2　(D) 0

5. 不等式 $|x-2|>x-2$ 的解集是 （　）

(A) $(-\infty,2)$　(B) $(-\infty,+\infty)$

(C) $(2,+\infty)$　(D) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

6. 函数 $y=\sin^2x+\sin x-1$ 的值域为 （　）

(A) $[-1,1]$　(B) $\left[-\dfrac{5}{4},-1\right]$　(C) $\left[-\dfrac{5}{4},1\right]$　(D) $\left[-1,\dfrac{5}{4}\right]$

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $|a_1|=1$, $a_5=-8a_2$, $a_5>a_2$, 则 $a_n=$ （　）

(A) $(-2)^{n-1}$　(B) $-(-2)^{n-1}$　(C) $(-2)^n$　(D) $-(-2)^n$

8. 若函数 $y=\dfrac{ax}{1+x}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 a 为 （　）

(A) 1　(B) -1　(C) ±1　(D) 任意实数

9. 有 n 位同学参加某项选拔测试, 每位同学能通过测试的概率都是 p $(0<p<1)$, 假设每位同学能否通过测试是相互独立的, 则至少有一位同学通过测试的概率为 （　）

(A) $(1-p)^n$　(B) $1-p^n$　(C) p^n　(D) $1-(1-p)^n$

10. 直线 $y=kx+3$ 与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 相交于 M、N 两点, 若 $|MN|\geqslant 2\sqrt{3}$, 则 k 的取值范围是 （　）

(A) $\left[-\dfrac{3}{4},0\right]$　(B) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$　(C) $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$　(D) $\left[-\dfrac{2}{3},0\right]$

11. 如图, M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DD_1 的中点, 给出下列命题:

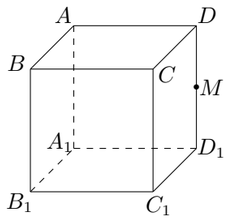
① 过 M 点有且只有一条直线与直线 AB、B_1C_1 都相交;

② 过 M 点有且只有一条直线与直线 AB、B_1C_1 都垂直;

③ 过 M 点有且只有一个平面与直线 AB、B_1C_1 都相交;

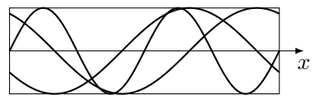
④ 过 M 点有且只有一个平面与直线 AB、B_1C_1 都平行.

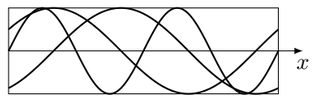
其中真命题是 （　）

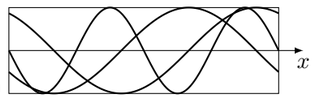


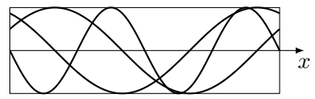
(A) ②③④　(B) ①③④　(C) ①②④　(D) ①②③

12. 四位同学在同一个坐标系中分别选定了一个适当的区间, 各自作出三个函数 $y=\sin 2x$, $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象如下. 结果发现其中有一位同学作出的图象有错误, 那么有错误的图象是 （　）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

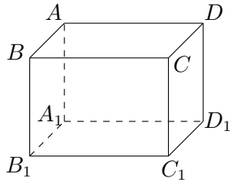
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, 则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影是_____.

14. 将 5 位志愿者分成 3 组, 其中两组各 2 人, 另一组 1 人, 分赴世博会的三个不同场馆服务, 不同的分配方案有_____种. (用数字作答)

15. 点 $A(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{32}=1$ 的右支上, 若点 A 到右焦点的距离等于 $2x_0$, 则 $x_0=$_____.

16. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点均在同一个球面上, $AB=AA_1=1$, $BC=\sqrt{2}$, 则 A, B 两点间的球面距离为_____.



三、解答题

17. 设函数 $f(x)=6x^3+3(a+2)x^2+2ax$.

(1) 若 $f(x)$ 的两个极值点为 x_1, x_2, 且 $x_1x_2=1$, 求实数 a 的值;

(2) 是否存在实数 a, 使得 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调函数? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

18. 某迷宫有三个通道, 进入迷宫的每个人都要经过一个智能门. 首次到达此门, 系统会随机 (即等可能) 为你打开一个通道. 若是 1 号通道, 则需要 1 小时走出迷宫; 若是 2 号、3 号通道, 则分别需要 2 小时、3 小时返回智能门. 再次到达智能门时, 系统会随机打开一个你未到过的通道, 直至走出迷宫为止.

(1) 求走出迷宫时恰好用了 1 小时的概率;

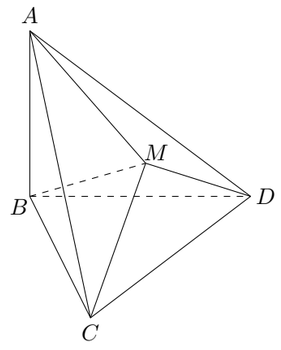
(2) 求走出迷宫的时间超过 3 小时的概率.

19. 已知函数 $f(x)=(1+\cot x)\sin^2x-2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

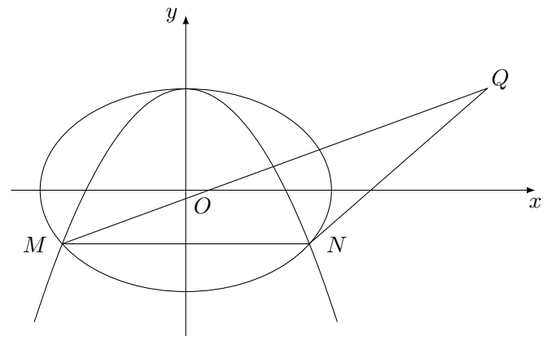
(1) 若 $\tan\alpha=2$, 求 $f(\alpha)$;

(2) 若 $x\in\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 的取值范围.

20. 如图, $\triangle BCD$ 与 $\triangle MCD$ 都是边长为 2 的正三角形, 平面 $MCD \perp$ 平面 BCD, $AB \perp$ 平面 BCD, $AB = 2\sqrt{3}$.
(1) 求直线 AM 与平面 BCD 所成的角的大小;
(2) 求平面 ACM 与平面 BCD 所成二面角的正弦值.



21. 如图, 已知抛物线 C_1: $x^2 + by = b^2$ 经过椭圆 C_2: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的两个焦点.
(1) 求椭圆 C_2 的离心率;
(2) 设 $Q(3, b)$, 又 M, N 为 C_1 与 C_2 不在 y 轴上的两个交点, 若 $\triangle QMN$ 的重心在抛物线 C_1 上, 求 C_1 和 C_2 的方程.



22. 正实数数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, 且 $\{a_n^2\}$ 成等差数列.
(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项为无理数;
(2) 当 n 为何值时, a_n 为整数, 并求出使 $a_n < 200$ 的所有整数项的和.

2010 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 A, B 均为集合 $U=\{1,3,5,7,9\}$ 的子集, 且 $A\cap B=\{3\}$, $\complement_U B\cap A=\{9\}$, 则 $A=$ （ ）

(A) $\{1,3\}$ (B) $\{3,7,9\}$ (C) $\{3,5,9\}$ (D) $\{3,9\}$

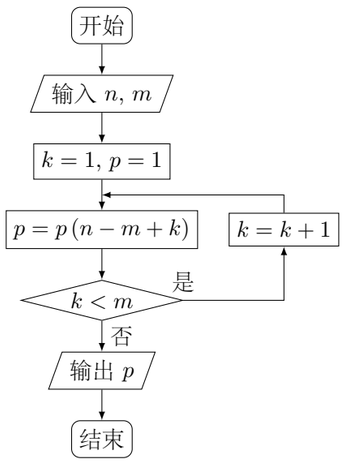
2. 设 a, b 为实数, 若复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$, 则 （ ）

(A) $a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$ (B) $a=3$, $b=1$ (C) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$ (D) $a=1$, $b=3$

3. 两个实习生每人加工一个零件, 加工为一等品的概率分别为 $\dfrac{2}{3}$ 和 $\dfrac{3}{4}$, 两个零件是否加工为一等品相互独立, 则这两个零件中恰有一个一等品的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{5}{12}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{6}$

4. 如果执行如图所示的程序框图, 输入正整数 n, m, 满足 $n\geqslant m$, 那么输出的 p 等于 （ ）



(A) C_n^{m-1} (B) A_n^{m-1} (C) C_n^m (D) A_n^m

5. 设 $\omega>0$, 函数 $y=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ 的图象向右平移 $\dfrac{4\pi}{3}$ 个单位后与原图象重合, 则 ω 的最小值是 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{4}{3}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 3

6. 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 为其前 n 项和. 已知 $a_2a_4=1$, $S_3=7$, 则 $S_5=$ （ ）

(A) $\dfrac{15}{2}$ (B) $\dfrac{31}{4}$ (C) $\dfrac{33}{4}$ (D) $\dfrac{17}{2}$

7. 设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F, 准线为 l, P 为抛物线上一点, $PA\perp l$, A 为垂足, 如果直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$, 那么 $|PF|=$ （ ）

(A) $4\sqrt{3}$ (B) 8 (C) $8\sqrt{3}$ (D) 16

8. 平面上 O, A, B 三点不共线, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\triangle OAB$ 的面积等于 （ ）

(A) $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ (B) $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

(C) $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ (D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

9. 设双曲线的一个焦点为 F, 虚轴的一个端点为 B, 如果直线 FB 与该双曲线的一条渐近线垂直, 那么此双曲线的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

10. 已知点 P 在曲线 $y=\dfrac{4}{\mathrm{e}^x+1}$ 上, α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 则 α 的取值范围是 （ ）

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ (D) $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$

11. 已知 $a>0$, 则 x_0 满足关于 x 的方程 $ax=b$ 的充要条件是 （ ）

(A) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\dfrac{1}{2}ax^2-bx\geqslant\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

(B) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\dfrac{1}{2}ax^2-bx\leqslant\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

(C) $\forall x\in\mathbf{R}$, $\dfrac{1}{2}ax^2-bx\geqslant\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

(D) $\forall x\in\mathbf{R}$, $\dfrac{1}{2}ax^2-bx\leqslant\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

12. 有四根长都为 2 的直铁条, 若再选两根长都为 a 的直铁条, 使这六根铁条端点处相连能够焊接成一个三棱锥形的铁架, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,\sqrt{6}+\sqrt{2})$ (B) $(1,2\sqrt{2})$

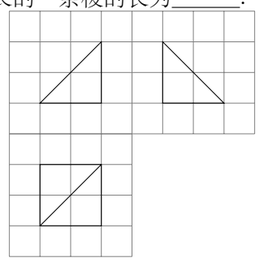
(C) $(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2})$ (D) $(0,2\sqrt{2})$

二、填空题

13. $(1+x+x^2)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为_____.

14. 已知 $-1<x+y<4$ 且 $2<x-y<3$, 则 $z=2x-3y$ 的取值范围是_____. (答案用区间表示)

15. 如图, 网格纸的小正方形的边长是 1, 在其上用粗线画出了某多面体的三视图, 则这个多面体最长的一条棱的长为_____.



16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=33$, $a_{n+1}-a_n=2n$, 则 $\dfrac{a_n}{n}$ 的最小值为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 且 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 求 $\sin B+\sin C$ 的最大值.

18. 为了比较注射 A, B 两种药物后产生的皮肤疱疹的面积, 选 200 只家兔做试验, 将这 200 只家兔随机地分成两组, 每组 100 只, 其中一组注射药物 A, 另一组注射药物 B.

(1) 甲、乙是 200 只家兔中的 2 只, 求甲、乙分在不同组的概率;

(2) 下表 1 和表 2 分别是注射药物 A 和 B 后的试验结果. (疱疹面积单位: mm^2)

表 1: 注射药物 A 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	$[60,65)$	$[65,70)$	$[70,75)$	$[75,80)$
频数	30	40	20	10

表 2: 注射药物 B 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	$[60,65)$	$[65,70)$	$[70,75)$	$[75,80)$	$[80,85)$
频数	10	25	20	30	15

① 完成下面频率分布直方图, 并比较注射两种药物后疱疹面积的中位数大小;

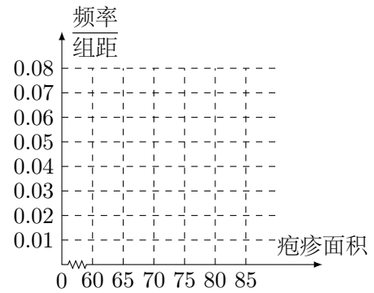


图 1: 注射药物 A

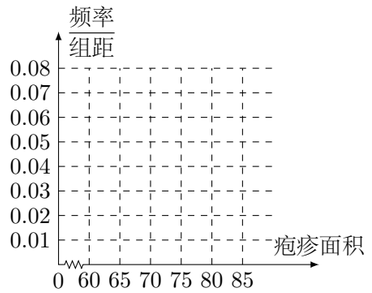


图 2: 注射药物 B

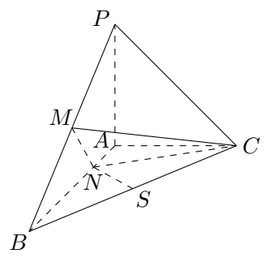
② 完成下面 2×2 列联表, 并回答能否有 99.9% 的把握认为“注射药物 A 后的疱疹面积与注射药物 B 后的疱疹面积有差异”.

	疱疹面积小于 70 mm^2	疱疹面积不小于 70 mm^2	合计
注射药物 A	$a=$	$b=$	
注射药物 B	$c=$	$d=$	
合计			$n=$

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

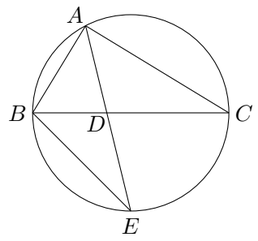
19. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 平面 ABC, $AB\perp AC$, $PA=AC=\dfrac{1}{2}AB$, N 为 AB 上一点, $AB=4AN$, M, S 分别为 PB, BC 的中点.
(1) 证明: $CM\perp SN$;
(2) 求 SN 与平面 CMN 所成角的大小.



20. 设椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 F, 过点 F 的直线与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 直线 l 的倾斜角为 60°, $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$.
(1) 求椭圆 C 的离心率;
(2) 如果 $|AB|=\dfrac{15}{4}$, 求椭圆 C 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$.
(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 设 $a<-1$, 如果对任意 x_1, $x_2\in(0,+\infty)$, $|f(x_1)-f(x_2)\geqslant 4|x_1-x_2|$, 求 a 的取值范围.

22. 如图, $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 的延长线交它的外接圆于点 E.
(1) 证明: $\triangle ABE\backsim\triangle ADC$;
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}AD\cdot AE$, 求 $\angle BAC$ 的大小.



23. 已知 P 为半圆 C: $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$) 上的点, 点 A 的坐标为 $(1,0)$, O 为坐标原点, 点 M 在射线 OP 上, 线段 OM 与 C 的弧 $\overset{\frown}{AP}$ 的长度均为 $\dfrac{\pi}{3}$.
(1) 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 求点 M 的极坐标;
(2) 求直线 AM 的参数方程.

24. 已知 a, b, c 均为正数, 证明: $a^2+b^2+c^2+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2\geqslant 6\sqrt{3}$, 并确定 a, b, c 为何值时, 等号成立.

2010 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $U=\{1,3,5,7,9\}$, $A=\{1,5,7\}$, 则 $\complement_U A=$ （　）

(A) $\{1,3\}$　(B) $\{3,7,9\}$　(C) $\{3,5,9\}$　(D) $\{3,9\}$

2. 设 a, b 为实数, 若复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$, 则 （　）

(A) $a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$　(B) $a=3$, $b=1$　(C) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$　(D) $a=1$, $b=3$

3. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $3S_3=a_4-2$, $3S_2=a_3-2$, 则公比 $q=$ （　）

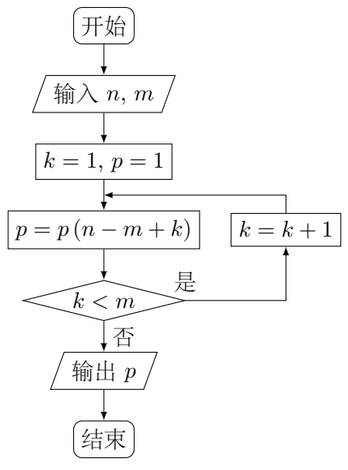
(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

4. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=ax^2+bx+c$. 若 x_0 满足关于 x 的方程 $2ax+b=0$, 则下列选项的命题中为假命题的是 （　）

(A) $\exists x\in\mathbf{R}$, $f(x)\leqslant f(x_0)$　(B) $\exists x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant f(x_0)$

(C) $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)\leqslant f(x_0)$　(D) $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant f(x_0)$

5. 如果执行下图所示的程序框图, 输入 $n=6$, $m=4$, 那么输出的 p 等于（　）



(A) 720　(B) 360　(C) 240　(D) 120

6. 设 $\omega>0$, 函数 $y=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ 的图象向右平移 $\dfrac{4\pi}{3}$ 个单位后与原图象重合, 则 ω 的最小值是 （　）

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{4}{3}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) 3

7. 设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F, 准线为 l, P 为抛物线上一点, $PA\perp l$, A 为垂足, 如果直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$, 那么 $|PF|=$ （　）

(A) $4\sqrt{3}$　(B) 8　(C) $8\sqrt{3}$　(D) 16

8. 平面上 O, A, B 三点不共线, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\triangle OAB$ 的面积等于 （　）

(A) $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$　(B) $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

(C) $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$　(D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

9. 设双曲线的一个焦点为 F, 虚轴的一个端点为 B, 如果直线 FB 与该双曲线的一条渐近线垂直, 那么此双曲线的离心率为 （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

10. 设 $2^a=5^b=m$, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$, 则 $m=$ （　）

(A) $\sqrt{10}$　(B) 10　(C) 20　(D) 100

11. 已知 S, A, B, C 是球 O 表面上的点, $SA\perp$ 平面 ABC, $AB\perp BC$, $SA=AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, 则球 O 的表面积等于 （　）

(A) 4π　(B) 3π　(C) 2π　(D) π

12. 已知点 P 在曲线 $y=\dfrac{4}{\mathrm{e}^x+1}$ 上, α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 则 α 的取值范围是 （　）

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$　(B) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$　(C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$　(D) $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$

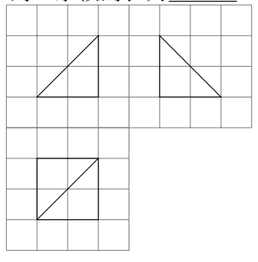
二、填空题

13. 三张卡片上分别写上字母 E, E, B, 将三张卡片随机地排成一行, 恰好排成英文单词 BEE 的概率为_____.

14. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_3=3$, $S_6=24$, 则 $a_9=$_____.

15. 已知 $-1<x+y<4$ 且 $2<x-y<3$, 则 $z=2x-3y$ 的取值范围是_____. (答案用区间表示)

16. 如图, 网格纸的小正方形的边长是 1, 在其上用粗线画出了某多面体的三视图, 则这个多面体最长的一条棱的长为_____.



三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 且 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 若 $\sin B+\sin C=1$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

18. 为了比较注射 A, B 两种药物后产生的皮肤疱疹的面积, 选 200 只家兔做试验, 将这 200 只家兔随机地分成两组, 每组 100 只, 其中一组注射药物 A, 另一组注射药物 B. 下表 1 和表 2 分别是注射药物 A 和 B 后的试验结果. (疱疹面积单位: mm^2)

表 1: 注射药物 A 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	$[60,65)$	$[65,70)$	$[70,75)$	$[75,80)$
频数	30	40	20	10

表 2: 注射药物 B 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	$[60,65)$	$[65,70)$	$[70,75)$	$[75,80)$	$[80,85)$
频数	10	25	20	30	15

(1) 完成下面频率分布直方图, 并比较注射两种药物后疱疹面积的中位数大小;

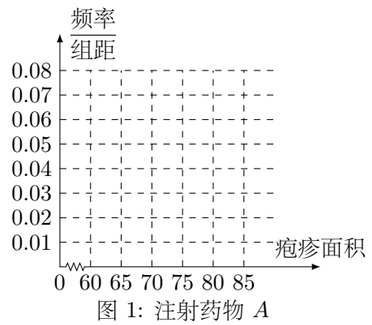


图 1: 注射药物 A

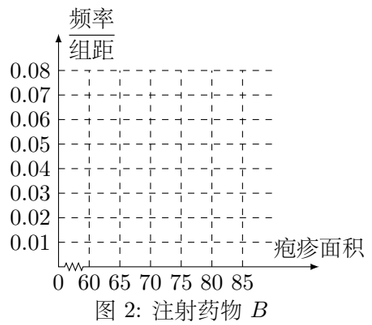


图 2: 注射药物 B

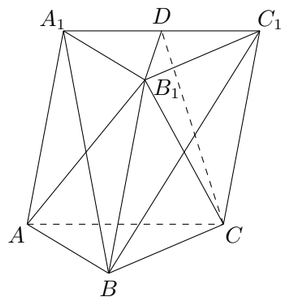
(2) 完成下面 2×2 列联表, 并回答能否有 99.9% 的把握认为“注射药物 A 后的疱疹面积与注射药物 B 后的疱疹面积有差异”.

	疱疹面积小于 70 mm^2	疱疹面积不小于 70 mm^2	合计
注射药物 A	$a=$	$b=$	
注射药物 B	$c=$	$d=$	
合计			$n=$

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

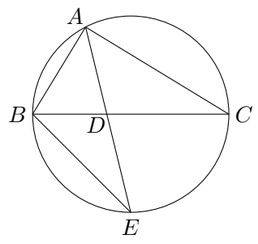
19. 如图, 棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 BCC_1B_1 是菱形, $B_1C\perp A_1B$.
(1) 证明: 平面 $AB_1C\perp$ 平面 A_1BC_1;
(2) 设 D 是 A_1C_1 上的点, 且 $A_1B\parallel$ 平面 B_1CD, 求 $A_1D:DC_1$ 的值.



20. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, 过 F_2 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点, 直线 l 的倾斜角为 60°, F_1 到直线 l 的距离为 $2\sqrt{3}$.
(1) 求椭圆 C 的焦距;
(2) 如果 $\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$, 求椭圆 C 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$.
(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 设 $a\leqslant -2$, 证明: 对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$.

22. 如图, $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 的延长线交它的外接圆于点 E.
(1) 证明: $\triangle ABE\backsim\triangle ADC$;
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}AD\cdot AE$, 求 $\angle BAC$ 的大小.



23. 已知 P 为半圆 C: $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$) 上的点, 点 A 的坐标为 $(1,0)$, O 为坐标原点, 点 M 在射线 OP 上, 线段 OM 与 C 的弧 $\overset{\frown}{AP}$ 的长度均为 $\dfrac{\pi}{3}$.
(1) 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 求点 M 的极坐标;
(2) 求直线 AM 的参数方程.

24. 已知 a, b, c 均为正数, 证明: $a^2+b^2+c^2+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2\geqslant 6\sqrt{3}$, 并确定 a, b, c 为何值时, 等号成立.

2010 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\,||\,x|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\,|\,\sqrt{x}\leqslant 4, x\in\mathbf{Z}\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $(0,2)$　(B) $[0,2]$　(C) $\{0,2\}$　(D) $\{0,1,2\}$

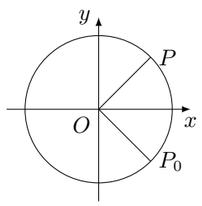
2. 已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2}$, $\overline{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 $z\cdot\overline{z}=$ （　）

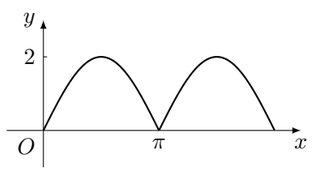
(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

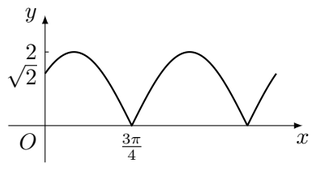
3. 曲线 $y=\dfrac{x}{x+2}$ 在点 $(-1,-1)$ 处的切线方程为 （　）

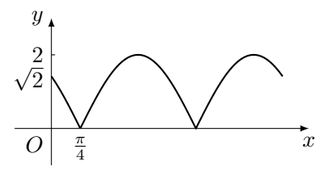
(A) $y=2x+1$　(B) $y=2x-1$　(C) $y=-2x-3$　(D) $y=-2x-2$

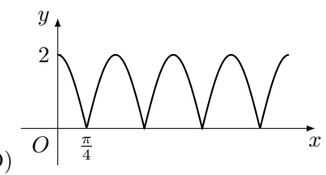
4. 如图, 质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动, 其初始位置为 $P_0\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, 角速度为 1, 那么点 P 到 x 轴的距离 d 关于时间 t 的函数图象大致为 （　）



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

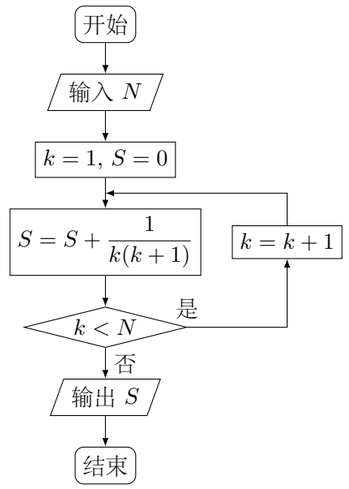
5. 已知命题 p_1: 函数 $y=2^x-2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为增函数; p_2: 函数 $y=2^x+2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为减函数. 则在命题 q_1: $p_1\vee p_2$, q_2: $p_1\wedge p_2$, q_3: $(\neg p_1)\vee p_2$ 和 q_4: $p_1\wedge(\neg p_2)$ 中, 真命题是 （　）

(A) q_1, q_3　(B) q_2, q_3　(C) q_1, q_4　(D) q_2, q_4

6. 某种种子每粒发芽的概率都为 0.9, 现播种了 1000 粒, 对于没有发芽的种子, 每粒需再补种 2 粒, 补种的种子数记为 X, 则 X 的数学期望为 （　）

(A) 100　(B) 200　(C) 300　(D) 400

7. 如果执行如图所示的框图, 输入 $N=5$, 则输出的数等于 （　）



(A) $\dfrac{5}{4}$　(B) $\dfrac{4}{5}$　(C) $\dfrac{6}{5}$　(D) $\dfrac{5}{6}$

8. 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^3-8$ $(x\geqslant 0)$, 则 $\{x\,|\,f(x-2)>0\}=$（　）

(A) $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>4\}$　(B) $\{x\,|\,x<0$ 或 $x>4\}$

(C) $\{x\,|\,x<0$ 或 $x>6\}$　(D) $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>2\}$

9. 若 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, α 是第三象限的角, 则 $\dfrac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}=$ （　）

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 2　(D) -2

10. 设三棱柱的侧棱垂直于底面, 所有棱长都为 a, 顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 （　）

(A) πa^2　(B) $\dfrac{7}{3}\pi a^2$　(C) $\dfrac{11}{3}\pi a^2$　(D) $5\pi a^2$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|, & 0<x\leqslant 10\\ -\dfrac{1}{2}x+6, & x>10\end{cases}$, 若 a, b, c 互不相等, 且 $f(a)=f(b)=f(c)$, 则 abc 的取值范围是 （　）

(A) $(1,10)$　(B) $(5,6)$　(C) $(10,12)$　(D) $(20,24)$

12. 已知双曲线 E 的中心为原点, $F(3,0)$ 是 E 的焦点, 过 F 的直线 l 与 E 相交于 A,B 两点, 且 AB 的中点为 $N(-12,-15)$, 则 E 的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$

二、填空题

13. 设 $y=f(x)$ 为区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 且恒有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, 可以用随机模拟方法近似计算积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 先产生两组 (每组 N 个) 区间 $[0,1]$ 上的均匀随机数 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_N$, 由此得到 N 个点 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,N)$, 再数出其中满足 $y_i\leqslant f(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 的点数 N_1, 那么由随机模拟方法可得积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的近似值为_____.

14. 正视图为一个三角形的几何体可以是_____. (写出三种)

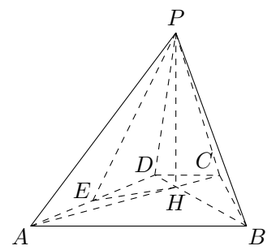
15. 过点 $A(4,1)$ 的圆 C 与直线 $x-y-1=0$ 相切于点 $B(2,1)$, 则圆 C 的方程为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上一点, $BD=\dfrac{1}{2}DC$, $\angle ADB=120^\circ$, $AD=2$, 若 $\triangle ADC$ 的面积为 $3-\sqrt{3}$, 则 $\angle BAC=$_____.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{2n-1}$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 令 $b_n=na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为等腰梯形, $AB\parallel CD$, $AC\perp BD$, 垂足为 H, PH 是四棱锥的高, E 为 AD 中点.
(1) 证明: $PE\perp BC$;
(2) 若 $\angle APB=\angle ADB=60^\circ$, 求直线 PA 与平面 PEH 所成角的正弦值.



19. 为调查某地区老人是否需要志愿者提供帮助, 用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人, 结果如下:

是否需要志愿者 \ 性别	男	女
需要	40	30
不需要	160	270

(1) 估计该地区老年人中, 需要志愿者提供帮助的老年人的比例;
(2) 能否有 99% 的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关?
(3) 根据 (2) 的结论, 能否提供更好的调查方法来估计该地区老年人, 需要志愿者帮助的老年人的比例? 说明理由.

附:

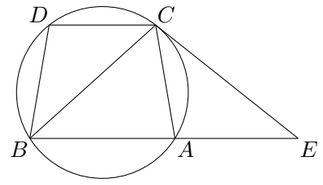
$P\left(K^2 \geqslant k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 且斜率为 1 的直线 l 与 E 相交于 A、B 两点, 且 $|AF_2|$, $|AB|$, $|BF_2|$ 成等差数列.
(1) 求 E 的离心率;
(2) 设点 $P(0,-1)$ 满足 $|PA|=|PB|$, 求 E 的方程.

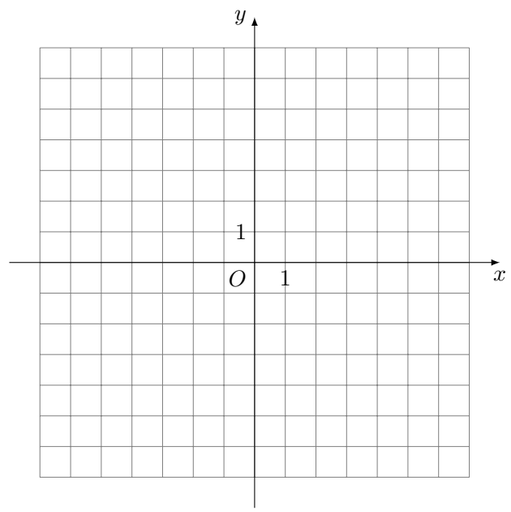
21. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x-ax^2$.
(1) 若 $a=0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若当 $x \geqslant 0$ 时 $f(x) \geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

22. 如图, 已知圆上的弧 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$, 过 C 点的圆的切线与 BA 的延长线交于 E 点, 证明:
(1) $\angle ACE=\angle BCD$;
(2) $BC^2=BE\cdot CD$.



23. 已知直线 C_1: $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数), 圆 C_2: $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).
(1) 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时, 求 C_1 与 C_2 的交点坐标;
(2) 过坐标原点 O 作 C_1 的垂线, 垂足为 A, P 为 OA 的中点, 当 α 变化时, 求点 P 轨迹的参数方程, 并指出它是什么曲线.

24. 设函数 $f(x)=|2x-4|+1$.
(1) 画出函数 $y=f(x)$ 的图象;
(2) 若不等式 $f(x) \leqslant ax$ 的解集非空, 求 a 的取值范围.



2010 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\,||\,x|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\,|\,\sqrt{x}\leqslant 4, x\in\mathbf{Z}\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $(0,2)$　(B) $[0,2]$　(C) $\{0,2\}$　(D) $\{0,1,2\}$

2. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为平面向量, 若 $\boldsymbol{a}=(4,3)$, $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,18)$, 则 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值等于 （　）

(A) $\dfrac{8}{65}$　(B) $-\dfrac{8}{65}$　(C) $\dfrac{16}{65}$　(D) $-\dfrac{16}{65}$

3. 已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2}$, 则 $|z|=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

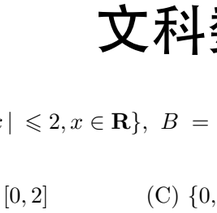
4. 曲线 $y=x^3-2x+1$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 （　）

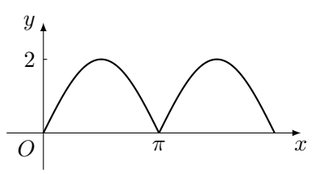
(A) $y=x-1$　(B) $y=-x+1$　(C) $y=2x-2$　(D) $y=-2x+2$

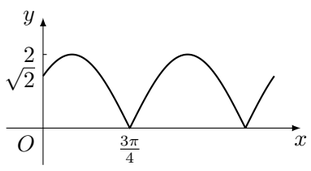
5. 中心在原点, 焦点在 x 轴上的双曲线的一条渐近线经过点 $(4,2)$, 则它的离心率为 （　）

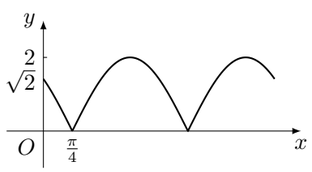
(A) $\sqrt{6}$　(B) $\sqrt{5}$　(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

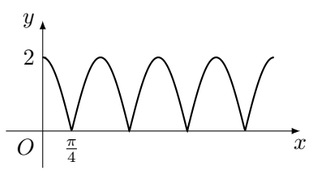
6. 如图, 质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动, 其初始位置为 $P_0\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, 角速度为 1, 那么点 P 到 x 轴的距离 d 关于时间 t 的函数图象大致为 （　）



(A)


(B)


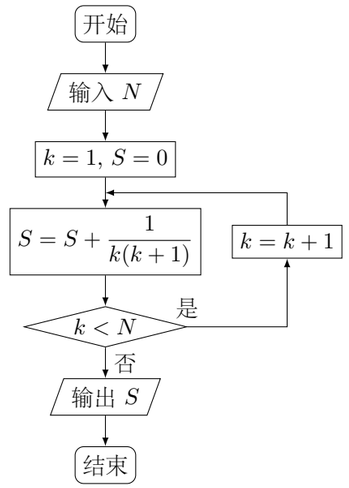
(C)


(D)


7. 设长方体的长、宽、高分别为 $2a$、a、a, 其顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 （　）

(A) $3\pi a^2$　(B) $6\pi a^2$　(C) $12\pi a^2$　(D) $24\pi a^2$

8. 如果执行如图所示的框图, 输入 $N=5$, 则输出的数等于 （　）



(A) $\dfrac{5}{4}$　(B) $\dfrac{4}{5}$　(C) $\dfrac{6}{5}$　(D) $\dfrac{5}{6}$

9. 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=2^x-4$ $(x\geqslant 0)$, 则 $\{x\,|\,f(x-2)>0\}=$（　）

(A) $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>4\}$　(B) $\{x\,|\,x<0$ 或 $x>4\}$

(C) $\{x\,|\,x<0$ 或 $x>6\}$　(D) $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>2\}$

10. 若 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, α 是第三象限的角, 则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ （　）

(A) $-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$　(B) $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$　(C) $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

11. 已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点为 $A(-1,2)$、$B(3,4)$、$C(4,-2)$, 点 (x,y) 在平行四边形 $ABCD$ 的内部, 则 $z=2x-5y$ 的取值范围是 （　）

(A) $(-14,16)$　(B) $(-14,20)$　(C) $(-12,18)$　(D) $(-12,20)$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|, & 0<x\leqslant 10\\ -\dfrac{1}{2}x+6, & x>10\end{cases}$, 若 a, b, c 互不相等, 且 $f(a)=f(b)=f(c)$, 则 abc 的取值范围是 （　）

(A) $(1,10)$　(B) $(5,6)$　(C) $(10,12)$　(D) $(20,24)$

二、填空题

13. 圆心位于原点且与直线 $x+y-2=0$ 相切的圆的方程为_____.

14. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的图象是连续不断的一条曲线, 且恒有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, 可以用随机模拟方法近似计算由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=0$, $x=1$, $y=0$ 所围成部分的面积 S, 先产生两组 (每组 N 个) 区间 $[0,1]$ 上的均匀随机数 x_1, x_2, $\cdots$, x_N 和 y_1, y_2, $\cdots$, y_N, 由此得到 N 个点 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,N)$. 再数出其中满足 $y_i\leqslant f(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 的点数 N_1, 那么由随机模拟方法可得 S 的近似值为_____.

15. 一个几何体的正视图为一个三角形, 则这个几何体可能是下列几何体中的_____. (填入所有可能的几何体前的编号)

①三棱锥　②四棱锥　③三棱柱　④四棱柱　⑤圆锥　⑥圆柱

16. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上一点, $BC=3BD$, $AD=\sqrt{2}$, $\angle ADB=135^\circ$. 若 $AC=\sqrt{2}AB$, 则 $BD=$_____.

三、解答题

17. 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3=5$, $a_{10}=-9$.

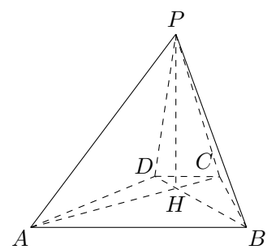
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 及使得 S_n 最大的序号 n 的值.

18. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为等腰梯形, $AB\parallel CD$, $AC\perp BD$, 垂足为 H, PH 是四棱锥的高.

(1) 证明: 平面 $PAC\perp$ 平面 PBD;

(2) 若 $AB=\sqrt{6}$, $\angle APB=\angle ADB=60^\circ$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



19. 为调查某地区老人是否需要志愿者提供帮助, 用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人, 结果如下:

性别 / 是否需要志愿者	男	女
需要	40	30
不需要	160	270

(1) 估计该地区老年人中, 需要志愿者提供帮助的老年人的比例;
(2) 能否有 99% 的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关?
(3) 根据 (2) 的结论, 能否提供更好的调查方法来估计该地区老年人, 需要志愿者帮助的老年人的比例? 说明理由.

附:

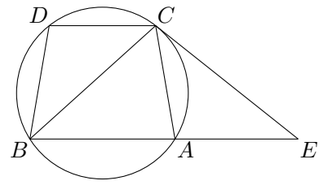
$P\left(K^2 \geqslant k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<1)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线 l 与 E 相交于 A、B 两点, 且 $|AF_2|$, $|AB|$, $|BF_2|$ 成等差数列.
(1) 求 $|AB|$;
(2) 若直线 l 的斜率为 1, 求 b 的值.

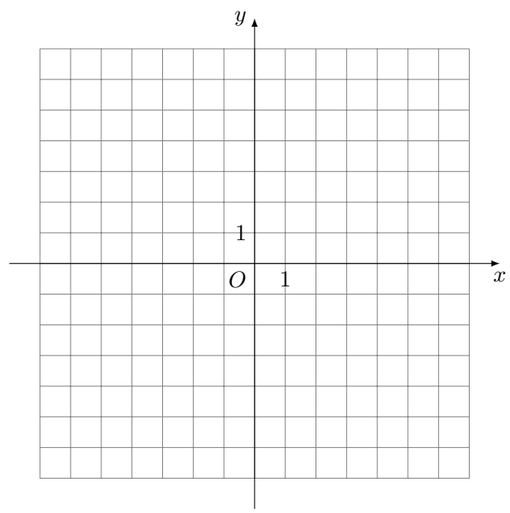
21. 设函数 $f(x)=x\left(\mathrm{e}^x-1\right)-ax^2$.
(1) 若 $a=\dfrac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

22. 如图, 已知圆上的弧 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$, 过 C 点的圆的切线与 BA 的延长线交于 E 点, 证明:
(1) $\angle ACE=\angle BCD$;
(2) $BC^2=BE\cdot CD$.



23. 已知直线 C_1: $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数), 圆 C_2: $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).
(1) 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时, 求 C_1 与 C_2 的交点坐标;
(2) 过坐标原点 O 作 C_1 的垂线, 垂足为 A, P 为 OA 的中点, 当 α 变化时, 求点 P 轨迹的参数方程, 并指出它是什么曲线.

24. 设函数 $f(x)=|2x-4|+1$.
(1) 画出函数 $y=f(x)$ 的图象;
(2) 若不等式 $f(x) \leqslant ax$ 的解集非空, 求 a 的取值范围.



2010 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x\,|\,|x-1|\leqslant 2\}$, 则 $\complement_U M=$ （ ）

(A) $\{x\,|\,-1<x<3\}$　(B) $\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 3\}$

(C) $\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>3\}$　(D) $\{x\,|\,x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$

2. 已知 $\dfrac{a+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=b+\mathrm{i}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$, 其中 i 为虚数单位, 则 $a+b=$ （ ）

(A) -1　(B) 1　(C) 2　(D) 3

3. 在空间, 下列命题正确的是 （ ）

(A) 平行直线的平行投影重合　(B) 平行于同一直线的两个平面平行

(C) 垂直于同一平面的两个平面平行　(D) 垂直于同一平面的两条直线平行

4. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=2^x+2x+b$ (b 为常数), 则 $f(-1)=$ （ ）

(A) 3　(B) 1　(C) -1　(D) -3

5. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$. 若 $P(\xi>2)=0.023$, 则 $P(-2\leqslant\xi\leqslant 2)=$ （ ）

(A) 0.477　(B) 0.628　(C) 0.954　(D) 0.977

6. 样本中共有五个个体, 其值分别为 a, 0, 1, 2, 3. 若该样本的平均值为 1, 则样本方差为 （ ）

(A) $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$　(B) $\dfrac{6}{5}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

7. 由曲线 $y=x^2$, $y=x^3$ 围成的封闭图形面积为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{12}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{7}{12}$

8. 某台小型晚会由 6 个节目组成, 演出顺序有如下要求: 节目甲必须排在前两位、节目乙不能排在第一位, 节目丙必须排在最后一位, 该台晚会节目演出顺序的编排方案共有 （ ）

(A) 36 种　(B) 42 种　(C) 48 种　(D) 54 种

9. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则“$a_1<a_2<a_3$”是“数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”的（ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

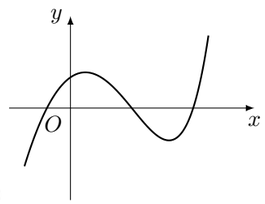
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

10. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\geqslant 0\\ x-5y+10\leqslant 0\\ x+y-8\leqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=3x-4y$ 的最大值和最小值分别为 （ ）

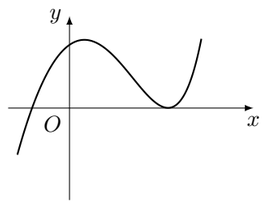
(A) 3, -11　(B) -3, -11　(C) 11, -3　(D) 11, 3

11. 函数 $y=2^x-x^2$ 的图象大致是 （ ）

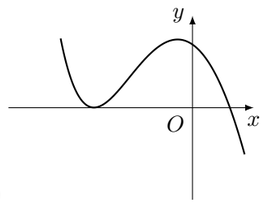
(A)



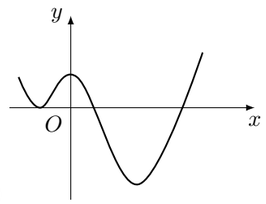
(B)



(C)



(D)



12. 定义平面向量之间的一种运算“$\odot$”如下: 对任意的 $\boldsymbol{a}=(m,n)$, $\boldsymbol{b}=(p,q)$. 令 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=mq-np$. 下面说法错误的是 （ ）

(A) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, 则 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=0$

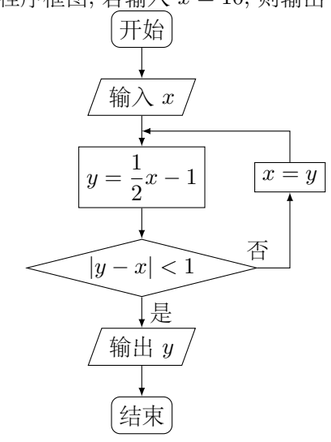
(B) $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a}$

(C) 对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$, 有 $(\lambda\boldsymbol{a})\odot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})$

(D) $(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$

二、填空题

13. 执行如图所示的程序框图, 若输入 $x=10$, 则输出 y 的值为_____.



14. 若对任意 $x>0$, $\dfrac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若 $a=\sqrt{2}$, $b=2$, $\sin B+\cos B=\sqrt{2}$, 则角 A 的大小为_____.

16. 已知圆 C 过点 $(1,0)$, 且圆心在 x 轴的正半轴上, 直线 l: $y=x-1$ 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则过圆心且与直线 l 垂直的直线的方程为_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x\sin\varphi+\cos^2 x\cos\varphi-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)$ $(0<\varphi<\pi)$, 其图象过点 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{1}{2}\right)$.

(1) 求 φ 的值;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_3=7$, $a_5+a_7=26$. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1) 求 a_n 及 S_n;

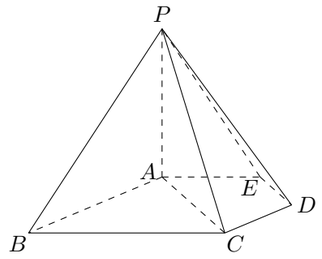
(2) 令 $b_n=\dfrac{1}{a_n^2-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 如图, 在五棱锥 $P-ABCDE$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCDE$, $AB \parallel CD$, $AC \parallel ED$, $AE \parallel BC$, $\angle ABC=45^{\circ}$, $AB=2\sqrt{2}$, $BC=2AE=4$, 三角形 PAB 是等腰三角形.

(1) 求证: 平面 $PCD \perp$ 平面 PAC;

(2) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的大小;

(3) 求四棱锥 $P-ACDE$ 的体积.



20. 某学校举行知识竞赛, 第一轮选拔共设有 A、B、C、D 四个问题, 规则如下:

① 每位参加者计分器的初始分均为 10 分, 答对问题 A、B、C、D 分别加 1 分、2 分、3 分、6 分, 答错任一题减 2 分;

② 每回答一题, 计分器显示累计分数, 当累计分数小于 8 分时, 答题结束, 淘汰出局; 当累计分数大于或等于 14 分时, 答题结束, 进入下一轮; 当答完四题, 累计分数仍不足 14 分时, 答题结束, 淘汰出局;

③ 每位参加者按问题 A、B、C、D 顺序作答, 直至答题结束.

假设甲同学对问题 A、B、C、D 回答正确的概率依次为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 且各题回答正确与否相互之间没有影响.

(1) 求甲同学能进入下一轮的概率;

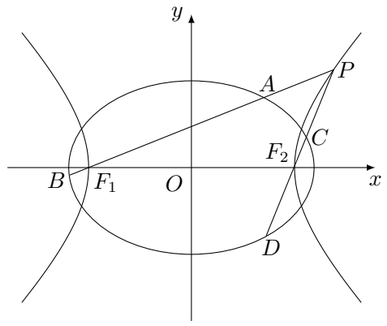
(2) 用 ξ 表示甲同学本轮答题结束时答题的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E\xi$.

21. 如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 以该椭圆上的点和椭圆的左、右焦点 F_1, F_2 为顶点的三角形的周长为 $4\left(\sqrt{2}+1\right)$. 一等轴双曲线的顶点是该椭圆的焦点, 设 P 为该双曲线上异于顶点的任一点, 直线 PF_1 和 PF_2 与椭圆的交点分别为 A、B 和 C、D.

(1) 求椭圆和双曲线的标准方程;

(2) 设直线 PF_1、PF_2 的斜率分别为 k_1、k_2, 证明: $k_1 \cdot k_2=1$;

(3) 是否存在常数 λ, 使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB| \cdot |CD|$ 恒成立? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



22. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\frac{1-a}{x}-1\ (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a \leqslant \frac{1}{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $g(x)=x^2-2bx+4$, 当 $a=\frac{1}{4}$ 时, 若对任意 $x_1 \in (0,2)$, 存在 $x_2 \in [1,2]$, 使 $f(x_1) \geqslant g(x_2)$, 求实数 b 的取值范围.

2010 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x\mid x^2-4\leqslant 0\}$, 则 $\complement_U M=$ （ ）

(A) $\{x\mid -2<x<2\}$　(B) $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$

(C) $\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}$　(D) $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 2\}$

2. 已知 $\dfrac{a+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=b+\mathrm{i}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$, 其中 i 为虚数单位, 则 $a+b=$ （ ）

(A) -1　(B) 1　(C) 2　(D) 3

3. 函数 $f(x)=\log_2(3^x+1)$ 的值域为 （ ）

(A) $(0,+\infty)$　(B) $[0,+\infty)$　(C) $(1,+\infty)$　(D) $[1,+\infty)$

4. 在空间, 下列命题正确的是 （ ）

(A) 平行直线的平行投影重合　(B) 平行于同一直线的两个平面平行

(C) 垂直于同一平面的两个平面平行　(D) 垂直于同一平面的两条直线平行

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=2^x+2x+b$ (b 为常数), 则 $f(-1)=$ （ ）

(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3

6. 在某项体育比赛中, 七位裁判为一选手打出的分数如下: 90, 89, 90, 95, 93, 94, 93. 去掉一个最高分和一个最低分后, 所剩数据的平均分值为和方差分别为 （ ）

(A) 92, 2　(B) 92, 2.8　(C) 93, 2　(D) 93, 2.8

7. 设 $\{a_n\}$ 是首项大于零的等比数列, 则“$a_1<a_2$”是“数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

8. 已知某生产厂家的年利润 y (单位: 万元) 与年产量 x (单位: 万件) 的函数关系式为 $y=-\dfrac{1}{3}x^3+81x-234$, 则使该生产厂家获得最大年利润的年产量为 （ ）

(A) 13 万件　(B) 11 万件　(C) 9 万件　(D) 7 万件

9. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$, 过其焦点且斜率为 1 的直线交抛物线于 A、B 两点, 若线段 AB 的中点的纵坐标为 2, 则该抛物线的准线方程为（ ）

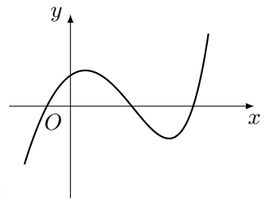
(A) $x=1$　(B) $x=-1$　(C) $x=2$　(D) $x=-2$

10. 观察 $(x^2)'=2x$, $(x^4)'=4x^3$, $(\cos x)'=-\sin x$, 由归纳推理可得: 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$, 记 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $g(-x)=$ （ ）

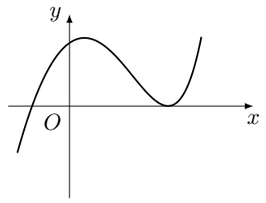
(A) $f(x)$　(B) $-f(x)$　(C) $g(x)$　(D) $-g(x)$

11. 函数 $y=2^x-x^2$ 的图象大致是 （ ）

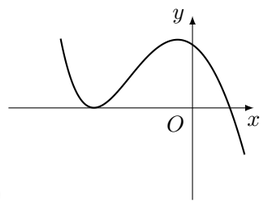
(A)



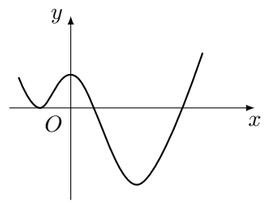
(B)



(C)



(D)



12. 定义平面向量之间的一种运算“$\odot$”如下: 对任意的 $\boldsymbol{a}=(m,n)$, $\boldsymbol{b}=(p,q)$. 令 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=mq-np$. 下面说法错误的是 （ ）

(A) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, 则 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=0$

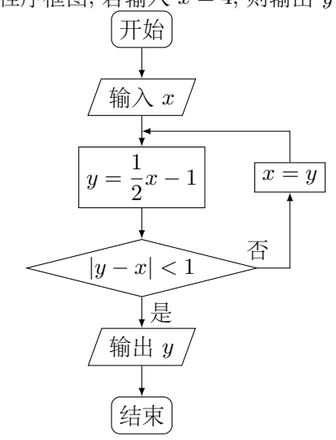
(B) $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a}$

(C) 对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$, 有 $(\lambda\boldsymbol{a})\odot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})$

(D) $(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$

二、填空题

13. 执行如图所示的程序框图, 若输入 $x=4$, 则输出 y 的值为_____.



14. 已知 $x,\ y\in\mathbf{R}_+$, 且满足 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$, 则 xy 的最大值为_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若 $a=\sqrt{2}$, $b=2$, $\sin B+\cos B=\sqrt{2}$, 则角 A 的大小为_____.

16. 已知圆 C 过点 $(1,0)$, 且圆心在 x 轴的正半轴上, 直线 l: $y=x-1$ 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则过圆心且与直线 l 垂直的直线的方程为_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin(\pi-\omega x)\cos\omega x+\cos^2\omega x$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1) 求 ω 的值;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求函数 $y=g(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{16}\right]$ 上的最小值.

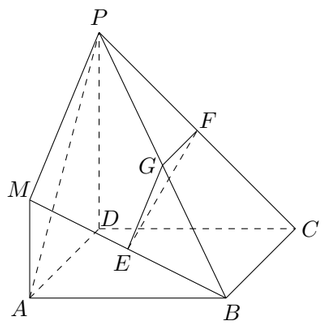
18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_3=7$, $a_5+a_7=26$. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1) 求 a_n 及 S_n;

(2) 令 $b_n=\dfrac{1}{a_n^2-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

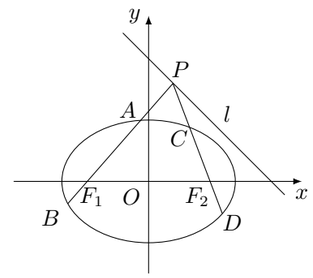
19. 一个袋中装有四个形状大小完全相同的球, 球的编号分别为 1, 2, 3, 4.
(1) 从袋中随机取两个球, 求取出的球的编号之和不大于 4 的概率;
(2) 先从袋中随机取一个球, 该球的编号为 m, 将球放回袋中, 然后再从袋中随机取一个球, 该球的编号为 n, 求 $n<m+2$ 的概率.

20. 在如图所示的几何体中, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $MA\perp$ 平面 $ABCD$, $PD/\!/MA$, E, G, F 分别为 MB, PB, PC 的中点, 且 $AD=PD=2MA$.
(1) 求证: 平面 $EFG\perp$ 平面 PDC;
(2) 求三棱锥 $P-MAB$ 与四棱锥 $P-ABCD$ 的体积之比.



21. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\dfrac{1-a}{x}-1$ $(a\in\mathbf{R})$.
(1) 当 $a=-1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程;
(2) 当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

22. 如图, 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 过点 $\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 左、右焦点分别为 F_1、F_2. 点 P 为直线 l: $x+y=2$ 上且不在 x 轴上的任意一点, 直线 PF_1 和 PF_2 与椭圆的交点分别为 A、B 和 C、D, O 为坐标原点.
(1) 求椭圆的标准方程;
(2) 设直线 PF_1、PF_2 的斜线分别为 k_1、k_2.
① 证明: $\dfrac{1}{k_1}-\dfrac{3}{k_2}=2$;
② 问直线 l 上是否存在点 P, 使得直线 OA、OB、OC、OD 的斜率 k_{OA}、k_{OB}、k_{OC}、k_{OD} 满足 $k_{OA}+k_{OB}+k_{OC}+k_{OD}=0$? 若存在, 求出所有满足条件的点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.



2010 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

理科数学

一、选择题

1. 集合 $A=\{x|\,-1\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x|\,x<1\}$, 则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ （ ）

(A) $\{x\,|\,x>1\}$　　(B) $\{x\,|\,x\geqslant 1\}$

(C) $\{x\,|\,1<x\leqslant 2\}$　　(D) $\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 2\}$

2. 复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 在复平面上对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3. 对于函数 $f(x)=2\sin x\cos x$, 下列选项中正确的是 （ ）

(A) 对于 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是递增的

(B) $f(x)$ 的图象关于原点对称

(C) $f(x)$ 的最小正周期为 2π

(D) $f(x)$ 的最大值为 2

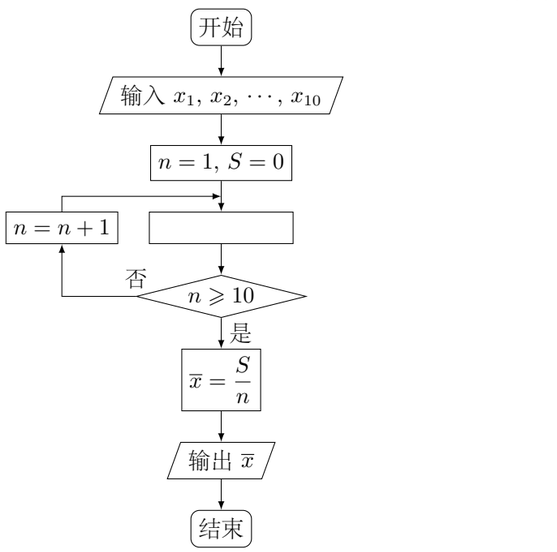
4. $\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^5$ ($x\in\mathbf{R}$) 展开式中 x^3 的系数为 10, 则实数 a 等于 （ ）

(A) -1　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, & x<1\\ x^2+ax, & x\geqslant 1\end{cases}$, 若 $f(f(0))=4a$, 则实数 a 等于 （ ）

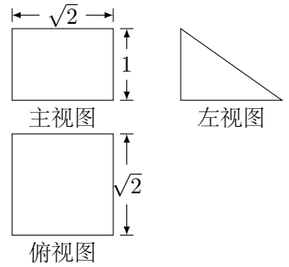
(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{4}{5}$　(C) 2　(D) 9

6. 如图所示是求样本 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 平均数 $\overline{x}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入的内容为 （ ）



(A) $S=S+x_n$　(B) $S=S+\dfrac{x_n}{n}$　(C) $S=S+n$　(D) $S=S+\dfrac{1}{n}$

7. 若某空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是 （ ）



(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) 1　(D) 2

8. 已知抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 的准线与圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 相切, 则 p 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) 2　(D) 4

9. 对于数列 $\{a_n\}$, "$a_{n+1}>|a_n|$ ($n=1,\ 2,\ \cdots$)"是"$\{a_n\}$ 为递增数列"的（ ）

(A) 必要不充分条件　(B) 充分不必要条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

10. 某学校要招开学生代表大会, 规定各班每 10 人推选一名代表, 当各班人数除以 10 的余数大于 6 时再增选一名代表. 那么, 各班可推选代表人数 y 与该班人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y=[x]$ ([x] 表示不大于 x 的最大整数) 可以表示为 （ ）

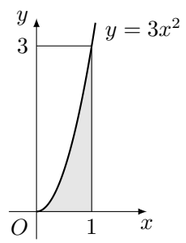
(A) $y=\left[\dfrac{x}{10}\right]$　(B) $y=\left[\dfrac{x+3}{10}\right]$　(C) $y=\left[\dfrac{x+4}{10}\right]$　(D) $y=\left[\dfrac{x+5}{10}\right]$

二、填空题

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,m)$, $\boldsymbol{c}=(-1,2)$, 若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\ /\!/\ \boldsymbol{c}$, 则 $m=$_____.

12. 观察下列等式: $1^3+2^3=3^2$, $1^3+2^3+3^3=6^2$, $1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$, $\cdots$, 根据上述规律, 第五个等式为_____.

13. 从如图所示的长方形区域内任取一个点 $M(x,y)$, 则点 M 取自阴影部分的概率为_____.



14. 铁矿石 A 和 B 的含铁率 a, 冶炼每万吨铁矿石的 CO_2 排放量 b 及每万吨铁矿石的价格 c 如下表:

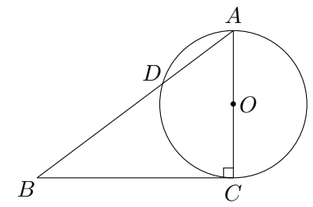
	a	b (万吨)	c (百万元)
A	50%	1	3
B	70%	0.5	6

某冶炼厂至少要生产 1.9 (万吨) 铁, 若要求 CO_2 的排放量不超过 2 (万吨), 则购买铁矿石的最少费用为_____(百万元).

15. 三选一.

【A】不等式 $|x+3|-|x-2|\geqslant 3$ 的解集为_____.

【B】如图, 已知 Rt$\triangle ABC$ 的两条直角边 AC, BC 的长分别为 3 cm, 4 cm, 以 AC 为直径的圆与 AB 交于点 D, 则 $\dfrac{BD}{DA}=$_____.



【C】已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数), 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\theta=1$, 则直线 l 与圆 C 的交点的直角坐标为_____.

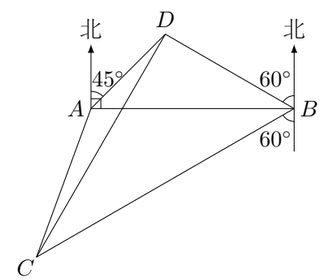
三、解答题

16. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, $a_1=1$ 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 求数列 $\{2^{a_n}\}$ 的前 n 项和 S_n.

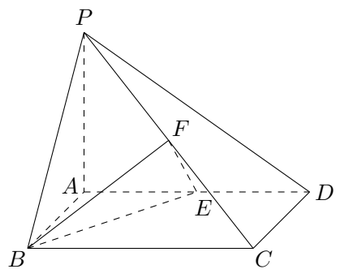
17. 如图, A, B 是海面上位于东西方向相距 $5\left(3+\sqrt{3}\right)$ 海里的两个观测点. 现位于 A 点北偏东 45°, B 点北偏西 60° 的 D 点有一艘轮船发出求救信号, 位于 B 点南偏西 60° 且与 B 点相距 $20\sqrt{3}$ 海里的 C 点的救援船立即前往营救, 其航行速度为 30 海里/小时, 该救援船到达 D 点需要多长时间?



18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AP=AB=2$, $BC=2\sqrt{2}$, E, F 分别是 AD, PC 的中点.

(1) 证明: $PC\perp$ 平面 BEF;

(2) 求平面 BEF 与平面 BAP 夹角的大小.

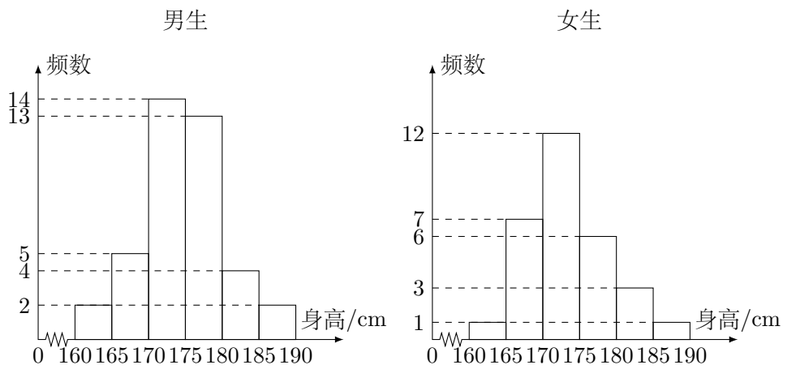


19. 为了解学生身高情况, 某校以 10% 的比例对全校 700 名学生按性别进行分层抽样调查, 测得身高情况的统计图如下:

(1) 估计该校男生的人数;

(2) 估计该校学生身高在 $170\sim185$ cm 之间的概率;

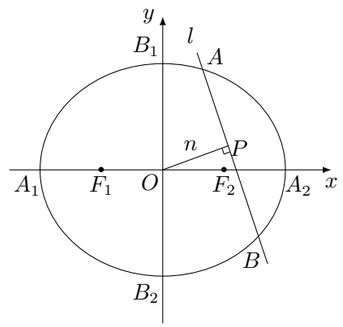
(3) 从样本中身高在 $165\sim180$ cm 之间的女生中任选 2 人, 求至少有 1 人身高在 $170\sim180$ cm 之间的概率.



20. 如图, 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的顶点为 A_1, A_2, B_1, B_2, 焦点为 F_1, F_2, $|A_1B_1|=\sqrt{7}$, $S_{\square A_1B_1A_2B_2}=2S_{\square B_1F_1B_2F_2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 n 是过原点的直线, l 是与 n 垂直相交于 P 点、与椭圆相交于 A, B 两点的直线, $\left|\overrightarrow{OP}\right|=1$. 是否存在上述直线 l 使 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}=1$ 成立? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=a\ln x$, $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 相交, 且在交点处有共同的切线, 求 a 的值和该切线方程;

(2) 设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$, 当 $h(x)$ 存在最小值时, 求其最小值 $\varphi(a)$ 的解析式;

(3) 对 (2) 中的 $\varphi(a)$ 和任意的 $a>0$, $b>0$, 证明: $\varphi'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{\varphi'(a)+\varphi'(b)}{2}\leqslant\varphi'\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)$.

2010 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

文科数学

一、选择题

1. 集合 $A=\{x|\,-1\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x|\,x<1\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{x\,|\,x<1\}$　(B) $\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 2\}$

(C) $\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1\}$　(D) $\{x\,|\,-1\leqslant x<1\}$

2. 复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 在复平面上对应的点位于 （　）

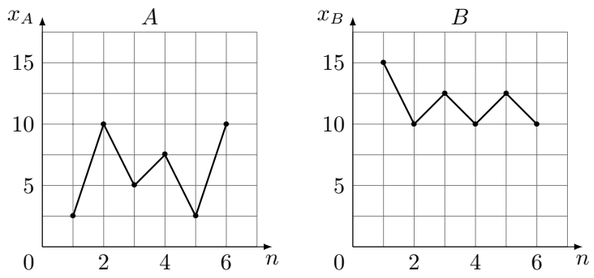
(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3. 函数 $f(x)=2\sin x\cos x$ 是

(A) 最小正周期为 2π 的奇函数　(B) 最小正周期为 2π 的偶函数

(C) 最小正周期为 π 的奇函数　(D) 最小正周期为 π 的偶函数

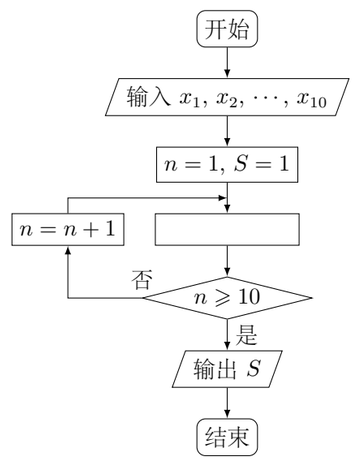
4. 如图, 样本 A 和 B 分别取自两个不同的总体, 它们的样本平均数分别为 $\overline{x}_A$ 和 $\overline{x}_B$, 样本标准差分别为 s_A 和 s_B, 则 （　）



(A) $\overline{x}_A>\overline{x}_B$, $s_A>s_B$　(B) $\overline{x}_A<\overline{x}_B$, $s_A>s_B$

(C) $\overline{x}_A>\overline{x}_B$, $s_A<s_B$　(D) $\overline{x}_A<\overline{x}_B$, $s_A<s_B$

5. 如图是求 x_1, x_2, $\cdots$, x_{10} 的乘积 S 的程序框图, 图中空白框中应填入的内容为 （　）



(A) $S=S*(n+1)$(B) $S=S*x_{n+1}$　(C) $S=S*n$　(D) $S=S*x_n$

6. “$a>0$”是“$|a|>0$”的 （　）

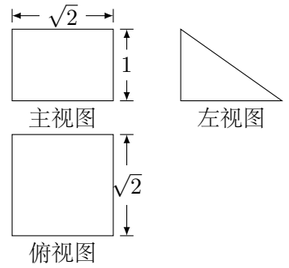
(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 下列四类函数中, 具有性质“对任意的 $x>0$, $y>0$, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$”的是 （　）

(A) 幂函数　(B) 对数函数　(C) 指数函数　(D) 余弦函数

8. 若某空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是 （　）



(A) 2　(B) 1　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{1}{3}$

9. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线与圆 $(x-3)^2+y^2=16$ 相切, 则 p 的值为 （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) 2　(D) 4

10. 某学校要招开学生代表大会, 规定各班每 10 人推选一名代表, 当各班人数除以 10 的余数大于 6 时再增选一名代表. 那么, 各班可推选代表人数 y 与该班人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y=[x]$ ($[x]$ 表示不大于 x 的最大整数) 可以表示为 （　）

(A) $y=\left[\dfrac{x}{10}\right]$　(B) $y=\left[\dfrac{x+3}{10}\right]$　(C) $y=\left[\dfrac{x+4}{10}\right]$　(D) $y=\left[\dfrac{x+5}{10}\right]$

二、填空题

11. 观察下列等式: $1^3+2^3=3^2$, $1^3+2^3+3^3=6^2$, $1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$, $\cdots$, 根据上述规律, 第四个等式为_____.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,m)$, $\boldsymbol{c}=(-1,2)$, 若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\ /\!/\ \boldsymbol{c}$, 则 $m=$_____.

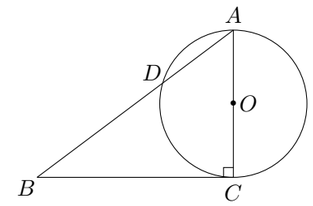
13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x<1\\ x^2+ax, & x\geqslant 1\end{cases}$, 若 $f(f(0))=4a$, 则实数 $a=$_____.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\leqslant 4\\ x-y\leqslant 1\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=3x-y$ 的最大值为_____.

15. 三选一.

【A】不等式 $|2x-1|<3$ 的解集为_____.

【B】如图, 已知 Rt$\triangle ABC$ 的两条直角边 AC, BC 的长分别为 3 cm, 4 cm, 以 AC 为直径的圆与 AB 交于点 D, 则 $BD=$_____.



【C】参数方程 $\begin{cases}x=\cos\alpha\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数) 化成普通方程为_____.

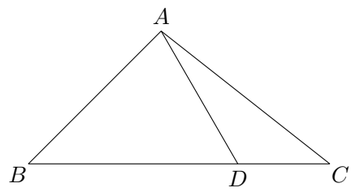
三、解答题

16. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, $a_1=1$ 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 求数列 $\{2^{a_n}\}$ 的前 n 项和 S_n.

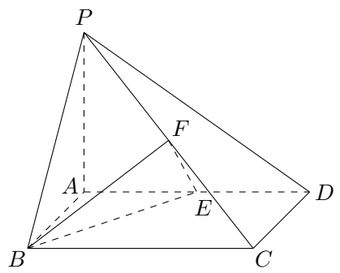
17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle B=45^\circ$, D 是 BC 边上的一点, $AD=10$, $AC=14$, $DC=6$, 求 AB 的长.



18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AP=AB=2$, $BC=2\sqrt{2}$, E, F 分别是 AD, PC 的中点.

(1) 证明: $PC\perp$ 平面 BEF;

(2) 求平面 BEF 与平面 BAP 夹角的大小.

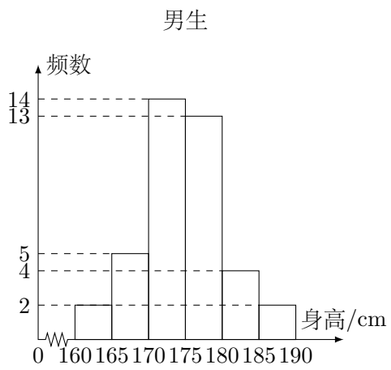


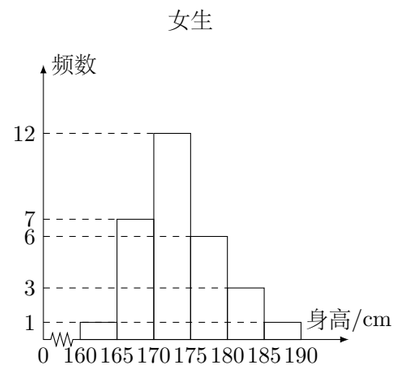
19. 为了解学生身高情况, 某校以 10% 的比例对全校 700 名学生按性别进行分层抽样调查, 测得身高情况的统计图如下:

(1) 估计该校男生的人数;

(2) 估计该校学生身高在 $170\sim185$ cm 之间的概率;

(3) 从样本中身高在 $165\sim180$ cm 之间的女生中任选 2 人, 求至少有 1 人身高在 $170\sim180$ cm 之间的概率.

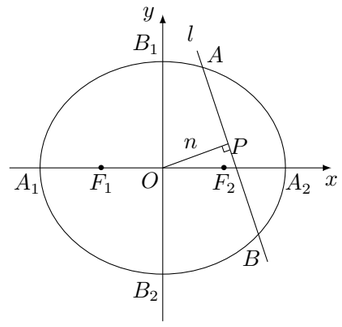




20. 如图, 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的顶点为 A_1, A_2, B_1, B_2, 焦点为 F_1, F_2, $|A_1B_1|=\sqrt{7}$, $S_{\square A_1B_1A_2B_2}=2S_{\square B_1F_1B_2F_2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 n 是过原点的直线, l 是与 n 垂直相交于 P 点、与椭圆相交于 A, B 两点的直线, $\left|\overrightarrow{OP}\right|=1$. 是否存在上述直线 l 使 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}=1$ 成立? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=a\ln x$, $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 相交, 且在交点处有共同的切线, 求 a 的值和该切线方程;

(2) 设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$, 当 $h(x)$ 存在最小值时, 求其最小值 $\varphi(a)$ 的解析式;

(3) 对 (2) 中的 $\varphi(a)$ 和任意的 $a>0$, $b>0$, 证明: $\varphi'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{\varphi'(a)+\varphi'(b)}{2}\leqslant\varphi'\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)$.

2010 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 不等式 $\dfrac{2-x}{x+4}>0$ 的解集为_____.

2. 若复数 $z=1-2\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 $z\cdot\overline{z}+z=$_____.

3. 动点 P 到点 $F(2,0)$ 的距离与它到直线 $x+2=0$ 的距离相等, 则点 P 的轨迹方程为_____.

4. 行列式 $\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3} & \sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{6}\end{vmatrix}$ 的值是_____.

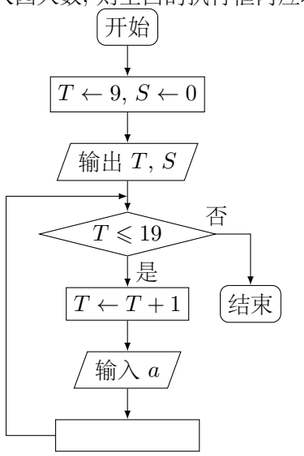
5. 圆 C: $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 的圆心到直线 l: $3x+4y+4=0$ 的距离 $d=$_____.

6. 随机变量 ξ 的概率分布由下表给出:

x	7	8	9	10
$P(\xi=x)$	0.3	0.35	0.2	0.15

则该随机变量 ξ 的均值是_____.

7. 2010 年上海世博会园区每天 9 : 00 开园, 20 : 00 停止入园. 在下边的框图中, S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数, a 表示整点报道前 1 个小时内入园人数, 则空白的执行框内应填入_____.



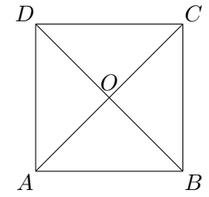
8. 对任意不等于 1 的正数 a, 函数 $f(x)=\log_a(x+3)$ 的反函数的图象都经过点 P, 则点 P 的坐标为_____.

9. 从一副混合后的扑克牌 (52 张) 中, 随机抽取 1 张, 事件 A 为“抽得红桃 K”, 事件 B 为“抽得为黑桃”, 则概率 $P(A\cup B)=$_____. (结果用最简分数表示)

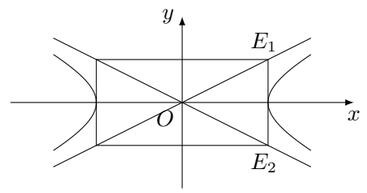
10. 在 n 行 n 列矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1\end{pmatrix}$ 中, 记位于第 i 行第 j 列的数为 a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 当 $n=9$ 时, $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=$_____.

11. 将直线 l_1: $nx+y-n=0$, l_2: $x+ny-n=0$ $(n\in\mathbf{N}^*,\ n\geqslant 2)$, x 轴, y 轴围成的封闭区域的面积记为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$_____.

12. 如图所示, 在边长为 4 的正方形纸片 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O, 剪去 $\triangle AOB$, 将剩余部分沿 OC、OD 折叠, 使 OA、OB 重合, 则以 $A(B)$、C、D、O 为顶点的四面体的体积是_____.



13. 如图所示, 直线 $x=2$ 与双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线交于 E_1、E_2 两点, 记 $\overrightarrow{OE_1}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OE_2}=\vec{e_2}$, 任取双曲线 Γ 上的点 P, 若 $\overrightarrow{OP}=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$, 则 a、b 满足的一个等式是_____.



14. 从集合 $U=\{a,b,c,d\}$ 的子集中选出 4 个不同的子集, 需同时满足以下两个条件:
(1) $\varnothing$, U 都要选出;
(2) 对选出的任意两个子集 A 和 B, 必有 $A\subseteq B$ 或 $A\supseteq B$.
那么, 共有_____种不同的选法.

二、选择题

15. “$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$”是“$\tan x=1$”成立的 ( )
(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

16. 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-t\end{cases}$ $(t\in\mathbf{R})$, 则 l 的方向向量 $\vec{d}$ 可以是 ( )
(A) $(1,2)$　(B) $(2,1)$　(C) $(-2,1)$　(D) $(1,-2)$

17. 若 x_0 是方程 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=x^{\frac{1}{3}}$ 的解, 则 x_0 属于区间 ( )
(A) $\left(\dfrac{2}{3},1\right)$　(B) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$　(C) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$　(D) $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

18. 某人要作一个三角形, 要求它的三条高的长度分别是 $\dfrac{1}{13}$、$\dfrac{1}{11}$、$\dfrac{1}{5}$, 则此人将 ( )
(A) 不能作出满足要求的三角形　(B) 作出一个锐角三角形
(C) 作出一个直角三角形　(D) 作出一个钝角三角形

三、解答题

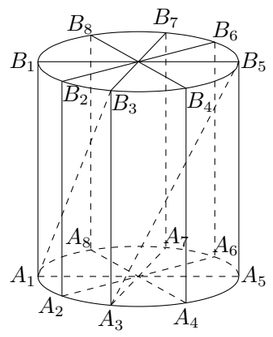
19. 已知 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 化简:
$$\lg\left(\cos x\cdot\tan x+1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)+\lg\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]-\lg(1+\sin 2x).$$

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_n=n-5a_n-85$, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 证明: $\{a_n-1\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并指出 n 为何值时, S_n 取得最小值, 并说明理由.

21. 如图所示, 为了制作一个圆柱形灯笼, 先要制作 4 个全等的矩形骨架, 总计耗用 9.6 米铁丝. 骨架将圆柱底面 8 等分, 再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面 (不安装上底面).

(1) 当圆柱底面半径 r 取何值时, S 取得最大值? 并求出该最大值 (结果精确到 0.01 平方米);

(2) 在灯笼内, 以矩形骨架的顶点为端点, 安装一些霓虹灯. 当灯笼底面半径为 0.3 米时, 求图中两根直线型霓虹灯 A_1B_3、A_3B_5 所在异面直线所成角的的大小 (结果用反三角函数表示)



22. 若实数 x、y、m 满足 $|x-m|>|y-m|$, 则称 x 比 y 远离 m.

(1) 若 x^2-1 比 1 远离 0, 求 x 的取值范围;

(2) 对任意两个不相等的正数 a、b, 证明: a^3+b^3 比 a^2b+ab^2 远离 $2ab\sqrt{ab}$;

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D=\left\{x\mid x\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$. 任取 $x\in D$, $f(x)$ 等于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 中远离 0 的那个值. 写出函数 $f(x)$ 的解析式, 并指出它的基本性质 (结论不要求证明).

23. 已知椭圆 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 点 P 的坐标为 $(-a,b)$.

(1) 若直角坐标平面上的点 M、$A(0,-b)$、$B(a,0)$ 满足 $\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)$, 求点 M 的坐标;

(2) 设直线 l_1: $y=k_1x+p$ 交椭圆 Γ 于 C、D 两点, 交直线 l_2: $y=k_2x$ 于点 E. 若 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}$, 证明: E 为 CD 的中点;

(3) 对于椭圆 Γ 上的点 $Q(a\cos\theta,b\sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$, 如果椭圆 Γ 上存在不同的两点 P_1、P_2 使 $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$, 写出求作点 P_1、P_2 的步骤, 并求出使 P_1、P_2 存在的 θ 满足的条件.

2010 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,3,m\}$, $B=\{3,4\}$, $A\cup B=\{1,2,3,4\}$, 则 $m=$_____.

2. 不等式 $\dfrac{2-x}{x+4}>0$ 的解集是_____.

3. 行列式 $\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\pi}{6} & \sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6}\end{vmatrix}$ 的值是_____.

4. 若复数 $z=1-2\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 $z\cdot\overline{z}+z=$_____.

5. 将一个总体为 A、B、C 三层, 其个体数之比为 $5:3:2$. 若用分层抽样方法抽取容量为 100 的样本, 则应从中抽取_____个个体.

6. 已知四棱椎 $P-ABCD$ 的底面是边长为 6 的正方形, 侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=8$, 则该四棱椎的体积是_____.

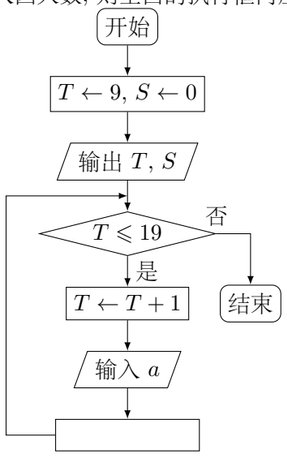
7. 圆 C: $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 的圆心到直线 l: $3x+4y+4=0$ 的距离 $d=$_____.

8. 动点 P 到点 $F(2,0)$ 的距离与它到直线 $x+2=0$ 的距离相等, 则点 P 的轨迹方程为_____.

9. 函数 $f(x)=\log_3(x+3)$ 的反函数的图象与 y 轴的交点坐标是_____.

10. 从一副混合后的扑克牌 (52 张) 中随机抽取 2 张, 则“抽出的 2 张均为红桃”的概率为_____. (结果用最简分数表示)

11. 2010 年上海世博会园区每天 9 : 00 开园, 20 : 00 停止入园. 在下边的框图中, S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数, a 表示整点报道前 1 个小时内入园人数, 则空白的执行框内应填入_____.



12. 在 n 行 n 列矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1\end{pmatrix}$ 中, 记位于第 i 行第 j 列的数为 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 当 $n=9$ 时, $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=$_____.

13. 在平面直角坐标系中, 双曲线 Γ 的中心在原点, 它的一个焦点坐标为 $(\sqrt{5},0)$, $\vec{e_1}=(2,1)$, $\vec{e_2}=(2,-1)$ 分别是两条渐近线的方向向量. 任取双曲线 Γ 上的点 P, 若 $\overrightarrow{OP}=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$, 则 a、b 满足的一个等式是_____.

14. 将直线 l_1: $x+y-1=0$, l_2: $nx+y-n=0$, l_3: $x+ny-n=0$ $(n\in\mathbf{N}^*,\ n\geqslant 2)$ 围成的三角形面积记为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$_____.

二、选择题

15. 满足线性约束条件 $\begin{cases}2x+y\leqslant 3\\ x+2y\leqslant 3\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 的目标函数 $z=x+y$ 的最大值是(　　)

(A) 1　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) 2　　(D) 3

16. “$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$”是“$\tan x=1$”成立的　　(　　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

17. 若 x_0 是方程 $\lg x+x=2$ 的解, 则 x_0 属于区间　　(　　)

(A) $(0,1)$　　(B) $(1,1.25)$　　(C) $(1.25,1.75)$　　(D) $(1.75,2)$

18. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角满足 $\sin A:\sin B:\sin C=5:11:13$, 则 $\triangle ABC$　　(　　)

(A) 一定是锐角三角形

(B) 一定是直角三角形

(C) 一定是钝角三角形

(D) 可能是锐角三角形, 也可能是钝角三角形

三、解答题

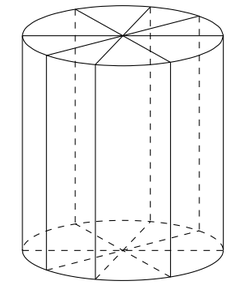
19. 已知 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 化简:

$$\lg\left(\cos x\cdot\tan x+1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)+\lg\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]-\lg(1+\sin 2x).$$

20. 如图所示, 为了制作一个圆柱形灯笼, 先要制作 4 个全等的矩形骨架, 总计耗用 9.6 米铁丝, 再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面 (不安装上底面).

(1) 当圆柱底面半径 r 取何值时, S 取得最大值? 并求出该最大值 (结果精确到 0.01 平方米);

(2) 若要制作一个如图放置的, 底面半径为 0.3 米的灯笼, 请作出用于灯笼的三视图 (作图时, 不需考虑骨架等因素).



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_n = n - 5a_n - 85$, $n \in \mathbf{N}^*$.
(1) 证明: $\{a_n - 1\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并求出使得 $S_{n+1} > S_n$ 成立的最小正整数 n.

22. 若实数 x、y、m 满足 $|x - m| < |y - m|$, 则称 x 比 y 接近 m.
(1) 若 $x^2 - 1$ 比 3 接近 0, 求 x 的取值范围;
(2) 对任意两个不相等的正数 a、b, 证明: $a^2b + ab^2$ 比 $a^3 + b^3$ 接近 $2ab\sqrt{ab}$;
(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D = \{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{R}\}$. 任取 $x \in D$, $f(x)$ 等于 $1 + \sin x$ 和 $1 - \sin x$ 中接近 0 的那个值. 写出函数 $f(x)$ 的解析式, 并指出它的奇偶性、最小正周期、最小值和单调性 (结论不要求证明).

23. 已知椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, $A(0, b)$、$B(0, -b)$ 和 $Q(a, 0)$ 为 Γ 的三个顶点.
(1) 若点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB}\right)$, 求点 M 的坐标;
(2) 设直线 l_1: $y = k_1x + p$ 交椭圆 Γ 于 C、D 两点, 交直线 l_2: $y = k_2x$ 于点 E. 若 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$, 证明: E 为 CD 的中点;
(3) 设点 P 在椭圆 Γ 内且不在 x 轴上, 如何作过 PQ 中点 F 的直线 l, 使得 l 与椭圆 Γ 两个交点 P_1、P_2 满足 $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$? 令 $a = 10$, $b = 5$, 点 P 的坐标是 $(-8, -1)$. 若椭圆 Γ 上的点 P_1、P_2 满足 $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$, 求点 P_1、P_2 的坐标.

2010 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

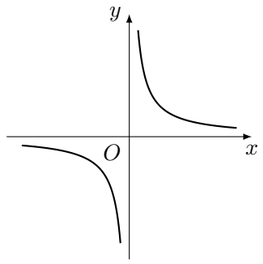
一、选择题

1. i 是虚数单位, 计算 $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3=$ （　）

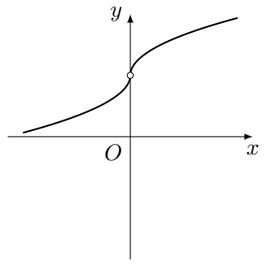
(A) -1　　(B) 1　　(C) $-\mathrm{i}$　　(D) i

2. 下列四个图象所表示的函数, 在点 $x=0$ 处连续的是 （　）

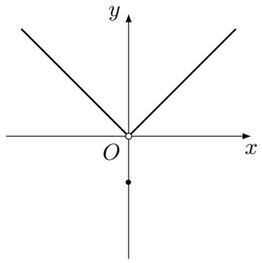
(A)



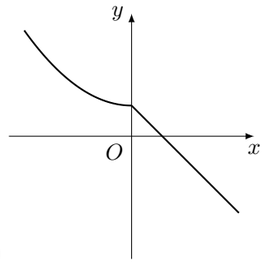
(B)



(C)



(D)



3. $2\log_5 10+\log_5 0.25=$ （　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

4. 函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是（　）

(A) $m=-2$　　(B) $m=2$　　(C) $m=-1$　　(D) $m=1$

5. 设点 M 是线段 BC 的中点, 点 A 在直线 BC 外, $\overrightarrow{BC}^2=16$, $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$, 则 $\overrightarrow{AM}=$ （　）

(A) 8　　(B) 4　　(C) 2　　(D) 1

6. 将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向右平行移动 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象的函数解析式是 （　）

(A) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{10}\right)$　　(B) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$

(C) $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{10}\right)$　　(D) $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{20}\right)$

7. 某加工厂用某原料由甲车间加工出 A 产品, 由乙车间加工出 B 产品. 甲车间加工一箱原料需耗费工时 10 小时可加工出 7 千克 A 产品, 每千克 A 产品获利 40 元. 乙车间加工一箱原料需耗费工时 6 小时可加工出 4 千克 B 产品, 每千克 B 产品获利 50 元. 甲、乙两车间每天共能完成至多 70 箱原料的加工, 每天甲、乙两车间耗费工时总和不得超过 480 小时, 甲、乙两车间每天总获利最大的生产计划为 （　）

(A) 甲车间加工原料 10 箱, 乙车间加工原料 60 箱

(B) 甲车间加工原料 15 箱, 乙车间加工原料 55 箱

(C) 甲车间加工原料 18 箱, 乙车间加工原料 50 箱

(D) 甲车间加工原料 40 箱, 乙车间加工原料 30 箱

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1\neq 0$, 其前 n 项和为 S_n, 且 $S_{n+1}=2S_n+a_1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=$ （　）

(A) 0　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) 1　　(D) 2

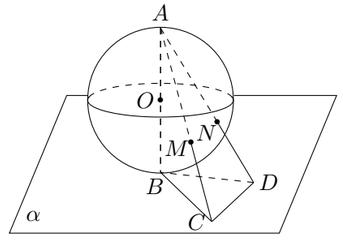
9. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点为 F, 其右准线与 x 轴的交点为 A, 在椭圆上存在点 P 满足线段 AP 的垂直平分线过点 F, 则椭圆离心率的取值范围是 （　）

(A) $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　(B) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　(C) $\left[\sqrt{2}-1,1\right)$　　(D) $\left[\frac{1}{2},1\right)$

10. 由 1、2、3、4、5、6 组成没有重复数字且 1、3 都不与 5 相邻的六位偶数的个数是 （　）

(A) 72　　(B) 96　　(C) 108　　(D) 144

11. 半径为 R 的球 O 的直径 AB 垂直于平面 α, 垂足为 B, $\triangle BCD$ 是平面 α 内边长为 R 的正三角形, 线段 AC、AD 分别与球面交于点 M、N, 那么 M、N 两点间的球面距离是 （　）



(A) $R\arccos\frac{17}{25}$　　(B) $R\arccos\frac{18}{25}$　　(C) $\frac{1}{3}\pi R$　　(D) $\frac{4}{15}\pi R$

12. 设 $a>b>c>0$, 则 $2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$ 的最小值是（　）

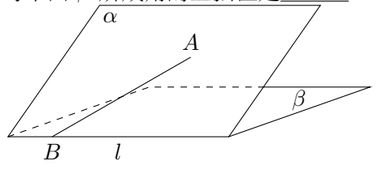
(A) 2　　(B) 4　　(C) $2\sqrt{5}$　　(D) 5

二、填空题

13. $\left(2-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$ 的展开式中的第四项是_____.

14. 直线 $x-2y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=8$ 相交于 A、B 两点, 则 $|AB|=$_____.

15. 如图, 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小是 60°, $AB\subset\alpha$, $B\in l$, AB 与 l 所成的角为 30°, 则 AB 与平面 β 所成角的正弦值是_____.



16. 设 S 为复数集 $\mathbf{C}$ 的非空子集. 若对任意 x, $y\in S$, 都有 $x+y$, $x-y$, $xy\in S$, 则称 S 为封闭集. 下列命题:

① 集合 $S=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b$ 为整数, i 为虚数单位 $\}$ 为封闭集;

② 若 S 为封闭集, 则一定有 $0\in S$;

③ 封闭集一定是无限集;

④ 若 S 为封闭集, 则满足 $S\subseteq T\subseteq\mathbf{C}$ 的任意集合 T 也是封闭集.

其中真命题是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 某种有奖销售的饮料, 瓶盖内印有“奖励一瓶”或“谢谢购买”字样, 购买一瓶若其瓶盖内印有“奖励一瓶”字样即为中奖, 中奖概率为 $\frac{1}{6}$. 甲、乙、丙三位同学每人购买了一瓶该饮料.

(1) 求甲中奖且乙、丙都没有中奖的概率;

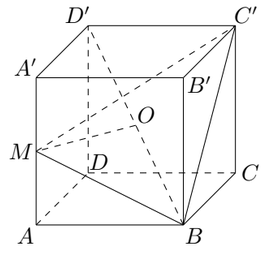
(2) 求中奖人数 ξ 的分布列及数学期望 E_ξ.

18. 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 1, 点 M 是棱 AA' 的中点, 点 O 是对角线 BD' 的中点.

(1) 求证: OM 为异面直线 AA' 和 BD' 的公垂线;

(2) 求二面角 $M-BC'-B'$ 的大小;

(3) 求三棱锥 $M-OBC$ 的体积.



19. (1) ① 证明两角和的余弦公式 $C_{(\alpha+\beta)}$: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

② 由 $C_{(\alpha+\beta)}$ 推导两角和的正弦公式 $S_{(\alpha+\beta)}$: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$, 且 $\cos B=\dfrac{3}{5}$, 求 $\cos C$.

20. 已知定点 $A(-1,0)$, $F(2,0)$, 定直线 l: $x=\dfrac{1}{2}$, 不在 x 轴上的动点 P 与点 F 的距离是它到直线 l 的距离的 2 倍. 设点 P 的轨迹为 E, 过点 F 的直线交 E 于 B、C 两点, 直线 AB、AC 分别交 l 于点 M、N.

(1) 求 E 的方程;

(2) 试判断以线段 MN 为直径的圆是否过点 F, 并说明理由.

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$, $a_2=2$, 且对任意 m, $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_{2m-1}+a_{2n-1}=2a_{m+n-1}+2(m-n)^2$.

(1) 求 a_3, a_5;

(2) 设 $b_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(3) 设 $c_n=(a_{n+1}-a_n)\,q^{n-1}$ $(q\neq 0,\ n\in\mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

22. 设 $f(x)=\dfrac{1+a^x}{1-a^x}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数.

(1) 设关于 x 的方程 $\log_a\dfrac{t}{(x^2-1)(7-x)}=g(x)$ 在区间 $[2,6]$ 上有实数解, 求 t 的取值范围;

(2) 当 $a=\mathrm{e}$ (e 为自然对数的底数) 时, 证明: $\sum\limits_{k=2}^{n}g(k)>\dfrac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}$;

(3) 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 试比较 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-n\right|$ 与 4 的大小, 并说明理由.

2010 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

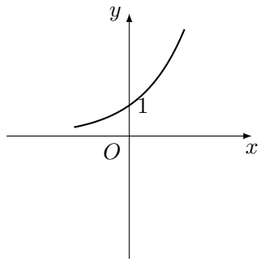
一、选择题

1. 设集合 $A=\{3,5,6,8\}$, 集合 $B=\{4,5,7,8\}$, 则 $A\cap B$ 等于 （ ）

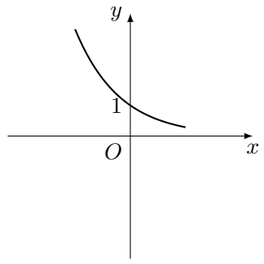
(A) $\{3,4,5,6,7,8\}$(B) $\{3,6\}$ (C) $\{4,7\}$ (D) $\{5,8\}$

2. 函数 $y=\log_2 x$ 的图象大致是 （ ）

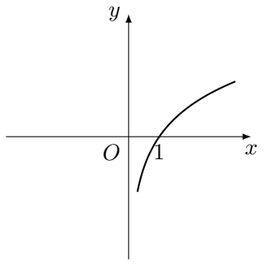
(A)



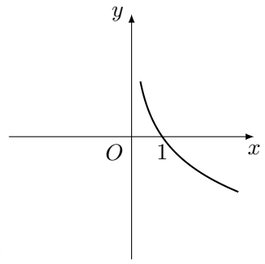
(B)



(C)



(D)



3. 抛物线 $y^2=8x$ 的焦点到准线的距离是 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

4. 一个单位有职工 800 人, 其中具有高级职称的 160 人, 具有中级职称的 320 人, 具有初级职称的 200 人, 其余人员 120 人. 为了解职工收入情况, 决定采用分层抽样的方法, 从中抽取容量为 40 的样本. 则从上述各层中依次抽取的人数分别是 （ ）

(A) 12, 24, 15, 9 (B) 9, 12, 12, 7 (C) 8, 15, 12, 5 (D) 8, 16, 10, 6

5. 函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是（ ）

(A) $m=-2$ (B) $m=2$ (C) $m=-1$ (D) $m=1$

6. 设点 M 是线段 BC 的中点, 点 A 在直线 BC 外, $\overrightarrow{BC}^2=16$, $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$, 则 $\overrightarrow{AM}=$ （ ）

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 1

7. 将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向右平行移动 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象的函数解析式是 （ ）

(A) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{10}\right)$ (B) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$

(C) $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{10}\right)$ (D) $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{20}\right)$

8. 某加工厂用某原料由甲车间加工出 A 产品, 由乙车间加工出 B 产品. 甲车间加工一箱原料需耗费工时 10 小时可加工出 7 千克 A 产品, 每千克 A 产品获利 40 元. 乙车间加工一箱原料需耗费工时 6 小时可加工出 4 千克 B 产品, 每千克 B 产品获利 50 元. 甲、乙两车间每天共能完成至多 70 箱原料的加工, 每天甲、乙两车间耗费工时总和不得超过 480 小时, 甲、乙两车间每天总获利最大的生产计划为 （ ）

(A) 甲车间加工原料 10 箱, 乙车间加工原料 60 箱

(B) 甲车间加工原料 15 箱, 乙车间加工原料 55 箱

(C) 甲车间加工原料 18 箱, 乙车间加工原料 50 箱

(D) 甲车间加工原料 40 箱, 乙车间加工原料 30 箱

9. 由 1、2、3、4、5 组成没有重复数字且 1、2 都不与 5 相邻的五位数的个数是 （ ）

(A) 36 (B) 32 (C) 28 (D) 24

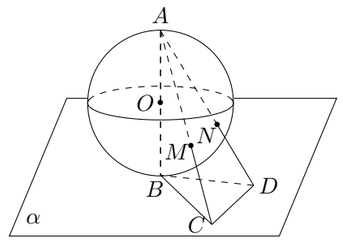
10. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点为 F, 其右准线与 x 轴的交点为 A, 在椭圆上存在点 P 满足线段 AP 的垂直平分线过点 F, 则椭圆离心率的取值范围是 （ ）

(A) $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (B) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ (C) $\left[\sqrt{2}-1,1\right)$ (D) $\left[\frac{1}{2},1\right)$

11. 设 $a>b>0$, 则 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 半径为 R 的球 O 的直径 AB 垂直于平面 α, 垂足为 B, $\triangle BCD$ 是平面 α 内边长为 R 的正三角形, 线段 AC、AD 分别与球面交于点 M、N, 那么 M、N 两点间的球面距离是 （ ）



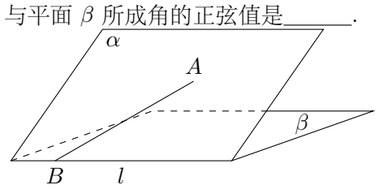
(A) $R\arccos\frac{17}{25}$ (B) $R\arccos\frac{18}{25}$ (C) $\frac{1}{3}\pi R$ (D) $\frac{4}{15}\pi R$

二、填空题

13. $\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$ 的展开式中的常数项为_____. (用数字作答)

14. 直线 $x-2y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=8$ 相交于 A、B 两点, 则 $|AB|=$_____.

15. 如图, 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小是 $60°$, $AB\subset\alpha$, $B\in l$, AB 与 l 所成的角为 $30°$, 则 AB 与平面 β 所成角的正弦值是_____.



16. 设 S 为实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集, 若对任意 x, $y\in S$, 都有 $x+y$, $x-y$, $xy\in S$, 则称 S 为封闭集. 下列命题:

① 集合 $S=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b$ 为整数 $\}$ 为封闭集;

② 若 S 为封闭集, 则一定有 $0\in S$;

③ 封闭集一定是无限集;

④ 若 S 为封闭集, 则满足 $S\subseteq T\subseteq\mathbf{R}$ 的任意集合 T 也是封闭集.

其中的真命题是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 某种有奖销售的饮料, 瓶盖内印有“奖励一瓶”或“谢谢购买”字样, 购买一瓶若其瓶盖内印有“奖励一瓶”字样即为中奖, 中奖概率为 $\frac{1}{6}$. 甲、乙、丙三位同学每人购买了一瓶该饮料.

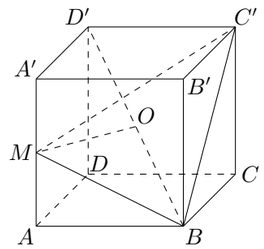
(1) 求三位同学都没有中奖的概率;

(2) 求三位同学中至少有两位没有中奖的概率.

18. 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 1, 点 M 是棱 AA' 的中点, 点 O 是对角线 BD' 的中点.

(1) 求证: OM 为异面直线 AA' 和 BD' 的公垂线;

(2) 求二面角 $M-BC'-B'$ 的大小.



19. (1) ① 证明两角和的余弦公式 $C_{(\alpha+\beta)}$: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

② 由 $C_{(\alpha+\beta)}$ 推导两角和的正弦公式 $S_{(\alpha+\beta)}$: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

(2) 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\tan\beta=-\dfrac{1}{3}$, $\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 求 $\cos(\alpha+\beta)$.

20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 6, 前 8 项和为 -4.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=(4-a_n)\,q^{n-1}$ $(q\neq 0,\ n\in\mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21. 已知定点 $A(-1,0)$, $F(2,0)$, 定直线 l: $x=\dfrac{1}{2}$, 不在 x 轴上的动点 P 与点 F 的距离是它到直线 l 的距离的 2 倍. 设点 P 的轨迹为 E, 过点 F 的直线交 E 于 B、C 两点, 直线 AB、AC 分别交 l 于点 M、N.

(1) 求 E 的方程;

(2) 试判断以线段 MN 为直径的圆是否过点 F, 并说明理由.

22. 设 $f(x)=\dfrac{1+a^x}{1-a^x}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数.

(1) 求 $g(x)$;

(2) 当 $x\in[2,6]$ 时, 恒有 $g(x)>\log_a\dfrac{t}{(x^2-1)(7-x)}$ 成立, 求 t 的取值范围;

(3) 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 试比较 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ 与 $n+4$ 的大小, 并说明理由.

2010 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{-1+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $5+5\mathrm{i}$　(C) $-5-5\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

2. 函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是 （　）

(A) $(-2,-1)$　(B) $(-1,0)$　(C) $(0,1)$　(D) $(1,2)$

3. 命题“若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x)$ 是奇函数”的否命题是 （　）

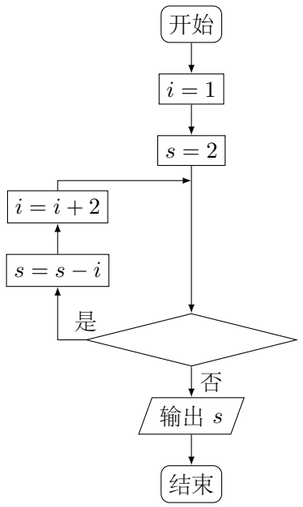
(A) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x)$ 是偶函数

(B) 若 $f(x)$ 不是奇函数, 则 $f(-x)$ 不是奇函数

(C) 若 $f(-x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数

(D) 若 $f(-x)$ 不是奇函数, 则 $f(x)$ 不是奇函数

4. 阅读下面的程序框图, 若输出 s 的值为 -7, 则判断框内可填写 （　）



(A) $i<3$?　(B) $i<4$?　(C) $i<5$?　(D) $i<6$?

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线方程是 $y=\sqrt{3}x$, 它的一个焦点在抛物线 $y^2=24x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{108}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{108}-\dfrac{y^2}{36}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{27}-\dfrac{y^2}{9}=1$

6. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $9S_3=S_6$, 则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 5 项和为 （　）

(A) $\dfrac{15}{8}$ 或 5　(B) $\dfrac{31}{16}$ 或 5　(C) $\dfrac{31}{16}$　(D) $\dfrac{15}{8}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c, 若 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc$, $\sin C=2\sqrt{3}\sin B$, 则 $A=$ （　）

(A) 30°　(B) 60°　(C) 120°　(D) 150°

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x<0\end{cases}$, 若 $f(a)>f(-a)$, 则实数 a 的取值范围是 （　）

(A) $(-1,0)\cup(0,1)$　(B) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(C) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　(D) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

9. 设集合 $A=\{x\,|\,|x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\,|\,|x-b|>2,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$, 则实数 a, b 必满足 （　）

(A) $|a+b|\leqslant 3$　(B) $|a+b|\geqslant 3$　(C) $|a-b|\leqslant 3$　(D) $|a-b|\geqslant 3$

10. 如图, 用四种不同颜色给图中的 A, B, C, D, E, F 六个点涂色, 要求每个点涂一种颜色, 且图中每条线段的两个端点涂不同颜色, 则不同的涂色方法有 （　）

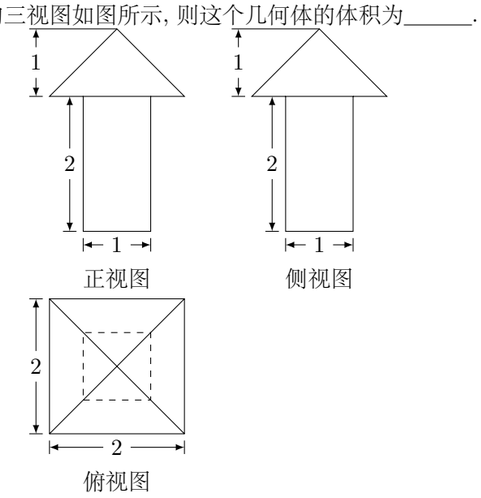
(A) 288 种　(B) 264 种　(C) 240 种　(D) 168 种

二、填空题

11. 甲、乙两人在 10 天中每天加工零件的个数用茎叶图表示如图, 中间一列的数字表示零件个数的十位数, 两边的数字表示零件个数的个位数, 则这 10 天甲、乙两人日加工零件的平均数分别为_____和_____.

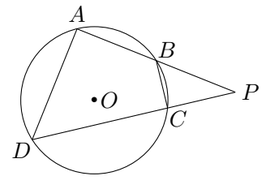
甲		乙
9 8	1	9 7 1
0 1 3 2 0	2	1 4 2 4
1 1 5	3	0 2 0

12. 一个几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的体积为_____.

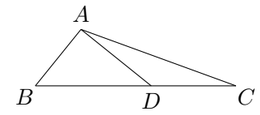


13. 已知圆 C 的圆心是直线 $\begin{cases}x=t\\ y=1+t\end{cases}$ (t 为参数) 与 x 轴的交点, 且圆 C 与直线 $x+y+3=0$ 相切, 则圆 C 的方程为_____.

14. 如图, 四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形, 延长 AB 和 DC 相交于点 P, 若 $\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{PC}{PD}=\dfrac{1}{3}$, 则 $\dfrac{BC}{AD}$ 的值为_____.



15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD\perp AB$, $\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$, $\left|\overrightarrow{AD}\right|=1$, 则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$_____.



16. 设函数 $f(x)=x^2-1$, 对任意 $x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, $f\left(\dfrac{x}{m}\right)-4m^2f(x)\leqslant f(x-1)+4f(m)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题

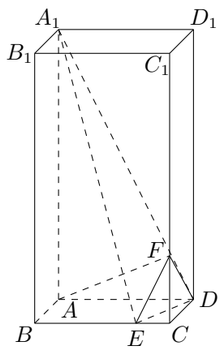
17. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1\ (x\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值;

(2) 若 $f(x_0)=\dfrac{6}{5}$, $x_0\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$, 求 $\cos 2x_0$ 的值.

18. 某射手每次射击击中目标的概率是 $\dfrac{2}{3}$, 且各次射击的结果互不影响.
(1) 假设这名射手射击 5 次, 求恰有 2 次击中目标的概率;
(2) 假设这名射手射击 5 次, 求有 3 次连续击中目标. 另外 2 次未击中目标的概率;
(3) 假设这名射手射击 3 次, 每次射击, 击中目标得 1 分, 未击中目标得 0 分, 在 3 次射击中, 若有 2 次连续击中, 而另外 1 次未击中, 则额外加 1 分; 若 3 次全击中, 则额外加 3 分. 记 ξ 为射手射击 3 次后的总的分数, 求 ξ 的分布列.

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别是棱 BC、CC_1 上的点, $CF=AB=2CE$, $AB:AD:AA_1=1:2:4$.
(1) 求异面直线 EF 与 A_1D 所成角的余弦值;
(2) 证明 $AF\perp$ 平面 A_1ED;
(3) 求二面角 A_1-ED-F 的正弦值.



20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A, B. 已知点 A 的坐标为 $(-a,0)$, 点 $Q(0,y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上, 且 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=4$. 求 y_0 的值.

21. 已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ $(x\in\mathrm{R})$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;
(2) 已知函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 证明: 当 $x>1$ 时, $f(x)>g(x)$;
(3) 如果 $x_1\neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 证明: $x_1+x_2>2$.

22. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=0$, 且对任意 $k\in\mathbf{N}^*$. a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1} 成等差数列, 其公差为 d_k.
(1) 若 $d_k=2k$, 证明 a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2} 成等比数列 $(k\in\mathbf{N}^*)$;
(2) 若对任意 $k\in\mathbf{N}^*$, a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2} 成等比数列, 其公比为 q_k.
① 设 $q_1\neq1$. 证明 $\left\{\dfrac{1}{q_k-1}\right\}$ 是等差数列;
② 若 $a_2=2$, 证明 $\dfrac{3}{2}<2n-\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^2}{a_k}\leqslant2$ $(n\geqslant2)$.

2010 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

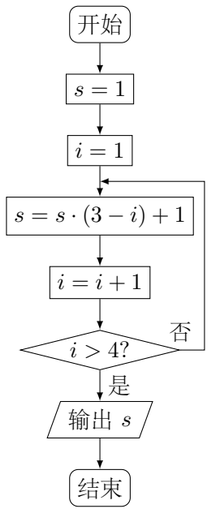
1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $1+2\mathrm{i}$　　(B) $2+4\mathrm{i}$　　(C) $-1-2\mathrm{i}$　　(D) $2-\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 3 \\ x-y\geqslant -1 \\ y\geqslant 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z=4x+2y$ 的最大值为 （　）

(A) 12　　(B) 10　　(C) 8　　(D) 2

3. 阅读下面的程序框图, 若输出 s 的值为 -7, 则判断框内可填写 （　）



(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 3

4. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x-2$ 的零点所在的一个区间是 （　）

(A) $(-2,-1)$　　(B) $(-1,0)$　　(C) $(0,1)$　　(D) $(1,2)$

5. 下列命题中, 真命题是 （　）

(A) $\exists m\in\mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数

(B) $\exists m\in\mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数

(C) $\forall m\in\mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数

(D) $\forall m\in\mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数

6. 设 $a=\log_5 4$, $b=(\log_5 3)^2$, $c=\log_4 5$, 则 （　）

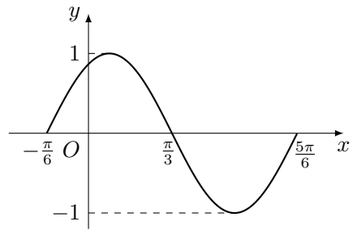
(A) $a<c<b$　　(B) $b<c<a$　　(C) $a<b<c$　　(D) $b<a<c$

7. 设集合 $A=\{x\mid |x-a|<1, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid 1<x<5, x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$, 则实数 a 的取值范围是 （　）

(A) $\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 6\}$　　(B) $\{a\mid a\leqslant 2 \text{ 或 } a\geqslant 4\}$

(C) $\{a\mid a\leqslant 0 \text{ 或 } a\geqslant 6\}$　　(D) $\{a\mid 2\leqslant a\leqslant 4\}$

8. 如图是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(x\in\mathbf{R})$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上的图象, 为了得到这个函数的图象, 只要将 $y=\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点 （　）



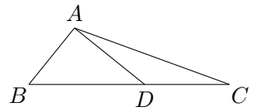
(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变

(B) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变

(D) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD\perp AB$, $\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$, $\left|\overrightarrow{AD}\right|=1$, 则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$ （　）



(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\sqrt{3}$

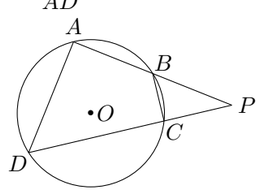
10. 设函数 $g(x)=x^2-2$ $(x\in\mathbf{R})$, $f(x)=\begin{cases} g(x)+x+4, & x<g(x) \\ g(x)-x, & x\geqslant g(x) \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的值域是 （　）

(A) $\left[-\dfrac{9}{4},0\right]\cup(1,+\infty)$　　(B) $[0,+\infty)$

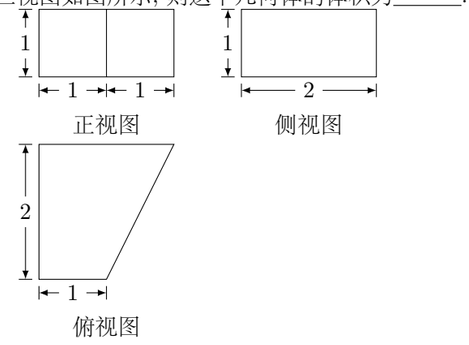
(C) $\left[-\dfrac{9}{4},+\infty\right)$　　(D) $\left[-\dfrac{9}{4},0\right]\cup(2,+\infty)$

二、填空题

11. 如图, 四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形, 延长 AB 和 DC 相交于点 P. 若 $PB=1$, $PD=3$, 则 $\dfrac{BC}{AD}$ 的值为_____.



12. 一个几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的体积为_____.



13. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线方程是 $y=\sqrt{3}x$, 它的一个焦点与抛物线 $y^2=16x$ 的焦点相同. 则双曲线的方程为_____.

14. 已知圆 C 的圆心是直线 $x-y+1=0$ 与 x 轴的交点, 且圆 C 与直线 $x+y+3=0$ 相切, 则圆 C 的方程为_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比 $q=\sqrt{2}$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 记 $T_n=\dfrac{17S_n-S_{2n}}{a_{n+1}}$, $n\in\mathbf{N}^*$. 设 T_{n_0} 为数列 $\{T_n\}$ 的最大项, 则 $n_0=$_____.

16. 设函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$, 对任意 $x\in[1,+\infty)$, $f(mx)+mf(x)<0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\cos B}{\cos C}$.

(1) 证明: $B=C$;

(2) 若 $\cos A=-\dfrac{1}{3}$, 求 $\sin\left(4B+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

18. 有编号为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{10} 的 10 个零件, 测量其直径 (单位: cm), 得到下面数据:

编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
直径	1.51	1.49	1.49	1.51	1.49	1.51	1.47	1.46	1.53	1.47

其中直径在区间 $[1.48, 1.52]$ 内的零件为一等品.

(1) 从上述 10 个零件中, 随机抽取一个, 求这个零件为一等品的概率;

(2) 从一等品零件中, 随机抽取 2 个.

① 用零件的编号列出所有可能的抽取结果;

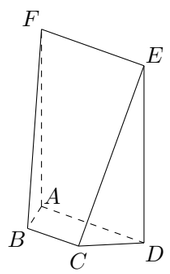
② 求这 2 个零件直径相等的概率.

19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ADEF$ 是正方形, $FA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC /\!/ AD$, $CD = 1$, $AD = 2\sqrt{2}$, $\angle BAD = \angle CDA = 45°$.

(1) 求异面直线 CE 与 AF 所成角的余弦值;

(2) 证明 $CD \perp$ 平面 ABF;

(3) 求二面角 $B - EF - A$ 的正切值.



20. 已知函数 $f(x) = ax^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 1$ ($x \in \mathbf{R}$), 其中 $a > 0$.

(1) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2) 若在区间 $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ 上, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率 $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A, B, 已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$.

① 若 $|AB| = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$, 求直线 l 的倾斜角;

② 若点 $Q(0, y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上, 且 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4$. 求 y_0 的值.

22. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 0$, 且对任意 $k \in \mathbf{N}^*$, a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1} 成等差数列, 其公差为 $2k$.

(1) 证明 a_4, a_5, a_6 成等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 记 $T_n = \dfrac{2^2}{a_2} + \dfrac{3^2}{a_3} + \cdots + \dfrac{n^2}{a_n}$, 证明 $\dfrac{3}{2} < 2n - T_n \leqslant 2$ ($n \geqslant 2$).

2010 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

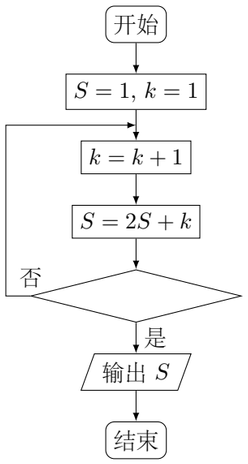
理科数学

一、选择题

1. 设 $P=\{x\,|\,x<4\}$, $Q=\{x\,|\,x^2<4\}$, 则 （　）

(A) $P\subseteq Q$　(B) $Q\subseteq P$　(C) $P\subseteq \complement_{\mathbf{R}}Q$　(D) $Q\subseteq \complement_{\mathbf{R}}P$

2. 某程序框图如图所示, 若输出的 $S=57$, 则判断框内为 （　）



(A) $k>4$?　(B) $k>5$?　(C) $k>6$?　(D) $k>7$?

3. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $8a_2+a_5=0$, 则 $\dfrac{S_5}{S_2}=$ （　）

(A) 11　(B) 5　(C) -8　(D) -11

4. 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则“$x\sin^2 x<1$”是“$x\sin x<1$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 对任意复数 $z=x+y\mathrm{i}$ ($x,\ y\in\mathbf{R}$), i 为虚数单位, 则下列结论正确的是（　）

(A) $|z-\overline{z}|=2y$　(B) $z^2=x^2+y^2$　(C) $|z-\overline{z}|\geqslant 2x$　(D) $|z|\leqslant|x|+|y|$

6. 设 l, m 是两条不同的直线, α 是一个平面, 则下列命题正确的是 （　）

(A) 若 $l\perp m$, $m\subset\alpha$, 则 $l\perp\alpha$　(B) 若 $l\perp\alpha$, $l\parallel m$, 则 $m\perp\alpha$

(C) 若 $l\parallel\alpha$, $m\subset\alpha$, 则 $l\parallel m$　(D) 若 $l\parallel\alpha$, $m\parallel\alpha$, 则 $l\parallel m$

7. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases}x+3y-3\geqslant 0\\2x-y-3\leqslant 0\\x-my+1\geqslant 0\end{cases}$, 且 $x+y$ 的最大值为 9, 则实数 $m=$ （　）

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2

8. 设 F_1、F_2 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0,\ b>0$) 的左、右焦点. 若在双曲线右支上存在点 P, 满足 $|PF_2|=|F_1F_2|$, 且 F_2 到直线 PF_1 的距离等于双曲线的实轴长, 则该双曲线的渐近线方程为 （　）

(A) $3x\pm 4y=0$　(B) $3x\pm 5y=0$　(C) $4x\pm 3y=0$　(D) $5x\pm 4y=0$

9. 设函数 $f(x)=4\sin(2x+1)-x$, 则在下列区间中函数 $f(x)$ 不存在零点的是 （　）

(A) $[-4,-2]$　(B) $[-2,0]$　(C) $[0,2]$　(D) $[2,4]$

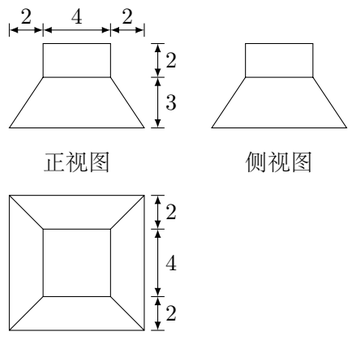
10. 设函数的集合 $P=\left\{f(x)=\log_2(x+a)+b\,|\,a=-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},1;b=-1,0,1\right\}$, 平面上点的集合 $Q=\left\{(x,y)\,|\,x=-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},1;y=-1,0,1\right\}$, 则在同一直角坐标系中, P 中函数 $f(x)$ 的图象恰好经过 Q 中两个点的函数的个数是 （　）

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10

二、填空题

11. 函数 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin^2 x$ 的最小正周期是_____.

12. 若某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的体积是_____cm^3.



13. 设抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点为 F, 点 $A(0,2)$. 若线段 FA 的中点 B 在抛物线上, 则 B 到该抛物线准线的距离为_____.

14. 设 $n\geqslant 2$, $n\in\mathbf{N}$, $\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(3x+\dfrac{1}{3}\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 将 $|a_k|$ ($0\leqslant k\leqslant n$) 的最小值记为 T_n, 则 $T_2=0$, $T_3=\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{3^3}$, $T_4=0$, $T_5=\dfrac{1}{2^5}-\dfrac{1}{3^5}$, $\cdots$, T_n, $\cdots$, 其中 $T_n=$_____.

15. 设 a_1, d 为实数, 首项为 a_1, 公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 满足 $S_5S_6+15=0$, 则 d 的取值范围是_____.

16. 已知平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}$) 满足 $|\boldsymbol{\beta}|=1$, 且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$ 的夹角为 120°, 则 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 的取值范围是_____.

17. 有 4 位同学在同一天的上、下午参加“身高与体重”、“立定跳远”、“肺活量”、“握力”、“台阶”五个项目的测试, 每位同学上、下午各测试一个项目, 且不重复, 若上午不测“握力”项目, 下午不测“台阶”, 其余项目上、下午都各测试一人, 则不同的安排方式共有种_____. (用数字作答)

三、解答题

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 已知 $\cos 2C=-\dfrac{1}{4}$.

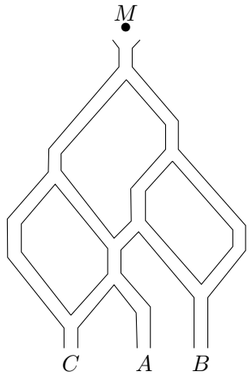
(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 当 $a=2$, $2\sin A=\sin C$ 时, 求 b 及 c 的长.

19. 如图, 一个小球从 M 处投入, 通过管道自上而下落到 A 或 B 或 C. 已知小球从每个叉口落入左右两个管道的可能性是相等的. 某商家按上述投球方式进行促销活动, 若投入的小球落到 A、B、C, 则分别设为 1、2、3 等奖.

(1) 已知获得 1, 2, 3 等奖的折扣率分别为 50%、70%、90%. 记随机变量 ξ 为获得 k ($k=1,\ 2,\ 3$) 等奖的折扣率, 求随机变量 ξ 的分布列及期望 $E\xi$;

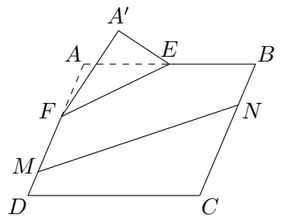
(2) 若有 3 人次 (投入 1 球为 1 人次) 参加促销活动, 记随机变量 η 为获得 1 等奖或 2 等奖的人次, 求 $P(\eta=2)$.



20. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在线段 AB、AD 上, $AE=EB=AF=\dfrac{2}{3}FD=4$. 沿直线 EF 将 $\triangle AEF$ 翻折成 $\triangle A'EF$, 使平面 $A'EF\perp$ 平面 BEF.

(1) 求二面角 $A'-FD-C$ 的余弦值;

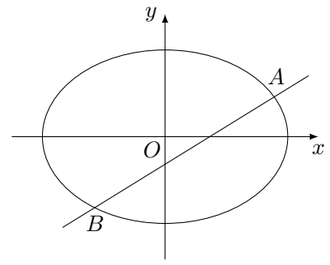
(2) 点 M, N 分别在线段 FD、BC 上, 若沿直线 MN 将四边形 $MNCD$ 向上翻折, 使 C 与 A' 重合, 求线段 FM 的长.



21. 已知 $m>1$, 直线 l: $x-my-\dfrac{m^2}{2}=0$, 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{m^2}+y^2=1$, F_1, F_2 分别为椭圆 C 的左、右焦点.

(1) 当直线 l 过右焦点 F_2 时, 求直线 l 的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, $\triangle AF_1F_2$, $\triangle BF_1F_2$ 的重心分别为 G, H. 若原点 O 在以线段 GH 为直径的圆内, 求实数 m 的取值范围.



22. 已知 a 是给定的实常数, 设函数 $f(x)=(x-a)^2(x+b)\mathrm{e}^x$, $b\in\mathbf{R}$, $x=a$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点.

(1) 求 b 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2, x_3 是 $f(x)$ 的 3 个极值点, 问是否存在实数 b, 可找到 $x_4\in\mathbf{R}$, 使得 x_1, x_2, x_3, x_4 的某种排列 x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4} (其中 $\{i_1,i_2,i_3,i_4\}=\{1,2,3,4\}$) 依次成等差数列? 若存在, 求所有的 b 及相应的 x_4; 若不存在, 说明理由.

2010 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 $P=\{x|x<1\}$, $Q=\{x|x^2<4\}$, 则 $P\cap Q=$ （　）

(A) $\{x|-1<x<2\}$　(B) $\{x|-3<x<-1\}$

(C) $\{x|1<x<4\}$　(D) $\{x|-2<x<1\}$

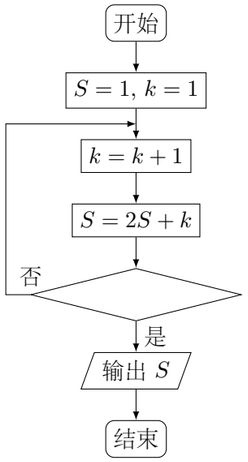
2. 已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)$, 若 $f(\alpha)=1$, 则 $\alpha=$ （　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

3. 设 i 为虚数单位, 则 $\dfrac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $-2-3\mathrm{i}$　(B) $-2+3\mathrm{i}$　(C) $2-3\mathrm{i}$　(D) $2+3\mathrm{i}$

4. 某程序框图如图所示, 若输出的 $S=57$, 则判断框内为 （　）



(A) $k>4$?　(B) $k>5$?　(C) $k>6$?　(D) $k>7$?

5. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $8a_2+a_5=0$, 则 $\dfrac{S_5}{S_2}=$ （　）

(A) -11　(B) -8　(C) 5　(D) 11

6. 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则“$x\sin^2 x<1$”是“$x\sin x<1$”的 （　）

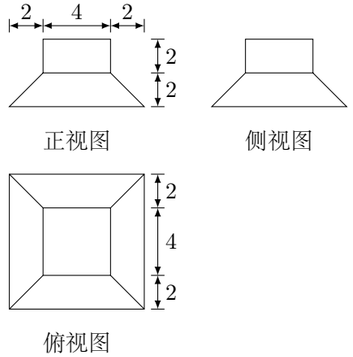
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases}x+3y-3\geqslant 0\\2x-y-3\leqslant 0\\x-y+1\geqslant 0\end{cases}$, 则 $x+y$ 的最大值为（　）

(A) 9　(B) $\dfrac{15}{7}$　(C) 1　(D) $\dfrac{7}{15}$

8. 若某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的体积是 （　）



(A) $\dfrac{352}{3}$ cm^3　(B) $\dfrac{320}{3}$ cm^3　(C) $\dfrac{224}{3}$ cm^3　(D) $\dfrac{160}{3}$ cm^3

9. 已知 x_0 是函数 $f(x)=2^x+\dfrac{1}{1-x}$ 的一个零点. 若 $x_1\in(1,x_0)$, $x_2\in(x_0,+\infty)$, 则 （　）

(A) $f(x_1)<0$, $f(x_2)<0$　(B) $f(x_1)<0$, $f(x_2)>0$

(C) $f(x_1)>0$, $f(x_2)<0$　(D) $f(x_1)>0$, $f(x_2)>0$

10. 设 O 为坐标原点, F_1, F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的焦点. 若在双曲线上存在点 P, 满足 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, $|OP|=\sqrt{7}a$, 则该双曲线的渐近线方程为 （　）

(A) $x\pm\sqrt{3}y=0$　(B) $\sqrt{3}x\pm y=0$　(C) $x\pm\sqrt{2}y=0$　(D) $\sqrt{2}x\pm y=0$

二、填空题

11. 在如图所示的茎叶图中, 甲、乙两组数据的中位数分别是_____, _____.

甲		乙
8	2	9
9 1	3	5 5
2 5	4	8 2 6
7 8 5	5	3 5
6	6	7

12. 函数 $f(x)=\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是_____.

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}|=1$, $|\boldsymbol{\beta}|=2$, $\boldsymbol{\alpha}\perp(\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta})$, 则 $|2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|$ 的值是_____.

14. 在如下数表中, 已知每行、每列中的数都成等差数列.

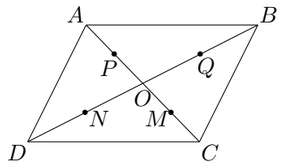
	第 1 列	第 2 列	第 3 列	…
第 1 行	1	2	3	…
第 2 行	2	4	6	…
第 3 行	3	6	9	…
…	…	…	…	…

那么, 位于表中的第 n 行第 $n+1$ 列的数是_____.

15. 若正实数 x, y 满足 $2x+y+6=xy$, 则 xy 的最小值是_____.

16. 某商家一月份至五月份累计销售额达 3860 万元, 预测六月份销售额为 500 万元, 七月份销售额比六月份递增 $x\%$, 八月份销售额比七月份递增 $x\%$, 九、十月份销售总额与七、八月份销售总额相等. 若一月至十月份销售总额至少达 7000 万元, 则 x 的最小值是_____.

17. 在平行四边形 $ABCD$ 中, O 是 AC 与 BD 的交点, P, Q, M, N 分别是线段 OA, OB, OC, OD 的中点. 在 A, P, M, C 中任取一点记为 E, 在 B, Q, N, D 中任取一点记为 F. 设 G 为满足向量 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$ 的点, 则在上述的点 G 组成的集合中的点, 落在平行四边形 $ABCD$ 外 (不含边界) 的概率为_____.



三、解答题

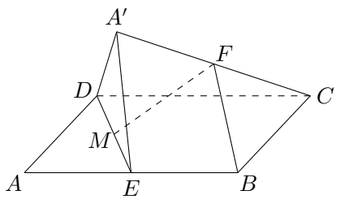
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 设 S 为 $\triangle ABC$ 的面积, 满足 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2-c^2)$

(1) 求角 C 的大小;

(2) 求 $\sin A+\sin B$ 的最大值.

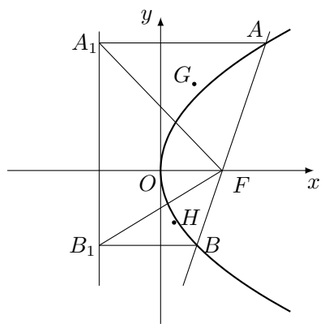
19. 设 a_1, d 为实数, 首项为 a_1, 公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 满足 $S_5S_6+15=0$.
(1) 若 $S_5=5$, 求 S_6 及 a_1;
(2) 求 d 的取值范围.

20. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=2BC$, $\angle ABC=120^\circ$. E 为线段 AB 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折成 $\triangle A'DE$, 使平面 $A'DE\perp$ 平面 BCD, F 为线段 $A'C$ 的中点.
(1) 求证: $BF\parallel$ 平面 $A'DE$;
(2) 设 M 为线段 DE 的中点, 求直线 FM 与平面 $A'DE$ 所成角的余弦值.



21. 已知函数 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$ $(a,b\in\mathbf{R},a<b)$.
(1) 当 $a=1$, $b=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程;
(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点, x_3 是 $f(x)$ 的一个零点, 且 $x_3\neq x_1$, $x_3\neq x_2$. 证明: 存在实数 x_4, 使得 x_1, x_2, x_3, x_4 按某种顺序排列后成等差数列, 并求 x_4.

22. 已知 m 是非零实数, 抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点 F 在直线 l: $x-my-\dfrac{m^2}{2}=0$ 上.
(1) 若 $m=2$, 求抛物线 C 的方程;
(2) 设直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 过 A, B 分别作抛物线 C 的准线的垂线, 垂足为 A_1, B_1, $\triangle AA_1F$, $\triangle BB_1F$ 的重心分别为 G, H. 求证: 对任意非零实数 m, 抛物线 C 的准线与 x 轴的交点在以线段 GH 为直径的圆外.



2011 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 为纯虚数, 则实数 a 为 （ ）

(A) 2 (B) -2 (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

2. 双曲线 $2x^2-y^2=8$ 的实轴长是 （ ）

(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\leqslant 0$ 时, $f(x)=2x^2-x$, 则 $f(1)=$ （ ）

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

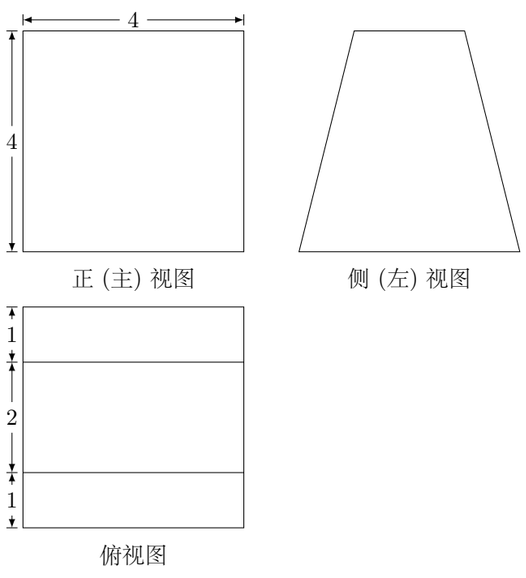
4. 设变量 x, y 满足 $|x|+|y|\leqslant 1$, 则 $x+2y$ 的最大值和最小值分别为 （ ）

(A) 1, -1 (B) 2, -2 (C) 1, -2 (D) 2, -1

5. 在极坐标系中, 点 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 到圆 $\rho=2\cos\theta$ 的圆心的距离为 （ ）

(A) 2 (B) $\sqrt{4+\dfrac{\pi^2}{9}}$ (C) $\sqrt{1+\dfrac{\pi^2}{9}}$ (D) $\sqrt{3}$

6. 一个空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 （ ）



(A) 48 (B) $32+8\sqrt{17}$ (C) $48+8\sqrt{17}$ (D) 80

7. 命题“所有能被 2 整除的整数都是偶数”的否定是 （ ）

(A) 所有不能被 2 整除的整数都是偶数

(B) 所有能被 2 整除的整数都不是偶数

(C) 存在一个不能被 2 整除的整数是偶数

(D) 存在一个能被 2 整除的整数不是偶数

8. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{4,5,6,7,8\}$, 则满足 $S\subseteq A$ 且 $S\cap B\neq\varnothing$ 的集合 S 的个数是 （ ）

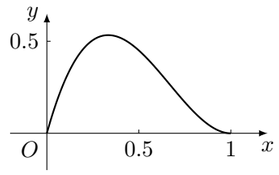
(A) 57 (B) 56 (C) 49 (D) 8

9. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$, 其中 φ 为实数, 若 $f(x)\leqslant\left|f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 （ ）

(A) $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ (B) $\left[k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

(C) $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ (D) $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

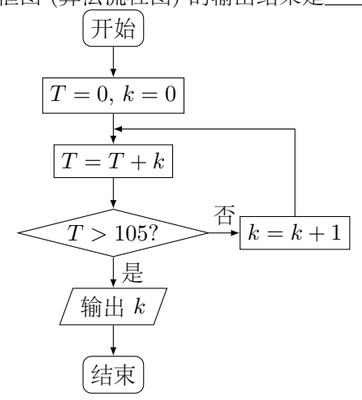
10. 函数 $f(x)=ax^m(1-x)^n$ 在区间 $[0,1]$ 上的图象如图所示, 则 m, n 的值可能是 （ ）



(A) $m=1$, $n=1$ (B) $m=1$, $n=2$ (C) $m=2$, $n=1$ (D) $m=3$, $n=1$

二、填空题

11. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是_____.



12. 设 $(x-1)^{21}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{21}x^{21}$, 则 $a_{10}+a_{11}=$_____.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-6$, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为_____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 的一个内角为 120°, 并且三边长构成公差为 4 的等差数列, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

15. 在平面直角坐标系中, 如果 x 与 y 都是整数, 就称点 (x,y) 为整点, 下列命题中正确的是_____. (写出所有正确命题的编号)

① 存在这样的直线, 既不与坐标轴平行又不经过任何整点;

② 如果 k 与 b 都是无理数, 则直线 $y=kx+b$ 不经过任何整点;

③ 直线 l 经过无穷多个整点, 当且仅当 l 经过两个不同的整点;

④ 直线 $y=kx+b$ 经过无穷多个整点的充分必要条件是: k 与 b 都是有理数;

⑤ 存在恰经过一个整点的直线.

三、解答题

16. 设 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+ax^2}$, 其中 a 为正实数.

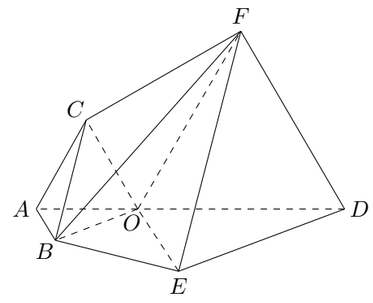
(1) 当 $a=\dfrac{4}{3}$ 时, 求 $f(x)$ 的极值点;

(2) 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 求 a 的取值范围.

17. 如图, $ABEDFC$ 为多面体, 平面 $ABED$ 与平面 $ACFD$ 垂直, 点 O 在线段 AD 上, $OA=1$, $OD=2$, $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle ODE$, $\triangle ODF$ 都是正三角形.

(1) 证明直线 $BC\parallel EF$;

(2) 求棱锥 $F-OBED$ 的体积.

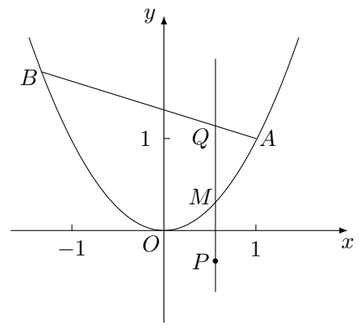


18. 在数 1 和 100 之间插入 n 个实数, 使得这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列, 将这 $n+2$ 个数的乘积记作 T_n, 再令 $a_n=\lg T_n$, $n\geqslant 1$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n=\tan a_n\cdot\tan a_{n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

19. (1) 设 $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$, 证明 $x+y+\dfrac{1}{xy}\leqslant\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+xy$;
(2) $1<a\leqslant b\leqslant c$, 证明 $\log_a b+\log_b c+\log_c a\leqslant\log_b a+\log_c b+\log_a c$.

20. 工作人员需进入核电站完成某项具有高辐射危险的任务, 每次只派一个人进去, 且每个人只派一次, 工作时间不超过 10 分钟, 如果前一个人 10 分钟内不能完成任务则撤出, 再派下一个人. 现在一共只有甲、乙、丙三个人可派, 他们各自能完成任务的概率分别 p_1, p_2, p_3, 假设 p_1, p_2, p_3 互不相等, 且假定各人能否完成任务的事件相互独立.
(1) 如果按甲最先, 乙次之, 丙最后的顺序派人, 求任务能被完成的概率. 若改变三个人被派出的先后顺序, 任务能被完成的概率是否发生变化?
(2) 若按某指定顺序派人, 这三个人各自能完成任务的概率依次为 q_1, q_2, q_3, 其中 q_1, q_2, q_3 是 p_1, p_2, p_3 的一个排列, 求所需派出人员数目 X 的分布列和均值 (数学期望)EX;
(3) 假定 $1>p_1>p_2>p_3$, 试分析以怎样的先后顺序派出人员, 可使所需派出的人员数目的均值 (数学期望) 达到最小.

21. 设 $\lambda>0$, 点 A 的坐标为 $(1,1)$, 点 B 在抛物线 $y=x^2$ 上运动, 点 Q 满足 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QA}$, 经过点 Q 与 x 轴垂直的直线交抛物线于点 M, 点 P 满足 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MP}$, 求点 P 的轨迹方程.



2011 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 为纯虚数, 则实数 a 为 （ ）

(A) 2 (B) -2 (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

2. 集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $S=\{1,4,5\}$, $T=\{2,3,4\}$, 则 $S\cap(\complement_U T)$ 等于

(A) $\{1,4,5,6\}$ (B) $\{1,5\}$ (C) $\{4\}$ (D) $\{1,2,3,4,5\}$

3. 双曲线 $2x^2-y^2=8$ 的实轴长是 （ ）

(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$

4. 若直线 $3x+y+a=0$ 过圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 的圆心, 则 a 的值为( )

(A) -1 (B) 1 (C) 3 (D) -3

5. 若点 (a,b) 在 $y=\lg x$ 图象上, $a\neq 1$, 则下列点也在此图象上的是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{1}{a},b\right)$ (B) $(10a,1-b)$ (C) $\left(\dfrac{10}{a},b+1\right)$ (D) $(a^2,2b)$

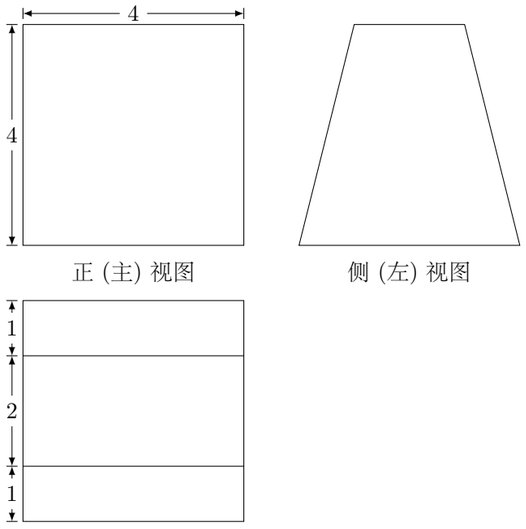
6. 设变量 x, y 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant 1\\ x-y\leqslant 1\\ x\geqslant 0\end{cases}$, 则 $x+2y$ 的最大值和最小值分别为( )

(A) 1, -1 (B) 2, -2 (C) 1, -2 (D) 2, -1

7. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=(-1)^n\cdot(3n-2)$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=$( )

(A) 15 (B) 12 (C) -12 (D) -15

8. 一个空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 （ ）

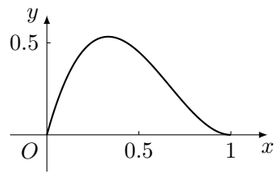


(A) 48 (B) $32+8\sqrt{17}$ (C) $48+8\sqrt{17}$ (D) 80

9. 从正六边形的 6 个顶点中随机选择 4 个顶点, 则以它们作为顶点的四边形是矩形的概率等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{10}$ (B) $\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{5}$

10. 函数 $f(x)=ax^n(1-x)^2$ 在区间 $[0,1]$ 上的图象如图所示, 则 n 可能是( )

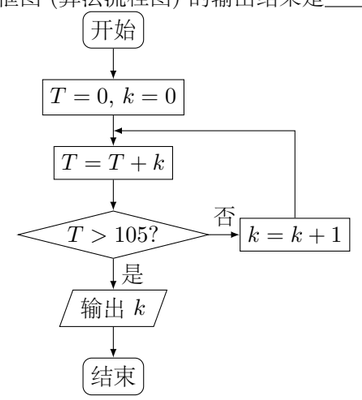


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

11. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\leqslant 0$ 时, $f(x)=2x^2-x$, 则 $f(1)=$_____.

12. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是_____.



13. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ 的定义域是_____.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-6$, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为_____.

15. 设 $f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x$, 其中 a, $b\in\mathbf{R}$, $ab\neq 0$, 若 $f(x)\leqslant\left|f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 则

① $f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=0$;

② $\left|f\left(\dfrac{7\pi}{10}\right)\right|<\left|f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right|$;

③ $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数;

④ $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$;

⑤ 存在经过点 (a,b) 的直线与函数 $f(x)$ 的图象不相交.

以上结论正确的是_____. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 所对的边长, $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $1+2\cos(B+C)=0$, 求边 BC 上的高.

17. 设直线 $l_1: y=k_1x+1$, $l_2: y=k_2x-1$, 其中实数 k_1, k_2 满足 $k_1k_2+2=0$.

(1) 证明 l_1 与 l_2 相交;

(2) 证明 l_1 与 l_2 的交点在椭圆 $2x^2+y^2=1$ 上.

18. 设 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+ax^2}$, 其中 a 为正实数.

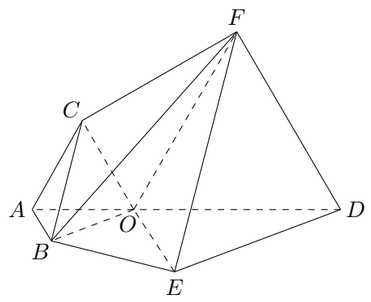
(1) 当 $a=\dfrac{4}{3}$ 时, 求 $f(x)$ 的极值点;

(2) 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 求 a 的取值范围.

19. 如图, $ABEDFC$ 为多面体, 平面 $ABED$ 与平面 $ACFD$ 垂直, 点 O 在线段 AD 上, $OA=1$, $OD=2$, $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle ODE$, $\triangle ODF$ 都是正三角形.

(1) 证明直线 $BC\parallel EF$;

(2) 求棱锥 $F-OBED$ 的体积.



20. 某地最近十年粮食需求量逐年上升, 下表是部分统计数据:

年份	2002	2004	2006	2008	2010
需求量 (万吨)	236	246	257	276	286

(1) 利用所给数据求年需求量与年份之间的回归直线方程 $\hat{y}=bx+a$;

(2) 利用 (1) 中所求出的直线方程预测该地 2012 年的粮食需求量.

21. 在数 1 和 100 之间插入 n 个实数, 使得这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列, 将这 $n+2$ 个数的乘积记作 T_n, 再令 $a_n=\lg T_n$, $n\geqslant 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\tan a_n\cdot\tan a_{n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

2011 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\mid x^2\leqslant 1\}$, $M=\{a\}$. 若 $P\cup M=P$, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $(-\infty,-1]$　　(B) $[1,+\infty)$

(C) $[-1,1]$　　(D) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

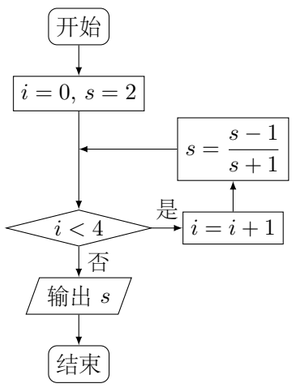
2. 复数 $\dfrac{\mathrm{i}-2}{1+2\mathrm{i}}=$ （　）

(A) i　　(B) $-\mathrm{i}$　　(C) $-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　　(D) $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

3. 在极坐标系中, 圆 $\rho=-2\sin\theta$ 的圆心的极坐标是 （　）

(A) $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(B) $\left(1,-\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(C) $(1,0)$　　(D) $(1,\pi)$

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 的值为 （　）



(A) -3　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) 2

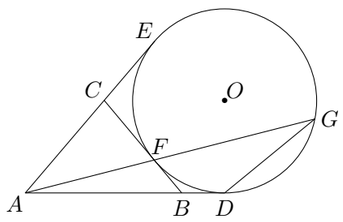
5. 如图, AD, AE, BC 分别与圆 O 切于点 D, E, F, 延长 AF 与圆 O 交于另一点 G. 给出下列三个结论:

① $AD+AE=AB+BC+CA$;

② $AF\cdot AG=AD\cdot AE$;

③ $\triangle AFB\backsim\triangle ADG$.

其中正确结论的序号是 （　）

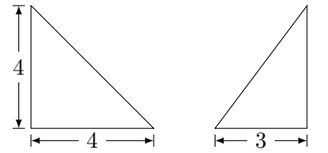


(A) ①②　　(B) ②③　　(C) ①③　　(D) ①②③

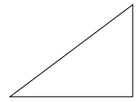
6. 根据统计, 一名工人组装第 x 件某产品所用的时间 (单位: 分钟) 为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{x}}, & x<A\\ \dfrac{c}{\sqrt{A}}, & x\geqslant A\end{cases}$ (A, c 为常数). 已知工人组装第 4 件产品用时 30 分钟, 组装第 A 件产品用时 15 分钟, 那么 c 和 A 的值分别是 （　）

(A) 75, 25　　(B) 75, 16　　(C) 60, 25　　(D) 60, 16

7. 某四面体的三视图如图所示, 该四面体四个面的面积中最大的是 （　）



正 (主) 视图　　侧 (左) 视图



俯视图

(A) 8　　(B) $6\sqrt{2}$　　(C) 10　　(D) $8\sqrt{2}$

8. 设 $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(t+4,4)$, $D(t,4)$ ($t\in\mathbf{R}$). 记 $N(t)$ 为平行四边形 $ABCD$ 内部 (不含边界) 的整点的个数, 其中整点是指横、纵坐标都是整数的点, 则函数 $N(t)$ 的值域为 （　）

(A) $\{9,10,11\}$　　(B) $\{9,10,12\}$　　(C) $\{9,11,12\}$　　(D) $\{10,11,12\}$

二、填空题

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b=5$, $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$, $\tan A=2$, 则 $\sin A=$_____; $a=$_____.

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$, $\boldsymbol{b}=(0,-1)$, $\boldsymbol{c}=(k,\sqrt{3})$. 若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线, 则 $k=$_____.

11. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_4=-4$, 则公比 $q=$_____; $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=$_____.

12. 用数字 2, 3 组成四位数, 且数字 2, 3 至少都出现一次, 这样的四位数共有_____个. (用数字作答)

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 2\\ (x-1)^3, & x<2\end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有两个不同的实根, 则实数 k 的取值范围是_____.

14. 曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$ 的距离的积等于常数 a^2 ($a>1$) 的点的轨迹. 给出下列三个结论:

① 曲线 C 过坐标原点;

② 曲线 C 关于坐标原点对称;

③ 若点 P 在曲线 C 上, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积不大于 $\dfrac{1}{2}a^2$.

其中, 所有正确结论的序号是_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=4\cos x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

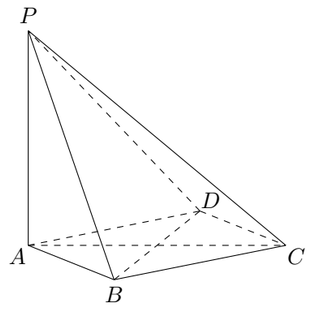
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$.

(1) 求证: $BD\perp$ 平面 PAC;

(2) 若 $PA=AB$, 求 PB 与 AC 所成角的余弦值;

(3) 当平面 PBC 与平面 PDC 垂直时, 求 PA 的长.



17. 以下茎叶图记录了甲、乙两组各四名同学的植树棵数. 乙组记录中有一个数据模糊, 无法确认, 在图中以 X 表示.

甲组			乙组		
9	9	0	X	8	9
1	1	1	0		

(1) 如果 $X=8$, 求乙组同学植树棵数的平均数和方差;

(2) 如果 $X=9$, 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学, 求这两名同学的植树总棵数 Y 的分布列和数学期望.

(注: 方差 $s^2=\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2\right]$, 其中 $\overline{x}$ 为 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的平均数)

19. 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 过点 $(m,0)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 l 交椭圆 G 于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 G 的焦点坐标和离心率;

(2) 将 $|AB|$ 表示为 m 的函数, 并求 $|AB|$ 的最大值.

20. 若数列 A_n: a_1, a_2, $\cdots$, a_n $(n\geqslant 2)$ 满足 $|a_{n+1}-a_k|=1$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$, 则称 A_n 为 E 数列. 记 $S(A_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(1) 写出一个满足 $a_1=a_5=0$, 且 $S(A_5)>0$ 的 E 数列 A_5;

(2) 若 $a_1=12$, $n=2000$, 证明: E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n=2011$;

(3) 对任意给定的整数 n $(n\geqslant 2)$, 是否存在首项为 0 的 E 数列 A_n, 使得 $S(A_n)=0$? 如果存在, 写出一个满足条件的 E 数列 A_n; 如果不存在, 说明理由.

18. 已知函数 $f(x)=(x-k)^2\mathrm{e}^{\frac{x}{k}}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对于任意的 $x\in(0,+\infty)$, 都有 $f(x)\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 求 k 的取值范围.

2011 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $P=\{x\mid x^2\leqslant 1\}$, 那么 $\complement_U P=$ （　）

(A) $(-\infty,-1)$　　(B) $(1,+\infty)$

(C) $(-1,1)$　　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2. 复数 $\dfrac{\mathrm{i}-2}{1+2\mathrm{i}}=$ （　）

(A) i　　(B) $-\mathrm{i}$　　(C) $-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　　(D) $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

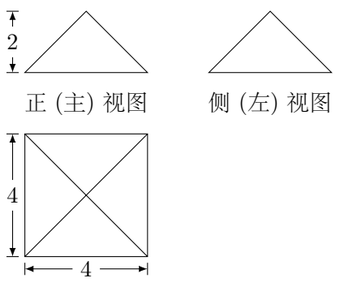
3. 如果 $\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}y<0$, 那么 （　）

(A) $y<x<1$　　(B) $x<y<1$　　(C) $1<x<y$　　(D) $1<y<x$

4. 若 p 是真命题, q 是假命题, 则 （　）

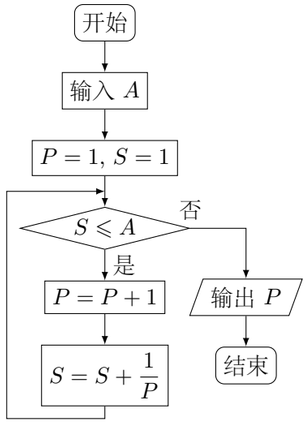
(A) $p\wedge q$ 是真命题(B) $p\vee q$ 是假命题(C) $\neg p$ 是真命题　(D) $\neg q$ 是真命题

5. 某四棱锥的三视图如图所示, 该四棱锥的表面积是 （　）



(A) 32　　(B) $16+16\sqrt{2}$　　(C) 48　　(D) $16+32\sqrt{2}$

6. 执行如图所示的程序框图, 若输入 A 的值为 2, 则输出的 P 的值为 （　）



(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

7. 某车间分批生产某种产品, 每批的生产准备费用为 800 元. 若每批生产 x 件, 则平均仓储时间为 $\dfrac{x}{8}$ 天, 且每件产品每天的仓储费用为 1 元. 为使平均到每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小, 每批应生产产品（　）

(A) 60 件　　(B) 80 件　　(C) 100 件　　(D) 120 件

8. 已知点 $A(0,2)$, $B(2,0)$. 若点 C 在函数 $y=x^2$ 的图象上, 则使得 $\triangle ABC$ 的面积为 2 的点 C 的个数为 （　）

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

二、填空题

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b=5$, $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$, $\sin A=\dfrac{1}{3}$, 则 $a=$_____.

10. 已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 的一条渐近线的方程为 $y=2x$, 则 $b=$_____.

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$, $\boldsymbol{b}=(0,-1)$, $\boldsymbol{c}=(k,\sqrt{3})$. 若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线, 则 $k=$_____.

12. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_4=-4$, 则公比 $q=$_____; $a_1+a_2+\cdots+a_n=$_____.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 2\\ (x-1)^3, & x<2\end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有两个不同的实根, 则实数 k 的取值范围是_____.

14. 设 $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(t+4,3)$, $D(t,3)$ $(t\in\mathbf{R})$. 记 $N(t)$ 为平行四边形 $ABCD$ 内部 (不含边界) 的整点的个数, 其中整点是指横、纵坐标都是整数的点, 则 $N(0)=$_____; $N(t)$ 的所有可能取值为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=4\cos x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 以下茎叶图记录了甲、乙两组各四名同学的植树棵数. 乙组记录中有一个数据模糊, 无法确认, 在图中以 X 表示.

甲组			乙组		
9	9	0	X	8	9
1	1	1	0		

(1) 如果 $X=8$, 求乙组同学植树棵数的平均数和方差;

(2) 如果 $X=9$, 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学, 求这两名同学的植树总棵数为 19 的概率.

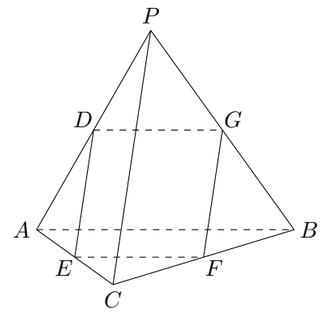
(注: 方差 $s^2=\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2\right]$, 其中 $\overline{x}$ 为 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的平均数)

17. 如图, 在四面体 $PABC$ 中, $PC\perp AB$, $PA\perp BC$, 点 D, E, F, G 分别是棱 AP, AC, BC, PB 的中点.

(1) 求证: $DE\parallel$ 平面 BCP;

(2) 求证: 四边形 $DEFG$ 为矩形;

(3) 是否存在点 Q, 到四面体 $PABC$ 六条棱的中点的距离相等? 说明理由.



18. 已知函数 $f(x)=(x-k)\mathrm{e}^{x}$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值.

19. 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 右焦点为 $\left(2\sqrt{2},0\right)$, 斜率为 1 的直线 l 与椭圆 G 交于 A, B 两点, 以 AB 为底边作等腰三角形, 顶点为 $P(-3,2)$.
(1) 求椭圆 G 的方程;
(2) 求 $\triangle PAB$ 的面积.

20. 若数列 A_n: a_1, a_2, $\cdots$, a_n $(n\geqslant 2)$ 满足 $|a_{n+1}-a_k|=1$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$, 则称 A_n 为 E 数列. 记 $S(A_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$.
(1) 写出一个 E 数列 A_5 满足 $a_1=a_3=0$;
(2) 若 $a_1=12$, $n=2000$, 证明: E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n=2011$;
(3) 在 $a_1=4$ 的 E 数列 A_n 中, 求使得 $S(A_n)=0$ 成立的 n 的最小值.

2011 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4}{1-\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(B) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(C) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(D) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

2. “$x<-1$”是“$x^2-1>0$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{ax-1}{3x}\right)=2$, 则 $a=$ （ ）

(A) -6　(B) 2　(C) 3　(D) 6

4. $(1+3x)^n$ (其中 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 6$) 的展开式中 x^5 与 x^6 的系数相等, 则 $n=$ （ ）

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9

5. 下列区间中, 函数 $f(x)=|\ln(2-x)|$ 在其上为增函数的是 （ ）

(A) $(-\infty,1]$　(B) $\left[-1,\dfrac{4}{3}\right]$　(C) $\left[0,\dfrac{3}{2}\right)$　(D) $[1,2)$

6. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边 a, b, c 满足 $(a+b)^2-c^2=4$, 且 $C=60^\circ$, 则 ab 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{4}{3}$　(B) $8-4\sqrt{3}$　(C) 1　(D) $\dfrac{2}{3}$

7. 已知 $a>0$, $b>0$, $a+b=2$, 则 $y=\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值是 （ ）

(A) $\dfrac{7}{2}$　(B) 4　(C) $\dfrac{9}{2}$　(D) 5

8. 在圆 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 内, 过点 $E(0,1)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 （ ）

(A) $5\sqrt{2}$　(B) $10\sqrt{2}$　(C) $15\sqrt{2}$　(D) $20\sqrt{2}$

9. 高为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 的四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, 点 S, A, B, C, D 均在半径为 1 的同一球面上, 则底面 $ABCD$ 的中心与顶点 S 之间的距离为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) 1　(D) $\sqrt{2}$

10. 设 m, k 为整数, 方程 $mx^2-kx+2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有两个不同的根, 则 $m+k$ 的最小值为 （ ）

(A) -8　(B) 8　(C) 12　(D) 13

二、填空题

11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+a_7=37$, 则 $a_2+a_4+a_6+a_8=$_____.

12. 已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 60°, 则 $|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|=$_____.

13. 将一枚均匀的硬币抛掷 6 次, 则正面出现的次数比反面出现的次数多的概率为_____.

14. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}+\cos\alpha$, 且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ 的值为_____.

15. 设圆 C 位于抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=3$ 所围成的封闭区域 (包含边界) 内, 则圆 C 的半径能取到的最大值为_____.

三、解答题

16. 设 $a\in\mathbf{R}$, $f(x)=\cos x(a\sin x-\cos x)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 满足 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=f(0)$, 求函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{11\pi}{24}\right]$ 上的最大值和最小值.

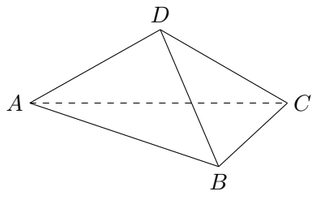
17. 某市公租房的房源位于 A, B, C 三个片区. 设每位申请人只申请其中一个片区的房源, 且申请其中任一个片区的房源是等可能的. 求该市的任 4 位申请人中:
(1) 恰有 2 人申请 A 片区的房源的概率;
(2) 申请的房源所在片区的个数 ξ 的分布列与期望.

18. 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 的导数 $f'(x)$ 满足 $f'(1)=2a$, $f'(2)=-b$, 其中常数 a, $b\in\mathbf{R}$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;
(2) 设 $g(x)=f'(x)\mathrm{e}^{-x}$, 求函数 $g(x)$ 的极值.

19. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 ACD, $AB \perp BC$, $AD = CD$, $\angle CAD = 30°$.

(1) 若 $AD = 2$, $AB = 2BC$, 求四面体 $ABCD$ 的体积;

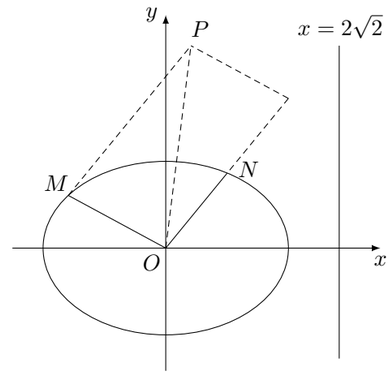
(2) 若二面角 $C - AB - D$ 为 $60°$, 求异面直线 AD 与 BC 所成角的余弦值.



20. 如图, 椭圆的中心为原点 O, 离心率 $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 一条准线的方程为 $x = 2\sqrt{2}$.

(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 设动点 P 满足: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$, 其中 M, N 是椭圆上的点, 直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$. 问: 是否存在两个定点 F_1, F_2, 使得 $|PF_1| + |PF_2|$ 为定值? 若存在, 求 F_1, F_2 的坐标; 若不存在, 说明理由.



21. 设实数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1} = a_{n+1}S_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 若 a_1, S_2, $-2a_2$ 成等比数列, 求 S_2 和 a_3;

(2) 求证: 对 $k \geqslant 3$ 有 $0 \leqslant a_{k+1} \leqslant a_k \leqslant \dfrac{4}{3}$.

2011 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=2$, $a_3=4$, 则 $a_{10}=$ （　）

(A) 12　(B) 14　(C) 16　(D) 18

2. 设 $U=\mathbf{R}$, $M=\{x\mid x^2-2x>0\}$, 则 $\complement_U M=$ （　）

(A) $[0,2]$　(B) $(0,2)$

(C) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$　(D) $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

3. 曲线 $y=-x^3+3x^2$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为 （　）

(A) $y=3x-1$　(B) $y=-3x+5$　(C) $y=3x+5$　(D) $y=2x$

4. 从一堆苹果中任取 10 只, 称得它们的质量如下 (单位: 克):

125　120　122　105　130　114　116　95　120　134

则样本数据落在 $[114.5,124.5]$ 内的频率为 （　）

(A) 0.2　(B) 0.3　(C) 0.4　(D) 0.5

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,k)$, $\boldsymbol{b}=(2,2)$, 且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线, 那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值为（　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

6. 设 $a=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$, $b=\log_{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}$, $c=\log_3\frac{4}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系是 （　）

(A) $a<b<c$　(B) $c<b<a$　(C) $b<a<c$　(D) $b<c<a$

7. 若函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$ $(x>2)$ 在 $x=a$ 处取最小值, 则 $a=$ （　）

(A) $1+\sqrt{2}$　(B) $1+\sqrt{3}$　(C) 3　(D) 4

8. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 满足 $6\sin A=4\sin B=3\sin C$, 则 $\cos B=$（　）

(A) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　(B) $\dfrac{3}{4}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$　(D) $\dfrac{11}{16}$

9. 设双曲线的左准线与两条渐近线交于 A、B 两点, 左焦点在以 AB 为直径的圆内, 则该双曲线的离心率取值范围为 （　）

(A) $\left(0,\sqrt{2}\right)$　(B) $\left(1,\sqrt{2}\right)$　(C) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　(D) $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

10. 高为 $\sqrt{2}$ 的四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, 点 S、A、B、C、D 均在半径为 1 的同一球面上, 则底面 $ABCD$ 的中心与顶点 S 之间的距离为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) $\sqrt{2}$

二、填空题

11. $(1+2x)^6$ 的展开式中 x^4 的系数是_____.

12. 若 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$, 且 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, 则 $\tan\alpha=$_____.

13. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 相交所得弦的长为 2, 则该直线的方程为_____.

14. 从甲、乙等 10 位同学中任选 3 位去参加某项活动, 则所选 3 位中有甲但没有乙的概率为_____.

15. 若实数 a, b, c 满足 $2^a+2^b=2^{a+b}$, $2^a+2^b+2^c=2^{a+b+c}$, 则 c 的最大值是_____.

三、解答题

16. 设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列, $a_1=2$, $a_3=a_2+4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

17. 某市公租房的房源位于 A、B、C 三个片区. 设每位申请人只申请其中一个片区的房源, 且申请其中任一个片区的房源是等可能的, 求该市的任 4 位申请人中:

(1) 没有人申请 A 片区房源的概率;

(2) 每个片区的房源都有人申请的概率.

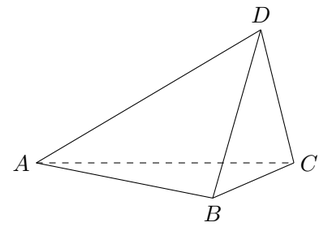
18. 设函数 $f(x)=\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos(\pi+x)\cos x$ $(x\in\mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

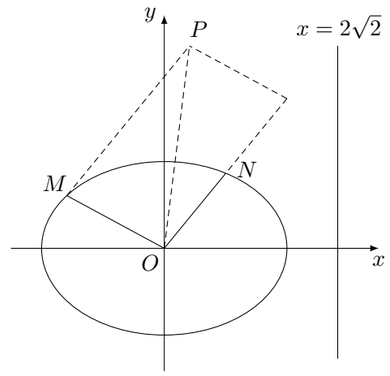
(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图象按 $\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 平移后得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求 $y=g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值.

19. 设 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ 的导数为 $f'(x)$, 若函数 $y=f'(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 对称, 且 $f'(1)=0$.
(1) 求实数 a, b 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

20. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 平面 $ABC\perp$ 平面 ACD, $AB\perp BC$, $AC=AD=2$, $BC=CD=1$.
(1) 求四面体 $ABCD$ 的体积;
(2) 求二面角 $C-AB-D$ 的平面角的正切值.



21. 如图, 椭圆的中心为原点 O, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 一条准线的方程是 $x=2\sqrt{2}$.
(1) 求该椭圆的标准方程;
(2) 设动点 P 满足: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$, 其中 M, N 是椭圆上的点, 直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$, 问: 是否存在定点 F, 使得 $|PF|$ 与点 P 到直线 $l: x=2\sqrt{10}$ 的距离之比为定值? 若存在, 求 F 的坐标; 若不存在, 说明理由.



2011 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $z=1+\mathrm{i}$, $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数, 则 $z\bar{z}-z-1=$ （　）

(A) $-2\mathrm{i}$　(B) $-\mathrm{i}$　(C) i　(D) $2\mathrm{i}$

2. 函数 $y=2\sqrt{x}\ (x\geqslant 0)$ 的反函数为 （　）

(A) $y=\dfrac{x^2}{4}\ (x\in\mathbf{R})$　(B) $y=\dfrac{x^2}{4}\ (x\geqslant 0)$

(C) $y=4x^2\ (x\in\mathbf{R})$　(D) $y=4x^2\ (x\geqslant 0)$

3. 下面四个条件中, 使 $a>b$ 成立的充分而不必要的条件是 （　）

(A) $a>b+1$　(B) $a>b-1$　(C) $a^2>b^2$　(D) $a^3>b^3$

4. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1=1$, 公差 $d=2$, $S_{k+2}-S_k=24$, 则 $k=$ （　）

(A) 8　(B) 7　(C) 6　(D) 5

5. 设函数 $f(x)=\cos\omega x\ (\omega>0)$, 将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 则 ω 的最小值等于 （　）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) 3　(C) 6　(D) 9

6. 已知直二面角 $\alpha-l-\beta$, 点 $A\in\alpha$, $AC\perp l$, C 为垂足, $B\in\beta$, $BD\perp l$, D 为垂足. 若 $AB=2$, $AC=BD=1$, 则 D 到平面 ABC 的距离等于（　）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　(D) 1

7. 某同学有同样的画册 2 本, 同样的集邮册 3 本, 从中取出 4 本赠送给 4 位朋友, 每位朋友 1 本, 则不同的赠送方法共有 （　）

(A) 4 种　(B) 10 种　(C) 18 种　(D) 20 种

8. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-2x}+1$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与直线 $y=0$ 和 $y=x$ 围成的三角形的面积为 （　）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) 1

9. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=2x(1-x)$, 则 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$ （　）

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

10. 已知抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F, 直线 $y=2x-4$ 与 C 交于 A, B 两点, 则 $\cos\angle AFB=$ （　）

(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $-\dfrac{3}{5}$　(D) $-\dfrac{4}{5}$

11. 已知平面 α 截一球面得圆 M, 过圆心 M 且与 α 成 60° 二面角的平面 β 截该球面得圆 N. 若该球面的半径为 4, 圆 M 的面积为 4π, 则圆 N 的面积为 （　）

(A) 7π　(B) 9π　(C) 11π　(D) 13π

12. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$, $\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$, 则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值等于 （　）

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 1

二、填空题

13. $(1-\sqrt{x})^{20}$ 的二项展开式中, x 的系数与 x^9 的系数之差为_____.

14. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\tan 2\alpha=$_____.

15. 已知 F_1、F_2 分别为双曲线 C: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 的左、右焦点, 点 $A\in C$, 点 M 的坐标为 $(2,0)$, AM 为 $\angle F_1AF_2$ 的平分线. 则 $|AF_2|=$_____.

16. 已知点 E, F 分别在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1, CC_1 上, 且 $B_1E=2EB$, $CF=2FC_1$, 则面 AEF 与面 ABC 所成的二面角的正切值等于_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $A-C=90^\circ$, $a+c=\sqrt{2}b$, 求 C.

18. 根据以往统计资料, 某地车主购买甲种保险的概率为 0.5, 购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3. 设各车主购买保险相互独立.

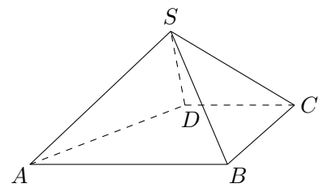
(1) 求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率;

(2) X 表示该地的 100 位车主中, 甲、乙两种保险都不购买的车主数. 求 X 的期望.

19. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $AB\parallel CD$, $BC\perp CD$, 侧面 SAB 为等边三角形. $AB=BC=2$, $CD=SD=1$.

(1) 证明: $SD\perp$ 平面 SAB;

(2) 求 AB 与平面 SBC 所成角的正弦值.



20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$ 且 $\dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_n}=1$.

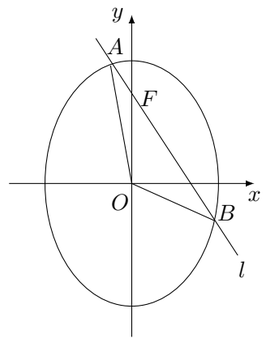
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$, 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, 证明: $S_n<1$.

21. 已知 O 为坐标原点, F 为椭圆 C: $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在 y 轴正半轴上的焦点, 过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\mathbf{0}$.

(1) 证明: 点 P 在 C 上;

(2) 设点 P 关于点 O 的对称点为 Q, 证明: A, P, B, Q 四点在同一圆上.



22. (1) 设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{x+2}$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$;

(2) 从编号 1 到 100 的 100 张卡片中每次随机抽取一张, 然后放回, 用这种方式连续抽取 20 次, 设抽得的 20 个号码互不相同的概率为 p. 证明: $p<\left(\dfrac{9}{10}\right)^{19}<\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

2011 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4\}$, $M=\{1,2,3\}$, $N=\{2,3,4\}$, 则 $\complement_U(M\cap N)=$（　）

(A) $\{1,2\}$　(B) $\{2,3\}$　(C) $\{2,4\}$　(D) $\{1,4\}$

2. 函数 $y=2\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$ 的反函数为（　）

(A) $y=\dfrac{x^2}{4}$ $(x\in\mathbf{R})$　(B) $y=\dfrac{x^2}{4}$ $(x\geqslant 0)$

(C) $y=4x^2$ $(x\in\mathbf{R})$　(D) $y=4x^2$ $(x\geqslant 0)$

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$, 则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$（　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{5}$　(D) $\sqrt{7}$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 6\\ x-3y\leqslant -2\\ x\geqslant 1\end{cases}$, 则 $z=2x+3y$ 的最小值为（　）

(A) 17　(B) 14　(C) 5　(D) 3

5. 下面四个条件中, 使 $a>b$ 成立的充分而不必要的条件是（　）

(A) $a>b+1$　(B) $a>b-1$　(C) $a^2>b^2$　(D) $a^3>b^3$

6. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1=1$, 公差 $d=2$, $S_{k+2}-S_k=24$, 则 $k=$（　）

(A) 8　(B) 7　(C) 6　(D) 5

7. 设函数 $f(x)=\cos\omega x$ $(\omega>0)$, 将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 则 ω 的最小值等于（　）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) 3　(C) 6　(D) 9

8. 已知直二面角 $\alpha-l-\beta$, 点 $A\in\alpha$, $AC\perp l$, C 为垂足, 点 $B\in\beta$, $BD\perp l$, D 为垂足. 若 $AB=2$, $AC=BD=1$, 则 $CD=$（　）

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 1

9. 4 位同学每人从甲、乙、丙 3 门课程中选修 1 门, 则恰有 2 人选修课程甲的不同选法共有（　）

(A) 12 种　(B) 24 种　(C) 30 种　(D) 36 种

10. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=2x(1-x)$, 则 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$（　）

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

11. 设两圆 C_1、C_2 都和两坐标轴相切, 且都过点 $(4,1)$, 则两圆心的距离 $|C_1C_2|=$（　）

(A) 4　(B) $4\sqrt{2}$　(C) 8　(D) $8\sqrt{2}$

12. 已知平面 α 截一球面得圆 M, 过圆心 M 且与 α 成 60° 二面角的平面 β 截该球面得圆 N. 若该球面的半径为 4, 圆 M 的面积为 4π, 则圆 N 的面积为（　）

(A) 7π　(B) 9π　(C) 11π　(D) 13π

二、填空题

13. $(1-x)^{10}$ 的二项展开式中, x 的系数与 x^9 的系数之差为_____.

14. 已知 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\tan\alpha=2$, 则 $\cos\alpha=$_____.

15. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 C_1D_1 的中点, 则异面直线 AE 与 BC 所成角的余弦值为_____.

16. 已知 F_1、F_2 分别为双曲线 C: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 的左、右焦点, 点 $A\in C$, 点 M 的坐标为 $(2,0)$, AM 为 $\angle F_1AF_2$ 的平分线. 则 $|AF_2|=$_____.

三、解答题

17. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_2=6$, $6a_1+a_3=30$, 求 a_n 和 S_n.

18. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin A+c\sin C-\sqrt{2}a\sin C=b\sin B$.

(1) 求 B;

(2) 若 $A=75^\circ$, $b=2$, 求 a, c.

19. 根据以往统计资料, 某地车主购买甲种保险的概率为 0.5, 购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3. 设各车主购买保险相互独立.

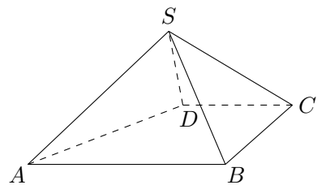
(1) 求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率;

(2) 求该地 3 位车主中恰有 1 位车主甲、乙两种保险都不购买的概率.

20. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $BC \perp CD$, 侧面 SAB 为等边三角形. $AB=BC=2$, $CD=SD=1$.

(1) 证明: $SD\perp$ 平面 SAB;

(2) 求 AB 与平面 SBC 所成角的大小.



21. 已知函数 $f(x)=x^3+3ax^2+(3-6a)x+12a-4$ ($a\in\mathbf{R}$).

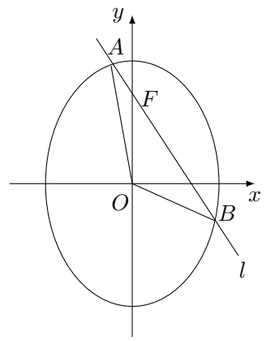
(1) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线过点 $(2,2)$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值, $x_0\in(1,3)$, 求 a 的取值范围.

22. 已知 O 为坐标原点, F 为椭圆 C: $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在 y 轴正半轴上的焦点, 过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\mathbf{0}$.

(1) 证明: 点 P 在 C 上;

(2) 设点 P 关于点 O 的对称点为 Q, 证明: A, P, B, Q 四点在同一圆上.



2011 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 若集合 $S=\{-1,0,1\}$, 则 （ ）

(A) $\mathrm{i}\in S$　(B) $\mathrm{i}^2\in S$　(C) $\mathrm{i}^3\in S$　(D) $\dfrac{2}{\mathrm{i}}\in S$

2. 若 $a\in\mathbf{R}$, 则“$a=2$”是“$(a-1)(a-2)=0$”的 （ ）

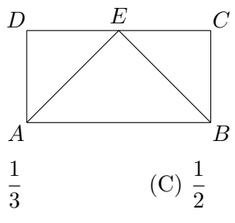
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 若 $\tan\alpha=3$, 则 $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$ 的值等于 （ ）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 6

4. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为边 CD 的中点, 若在矩形 $ABCD$ 内部随机取一个点 Q, 则点 Q 取自 $\triangle ABE$ 内部的概率等于 （ ）



(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

5. $\int_0^1(\mathrm{e}^x+2x)\,\mathrm{d}x$ 等于 （ ）

(A) 1　(B) $\mathrm{e}-1$　(C) e　(D) $\mathrm{e}+1$

6. $(1+2x)^5$ 的展开式中, x^2 的系数等于 （ ）

(A) 80　(B) 40　(C) 20　(D) 10

7. 设圆锥曲线 Γ 的两个焦点分别为 F_1, F_2. 若曲线 Γ 上存在点 P 满足 $|PF_1|:|F_1F_2|:|PF_2|=4:3:2$, 则曲线 Γ 的离心率等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$　(B) $\dfrac{2}{3}$ 或 2　(C) $\dfrac{1}{2}$ 或 2　(D) $\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{3}{2}$

8. 已知 O 是坐标原点, 点 $A(-1,1)$, 若点 $M(x,y)$ 为平面区域 $\begin{cases}x+y\geqslant 2\\ x\leqslant 1\\ y\leqslant 2\end{cases}$ 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,0]$　(B) $[0,1]$　(C) $[0,2]$　(D) $[-1,2]$

9. 对于函数 $f(x)=a\sin x+bx+c$ (其中 a, $b\in\mathbf{R}$, $c\in\mathbf{Z}$), 选取 a, b, c 的一组值计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$, 所得出的正确结果一定不可能是 （ ）

(A) 4 和 6　(B) 3 和 1　(C) 2 和 4　(D) 1 和 2

10. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x$, 对于曲线 $y=f(x)$ 上横坐标成等差数列的三个点 A, B, C, 给出以下判断:

① $\triangle ABC$ 一定是钝角三角形

② $\triangle ABC$ 可能是直角三角形

③ $\triangle ABC$ 可能是等腰三角形

④ $\triangle ABC$ 不可能是等腰三角形

其中, 正确的判断是 （ ）

(A) ①③　(B) ①④　(C) ②③　(D) ②④

二、填空题

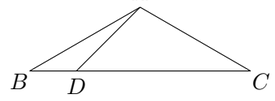
11. 运行如图所示的程序, 输出的结果是_____.

```
a = 1
b = 2
a = a + b
PRINT a
END
```

12. 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 底面 ABC, $PA=3$, 底面 ABC 是边长为 2 的正三角形, 则三棱锥 $P-ABC$ 的体积等于_____.

13. 盒中装有形状、大小完全相同的 5 个球, 其中红色球 3 个, 黄色球 2 个. 若从中随机取出 2 个球, 则所取出的 2 个球颜色不同的概率等于_____.

14. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 点 D 在 BC 边上, $\angle ADC=45^\circ$, 则 AD 的长度等于_____.



15. 设 V 是全体平面向量构成的集合, 若映射 f: $V\to\mathbf{R}$ 满足: 对任意向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)\in V$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)\in V$, 以及任意 $\lambda\in\mathbf{R}$, 均有 $f(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{b})$, 则称映射 f 具有性质 P. 现给出如下映射:

① f_1: $V\to\mathbf{R}$, $f_1(\boldsymbol{m})=x-y$, $\boldsymbol{m}=(x,y)\in V$;

② f_2: $V\to\mathbf{R}$, $f_2(\boldsymbol{m})=x^2+y$, $\boldsymbol{m}=(x,y)\in V$;

③ f_3: $V\to\mathbf{R}$, $f_3(\boldsymbol{m})=x+y+1$, $\boldsymbol{m}=(x,y)\in V$.

其中, 具有性质 P 的映射的序号为_____. (写出所有具有性质 P 的映射的序号)

三、解答题

16. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=3$, 前 3 项和 $S_3=\dfrac{13}{3}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$ $(A>0,\ 0<\varphi<\pi)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 处取得最大值, 且最大值为 a_3, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

17. 已知直线 $l: y=x+m$, $m\in\mathbf{R}$.

(1) 若以点 $M(2,0)$ 为圆心的圆与直线 l 相切于点 P, 且点 P 在 y 轴上, 求该圆的方程;

(2) 若直线 l 关于 x 轴对称的直线为 l', 问直线 l' 与抛物线 $C: x^2=4y$ 是否相切? 说明理由.

18. 某商场销售某种商品的经验表明, 该商品每日的销售量 y (单位: 千克) 与销售价格 x (单位: 元/千克) 满足关系式 $y=\dfrac{a}{x-3}+10(x-6)^2$, 其中 $3<x<6$, a 为常数. 已知销售价格为 5 元/千克时, 每日可售出该商品 11 千克.

(1) 求 a 的值;

(2) 若该商品的成本为 3 元/千克, 试确定销售价格 x 的值, 使商场每日销售该商品所获得的利润最大.

19. 某产品按行业生产标准分成 8 个等级, 等级系数 X 依次为 1, 2, $\cdots$, 8, 其中 $X \geqslant 5$ 为标准 A, $X \geqslant 3$ 为标准 B, 已知甲厂执行标准 A 生产该产品, 产品的零售价为 6 元/件; 乙厂执行标准 B 生产该产品, 产品的零售价为 4 元/件, 假定甲、乙两厂的产品都符合相应的执行标准.

(1) 已知甲厂产品的等级系数 X_1 的概率分布列如下表所示:

X_1	5	6	7	8
P	0.4	a	b	0.1

且 X_1 的数学期望 $EX_1 = 6$, 求 a, b 的值;

(2) 为分析乙厂产品的等级系数 X_2, 从该厂生产的产品中随机抽取 30 件, 相应的等级系数组成一个样本, 数据如下:

3 5 3 3 8 5 5 6 3 4
6 3 4 7 5 3 4 8 5 3
8 3 4 3 4 4 7 5 6 7

用这个样本的频率分布估计总体分布, 将频率视为概率, 求等级系数 X_2 的数学期望;

(3) 在 (1)、(2) 的条件下, 若以" 性价比" 为判断标准, 则哪个工厂的产品更具可购买性? 说明理由.

注: ① 产品的"性价比"$=\dfrac{\text{产品的等级系数的数学期望}}{\text{产品的零售价}}$;

② "性价比"大的产品更具可购买性.

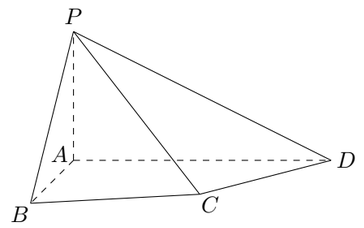
20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $AB + AD = 4$, $CD = \sqrt{2}$, $\angle CDA = 45°$.

(1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD;

(2) 设 $AB = AP$.

① 若直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 30°, 求线段 AB 的长;

② 在线段 AD 上是否存在一个点 G, 使得点 G 到点 P, B, C, D 的距离都相等? 说明理由.



21. 三选二.

【A】设矩阵 $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. (其中 $a > 0$, $b > 0$)

(1) 若 $a = 2$, $b = 3$, 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1};

(2) 若曲线 $C: x^2 + y^2 = 1$ 在矩阵 M 所对应的线性变换作用下得到曲线 $C': \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 求 a, b 的值.

【B】在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的方程为 $x - y + 4 = 0$, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数).

(1) 已知在极坐标 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 点 P 的极坐标为 $\left(4, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 判断点 P 与直线 l 的位置关系;

(2) 设点 Q 是曲线 C 上的一个动点, 求它到直线 l 的距离的最小值.

【C】设不等式 $|2x - 1| < 1$ 的解集为 M.

(1) 求集合 M;

(2) 若 a, $b \in M$, 试比较 $ab + 1$ 与 $a + b$ 的大小.

2011 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $M=\{-1,0,1\}$, $N=\{0,1,2\}$, 则 $M\cap N$ 等于 （ ）

(A) $\{0,1\}$ (B) $\{-1,0,1\}$ (C) $\{0,1,2\}$ (D) $\{-1,0,1,2\}$

2. i 是虚数单位, $1+\mathrm{i}^3$ 等于 （ ）

(A) i (B) $-\mathrm{i}$ (C) $1+\mathrm{i}$ (D) $1-\mathrm{i}$

3. 若 $a\in\mathbf{R}$, 则“$a=1$”是“$|a|=1$”的 （ ）

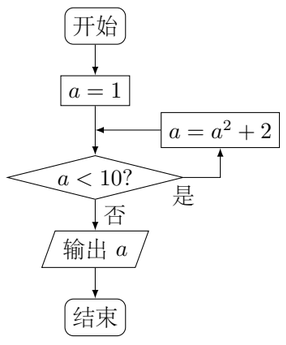
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 某校选修乒乓球课程的学生中, 高一年级有 30 名, 高二年级有 40 名. 现用分层抽样的方法在这 70 名学生中抽取一个样本, 已知在高一年级的学生中抽取了 6 名, 则在高二年级的学生中应抽取的人数为 （ ）

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

5. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果是 （ ）



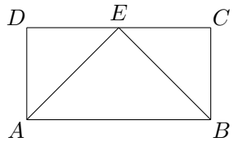
(A) 3 (B) 11 (C) 38 (D) 123

6. 若关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 m 的取值范围是 （ ）

(A) $(-1,1)$ (B) $(-2,2)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

7. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为边 CD 的中点, 若在矩形 $ABCD$ 内部随机取一个点 Q, 则点 Q 取自 $\triangle ABE$ 内部的概率等于 （ ）



(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0\\ x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$, 若 $f(a)+f(1)=0$, 则实数 a 的值等于 （ ）

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

9. 若 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=\dfrac{1}{4}$, 则 $\tan\alpha$ 的值等于 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

10. 若 $a>0$, $b>0$, 且函数 $f(x)=4x^3-ax^2-2bx+2$ 在 $x=1$ 处有极值, 则 ab 的最大值等于 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 9

11. 设圆锥曲线 Γ 的两个焦点分别为 F_1, F_2. 若曲线 Γ 上存在点 P 满足 $|PF_1|:|F_1F_2|:|PF_2|=4:3:2$, 则曲线 Γ 的离心率等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ 或 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ 或 2 (D) $\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{3}{2}$

12. 在整数集 $\mathbf{Z}$ 中, 被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”, 记为 $[k]$, 即 $[k]=\{5n+k\mid n\in\mathbf{Z}\}$, $k=0,1,2,3,4$. 给出如下四个结论:

① $2011\in[1]$;

② $-3\in[3]$;

③ $\mathbf{Z}=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]\cup[4]$;

④ “整数 a, b 属于同一‘类’”的充要条件是“$a-b\in[0]$”.

其中, 正确结论的个数是 （ ）

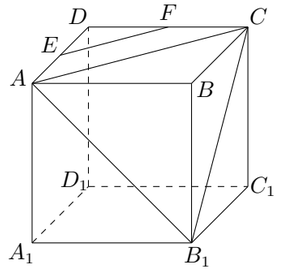
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

13. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2)$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于_____.

14. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $BC=2$, $C=60^\circ$, 则边 AB 的长度等于_____.

15. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, 点 E 为 AD 的中点, 点 F 在 CD 上, 若 $EF\parallel$ 平面 AB_1C, 则线段 EF 的长度等于_____.



16. 商家通常依据“乐观系数准则”确定商品销售价格, 即根据商品的最低销售限价 a, 最高销售限价 b $(b>a)$ 以及实数 x $(0<x<1)$ 确定实际销售价格 $c=a+x(b-a)$. 这里, x 被称为乐观系数. 经验表明, 最佳乐观系数 x 恰好使得 $(c-a)$ 是 $(b-c)$ 和 $(b-a)$ 的等比中项. 据此可得, 最佳乐观系数 x 的值等于_____.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_3=-3$.

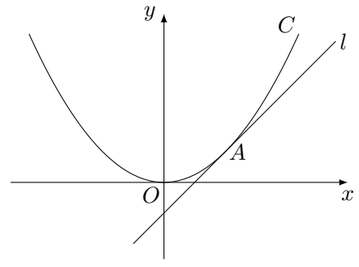
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 k 项和 $S_k=-35$, 求 k 的值.

18. 如图, 直线 $l:y=x+b$ 与抛物线 $C:x^2=4y$ 相切于点 A.

(1) 求实数 b 的值;

(2) 求以点 A 为圆心, 且与抛物线 C 的准线相切的圆的方程.



19. 某日用品按行业质量标准分成五个等级, 等级系数 X 依次为 1, 2, 3, 4, 5. 现从一批该日用品中随机抽取 20 件, 对其等级系数进行统计分析, 得到频率分布表如下:

X	1	2	3	4	5
f	a	0.2	0.45	b	c

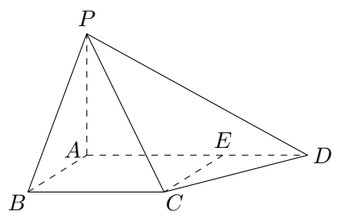
(1) 若所抽取的 20 件日用品中, 等级系数为 4 的恰有 3 件, 等级系数为 5 的恰有 2 件, 求 a, b, c 的值;

(2) 在 (1) 的条件下, 将等级系数为 4 的 3 件日用品记为 x_1, x_2, x_3, 等级系数为 5 的 2 件日用品记为 y_1, y_2, 现从 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 这 5 件日用品中任取两件 (假定每件日用品被取出的可能性相同), 写出所有可能的结果, 并求这两件日用品的等级系数恰好相等的概率.

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AD$, 点 E 在线段 AD 上, 且 $CE /\!\!/ AB$.

(1) 求证: $CE \perp$ 平面 PAD;

(2) 若 $PA = AB = 1$, $AD = 3$, $CD = \sqrt{2}$, $\angle CDA = 45^\circ$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



21. 设函数 $f(\theta) = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$, 其中, 角 θ 的顶点与坐标原点重合, 始边与 x 轴非负半轴重合, 终边经过点 $P(x, y)$, 且 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

(1) 若点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 求 $f(\theta)$ 的值;

(2) 若点 $P(x, y)$ 为平面区域 $\Omega: \begin{cases} x + y \geqslant 1 \\ x \leqslant 1 \\ y \leqslant 1 \end{cases}$ 上的一个动点, 试确定角 θ 的取值范围, 并求函数 $f(\theta)$ 的最小值和最大值.

22. 已知 a, b 为常数, 且 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = -ax + b + ax\ln x$, $f(\mathrm{e}) = 2$ ($\mathrm{e} = 2.71828\cdots$ 是自然对数的底数).

(1) 求实数 b 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 当 $a = 1$ 时, 是否同时存在实数 m 和 M ($m < M$), 使得对每一个 $t \in [m, M]$, 直线 $y = t$ 与曲线 $y = f(x)$ $\left(x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]\right)$ 都有公共点? 若存在, 求出最小的实数 m 和最大的实数 M; 若不存在, 说明理由.

2011 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$ （　）

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $2+2\mathrm{i}$　(D) $2-2\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y \text{ 为实数, 且 } x^2+y^2=1\}$, $B=\{(x,y)\mid x,y \text{ 为实数, 且 } y=x\}$, 则 $A\cap B$ 的元素个数为 （　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

3. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=$ （　）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 0

4. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数, 则下列结论恒成立的是 （　）

(A) $f(x)+|g(x)|$ 是偶函数　(B) $f(x)-|g(x)|$ 是奇函数

(C) $|f(x)|+g(x)$ 是偶函数　(D) $|f(x)|-g(x)$ 是奇函数

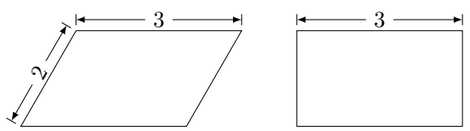
5. 已知平面直角坐标系 xOy 上的区域 D 由不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\ y\leqslant 2\\ x\leqslant\sqrt{2}y\end{cases}$ 给定. 若 $M(x,y)$ 为 D 上的动点, 点 A 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$, 则 $z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}$ 的最大值为 （　）

(A) $4\sqrt{2}$　(B) $3\sqrt{2}$　(C) 4　(D) 3

6. 甲、乙两队进行排球决赛. 现在的情形是甲队只要再赢一局就获冠军, 乙队需要再赢两局才能得冠军. 若两队胜每局的概率相同, 则甲队获得冠军的概率为 （　）

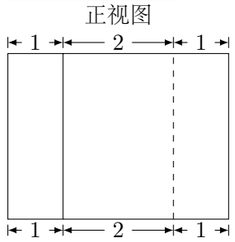
(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{3}{5}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{3}{4}$

7. 如图, 某几何体的正视图 (主视图) 是平行四边形, 侧视图 (左视图) 和俯视图都是矩形, 则该几何体的体积为 （　）



正视图

侧视图



俯视图

(A) $6\sqrt{3}$　(B) $9\sqrt{3}$　(C) $12\sqrt{3}$　(D) $18\sqrt{3}$

8. 设 S 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的非空子集, 如果对于 $\forall a,b\in S$, 有 $ab\in S$, 则称 S 关于数的乘法是封闭的. 若 T, V 是 $\mathbf{Z}$ 的两个不相交的非空子集, $T\cup V=\mathbf{Z}$. 且对于 $\forall a,b,c\in T$, 有 $abc\in T$, $\forall x,y,z\in V$, 有 $xyz\in V$. 则下列结论恒成立的是 （　）

(A) T, V 中至少有一个关于乘法是封闭的

(B) T, V 中至多有一个关于乘法是封闭的

(C) T, V 中有且只有一个关于乘法是封闭的

(D) T, V 中每一个关于乘法都是封闭的

二、填空题

9. 不等式 $|x+1|-|x-3|\geqslant 0$ 的解集是_____.

10. $x\left(x-\frac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中, x^4 的系数是_____. (用数字作答)

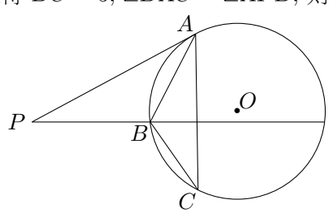
11. 等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和等于前 4 项的和. 若 $a_1=1$, $a_k+a_4=0$, 则 $k=$_____.

12. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 在 $x=$_____处取得极小值.

13. 某数学老师身高 176 cm, 他爷爷、父亲和儿子的身高分别是 173 cm, 170 cm 和 182 cm. 因儿子的身高与父亲的身高有关, 该老师用线性回归分析的方法预测他孙子的身高为_____cm.

14. 已知两曲线参数方程分别为 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta<\pi)$ 和 $\begin{cases}x=\frac{5}{4}t^2\\ y=t\end{cases}$ $(t\in\mathbf{R})$, 它们的交点坐标为_____.

15. 如图, 过圆 O 外一点 P 分别作圆的切线和割线交圆于 A, B, 且 $PB=7$, C 是圆上一点, 使得 $BC=5$, $\angle BAC=\angle APB$, 则 $AB=$_____.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ 的值;

(2) 设 α, $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f\left(3\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{10}{13}$, $f(3\beta+2\pi)=\frac{6}{5}$, 求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

17. 为了解甲、乙两厂的产品质量, 采用分层抽样的方法从甲、乙两厂生产的产品中分别抽取 14 件和 5 件, 测量产品中微量元素 x, y 的含量 (单位: 毫克). 下表是乙厂的 5 件产品的测量数据:

编号	1	2	3	4	5
x	169	178	166	175	180
y	75	80	77	70	81

(1) 已知甲厂生产的产品共有 98 件, 求乙厂生产的产品数量;

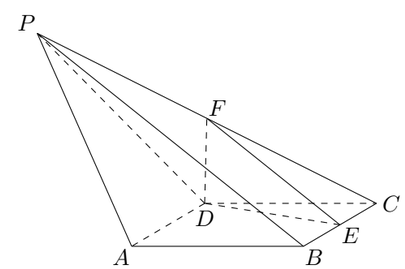
(2) 当产品中的微量元素 x, y 满足 $x\geqslant 175$ 且 $y\geqslant 75$ 时, 该产品为优等品. 用上述样本数据估计乙厂生产的优等品的数量;

(3) 从乙厂抽出的上述 5 件产品中, 随机抽取 2 件, 求抽取的 2 件产品中优等品数 ξ 的分布列及其均值 (即数学期望).

18. 如图, 在锥体 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, 且 $\angle DAB=60^\circ$, $PA=PD=\sqrt{2}$, $PB=2$, E, F 分别是 BC, PC 的中点.

(1) 证明: $AD\perp$ 平面 DEF;

(2) 求二面角 $P-AD-B$ 的余弦值.



19. 设圆 C 与两圆 $\left(x+\sqrt{5}\right)^2+y^2=4$, $\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2=4$ 中的一个内切, 另一个外切.

(1) 求 C 的圆心轨迹 L 的方程.

(2) 已知点 $M\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5},\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, $F\left(\sqrt{5},0\right)$, 且 P 为 L 上动点, 求 $||MP|-|FP||$ 的最大值及此时点 P 的坐标.

20. 设 $b>0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=b$, $a_n=\dfrac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}$ $(n\geqslant 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 对于一切正整数 n, $a_n\leqslant\dfrac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 上, 给定抛物线 $L:y=\dfrac{1}{4}x^2$. 实数 p, q 满足 $p^2-4q\geqslant 0$, x_1, x_2 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两根, 记 $\varphi(p,q)=\max\{|x_1|,|x_2|\}$.

(1) 过点 $A\left(p_0,\dfrac{1}{4}p_0^2\right)$ $(p_0\neq 0)$ 作 L 的切线交 y 轴于点 B. 证明: 对线段 AB 上的任一点 $Q(p,q)$, 有 $\varphi(p,q)=\dfrac{|p_0|}{2}$;

(2) 设 $M(a,b)$ 是定点, 其中 a, b 满足 $a^2-4b>0$, $a\neq 0$. 过点 $M(a,b)$ 作 L 的两条切线 l_1, l_2, 切点分别为 $E\left(p_1,\dfrac{1}{4}p_1^2\right)$, $E'\left(p_2,\dfrac{1}{4}p_2^2\right)$, l_1, l_2 与 y 分别交于 F, F'. 线段 EF 上异于两端点的点集记为 X. 证明: $M(a,b)\in X\Leftrightarrow|p_1|>|p_2|\Leftrightarrow\varphi(a,b)=\dfrac{|p_1|}{2}$;

(3) 设 $D=\left\{(x,y)\,|\,y\leqslant x-1,y\geqslant\dfrac{1}{4}(x+1)^2-\dfrac{5}{4}\right\}$, 当点 (p,q) 取遍 D 时, 求 $\varphi(p,q)$ 的最小值 (记为 $\varphi_{\min}$) 和最大值 (记为 $\varphi_{\max}$).

2011 年普通高等学校招生考试（广东卷）

文科数学

一、选择题

1. 设复数 z 满足 $\mathrm{i}z=1$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$ （　）

(A) $-\mathrm{i}$　(B) i　(C) -1　(D) 1

2. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,x,y \text{ 为实数, 且 } x^2+y^2=1\}$, $B=\{(x,y)\,|\,x,y \text{ 为实数, 且 } x+y=1\}$, 则 $A\cap B$ 的元素个数为 （　）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(1,0)$, $\boldsymbol{c}=(3,4)$. 若 λ 为实数, $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$, 则 $\lambda=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\lg(1+x)$ 的定义域是 （　）

(A) $(-\infty,-1)$　(B) $(1,+\infty)$

(C) $(-1,1)\cup(1,+\infty)$　(D) $(-\infty,+\infty)$

5. 不等式 $2x^2-x-1>0$ 的解集是 （　）

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$　(B) $(1,+\infty)$

(C) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　(D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

6. 已知平面直角坐标系 xOy 上的区域 D 由不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\ y\leqslant 2\\ x\leqslant\sqrt{2}y\end{cases}$ 给定. 若 $M(x,y)$ 为 D 上的动点, 点 A 的坐标为 $\left(\sqrt{2},1\right)$, 则 $z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}$ 的最大值为 （　）

(A) 3　(B) 4　(C) $3\sqrt{2}$　(D) $4\sqrt{2}$

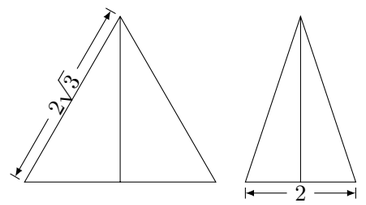
7. 正五棱柱中, 不同在任何侧面且不同在任何底面的两顶点的连线称为它的对角线, 那么一个正五棱柱对角线的条数共有 （　）

(A) 20　(B) 15　(C) 12　(D) 10

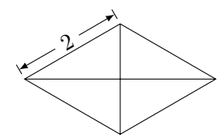
8. 设圆 C 与圆 $x^2+(y-3)^2=1$ 外切, 且与直线 $y=0$ 相切, 则 C 的圆心轨迹为 （　）

(A) 抛物线　(B) 双曲线　(C) 椭圆　(D) 圆

9. 如图, 某几何体的正视图 (主视图), 侧视图 (左视图) 和俯视图分别是等边三角形, 等腰三角形和菱形, 则该几何体的体积为 （　）



正视图　侧视图



俯视图

(A) $4\sqrt{3}$　(B) 4　(C) $2\sqrt{3}$　(D) 2

10. 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的任意实值函数. 如下定义两个函数 $(f\circ g)(x)$ 和 $(f\bullet g)(x)$: 对任意 $x\in\mathbf{R}$, $(f\circ g)(x)=f(g(x))$; $(f\bullet g)(x)=f(x)g(x)$, 则下列等式恒成立的是 （　）

(A) $((f\circ g)\bullet h)(x)=((f\bullet h)\circ(g\bullet h))(x)$

(B) $((f\bullet g)\circ h)(x)=((f\circ h)\bullet(g\circ h))(x)$

(C) $((f\circ g)\circ h)(x)=((f\circ h)\circ(g\circ h))(x)$

(D) $((f\bullet g)\bullet h)(x)=((f\bullet h)\bullet(g\bullet h))(x)$

二、填空题

11. 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_2=2$, $a_4-a_3=4$, 则此数列的公比 $q=$_____.

12. 设函数 $f(x)=x^3\cos x+1$. 若 $f(a)=11$, 则 $f(-a)=$_____.

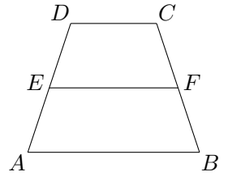
13. 为了解篮球爱好者小李的投篮命中率与打篮球时间之间的关系, 下表记录了小李某月 1 号到 5 号每天打篮球时间 x (单位: 小时) 与当天投篮命中率 y 之间的关系:

时间 x	1	2	3	4	5
命中率 y	0.4	0.5	0.6	0.6	0.4

小李这 5 天的平均投篮命中率为_____; 用线性回归分析的方法, 预测小李该月 6 号打 6 小时篮球的投篮命中率为_____.

14. 已知两曲线参数方程分别为 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta<\pi)$ 和 $\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}t^2\\ y=t\end{cases}$ $(t\in\mathbf{R})$, 它们的交点坐标为_____.

15. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB\parallel CD$, $AB=4$, $CD=2$, E, F 分别为 AD, BC 上的点, 且 $EF=3$, $EF\parallel AB$, 则梯形 $ABFE$ 与梯形 $EFCD$ 的面积比为_____.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(0)$ 的值;

(2) 设 α, $\beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f\left(3\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{10}{13}$, $f(3\beta+2\pi)=\dfrac{6}{5}$, 求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

17. 在某次测验中, 有 6 位同学的平均成绩为 75 分. 用 x_n 表示编号为 n $(n=1,2,\cdots,6)$ 的同学所得成绩, 且前 5 位同学的成绩如下:

编号 n	1	2	3	4	5
成绩 x_n	70	76	72	70	72

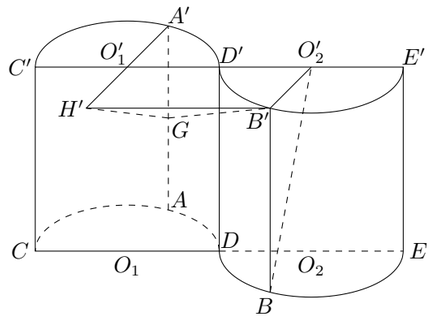
(1) 求第 6 位同学的成绩 x_6, 及这 6 位同学成绩的标准差 s;

(2) 从前 5 位同学中, 随机地选 2 位同学, 求恰有 1 位同学成绩在区间 $(68,75)$ 中的概率.

18. 如图所示的几何体是将高为 2, 底面半径为 1 的直圆柱沿过轴的平面切开后, 将其中一半沿切面向右水平平移后得到的. A, A', B, B' 分别为 $\widehat{CD}$, $\widehat{C'D'}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{D'E'}$ 的中点, O_1, O_1', O_2, O_2' 分别为 CD, $C'D'$, DE, $D'E'$ 的中点.

(1) 证明: O_1', A', O_2, B 四点共面;

(2) 设 G 为 AA' 中点, 延长 $A'O_1'$ 到 H', 使得 $O_1'H' = A'O_1'$. 证明: $BO_2' \perp$ 平面 $H'B'G$.



19. 设 $a > 0$, 讨论函数 $f(x) = \ln x + a(1-a)x^2 - 2(1-a)x$ 的单调性.

20. 设 $b > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = b$, $a_n = \dfrac{nba_{n-1}}{a_{n-1} + n - 1}$ $(n \geqslant 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 对于一切正整数 n, $2a_n \leqslant b^{n+1} + 1$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: x = -2$ 交 x 轴于点 A. 设 P 是 l 上一点, M 是线段 OP 的垂直平分线上一点, 且满足 $\angle MPO = \angle AOP$.

(1) 当点 P 在 l 上运动时, 求点 M 的轨迹 E 的方程;

(2) 已知 $T(1, -1)$, 设 H 是 E 上动点, 求 $|HO| + |HT|$ 的最小值, 并给出此时点 H 的坐标;

(3) 过点 $T(1, -1)$ 且不平行于 y 轴的直线 l_1 与轨迹 E 有且只有两个不同的交点, 求直线 l_1 的斜率 k 的取值范围.

2011 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. i 为虚数单位, 则 $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2011}=$ （　）

(A) $-\mathrm{i}$　(B) -1　(C) i　(D) 1

2. 已知 $U=\{y\mid y=\log_2 x, x>1\}$, $P=\left\{y\mid y=\dfrac{1}{x}, x>2\right\}$, 则 $\complement_U P=$（　）

(A) $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　(B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

(C) $(0,+\infty)$　(D) $(-\infty,0)\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

3. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$, $x\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)\geqslant 1$, 则 x 的取值范围为 （　）

(A) $\left\{x\mid k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

(B) $\left\{x\mid 2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

(C) $\left\{x\mid k\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{5\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

(D) $\left\{x\mid 2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

4. 将两个顶点在抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上, 另一个顶点是此抛物线焦点的正三角形个数记为 n, 则 （　）

(A) $n=0$　(B) $n=1$　(C) $n=2$　(D) $n\geqslant 3$

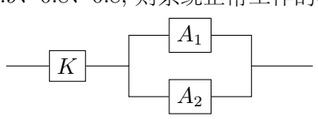
5. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$, 且 $P(\xi<4)=0.8$, 则 $P(0<\xi<2)=$ （　）

(A) 0.6　(B) 0.4　(C) 0.3　(D) 0.2

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+2$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$. 若 $g(2)=a$, 则 $f(2)=$ （　）

(A) 2　(B) $\dfrac{15}{4}$　(C) $\dfrac{17}{4}$　(D) a^2

7. 如图, 用 K、A_1、A_2 三类不同的元件连接成一个系统. 当 K 正常工作且 A_1、A_2 至少有一个正常工作时, 系统正常工作. 已知 K、A_1、A_2 正常工作的概率依次为 0.9、0.8、0.8, 则系统正常工作的概率为 （　）



(A) 0.960　(B) 0.864　(C) 0.720　(D) 0.576

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x+z,3)$, $\boldsymbol{b}=(2,y-z)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 若 x, y 满足不等式 $|x|+|y|\leqslant 1$, 则 z 的取值范围为 （　）

(A) $[-2,2]$　(B) $[-2,3]$　(C) $[-3,2]$　(D) $[-3,3]$

9. 若实数 a, b 满足 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 且 $ab=0$, 则称 a 与 b 互补. 记 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b$, 那么 $\varphi(a,b)=0$ 是 a 与 b 互补的 （　）

(A) 必要而不充分条件　(B) 充分而不必要条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

10. 放射性元素由于不断有原子放射出微粒子而变成其他元素, 其含量不断减少, 这种现象称为衰变. 假设在放射性同位素铯 137 的衰变过程中, 其含量 M (单位: 太贝克) 与时间 t (单位: 年) 满足函数关系: $M(t)=M_0 2^{-\frac{t}{30}}$, 其中 M_0 为 $t=0$ 时铯 137 的含量. 已知 $t=30$ 时, 铯 137 含量的变化率是 $-10\ln 2$ (太贝克/年), 则 $M(60)=$ （　）

(A) 5 太贝克　(B) $75\ln 2$ 太贝克

(C) $150\ln 2$ 太贝克　(D) 150 太贝克

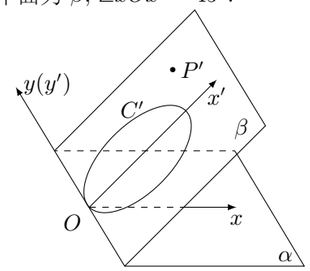
二、填空题

11. $\left(x-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式中含 x^{15} 的项的系数为_____. (结果用数值表示)

12. 在 30 瓶饮料中, 有 3 瓶已过了保质期. 从这 30 瓶饮料中任取 2 瓶, 则至少取到 1 瓶已过保质期饮料的概率为_____. (结果用最简分数表示)

13. 《九章算术》“竹九节”问题: 现有一根 9 节的竹子, 自上而下各节的容积成等差数列, 上面 4 节的容积共 3 升, 下面 3 节的容积共 4 升, 则第 5 节的容积为_____升.

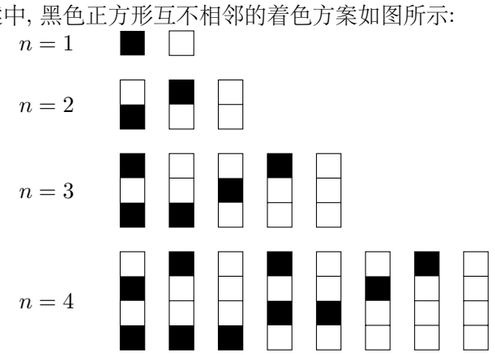
14. 如图, 直角坐标系 xOy 所在的平面为 α, 直角坐标系 $x'Oy'$ (其中 y' 轴与 y 轴重合) 所在的平面为 β, $\angle xOx'=45°$.



(1) 已知平面 β 内有一点 $P'\left(2\sqrt{2},2\right)$, 则点 P' 在平面 α 内的射影 P 的坐标为_____.

(2) 已知平面 β 内的曲线 C' 的方程是 $\left(x'-\sqrt{2}\right)^2+2y'^2-2=0$, 则曲线 C' 在平面 α 内的射影 C 的方程是_____.

15. 给 n 个自上而下相连的正方形着黑色或白色. 当 $n\leqslant 4$ 时, 在所有不同的着色方案中, 黑色正方形互不相邻的着色方案如图所示:



由此推断, 当 $n=6$ 时, 黑色正方形互不相邻的着色方案共有_____种, 至少有两个黑色正方形相邻的着色方案共有_____种. (结果用数值表示)

三、解答题

16. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a=1$, $b=2$, $\cos C=\dfrac{1}{4}$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的周长;

(2) 求 $\cos(A-C)$ 的值.

17. 提高过江大桥的车辆通行能力可改善整个城市的交通状况. 在一般情况下, 大桥上的车流速度 v (单位: 千米/小时) 是车流密度 x (单位: 辆/千米) 的函数. 当桥上的车流密度达到 200 辆/千米时, 造成堵塞, 此时车流速度为 0; 当车流密度不超过 20 辆/千米时, 车流速度为 60 千米/小时. 研究表明: 当 $20\leqslant x\leqslant 200$ 时, 车流速度 v 是车流密度 x 的一次函数.

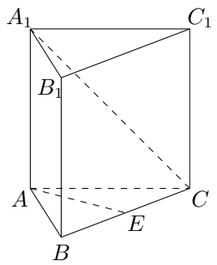
(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 200$ 时, 求函数 $v(x)$ 的表达式;

(2) 当车流密度 x 为多大时, 车流量 (单位时间内通过桥上某观测点的车辆数, 单位: 辆/小时) $f(x)=x\cdot v(x)$ 可以达到最大, 并求出最大值. (精确到 1 辆/小时)

18. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都是 4, E 是 BC 的中点, 动点 F 在侧棱 CC_1 上, 且不与点 C 重合.

(1) 当 $CF=1$ 时, 求证: $EF\perp A_1C$;

(2) 设二面角 $C-AF-E$ 的大小为 θ, 求 $\tan\theta$ 的最小值.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且满足 $a_1=a$ $(a\neq 0)$, $a_{n+1}=rS_n$ $(n\in\mathbf{N}^*, r\in\mathbf{R}, r\neq -1)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若存在 $k\in\mathbf{N}^*$, 使得 S_{k+1}, S_k, S_{k+2} 成等差数列, 试判断: 对于任意的 $m\in\mathbf{N}^*$, 且 $m\geqslant 2$, a_{m+1}, a_m, a_{m+2} 是否成等差数列, 并证明你的结论.

20. 平面内与两定点 $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ $(a>0)$ 连线的斜率之积等于非零常数 m 的点的轨迹, 加上 A_1, A_2 两点所成的曲线 C 可以是圆、椭圆或双曲线.

(1) 求曲线 C 的方程, 并讨论 C 的形状与 m 值的关系;

(2) 当 $m=-1$ 时, 对应的曲线为 C_1; 对给定的 $m\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$, 对应的曲线为 C_2. 设 F_1, F_2 是 C_2 的两个焦点. 试问: 在 C_1 上, 是否存在点 N, 使得 $\triangle F_1NF_2$ 的面积 $S=|m|a^2$? 若存在, 求 $\tan\angle F_1NF_2$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

21. (1) 已知函数 $f(x)=\ln x-x+1$, $x\in(0,+\infty)$, 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 设 a_k, b_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 均为正数, 证明:

① 若 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$, 则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}\leqslant 1$;

② 若 $b_1+b_2+\cdots+b_n=1$, 则 $\dfrac{1}{n}\leqslant b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdots b_n^{b_n}\leqslant b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$.

2011 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{2,4,5\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ （　）

(A) $\{6,8\}$　(B) $\{5,7\}$　(C) $\{4,6,7\}$　(D) $\{1,3,5,6,8\}$

2. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1)$, 则 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 （　）

(A) $-\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{3\pi}{4}$

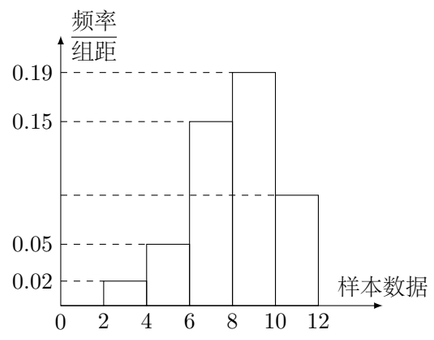
3. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x$, 则 $g(x)=$ （　）

(A) $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$　(B) $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$　(C) $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x)$　(D) $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$

4. 将两个顶点在抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上, 另一个顶点是此抛物线焦点的正三角形个数记为 n, 则 （　）

(A) $n=0$　(B) $n=1$　(C) $n=2$　(D) $n\geqslant 3$

5. 有一个容量为 200 的样本, 其频率分布直方图如图所示, 根据样本的频率分布直方图估计, 样本数据落在区间 $[10,12)$ 内的频数为 （　）



(A) 18　(B) 36　(C) 54　(D) 72

6. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$, $x\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)\geqslant 1$, 则 x 的取值范围为 （　）

(A) $\left\{x\mid 2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

(B) $\left\{x\mid k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

(C) $\left\{x\mid 2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

(D) $\left\{x\mid k\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{5\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

7. 设球的体积为 V_1, 它的内接正方体的体积为 V_2, 下列说法中最合适的是 （　）

(A) V_1 比 V_2 大约多一半　(B) V_1 比 V_2 大约多两倍半

(C) V_1 比 V_2 大约多一倍　(D) V_1 比 V_2 大约多一倍半

8. 直线 $2x+y-10=0$ 与不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x-y\geqslant -2\\ 4x+3y\leqslant 20\end{cases}$ 表示的平面区域的公共点有 （　）

(A) 0 个　(B) 1 个　(C) 2 个　(D) 无数个

9. 《九章算术》“竹九节”问题: 现有一根 9 节的竹子, 自上而下各节的容积成等差数列, 上面 4 节的容积共 3 升, 下面 3 节的容积共 4 升, 则第 5 节的容积为 （　）

(A) 1 升　(B) $\dfrac{67}{66}$ 升　(C) $\dfrac{47}{44}$ 升　(D) $\dfrac{37}{33}$ 升

10. 若实数 a, b 满足 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 且 $ab=0$, 则称 a 与 b 互补. 记 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b$, 那么 $\varphi(a,b)=0$ 是 a 与 b 互补的 （　）

(A) 必要而不充分条件　(B) 充分而不必要条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

二、填空题

11. 某市有大型超市 200 家、中型超市 400 家、小型超市 1400 家. 为掌握各类超市的营业情况, 现按分层抽样方法抽取一个容量为 100 的样本, 应抽取中型超市_____家.

12. $\left(x-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式中含 x^{15} 的项的系数为_____. (结果用数值表示)

13. 在 30 瓶饮料中, 有 3 瓶已过了保质期. 从这 30 瓶饮料中任取 2 瓶, 则至少取到 1 瓶已过保质期饮料的概率为_____. (结果用最简分数表示)

14. 过点 $(-1,-2)$ 的直线 l 被圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 截得的弦长为 $\sqrt{2}$, 则直线 l 的斜率为_____.

15. 里氏震级 M 的计算公式为: $M=\lg A-\lg A_0$, 其中 A 是测震仪记录的地震曲线的最大振幅, A_0 是相应的标准地震的振幅. 假设在一次地震中, 测震仪记录的最大振幅是 1000, 此时标准地震的振幅为 0.001, 则此次地震的震级为_____级; 9 级地震的最大的振幅是 5 级地震最大振幅的_____倍.

三、解答题

16. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a=1$, $b=2$, $\cos C=\dfrac{1}{4}$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的周长;

(2) 求 $\cos(A-C)$ 的值.

17. 成等差数列的三个正数的和等于 15, 并且这三个数分别加上 2, 5, 13 后成为等比数列 $\{b_n\}$ 中的 b_3, b_4, b_5.

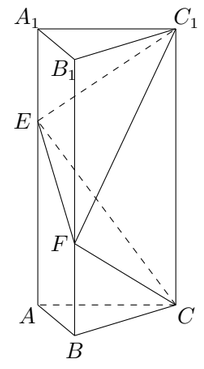
(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 求证: 数列 $\left\{S_n+\dfrac{5}{4}\right\}$ 是等比数列.

18. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2, 侧棱长为 $3\sqrt{2}$, 点 E 在侧棱 AA_1 上, 点 F 在侧棱 BB_1 上, 且 $AE=2\sqrt{2}$, $BF=\sqrt{2}$.

(1) 求证: $CF\perp C_1E$;

(2) 求二面角 $E-CF-C_1$ 的大小.



19. 提高过江大桥的车辆通行能力可改善整个城市的交通状况. 在一般情况下, 大桥上的车流速度 v (单位: 千米/小时) 是车流密度 x (单位: 辆/千米) 的函数. 当桥上的车流密度达到 200 辆/千米时, 造成堵塞, 此时车流速度为 0; 当车流密度不超过 20 辆/千米时, 车流速度为 60 千米/小时. 研究表明: 当 $20 \leqslant x \leqslant 200$ 时, 车流速度 v 是车流密度 x 的一次函数.
(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 200$ 时, 求函数 $v(x)$ 的表达式;
(2) 当车流密度 x 为多大时, 车流量 (单位时间内通过桥上某观测点的车辆数, 单位: 辆/小时)$f(x)=x \cdot v(x)$ 可以达到最大, 并求出最大值. (精确到 1 辆/小时)

20. 设函数 $f(x)=x^3+2ax^2+bx+a$, $g(x)=x^2-3x+2$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, a, b 为常数, 已知曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在点 $(2,0)$ 处有相同的切线 l.
(1) 求 a, b 的值, 并写出切线 l 的方程;
(2) 若方程 $f(x)+g(x)=mx$ 有三个互不相同的实根 0, x_1, x_2, 其中 $x_1<x_2$, 且对任意的 $x \in [x_1, x_2]$, $f(x)+g(x)<m(x-1)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

21. 平面内与两定点 $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ $(a>0)$ 连线的斜率之积等于非零常数 m 的点的轨迹, 加上 A_1, A_2 两点所成的曲线 C 可以是圆、椭圆或双曲线.
(1) 求曲线 C 的方程, 并讨论 C 的形状与 m 值的关系;
(2) 当 $m=-1$ 时, 对应的曲线为 C_1; 对给定的 $m \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$, 对应的曲线为 C_2. 设 F_1, F_2 是 C_2 的两个焦点. 试问: 在 C_1 上, 是否存在点 N, 使得 $\triangle F_1NF_2$ 的面积 $S=|m|a^2$? 若存在, 求 $\tan\angle F_1NF_2$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

2011 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位, 且 $(a+\mathrm{i})\,\mathrm{i} = b+\mathrm{i}$, 则 （ ）

(A) $a=1, b=1$　　(B) $a=-1, b=1$

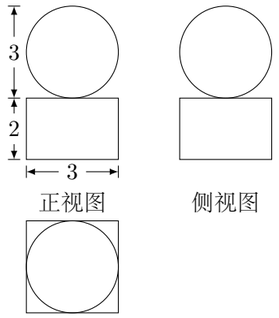
(C) $a=-1, b=-1$　　(D) $a=1, b=-1$

2. 设 $M=\{1,2\}$, $N=\{a^2\}$, 则“$a=1$”是“$N \subseteq M$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分又不必要条件

3. 如图是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为 （ ）



(A) $\dfrac{9}{2}\pi+12$　　(B) $\dfrac{9}{2}\pi+18$　　(C) $9\pi+42$　　(D) $36\pi+18$

4. 通过随机询问 110 名性别不同的大学生是否爱好某项运动, 得到如下的列联表:

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 算得,

$K^2=\dfrac{110\times(40\times30-20\times20)^2}{60\times50\times60\times50}\approx7.8$.

附表:

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

参照附表, 得到的正确结论是 （ ）

(A) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别有关”

(B) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别无关”

(C) 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”

(D) 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”

5. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ $(a>0)$ 的渐近线方程为 $3x\pm2y=0$, 则 a 的值为 （ ）

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

6. 由直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{\pi}{3}$, $y=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 所围成的封闭图形的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) $\sqrt{3}$

7. 设 $m>1$, 在约束条件 $\begin{cases} y\geqslant x \\ y\leqslant mx \\ x+y\leqslant 1 \end{cases}$ 下, 目标函数 $z=x+my$ 的最大值小于 2, 则 m 的取值范围为 （ ）

(A) $\left(1,1+\sqrt{2}\right)$　　(B) $\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)$

(C) $(1,3)$　　(D) $(3,+\infty)$

8. 设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点 M, N, 则当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为 （ ）

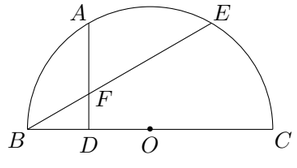
(A) 1　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

9. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\alpha \\ y=1+\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 曲线 C_2 的方程为 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)+1=0$, 则 C_1 与 C_2 的交点个数为_____.

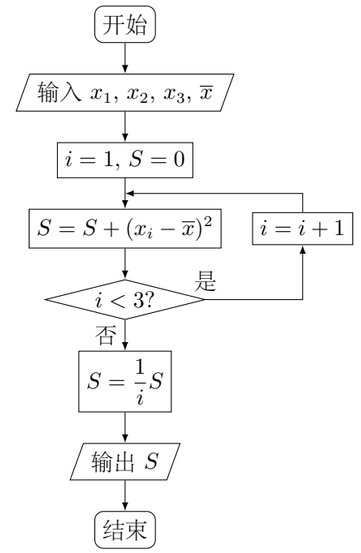
10. 设 $x, y\in\mathbf{R}$, 且 $xy\neq0$, 则 $\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+4y^2\right)$ 的最小值为_____.

11. 如图, A、E 是半圆周上的两个三等分点, 直径 $BC=4$, $AD\perp BC$, 垂足为 D, BE 与 AD 相交于点 F, 则 AF 的长为_____.



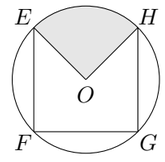
12. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和, 且 $a_1=1$, $a_4=7$, 则 $S_5=$_____.

13. 若执行如图所示的框图, 输入 $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $\overline{x}=2$, 则输出的数等于_____.



14. 在边长为 1 的正三角形 ABC 中, 设 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=$_____.

15. 如图所示, $EFGH$ 是以 O 为圆心, 半径为 1 的圆的内接正方形, 将一颗豆子随机地扔到该圆内, 用 A 表示事件“豆子落在正方形 $EFGH$ 内”, B 表示事件“豆子落在扇形 OHE (阴影部分) 内”, 则 (1) $P(A)=$_____; (2) $P(B|A)=$_____.



16. 对于 $n\in\mathbf{N}^*$, 将 n 表示为 $n=a_0\times2^k+a_1\times2^{k-1}+a_2\times2^{k-2}+\cdots+a_{k-1}\times2^1+a_k\times2^0$. 当 $i=0$ 时, $a_i=1$, 当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时, a_i 为 0 或 1. 记 $I(n)$ 为上述表示中 a_i 为 0 的个数 (例如: $1=1\times2^0$, $4=1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$, 则 $I(1)=0$, $I(4)=2$), 则 (1) $I(12)=$_____; (2) $\sum\limits_{n=1}^{127}2^{I(n)}=$_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且满足 $c\sin A=a\cos C$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 求 $\sqrt{3}\sin A-\cos\left(B+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最大值, 并求取得最大值时角 A, B 的大小.

18. 某商店试销某种商品 20 天, 获得如下数据:

日销售量 (件)	0	1	2	3
频数	1	5	9	5

试销结束后 (假设该商品的日销售量的分布规律不变), 设某天开始营业时有该商品 3 件, 当天营业结束后检查存货, 若发现存货少于 2 件, 则当天进货补充至 3 件, 否则不进货, 将频率视为概率.

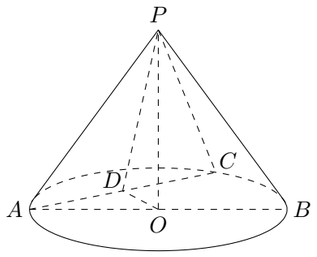
(1) 求当天商品不进货的概率;

(2) 记 X 为第二天开始营业时该商品的件数, 求 X 的分布列和数学期望.

19. 如图, 在圆锥 PO 中, 已知 $PO=\sqrt{2}$, $\odot O$ 的直径 $AB=2$, C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点, D 为 AC 的中点.

(1) 证明: 平面 $POD\perp$ 平面 PAC;

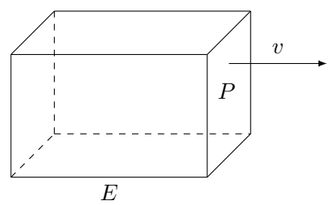
(2) 求二面角 $B-PA-C$ 的余弦值.



20. 如图, 长方体物体 E 在雨中沿面 P (面积为 S) 的垂直方向作匀速移动, 速度为 v $(v>0)$, 雨速沿 E 移动方向的分速度为 c $(c\in\mathbf{R})$. E 移动时单位时间内的淋雨量包括两部分: ① P 或 P 的平行面 (只有一个面淋雨) 的淋雨量, 假设其值与 $|v-c|\times S$ 成正比, 比例系数为 $\dfrac{1}{10}$; ② 其它面的淋雨量之和, 其值为 $\dfrac{1}{2}$, 记 y 为 E 移动过程中的总淋雨量, 当移动距离 $d=100$, 面积 $S=\dfrac{3}{2}$ 时.

(1) 写出 y 的表达式;

(2) 设 $0<v\leqslant 10$, $0<c\leqslant 5$, 试根据 c 的不同取值范围, 确定移动速度 v, 使总淋雨量 y 最少.



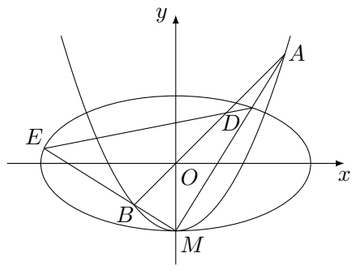
21. 如图, 椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, x 轴被曲线 $C_2:y=x^2-b$ 截得的线段长等于 C_1 的长半轴长.

(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 设 C_2 与 y 轴的交点为 M, 过坐标原点 O 的直线 l 与 C_2 相交于点 A, B, 直线 MA, MB 分别与 C_1 相交与点 D, E.

① 证明: $MD\perp ME$;

② 记 $\triangle MAB$, $\triangle MDE$ 的面积分别是 S_1, S_2. 问: 是否存在直线 l, 使得 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{17}{32}$? 请说明理由.



22. 已知函数 $f(x)=x^3$, $g(x)=x+\sqrt{x}$.

(1) 求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的零点个数, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足 $a_1=a$ $(a>0)$, $f(a_{n+1})=g(a_n)$, 证明: 存在常数 M, 使得对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $a_n\leqslant M$.

2011 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 设全集 $U=M\cup N=\{1,2,3,4,5\}$, $M\cap \complement_U N=\{2,4\}$, 则 $N=$ （ ）

(A) $\{1,2,3\}$ (B) $\{1,3,5\}$ (C) $\{1,4,5\}$ (D) $\{2,3,4\}$

2. 若 $a,b\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位, 且 $(a+\mathrm{i})\,\mathrm{i}=b+\mathrm{i}$, 则 （ ）

(A) $a=1,b=1$ (B) $a=-1,b=1$

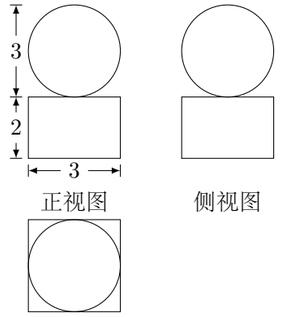
(C) $a=1,b=-1$ (D) $a=-1,b=-1$

3. “$x>1$”是“$|x|>1$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

4. 如图是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为 （ ）



(A) $9\pi+42$ (B) $36\pi+18$ (C) $\dfrac{9}{2}\pi+12$ (D) $\dfrac{9}{2}\pi+18$

5. 通过随机询问 110 名性别不同的大学生是否爱好某项运动, 得到如下的列联表:

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 算得,

$K^2=\dfrac{110\times(40\times30-20\times20)^2}{60\times50\times60\times50}\approx7.8.$

附表:

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

参照附表, 得到的正确结论是 （ ）

(A) 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”

(B) 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”

(C) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别有关”

(D) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别无关”

6. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ $(a>0)$ 的渐近线方程为 $3x\pm2y=0$, 则 a 的值为 （ ）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

7. 曲线 $y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{1}{2}$ 在点 $M\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 处的切线的斜率为 （ ）

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1$, $g(x)=-x^2+4x-3$, 若有 $f(a)=g(b)$, 则 b 的取值范围为 （ ）

(A) $\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$ (B) $\left(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$

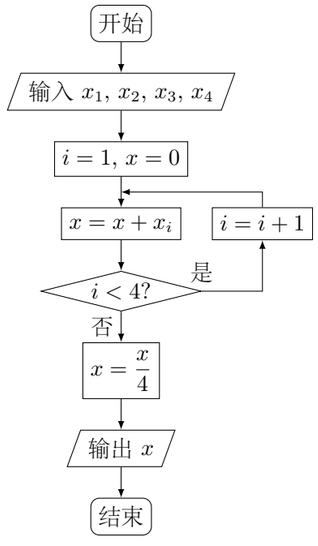
(C) $[1,3]$ (D) $(1,3)$

二、填空题

9. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数), 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 曲线 C_2 的方程为 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)+1=0$, 则 C_1 与 C_2 的交点个数为_____.

10. 已知某试验范围为 $[10,90]$, 若用分数法进行 4 次优选试验, 则第二次试点可以是_____.

11. 若执行如图所示的框图, 输入 $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$, $x_4=8$, 则输出的数等于_____.



12. 已知 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)=f(x)+9$, $g(-2)=3$, 则 $f(2)=$_____.

13. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{5}$, $\boldsymbol{b}=(2,1)$, 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反, 则 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为_____.

14. 设 $m>1$, 在约束条件 $\begin{cases}y\geqslant x\\ y\leqslant mx\\ x+y\leqslant1\end{cases}$ 下, 目标函数 $z=x+5y$ 的最大值为 4, 则 m 的值为_____.

15. 已知圆 $C:x^2+y^2=12$, 直线 $l:4x+3y=25$.

(1) 圆 C 的圆心到直线 l 的距离为_____;

(2) 圆 C 上任意一点 A 到直线 l 的距离小于 2 的概率为_____.

16. 给定 $k\in\mathbf{N}^*$, 设函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 满足: 对于任意大于 k 的正整数 n, $f(n)=n-k$.

(1) 设 $k=1$, 则其中一个函数 f 在 $n=1$ 处的函数值为_____;

(2) 设 $k=4$, 且当 $n\leqslant4$ 时, $2\leqslant f(n)\leqslant3$, 则不同的函数 f 的个数为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 且满足 $c\sin A=a\cos C$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 求 $\sqrt{3}\sin A-\cos\left(B+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最大值, 并求取得最大值时角 A, B 的大小.

18. 某河流上的一座水力发电站, 每年六月份的发电量 Y (单位: 万千瓦时) 与该河上游在六月份的降雨量 X (单位: 毫米) 有关, 据统计, 当 $X=70$ 时, $Y=460$; X 每增加 10, Y 增加 5. 已知近 20 年 X 的值为: 140, 110, 160, 70, 200, 160, 140, 160, 220, 200, 110, 160, 160, 200, 140, 110, 160, 220, 140, 160.

(1) 完成如下的频率分布表:

近 20 年六月份降雨量频率分布表

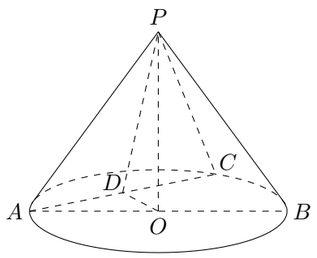
降雨量	70	110	140	160	200	220
频率	$\frac{1}{20}$		$\frac{4}{20}$			$\frac{2}{20}$

(2) 假定今年六月份的降雨量与近 20 年六月份降雨量的分布规律相同, 并将频率视为概率, 求今年六月份该水力发电站的发电量低于 490 (万千瓦时) 或超过 530 (万千瓦时) 的概率.

19. 如图, 在圆锥 PO 中, 已知 $PO=\sqrt{2}$, $\odot O$ 的直径 $AB=2$, 点 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上, 且 $\angle CAB=30^\circ$, D 为 AC 的中点.

(1) 证明: $AC\perp$ 平面 POD;

(2) 求直线 OC 和平面 PAC 所成角的正弦值.



20. 某企业在第 1 年初购买一台价值为 120 万元的设备 M, M 的价值在使用过程中逐年减少. 从第 2 年到第 6 年, 每年初 M 的价值比上年初减少 10 万元; 从第 7 年开始, 每年初 M 的价值为上年初的 75%.

(1) 求第 n 年初 M 的价值 a_n 的表达式;

(2) 设 $A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 若 A_n 大于 80 万元, 则 M 继续使用, 否则须在第 n 年初对 M 更新. 证明: 须在第 9 年初对 M 更新.

21. 已知平面内一动点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离的差等于 1.

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 F 作两条斜率存在且互相垂直的直线 l_1, l_2, 设 l_1 与轨迹 C 相交于点 A, B, l_2 与轨迹 C 相交于点 D, E, 求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}$ 的最小值.

22. 设函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-a\ln x$ ($a\in\mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2, 记过点 $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ 的直线斜率为 k. 问: 是否存在 a, 使得 $k=2-a$? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

2011 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,1,2,4\}$, $B=\{-1,0,2\}$, 则 $A\cap B=$_____.

2. 函数 $f(x)=\log_5(2x+1)$ 的单调增区间是_____.

3. 设复数 z 满足 $\mathrm{i}(z+1)=-3+2\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 z 的实部是_____.

4. 根据如图所示伪代码, 当输入 a, b 分别为 2, 3 时, 最后输出的 m 的值是_____.

```
Read  a, b
If  a > b  Then
    m ← a
Else
    m ← b
End  If
Print  m
```

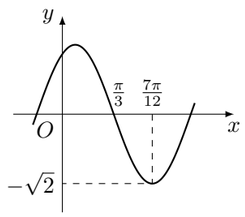
5. 从 1, 2, 3, 4 这四个数中一次随机取两个数, 则其中一个数是另一个的两倍的概率是_____.

6. 某老师从星期一到星期五收到信件数分别是 10, 6, 8, 5, 6, 则该组数据的方差 $s^2=$_____.

7. 已知 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2$, 则 $\dfrac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为_____.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过坐标原点的一条直线与函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}$ 的图象交于 P、Q 两点, 则线段 PQ 长的最小值是_____.

9. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$, ($A$, ω, φ 是常数, $A>0$, $\omega>0$) 的部分图象如图所示, 则 $f(0)=$_____.



10. 已知 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的两个单位向量, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 k 的值为_____.

11. 已知实数 $a\neq 0$, 函数 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x<1\\ -x-2a, & x\geqslant 1\end{cases}$. 若 $f(1-a)=f(1+a)$, 则 a 的值为_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 P 是函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ ($x>0$) 的图象上的动点, 该图象在 P 处的切线 l 交 y 轴于点 M. 过点 P 作 l 的垂线交 y 轴于点 N. 设线段 MN 的中点的纵坐标为 t, 则 t 的最大值是_____.

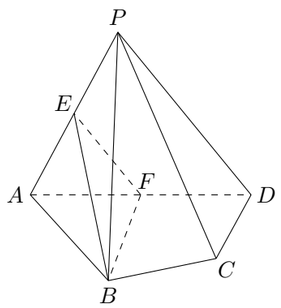
13. 设 $1=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_7$, 其中 a_1, a_3, a_5, a_7 成公比为 q 的等比数列, a_2, a_4, a_6 成公差为 1 的等差数列, 则 q 的最小值是_____.

14. 设集合 $A=\left\{(x,y)\,|\,\dfrac{m}{2}\leqslant(x-2)^2+y^2\leqslant m^2,\ x,\ y\in\mathbf{R}\right\}$, $B=\{(x,y)\,|\,2m\leqslant x+y\leqslant 2m+1,\ x,\ y\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$, 则实数 m 的取值范围是_____.

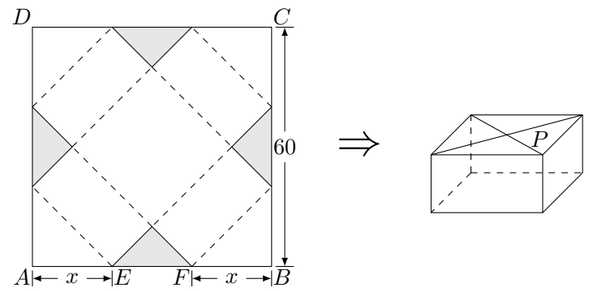
二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边为 a, b, c.
(1) 若 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos A$, 求 A 的值;
(2) 若 $\cos A=\dfrac{1}{3}$, $b=3c$, 求 $\sin C$ 的值.

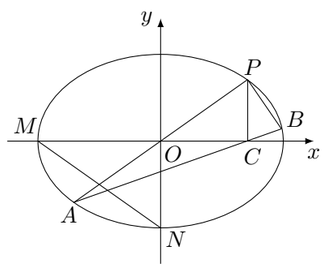
16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=AD$, $\angle BAD=60^\circ$, E, F 分别是 AP, AD 的中点. 求证:
(1) 直线 $EF\parallel$ 平面 PCD;
(2) 平面 $BEF\perp$ 平面 PAD.



17. 请你设计一个包装盒. 如图所示, $ABCD$ 是边长为 60 cm 的正方形硬纸片, 切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形, 再沿虚线折起, 使得 A, B, C, D 四个点重合于图中的点 P, 正好形成一个正四棱柱形状的包装盒, E, F 在 AB 上, 是被切去的等腰直角三角形斜边的两个端点. 设 $AE=FB=x$ (cm).
(1) 若广告商要求包装盒侧面积 S (cm^2) 最大, 试问 x 应取何值?
(2) 若广告商要求包装盒容积 V (cm^3) 最大, 试问 x 应取何值? 并求出此时包装盒的高与底面边长的比值.



18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, M, N 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的顶点, 过坐标原点的直线交椭圆于 P, A 两点, 其中点 P 在第一象限, 过 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 C, 连接 AC, 并延长交椭圆于点 B, 设直线 PA 的斜率为 k.
(1) 当直线 PA 平分线段 MN 时, 求 k 的值;
(2) 当 $k=2$ 时, 求点 P 到直线 AB 的距离 d;
(3) 对任意 $k>0$, 求证: $PA\perp PB$.



19. 已知 a, b 是实数, 函数 $f(x)=x^3+ax$, $g(x)=x^2+bx$, $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 分别是 $f(x)$, $g(x)$ 的导函数, 若 $f'(x)g'(x)\geqslant 0$ 在区间 I 上恒成立, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上单调性一致.

(1) 设 $a>0$, 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单调性一致, 求实数 b 的取值范围;

(2) 设 $a<0$ 且 $a\neq b$, 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在以 a, b 为端点的开区间上单调性一致, 求 $|a-b|$ 的最大值.

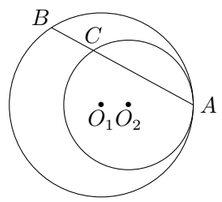
20. 设 M 为部分正整数组成的集合, 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n, 已知对任意整数 $k\in M$, 当整数 $n>k$ 时, $S_{n+k}+S_{n-k}=2(S_n+S_k)$ 都成立.

(1) 设 $M=\{1\}$, $a_2=2$, 求 a_5 的值;

(2) 设 $M=\{3,4\}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21. 四选二.

【A】如图, 圆 O_1 与圆 O_2 内切于点 A, 其半径分别为 r_1 与 r_2 $(r_1>r_2)$, 圆 O_1 的弦 AB 交圆 O_2 于点 C (O_1 不在 AB 上), 求证: $AB:AC$ 为定值.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, 求向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

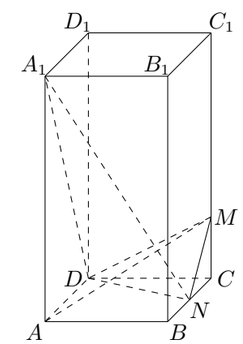
【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 求过椭圆 $\begin{cases}x=5\cos\varphi\\y=3\sin\varphi\end{cases}$ (φ 为参数) 的右焦点, 且与直线 $\begin{cases}x=4-2t\\y=3-t\end{cases}$ (t 为参数) 平行的直线的普通方程.

【D】解不等式: $x+|2x-1|<3$.

22. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2$, $AB=1$, 点 N 是 BC 的中点, 点 M 在 CC_1 上. 设二面角 A_1-DN-M 的大小为 θ.

(1) 当 $\theta=90^\circ$ 时, 求 AM 的长;

(2) 当 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时, 求 CM 的长.



23. 设整数 $n\geqslant 4$, $P(a,b)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点, 其中 a, $b\in\{1,2,3,\cdots,n\}$, $a>b$.

(1) 记 A_n 为满足 $a-b=3$ 的点 P 的个数, 求 A_n;

(2) 记 B_n 为满足 $\dfrac{1}{3}(a-b)$ 是整数的点 P 的个数, 求 B_n.

2011 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 若 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$, 则复数 $\bar{z}=$ （　）

(A) $-2-\mathrm{i}$　(B) $-2+\mathrm{i}$　(C) $2-\mathrm{i}$　(D) $2+\mathrm{i}$

2. 若集合 $A=\{x\,|\,-1\leqslant 2x+1\leqslant 3\}$, $B=\left\{x\,|\,\dfrac{x-2}{x}\leqslant 0\right\}$, 则 $A\cap B=$（　）

(A) $\{x\,|\,-1\leqslant x<0\}$　(B) $\{x\,|\,0<x\leqslant 1\}$

(C) $\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 2\}$　(D) $\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$

3. 若 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}}$, 则 $f(x)$ 定义域为 （　）

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　(B) $\left(-\dfrac{1}{2},0\right]$　(C) $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　(D) $(0,+\infty)$

4. 若 $f(x)=x^2-2x-4\ln x$, 则 $f'(x)>0$ 的解集为 （　）

(A) $(0,+\infty)$　(B) $(-1,0)\cup(2,+\infty)$

(C) $(2,+\infty)$　(D) $(-1,0)$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n+S_m=S_{n+m}$, 且 $a_1=1$, 那么 $a_{10}=$ （　）

(A) 1　(B) 9　(C) 10　(D) 55

6. 变量 X 与 Y 相对应的一组数据为 $(10,1)$, $(11.3,2)$, $(11.8,3)$, $(12.5,4)$, $(13,5)$; 变量 U 与 V 相对应的一组数据为 $(10,5)$, $(11.3,4)$, $(11.8,3)$, $(12.5,2)$, $(13,1)$. r_1 表示变量 Y 与 X 之间的线性相关系数, r_2 表示变量 V 与 U 之间的线性相关系数, 则 （　）

(A) $r_2<r_1<0$　(B) $0<r_2<r_1$　(C) $r_2<0<r_1$　(D) $r_2=r_1$

7. 观察下列各式: $5^5=3125$, $5^6=15625$, $5^7=78125$, $\cdots$, 则 5^{2011} 的末四位数字为 （　）

(A) 3125　(B) 5625　(C) 0625　(D) 8125

8. 已知 α_1, α_2, α_3 是三个相互平行的平面, 平面 α_1, α_2 之间的距离为 d_1, 平面 α_2, α_3 之间的距离为 d_2. 直线 l 与 α_1, α_2, α_3 分别交于 P_1, P_2, P_3. 那么“$P_1P_2=P_2P_3$”是“$d_1=d_2$”的

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

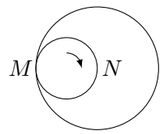
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

9. 若曲线 C_1: $x^2+y^2-2x=0$ 与曲线 C_2: $y(y-mx-m)=0$ 有四个不同的交点, 则实数 m 的取值范围是 （　）

(A) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　(B) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(C) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$　(D) $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

10. 如图, 一个直径为 1 的小圆沿着直径为 2 的大圆内壁逆时针方向滚动, M 和 N 是小圆的一条固定直径的两个端点. 那么, 当小圆这样滚过大圆内壁一周, 点 M, N 在大圆内所绘出的图形大致是 （　）



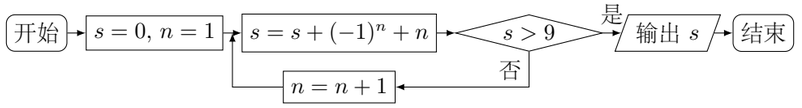
(A)　(B)　(C)　(D)

二、填空题

11. 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$, $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-2$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为_____.

12. 小波通过做游戏的方式来确定周末活动, 他随机地往单位圆内投掷一点, 若此点到圆心的距离大于 $\dfrac{1}{2}$, 则周末去看电影; 若此点到圆心的距离小于 $\dfrac{1}{4}$, 则去打篮球; 否则, 在家看书. 则小波周末不在家看书的概率为_____.

13. 下图是某算法程序框图, 则程序运行后输出的结果是_____.



14. 若椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点在 x 轴上, 过点 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线, 切点分别为 A, B, 直线 AB 恰好经过椭圆的右焦点和上顶点, 则椭圆方程是_____.

15. 二选一.

【A】若曲线的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta+4\cos\theta$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴正半轴建立直角坐标系, 则该曲线的直角坐标方程为_____.

【B】对于实数 x, y, 若 $|x-1|\leqslant 1$, $|y-2|\leqslant 1$, 则 $|x-2y+1|$ 的最大值为_____.

三、解答题

16. 某饮料公司招聘一名员工, 现对其进行一项测试, 以便确定工资级别. 公司准备了两种不同的饮料共 8 杯, 其颜色完全相同, 并且其中 4 杯为 A 饮料, 另外 4 杯为 B 饮料, 公司要求此员工一一品尝后, 从 8 杯饮料中选出 4 杯 A 饮料. 若 4 杯都选对, 则月工资定为 3500 元; 若 4 杯选对 3 杯, 则月工资定为 2800 元; 否则月工资定为 2100 元. 令 X 表示此人选对 A 饮料的杯数. 假设此人对 A 和 B 两种饮料没有鉴别能力.

(1) 求 X 的分布列;

(2) 求此员工月工资的期望.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c, 已知 $\sin C+\cos C=1-\sin\dfrac{C}{2}$.

(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 若 $a^2+b^2=4(a+b)-8$, 求边 c 的值.

18. 已知两个等比数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 满足 $a_1=a$ $(a>0)$, $b_1-a_1=1$, $b_2-a_2=2$, $b_3-a_3=3$.

(1) 若 $a=1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 唯一, 求 a 的值.

19. 设 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2ax$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$ 上存在单调递增区间, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $0<a<2$ 时, $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $-\dfrac{16}{3}$, 求 $f(x)$ 在该区间上的最大值.

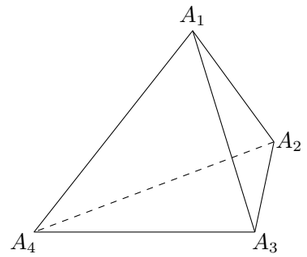
20. $P(x_0,y_0)$ $(x_0\neq\pm a)$ 是双曲线 E: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 上一点, M, N 分别是双曲线 E 的左、右顶点, 直线 PM, PN 的斜率之积为 $\dfrac{1}{5}$.

(1) 求双曲线的离心率;

(2) 过双曲线 E 的右焦点且斜率为 1 的直线交双曲线于 A, B 两点, O 为坐标原点, C 为双曲线上的一点, 满足 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, 求 λ 的值.

21. (1) 如图, 对于任一给定的四面体 $A_1A_2A_3A_4$, 找出依次排列的四个相互平行的平面 α_1, α_2, α_3, α_4, 使得 $A_i\in\alpha_i$ $(i=1,2,3,4)$, 且其中每相邻两个平面间的距离都相等;

(2) 给定依次排列的四个相互平行的平面 α_1, α_2, α_3, α_4, 其中每相邻两个平面间的距离都为 1, 若一个正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点满足: $A_i\in\alpha_i$ $(i=1,2,3,4)$, 求该正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积.



2011 年普通高等学校招生考试（江西卷）

文科数学

一、选择题

1. 若 $(x-\mathrm{i})\,\mathrm{i}=y+2\mathrm{i}$, x, $y\in\mathbf{R}$, 则复数 $x+y\mathrm{i}=$ （　）

(A) $-2+\mathrm{i}$　(B) $2+\mathrm{i}$　(C) $1-2\mathrm{i}$　(D) $1+2\mathrm{i}$

2. 若全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $M=\{2,3\}$, $N=\{1,4\}$, 则集合 $\{5,6\}$ 等于 （　）

(A) $M\cup N$　(B) $M\cap N$

(C) $\left(\complement_U M\right)\cup\left(\complement_U N\right)$　(D) $\left(\complement_U M\right)\cap\left(\complement_U N\right)$

3. 若 $f(x)=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}$, 则 $f(x)$ 的定义域为 （　）

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　(B) $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

(C) $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$　(D) $\left(-\dfrac{1}{2},2\right)$

4. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 $A(0,1)$ 处的切线斜率为 （　）

(A) 1　(B) 2　(C) e　(D) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

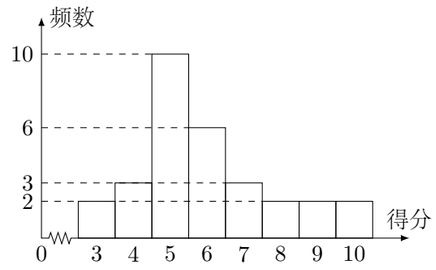
5. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差 $d=-2$, S_n 为其前 n 项和. 若 $S_{10}=S_{11}$, 则 $a_1=$ （　）

(A) 18　(B) 20　(C) 22　(D) 24

6. 观察下列各式: $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$, $\cdots$, 则 7^{2011} 的末两位数字为 （　）

(A) 01　(B) 43　(C) 07　(D) 49

7. 为了普及环保知识, 增强环保意识, 某大学随机抽取 30 名学生参加环保知识测试, 得分 (十分制) 如图所示, 假设得分值的中位数为 m_e, 众数为 m_o, 平均值为 $\overline{x}$, 则 （　）



(A) $m_e=m_o=\overline{x}$　(B) $m_e=m_o<\overline{x}$　(C) $m_e<m_o<\overline{x}$　(D) $m_o<m_e<\overline{x}$

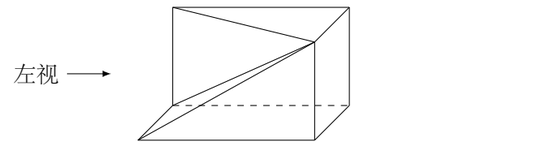
8. 为了解儿子身高与其父亲身高的关系, 随机抽取 5 对父子的身高数据如下:

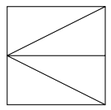
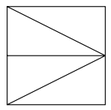
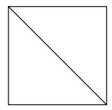
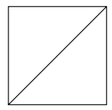
父亲身高 x (cm)	174	176	176	176	178
儿子身高 y (cm)	175	175	176	177	177

则 y 对 x 的线性回归方程为 （　）

(A) $y=x-1$　(B) $y=x+1$　(C) $y=88+\dfrac{1}{2}x$　(D) $y=176$

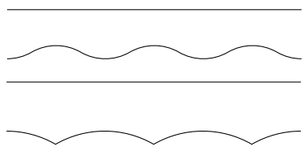
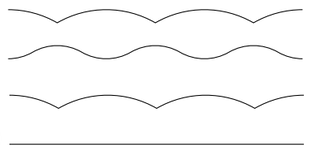
9. 将长方体截去一个四棱锥, 得到的几何体如图所示, 则该几何体的左视图为 （　）



(A)  　(B)  　(C)  　(D) 

10. 如图, 一个“凸轮”放置于直角坐标系 x 轴上方, 其“底端”落在原点 O 处, 一顶点及中心 M 在 y 轴正半轴上, 它的外围由以正三角形的顶点为圆心, 以正三角形的边长为半径的三段等弧组成. 今使“凸轮”沿 x 轴正向滚动前进, 在滚动过程中“凸轮”每时每刻都有一个“最高点”, 其中心也在不断移动位置, 则在“凸轮”滚动一周的过程中, 将其“最高点”和“中心点”所形成的图形按上、下放置, 应大致为 （　）



(A)  　(B) 

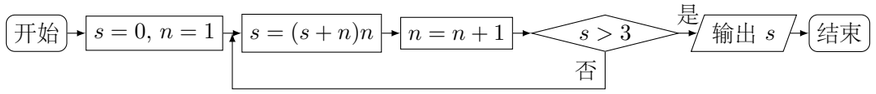
(C) 　(D)

二、填空题

11. 已知两个单位向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 若向量 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}_2=3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$, 则 $\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_2=$_____.

12. 若双曲线 $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{m}=1$ 的离心率 $e=2$, 则 $m=$_____.

13. 下图是某算法程序框图, 则程序运行后输出的结果是_____.



14. 已知角 θ 的顶点为坐标原点, 始边为 x 轴的正半轴. 若 $P(4,y)$ 是角 θ 终边上一点, 且 $\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $y=$_____.

15. 对于 $x\in\mathbf{R}$, 不等式 $|x+10|-|x-2|\geqslant 8$ 的解集为_____.

三、解答题

16. 某饮料公司对一名员工进行测试以便确定其考评级别. 公司准备了两种不同的饮料共 5 杯, 其颜色完全相同, 并且其中 3 杯为 A 饮料, 另外 2 杯为 B 饮料, 公司要求此员工一一品尝后, 从 5 杯饮料中选出 3 杯 A 饮料. 若该员工 3 杯都选对, 则评为优秀; 若 3 杯选对 2 杯, 则评为良好; 否则评为及格. 假设此人对 A 和 B 两种饮料没有鉴别能力.

(1) 求此人被评为优秀的概率;

(2) 求此人被评为良好及以上的概率.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, A、B、C 的对边分别是 a、b、c, 已知 $3a\cos A=c\cos B+b\cos C$.

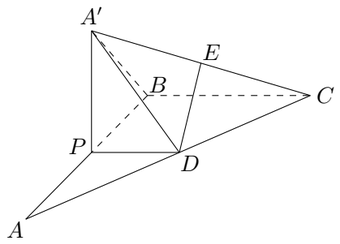
(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 若 $a=1$, $\cos B+\cos C=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 求边 c 的值.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=\dfrac{\pi}{2}$, $AB=BC=2$, P 为 AB 边上一动点, $PD/\!/BC$ 交 AC 于点 D, 现将 $\triangle PDA$ 沿 PD 翻折至 $\triangle PDA'$, 使平面 $PDA'\perp$ 平面 $PBCD$.

(1) 当棱锥 $A'-PBCD$ 的体积最大时, 求 PA 的长;

(2) 若点 P 为 AB 的中点, E 为 $A'C$ 的中点, 求证: $A'B\perp DE$.



19. 已知过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, 斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线交抛物线于 $A(x_1,y_2)$, $B(x_2,y_2)$ $(x_1<x_2)$ 两点, 且 $|AB|=9$.

(1) 求该抛物线的方程;

(2) O 为坐标原点, C 为抛物线上一点, 若 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$, 求 λ 的值.

20. 设 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+nx$.

(1) 如果 $g(x)=f'(x)-2x-3$ 在 $x=-2$ 处取得最小值 -5, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 如果 $m+n<10$ $(m,\ n\in\mathbf{N}_+)$, $f(x)$ 的单调递减区间的长度是正整数, 试求 m 和 n 的值. (注: 区间 (a,b) 的长度为 $b-a$)

21. (1) 已知两个等比数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 满足 $a_1=a$ $(a>0)$, $b_1-a_1=1$, $b_2-a_2=2$, $b_3-a_3=3$, 若数列 $\{a_n\}$ 唯一, 求 a 的值;

(2) 是否存在两个等比数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 使得 b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3, b_4-a_4 成公差不为 0 的等差数列? 若存在, 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式; 若不存在, 说明理由.

2011 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 若 a 为正实数, i 为虚数单位, $\left|\dfrac{a+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|=2$, 则 $a=$ （ ）

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 1

2. 已知 M, N 为集合 I 的非空真子集, 且 M, N 不相等, 若 $N\cap\complement_I M=\varnothing$, 则 $M\cup N=$ （ ）

(A) M (B) N (C) I (D) $\varnothing$

3. 已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点, A, B 是该抛物线上的两点, $|AF|+|BF|=3$, 则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{4}$ (B) 1 (C) $\dfrac{5}{4}$ (D) $\dfrac{7}{4}$

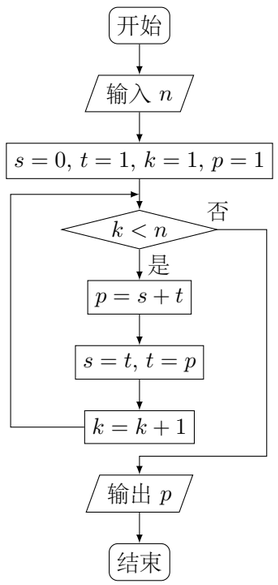
4. $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 并且有 $a\sin A\sin B+b\cos^2 A=\sqrt{2}a$, 则 $\dfrac{b}{a}=$ （ ）

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

5. 从 1, 2, 3, 4, 5 中任取 2 个不同的数, 事件 $A=$“取到的 2 个数之和为偶数”, 事件 $B=$“取到的 2 个数均为偶数”, 则 $P(B|A)=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{8}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

6. 执行下面的程序框图, 如果输入的 n 是 4, 则输出的 p 是 （ ）

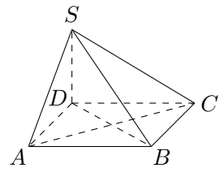


(A) 8 (B) 5 (C) 3 (D) 2

7. 设 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{1}{3}$, 则 $\sin 2\theta=$ （ ）

(A) $-\dfrac{7}{9}$ (B) $-\dfrac{1}{9}$ (C) $\dfrac{1}{9}$ (D) $\dfrac{7}{9}$

8. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为正方形, $SD\perp$ 底面 $ABCD$, 则下列结论中不正确的是 （ ）



(A) $AC\perp SB$

(B) $AB\parallel$ 平面 SCD

(C) SA 与平面 SBD 所成的角等于 SC 与平面 SBD 所成的角

(D) AB 与 SC 所成的角等于 DC 与 SA 所成的角

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x}, & x\leqslant 1\\ 1-\log_2 x, & x>1\end{cases}$, 则满足 $f(x)\leqslant 2$ 的 x 取值范围是 （ ）

(A) $[-1,2]$ (B) $[0,2]$ (C) $[1,+\infty)$ (D) $[0,+\infty)$

10. 若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 均为单位向量, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\leqslant 0$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 （ ）

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

11. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-1)=2$, 对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f'(x)>2$, 则 $f(x)>2x+4$ 的解集为 （ ）

(A) $(-1,1)$ (B) $(-1,+\infty)$ (C) $(-\infty,-1)$ (D) $(-\infty,+\infty)$

12. 已知球的直径 $SC=4$, A, B 是该球球面上的两点, $AB=\sqrt{3}$, $\angle ASC=\angle BSC=30^\circ$, 则棱锥 $S-ABC$ 的体积为 （ ）

(A) $3\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 1

二、填空题

13. 已知点 $(2,3)$ 在双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 上, C 的焦距为 4, 则它的离心率为_____.

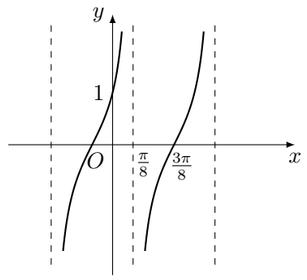
14. 调查了某地若干户家庭的年收入 x (单位: 万元) 和年饮食支出 y (单位: 万元), 调查显示年收入 x 与年饮食支出 y 具有线性相关关系, 并由调查数据得到 y 对 x 的回归直线方程: $\hat{y}=0.254x+0.321$. 由回归直线方程可知, 家庭收入每增加 1 万元, 年饮食支出平均增加_____万元.

15. 一个正三棱柱的侧棱长和底面边长相等, 体积为 $2\sqrt{3}$, 它的三视图中的俯视图如图所示, 左视图是一个矩形, 则这个矩形的面积是_____.



俯视图

16. 已知函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y=f(x)$ 的部分图象如图, 则 $f\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=$_____.



三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=0$, $a_6+a_8=-10$.

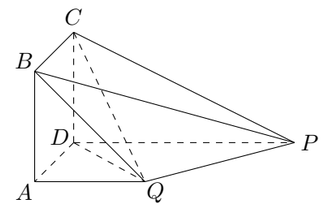
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $PD\parallel QA$, $QA=AB=\dfrac{1}{2}PD$.

(1) 证明: 平面 $PQC\perp$ 平面 DCQ;

(2) 求二面角 $Q-BP-C$ 的余弦值.



19. 某农场计划种植某种新作物, 为此对这种作物的两个品种 (分别称为品种甲和品种乙) 进行田间试验, 选取两大块地, 每大块地分成 n 小块地, 在总共 $2n$ 小块地中, 随机选 n 小块地种植品种甲, 另外 n 小块地种植品种乙.

(1) 假设 $n=4$, 在第一大块地中, 种植品种甲的小块地的数目记为 X, 求 X 的分布列和数学期望;

(2) 试验时每大块地分成 8 小块, 即 $n=8$, 试验结束后得到品种甲和品种乙在各小块地上的每公顷产量 (单位: $\mathrm{kg/hm^2}$) 如下表:

品种甲	403	397	390	404	388	400	412	406
品种乙	419	403	412	418	408	423	400	413

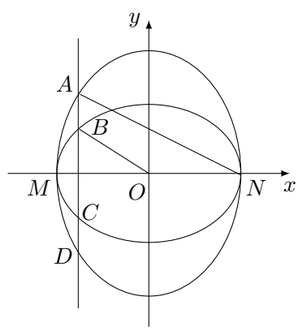
分别求品种甲和品种乙每公顷产量的样本平均数和样本方差; 根据试验结果, 你应该种植哪一品种?

附: 样本数据 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的样本方差 $s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$, 其中 $\overline{x}$ 为样本平均数.

20. 如图, 已知椭圆 C_1 的中心在原点 O, 长轴左、右端点 M, N 在 x 轴上, 椭圆 C_2 的短轴为 MN, 且 C_1, C_2 的离心率都为 e. 直线 $l\perp MN$, l 与 C_1 交于两点, 与 C_2 交于两点, 这四点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D.

(1) 设 $e=\dfrac{1}{2}$, 求 $|BC|$ 与 $|AD|$ 的比值;

(2) 当 e 变化时, 是否存在直线 l, 使得 $BO\parallel AN$, 并说明理由.



21. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a>0$, 证明: 当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时, $f\left(\dfrac{1}{a}+x\right)>f\left(\dfrac{1}{a}-x\right)$;

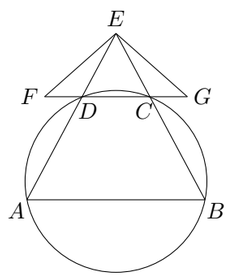
(3) 若函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 线段 AB 中点的横坐标为 x_0, 证明: $f'(x_0)<0$.

22. 三选一.

【A】如图, A, B, C, D 四点在同一圆上, AD 的延长线与 BC 的延长线交于 E 点, 且 $EC=ED$.

(1) 证明: $CD\parallel AB$;

(2) 延长 CD 到 F, 延长 DC 到 G, 使得 $EF=EG$, 证明: A, B, G, F 四点共圆.



【B】在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$ (φ 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$ ($a>b>0$, φ 为参数). 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $l:\theta=\alpha$ 与 C_1, C_2 各有一个交点, 当 $\alpha=0$ 时, 这两个交点间的距离为 2, 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 这两个交点重合.

(1) 分别说明 C_1, C_2 是什么曲线, 并求出 a 与 b 的值;

(2) 设当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时, l 与 C_1, C_2 的交点分别为 A_1, B_1, 当 $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$ 时, l 与 C_1, C_2 的交点分别为 A_2, B_2, 求四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积.

【C】已知函数 $f(x)=|x-2|-|x-5|$.

(1) 证明: $-3\leqslant f(x)\leqslant 3$;

(2) 求不等式 $f(x)\geqslant x^2-8x+15$ 的解集.

2011 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x|x>1\}$, $B=\{x|-1<x<2\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{x|-1<x<2\}$　(B) $\{x|x>-1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　(D) $\{x|1<x<2\}$

2. i 为虚数单位, $\frac{1}{\mathrm{i}}+\frac{1}{\mathrm{i}^3}+\frac{1}{\mathrm{i}^5}+\frac{1}{\mathrm{i}^7}=$ （ ）

(A) 0　(B) 2i　(C) -2i　(D) 4i

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,k)$, $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$, 则 $k=$ （ ）

(A) -12　(B) -6　(C) 6　(D) 12

4. 已知命题 $p:\exists n\in\mathbf{N}$, $2^n>1000$, 则 $\neg p$ 为 （ ）

(A) $\forall n\in\mathbf{N}$, $2^n\leqslant 1000$　(B) $\forall n\in\mathbf{N}$, $2^n>1000$

(C) $\exists n\in\mathbf{N}$, $2^n\leqslant 1000$　(D) $\exists n\in\mathbf{N}$, $2^n<1000$

5. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_na_{n+1}=16^n$, 则公比为 （ ）

(A) 2　(B) 4　(C) 8　(D) 16

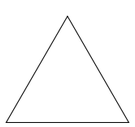
6. 若函数 $f(x)=\dfrac{x}{(2x+1)(x-a)}$ 为奇函数, 则 $a=$ （ ）

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) 1

7. 已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点, A, B 是该抛物线上的两点, $|AF|+|BF|=3$, 则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 （ ）

(A) $\frac{3}{4}$　(B) 1　(C) $\frac{5}{4}$　(D) $\frac{7}{4}$

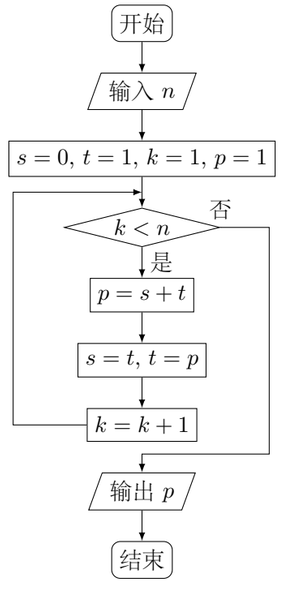
8. 一个正三棱柱的侧棱长和底面边长相等, 体积为 $2\sqrt{3}$, 它的三视图中的俯视图如图所示, 左视图是一个矩形, 则这个矩形的面积是 （ ）



俯视图

(A) 4　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 2　(D) $\sqrt{3}$

9. 执行下面的程序框图, 如果输入的 n 是 4, 则输出的 p 是 （ ）



(A) 8　(B) 5　(C) 3　(D) 2

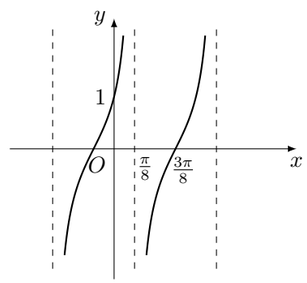
10. 已知球的直径 $SC=4$, A, B 是该球球面上的两点, $AB=2$, $\angle ASC=\angle BSC=45°$, 则棱锥 $S-ABC$ 的体积为 （ ）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

11. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-1)=2$, 对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f'(x)>2$, 则 $f(x)>2x+4$ 的解集为 （ ）

(A) $(-1,1)$　(B) $(-1,+\infty)$　(C) $(-\infty,-1)$　(D) $(-\infty,+\infty)$

12. 已知函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y=f(x)$ 的部分图象如图, 则 $f\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=$ （ ）



(A) $2+\sqrt{3}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $2-\sqrt{3}$

二、填空题

13. 已知圆 C 经过 $A(5,1)$, $B(1,3)$ 两点, 圆心在 x 轴上, 则 C 的方程为_____.

14. 调查了某地若干户家庭的年收入 x (单位: 万元) 和年饮食支出 y (单位: 万元), 调查显示年收入 x 与年饮食支出 y 具有线性相关关系, 并由调查数据得到 y 对 x 的回归直线方程: $\hat{y}=0.254x+0.321$. 由回归直线方程可知, 家庭年收入每增加 1 万元, 年饮食支出平均增加_____万元.

15. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_2=S_6$, $a_4=1$, 则 $a_5=$_____.

16. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-2x+a$ 有零点, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, $a\sin A\sin B+b\cos^2A=\sqrt{2}a$.

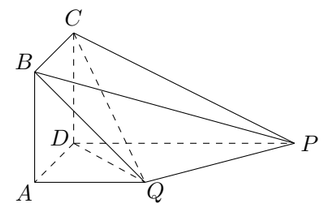
(1) 求 $\frac{b}{a}$;

(2) 若 $c^2=b^2+\sqrt{3}a^2$, 求 B.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $QA\perp$ 平面 $ABCD$, $PD\parallel QA$, $QA=AB=\frac{1}{2}PD$.

(1) 证明: $PQ\perp$ 平面 DCQ;

(2) 求棱锥 $Q-ABCD$ 的体积与棱锥 $P-DCQ$ 的体积比值.



19. 某农场计划种植某种新作物, 为此对这种作物的两个品种 (分别称为品种甲和品种乙) 进行田间试验, 选取两大块地, 每大块地分成 n 小块地, 在总共 $2n$ 小块地中, 随机选 n 小块地种植品种甲, 另外 n 小块地种植品种乙.

(1) 假设 $n=2$, 求第一大块地都种植品种甲的概率;

(2) 试验时每大块地分成 8 小块, 即 $n=8$, 试验结束后得到品种甲和品种乙在各小块地上的每公顷产量 (单位: $\mathrm{kg/hm^2}$) 如下表:

品种甲	403	397	390	404	388	400	412	406
品种乙	419	403	412	418	408	423	400	413

分别求品种甲和品种乙每公顷产量的样本平均数和样本方差; 根据试验结果, 你应该种植哪一品种?

附: 样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的样本方差 $s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$, 其中 $\overline{x}$ 为样本平均数.

20. 设函数 $f(x)=x+ax^2+b\ln x$, 曲线 $y=f(x)$ 过 $P(1,0)$, 且在 P 点处的切线斜率为 2.

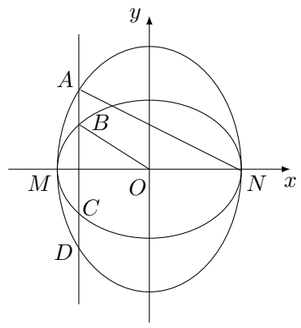
(1) 求 a, b 的值;

(2) 证明: $f(x)\leqslant 2x-2$.

21. 如图, 已知椭圆 C_1 的中心在原点 O, 长轴左、右端点 M, N 在 x 轴上, 椭圆 C_2 的短轴为 MN, 且 C_1, C_2 的离心率都为 e. 直线 $l\perp MN$, l 与 C_1 交于两点, 与 C_2 交于两点, 这四点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D.

(1) 设 $e=\dfrac{1}{2}$, 求 $|BC|$ 与 $|AD|$ 的比值;

(2) 当 e 变化时, 是否存在直线 l, 使得 $BO\parallel AN$, 并说明理由.

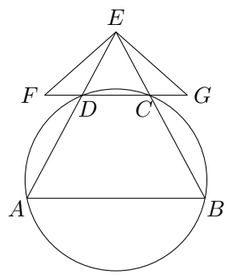


22. 三选一.

【A】如图, A, B, C, D 四点在同一圆上, AD 的延长线与 BC 的延长线交于 E 点, 且 $EC=ED$.

(1) 证明: $CD\parallel AB$;

(2) 延长 CD 到 F, 延长 DC 到 G, 使得 $EF=EG$, 证明: A, B, G, F 四点共圆.



【B】在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$ (φ 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$ ($a>b>0$, φ 为参数). 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $l:\theta=\alpha$ 与 C_1, C_2 各有一个交点, 当 $\alpha=0$ 时, 这两个交点间的距离为 2, 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 这两个交点重合.

(1) 分别说明 C_1, C_2 是什么曲线, 并求出 a 与 b 的值;

(2) 设当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时, l 与 C_1, C_2 的交点分别为 A_1, B_1, 当 $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$ 时, l 与 C_1, C_2 的交点分别为 A_2, B_2, 求四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积.

【C】已知函数 $f(x)=|x-2|-|x-5|$.

(1) 证明: $-3\leqslant f(x)\leqslant 3$;

(2) 求不等式 $f(x)\geqslant x^2-8x+15$ 的解集.

2011 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

一、选择题

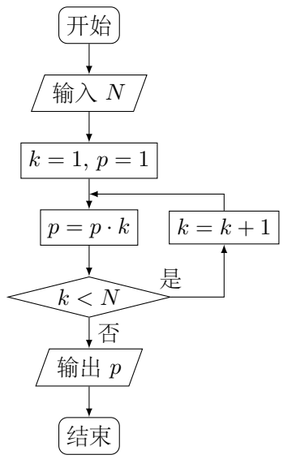
1. 复数 $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ 的共轭复数是 （ ）

(A) $-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ (B) $\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ (C) $-\mathrm{i}$ (D) i

2. 下列函数中, 既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 单调递增的函数是 （ ）

(A) $y=x^3$ (B) $y=|x|+1$ (C) $y=-x^2+1$ (D) $y=2^{-|x|}$

3. 执行如图的程序框图, 如果输入的 N 是 6, 那么输出的 p 是 （ ）



(A) 120 (B) 720 (C) 1440 (D) 5040

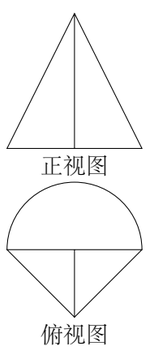
4. 有 3 个兴趣小组, 甲、乙两位同学各自参加其中一个小组, 每位同学参加各个小组的可能性相同, 则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为 （ ）

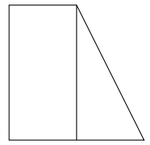
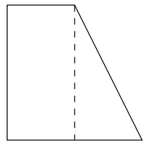
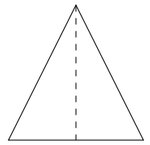
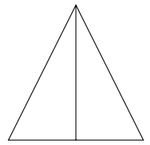
(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

5. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y=2x$ 上, 则 $\cos 2\theta=$ （ ）

(A) $-\dfrac{4}{5}$ (B) $-\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

6. 在一个几何体的三视图中, 正视图和俯视图如下图所示, 则相应的侧视图可以为 （ ）



(A)  (B)  (C)  (D) 

7. 设直线 l 过双曲线 C 的一个焦点, 且与 C 的一条对称轴垂直, l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|$ 为 C 的实轴长的 2 倍, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3

8. $\left(x+\dfrac{a}{x}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中常数项为 （ ）

(A) -40 (B) -20 (C) 20 (D) 40

9. 由曲线 $y=\sqrt{x}$, 直线 $y=x-2$ 及 y 轴所围成的图形的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{10}{3}$ (B) 4 (C) $\dfrac{16}{3}$ (D) 6

10. 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为单位向量, 其夹角为 θ, 有下列四个命题:

p_1: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ p_2: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$

p_3: $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ p_4: $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$

其中的真命题是 （ ）

(A) p_1, p_4 (B) p_1, p_3 (C) p_2, p_3 (D) p_2, p_4

11. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π, 且 $f(-x)=f(x)$, 则 （ ）

(A) $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减 (B) $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 单调递减

(C) $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增 (D) $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 单调递增

12. 函数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的图象与函数 $y=2\sin\pi x\ (-2\leqslant x\leqslant 4)$ 的图象所有交点的横坐标之和等于 （ ）

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

二、填空题

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3\leqslant 2x+y\leqslant 9\\ 6\leqslant x-y\leqslant 9\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最小值为_____.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 的中心为原点, 焦点 F_1、F_2 在 x 轴上, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 过 F_1 的直线 l 交 C 于 A、B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16, 那么 C 的方程为_____.

15. 已知矩形 $ABCD$ 的顶点都在半径为 4 的球 O 的球面上, 且 $AB=6$, $BC=2\sqrt{3}$, 则棱锥 $O-ABCD$ 的体积为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=60^\circ$, $AC=\sqrt{3}$, 则 $AB+2BC$ 的最大值为_____.

三、解答题

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $2a_1+3a_2=1$, $a_3^2=9a_2a_6$.

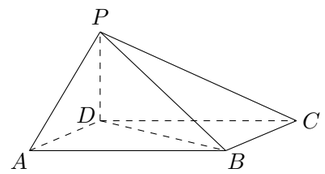
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$, 求数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB=60^\circ$, $AB=2AD$, $PD\perp$ 底面 $ABCD$.

(1) 证明: $PA\perp BD$;

(2) 若 $PD=AD$, 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



19. 某种产品的质量以其质量指标值衡量, 质量指标值越大表明质量越好, 且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质品. 现用两种新配方 (分别称为 A 配方和 B 配方) 做试验, 各生产了 100 件这种产品, 并测量了每件产品的质量指标值, 得到了下面试验结果:

A 配方的频数分布表

指标值分组	$[90,94)$	$[94,98)$	$[98,102)$	$[102,106)$	$[106,110]$
频数	8	20	42	22	8

B 配方的频数分布表

指标值分组	$[90,94)$	$[94,98)$	$[98,102)$	$[102,106)$	$[106,110]$
频数	4	12	42	32	10

(1) 分别估计用 A 配方, B 配方生产的产品的优质品率;

(2) 已知用 B 配方生产一件产品的利润 y (单位: 元) 与其质量指标值 t 的关系式为 $y=\begin{cases}-2, & t<94\\ 2, & 94\leqslant t<102\\ 4, & t\geqslant 102\end{cases}$. 从用 B 配方生产的产品中任取一件, 其利润记为 X (单位: 元), 求 X 的分布列及数学期望. (以实验结果中质量指标值落入各组的频率作为一件产品的质量指标值落入相应组的概率)

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0,-1)$, B 点在直线 $y=-3$ 上, M 点满足 $\overrightarrow{MB}/\!/\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BA}$, M 点的轨迹为曲线 C.

(1) 求 C 的方程;

(2) P 为 C 上的动点, l 为 C 在 P 点处的切线, 求 O 点到 l 距离的最小值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

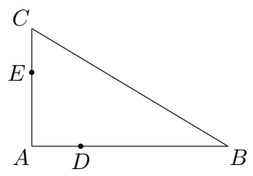
(1) 求 a, b 的值;

(2) 如果当 $x>0$, 且 $x\neq 1$ 时, $f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{k}{x}$, 求 k 的取值范围.

22. 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上的点, 且不与 $\triangle ABC$ 的顶点重合. 已知 AE 的长为 m, AC 的长为 n, AD, AB 的长是关于 x 的方程 $x^2-14x+mn=0$ 的两个根.

(1) 证明: C, B, D, E 四点共圆;

(2) 若 $\angle A=90^\circ$, 且 $m=4$, $n=6$, 求 C, B, D, E 所在圆的半径.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=2+2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数), M 是 C_1 上的动点, P 点满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$, P 点的轨迹为曲线 C_2.

(1) 求 C_2 的方程;

(2) 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A, 与 C_2 的异于极点的交点为 B, 求 $|AB|$.

24. 设函数 $f(x)=|x-a|+3x$, 其中 $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|x\leqslant -1\}$, 求 a 的值.

2011 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$, $N=\{1,3,5\}$, $P=M\cap N$, 则 P 的子集共有 （ ）

(A) 2 个　(B) 4 个　(C) 6 个　(D) 8 个

2. 复数 $\dfrac{5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $2-\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) $-2+\mathrm{i}$　(D) $-1+2\mathrm{i}$

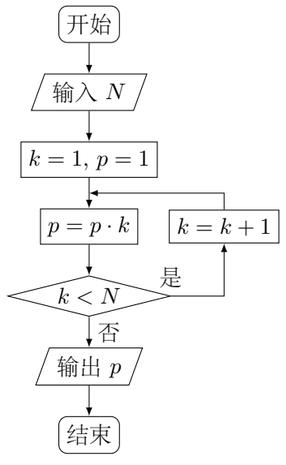
3. 下列函数中, 既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 单调递增的函数是 （ ）

(A) $y=x^3$　(B) $y=|x|+1$　(C) $y=-x^2+1$　(D) $y=2^{-|x|}$

4. 椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. 执行如图的程序框图, 如果输入的 N 是 6, 那么输出的 p 是 （ ）



(A) 120　(B) 720　(C) 1440　(D) 5040

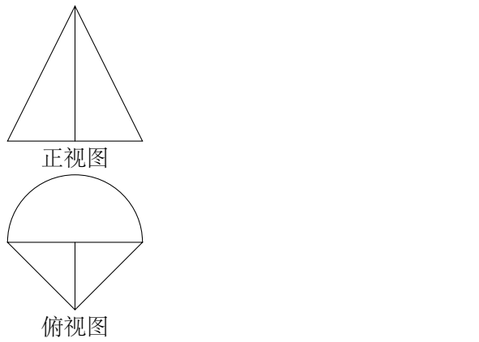
6. 有 3 个兴趣小组, 甲、乙两位同学各自参加其中一个小组, 每位同学参加各个小组的可能性相同, 则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为 （ ）

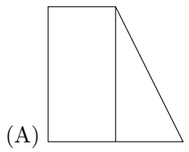
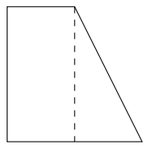
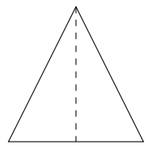
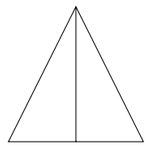
(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

7. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y=2x$ 上, 则 $\cos 2\theta=$ （ ）

(A) $-\dfrac{4}{5}$　(B) $-\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

8. 在一个几何体的三视图中, 正视图和俯视图如下图所示, 则相应的侧视图可以为 （ ）



(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

9. 已知直线 l 过抛物线 C 的焦点, 且与 C 的对称轴垂直, l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=12$, P 为 C 的准线上一点, 则 $\triangle ABP$ 的面积为 （ ）

(A) 18　(B) 24　(C) 36　(D) 48

10. 在下列区间中, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+4x-3$ 的零点所在的区间为 （ ）

(A) $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$　(B) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$　(C) $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　(D) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$

11. 设函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, 则 （ ）

(A) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

(B) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

(C) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

(D) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

12. 已知函数 $y=f(x)$ 的周期为 2, 当 $x\in[-1,1]$ 时 $f(x)=x^2$, 那么函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=|\lg x|$ 的图象的交点共有 （ ）

(A) 10 个　(B) 9 个　(C) 8 个　(D) 1 个

二、填空题

13. 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个不共线的单位向量, k 为实数, 若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直, 则 $k=$_____.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3\leqslant 2x+y\leqslant 9\\ 6\leqslant x-y\leqslant 9\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最小值为_____.

15. $\triangle ABC$ 中, $B=120^\circ$, $AC=7$, $AB=5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

16. 已知两个圆锥有公共底面, 且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一个球面上. 若圆锥底面面积是这个球面面积的 $\dfrac{3}{16}$, 则这两个圆锥中, 体积较小者的高与体积较大者的高的比值为_____.

三、解答题

17. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{3}$, 公比 $q=\dfrac{1}{3}$.

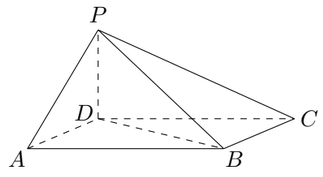
(1) 若 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明: $S_n=\dfrac{1-a_n}{2}$;

(2) 设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB=60^\circ$, $AB=2AD$, $PD\perp$ 底面 $ABCD$.

(1) 证明: $PA\perp BD$;

(2) 设 $PD=AD=1$, 求棱锥 $D-PBC$ 的高.



19. 某种产品的质量以其质量指标值衡量, 质量指标值越大表明质量越好, 且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质品. 现用两种新配方 (分别称为 A 配方和 B 配方) 做试验, 各生产了 100 件这种产品, 并测量了每件产品的质量指标值, 得到了下面试验结果:

A 配方的频数分布表

指标值分组	$[90,94)$	$[94,98)$	$[98,102)$	$[102,106)$	$[106,110]$
频数	8	20	42	22	8

B 配方的频数分布表

指标值分组	$[90,94)$	$[94,98)$	$[98,102)$	$[102,106)$	$[106,110]$
频数	4	12	42	32	10

(1) 分别估计用 A 配方, B 配方生产的产品的优质品率;

(2) 已知用 B 配方生产一件产品的利润 y (单位: 元) 与其质量指标值 t 的关系式为 $y=\begin{cases}-2, & t<94\\ 2, & 94\leqslant t<102\\ 4, & t\geqslant 102\end{cases}$. 估计用 B 配方生产的一件产品的利润大于 0 的概率, 并求用 B 配方生产的上述 100 件产品平均一件的利润.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A, B 两点, 且 $OA\perp OB$, 求 a 的值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

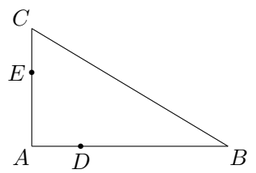
(1) 求 a, b 的值;

(2) 证明: 当 $x>0$, 且 $x\neq 1$ 时, $f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}$.

22. 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上的点, 且不与 $\triangle ABC$ 的顶点重合. 已知 AE 的长为 m, AC 的长为 n, AD, AB 的长是关于 x 的方程 $x^2-14x+mn=0$ 的两个根.

(1) 证明: C, B, D, E 四点共圆;

(2) 若 $\angle A=90^\circ$, 且 $m=4$, $n=6$, 求 C, B, D, E 所在圆的半径.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=2+2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数), M 是 C_1 上的动点, P 点满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$, P 点的轨迹为曲线 C_2.

(1) 求 C_2 的方程;

(2) 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A, 与 C_2 的异于极点的交点为 B, 求 $|AB|$.

24. 设函数 $f(x)=|x-a|+3x$, 其中 $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|x\leqslant -1\}$, 求 a 的值.

2011 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\,|x^2+x-6<0\}$, $N=\{x\,|1\leqslant x\leqslant 3\}$, 则 $M\cap N=$（　）

(A) $[1,2)$　(B) $[1,2]$　(C) $(2,3]$　(D) $[2,3]$

2. 复数 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位) 在复平面内对应的点所在的象限为（　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3. 若点 $(a,9)$ 在函数 $y=3^x$ 的图象上, 则 $\tan\dfrac{a\pi}{6}$ 的值为（　）

(A) 0　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) 1　(D) $\sqrt{3}$

4. 不等式 $|x-5|+|x+3|\geqslant 10$ 的解集是（　）

(A) $[-5,7]$　(B) $[-4,6]$

(C) $(-\infty,-5]\cup[7,+\infty)$　(D) $(-\infty,-4]\cup[6,+\infty)$

5. 对于函数 $y=f(x)$, $x\in\mathbf{R}$. “$y=|f(x)|$ 的图象关于 y 轴对称”是“$y=f(x)$ 是奇函数”的（　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

6. 若函数 $f(x)=\sin\omega x$ ($\omega>0$) 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 则 $\omega=$（　）

(A) 3　(B) 2　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

7. 某产品的广告费用 x 与销售额 y 的统计数据如下表:

广告费用 x (万元)	4	2	3	5
销售额 y (万元)	49	26	39	54

根据上表可得回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的 $\hat{b}$ 为 9.4, 据此模型预报广告费用为 6 万元时销售额为（　）

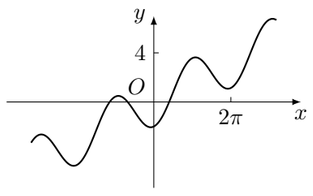
(A) 63.6 万元　(B) 65.5 万元　(C) 67.7 万元　(D) 72.0 万元

8. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的两条渐近线均和圆 C: $x^2+y^2-6x+5=0$ 相切, 且双曲线的右焦点为圆 C 的圆心, 则该双曲线的方程为（　）

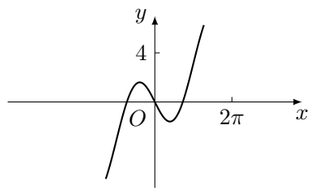
(A) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$

9. 函数 $y=\dfrac{x}{2}-2\sin x$ 的图象大致是（　）

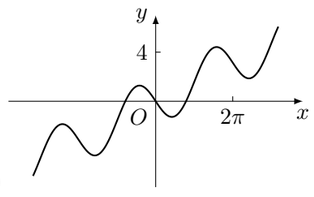
(A)



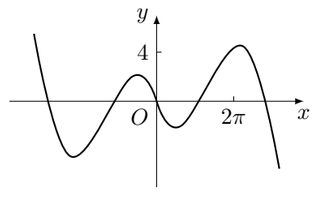
(B)



(C)



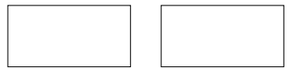
(D)



10. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上最小正周期为 2 的周期函数, 且当 $0\leqslant x<2$ 时, $f(x)=x^3-x$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象在区间 $[0,6]$ 上与 x 轴的交点的个数为（　）

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9

11. 如图是长和宽分别相等的两个矩形. 给定下列三个命题: ① 存在三棱柱, 其正 (主) 视图、俯视图如图; ② 存在四棱柱, 其正 (主) 视图、俯视图如图; ③ 存在圆柱, 其正 (主) 视图、俯视图如图. 其中真命题的个数是（　）



正 (主) 视图　俯视图

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

12. 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是平面直角坐标系中两两不同的四点, 若 $\overrightarrow{A_1A_3}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}$ ($\lambda\in\mathbf{R}$), $\overrightarrow{A_1A_4}=\mu\overrightarrow{A_1A_2}$ ($\mu\in\mathbf{R}$), 且 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=2$, 则称 A_3, A_4 调和分割 A_1, A_2. 已知平面上的点 C, D 调和分割点 A, B, 则下面说法正确的是（　）

(A) C 可能是线段 AB 的中点

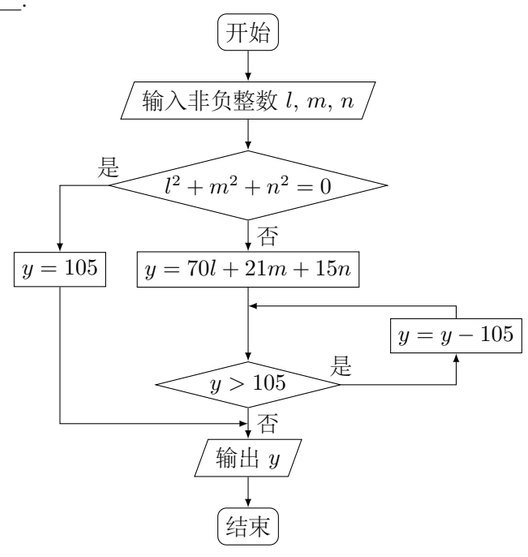
(B) D 可能是线段 AB 的中点

(C) C, D 可能同时在线段 AB 上

(D) C, D 不可能同时在线段 AB 的延长线上

二、填空题

13. 执行如图所示的程序框图, 输入 $l=2$, $m=3$, $n=5$, 则输出的 y 的值是_____.



14. 若 $\left(x-\dfrac{\sqrt{a}}{x^2}\right)^6$ 展开式的常数项为 60, 则常数 a 的值为_____.

15. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ($x>0$), 观察:

$f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{x+2}$,

$f_2(x)=f(f_1(x))=\dfrac{x}{3x+4}$,

$f_3(x)=f(f_2(x))=\dfrac{x}{7x+8}$,

$f_4(x)=f(f_3(x))=\dfrac{x}{15x+16}$,

$\cdots$

根据以上事实, 由归纳推理可得:

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$ 时, $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))=$_____.

16. 已知函数 $f(x)=\log_a x+x-b$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$). 当 $2<a<3<b<4$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点 $x_0\in(n,n+1)$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $n=$_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\dfrac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\dfrac{2c-a}{b}$.

(1) 求 $\dfrac{\sin C}{\sin A}$ 的值;

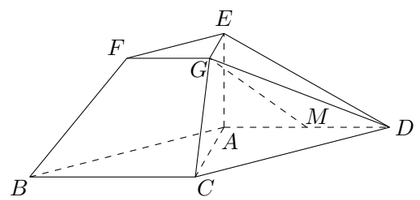
(2) 若 $\cos B=\dfrac{1}{4}$, $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

18. 红队队员甲、乙、丙与蓝队队员 A、B、C 进行围棋比赛, 甲对 A、乙对 B、丙对 C 各一盘. 已知甲胜 A、乙胜 B、丙胜 C 的概率分别为 0.6, 0.5, 0.5, 假设各盘比赛结果相互独立.

(1) 求红队至少两名队员获胜的概率;

(2) 用 ξ 表示红队队员获胜的总盘数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E\xi$.

19. 在如图所示的几何体中, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle ACB = 90°$, $EA \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel AB$, $FG \parallel BC$, $EG \parallel AC$, $AB = 2EF$.
(1) 若 M 是线段 AD 的中点, 求证: $GM \parallel$ 平面 $ABFE$;
(2) 若 $AC = BC = 2AE$, 求二面角 $A - BF - C$ 的大小.

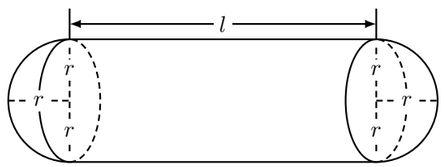


20. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 且 a_1, a_2, a_3 中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	3	2	10
第二行	6	4	14
第三行	9	8	18

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n = a_n + (-1)^n \ln a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21. 某企业拟建造如图所示的容器 (不计厚度, 长度单位: 米), 其中容器的中间为圆柱形, 左右两端均为半球形, 按照设计要求容器的容积为 $\frac{80\pi}{3}$ 立方米, 且 $l \geqslant 2r$. 假设该容器的建造费用仅与其表面积有关. 已知圆柱形部分每平方米建造费用为 3 千元, 半球形部分每平方米建造费用为 c ($c > 3$) 千元. 设该容器的建造费用为 y 千元.
(1) 写出 y 关于 r 的函数表达式, 并求该函数的定义域;
(2) 求该容器的建造费用最小时的 r.



22. 已知动直线 l 与椭圆 C: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 两不同点, 且 $\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 其中 O 为坐标原点.
(1) 证明: $x_1^2 + x_2^2$ 和 $y_1^2 + y_2^2$ 均为定值;
(2) 设线段 PQ 的中点为 M, 求 $|OM| \cdot |PQ|$ 的最大值;
(3) 椭圆 C 上是否存在三点 D, E, G, 使得 $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ODG} = S_{\triangle OEG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$? 若存在, 判断 $\triangle DEG$ 的形状; 若不存在, 请说明理由.

2011 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\,|\,(x+3)(x-2)<0\}$, $N=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $[1,2)$　　(B) $[1,2]$　　(C) $(2,3]$　　(D) $[2,3]$

2. 复数 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位) 在复平面内对应的点所在的象限为 （　）

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 若点 $(a,9)$ 在函数 $y=3^x$ 的图象上, 则 $\tan\dfrac{a\pi}{6}$ 的值为 （　）

(A) 0　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) 1　　(D) $\sqrt{3}$

4. 曲线 $y=x^3+11$ 在点 $P(1,12)$ 处的切线与 y 轴交点的纵坐标是 （　）

(A) -9　　(B) -3　　(C) 9　　(D) 15

5. 已知 a, b, $c\in\mathbf{R}$, 命题“若 $a+b+c=3$, 则 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$”的否命题是 （　）

(A) 若 $a+b+c\neq 3$, 则 $a^2+b^2+c^2<3$

(B) 若 $a+b+c=3$, 则 $a^2+b^2+c^2<3$

(C) 若 $a+b+c\neq 3$, 则 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$

(D) 若 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$, 则 $a+b+c=3$

6. 若函数 $f(x)=\sin\omega x$ ($\omega>0$) 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 则 $\omega=$ （　）

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) 2　　(D) 3

7. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\leqslant 0\\ x-y-2\leqslant 0\\ x\geqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=2x+3y+1$ 的最大值为 （　）

(A) 11　　(B) 10　　(C) 9　　(D) 8.5

8. 某产品的广告费用 x 与销售额 y 的统计数据如下表:

广告费用 x (万元)	4	2	3	5
销售额 y (万元)	49	26	39	54

根据上表可得回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的 $\hat{b}$ 为 9.4, 据此模型预报广告费用为 6 万元时销售额为 （　）

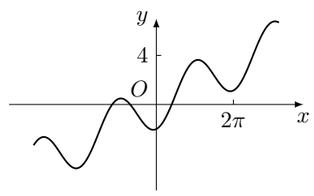
(A) 63.6 万元　　(B) 65.5 万元　　(C) 67.7 万元　　(D) 72.0 万元

9. 设 $M(x_0,y_0)$ 为抛物线 C: $x^2=8y$ 上一点, F 为抛物线 C 的焦点, 以 F 为圆心、$|FM|$ 为半径的圆和抛物线 C 的准线相交, 则 y_0 的取值范围是(　)

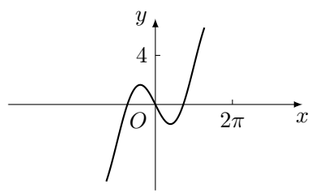
(A) $(0,2)$　　(B) $[0,2]$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $[2,+\infty)$

10. 函数 $y=\dfrac{x}{2}-2\sin x$ 的图象大致是 （　）

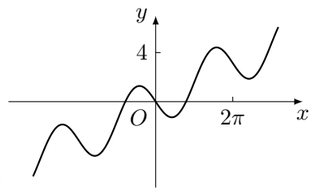
(A)



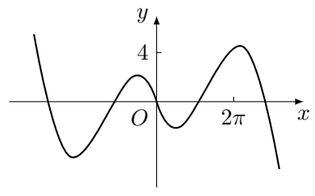
(B)



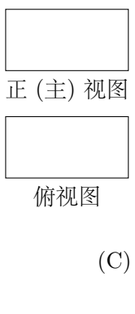
(C)



(D)



11. 如图是长和宽分别相等的两个矩形. 给定下列三个命题: ① 存在三棱柱, 其正 (主) 视图、俯视图如图; ② 存在四棱柱, 其正 (主) 视图、俯视图如图; ③ 存在圆柱, 其正 (主) 视图、俯视图如图. 其中真命题的个数是(　)



正 (主) 视图

俯视图

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

12. 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是平面直角坐标系中两两不同的四点, 若 $\overrightarrow{A_1A_3}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}$ ($\lambda\in\mathbf{R}$), $\overrightarrow{A_1A_4}=\mu\overrightarrow{A_1A_2}$ ($\mu\in\mathbf{R}$), 且 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=2$, 则称 A_3, A_4 调和分割 A_1, A_2. 已知点 $C(c,0)$, $D(d,0)$ (c, $d\in\mathbf{R}$) 调和分割点 $A(0,0)$, $B(1,0)$, 则下面说法正确的是 （　）

(A) C 可能是线段 AB 的中点

(B) D 可能是线段 AB 的中点

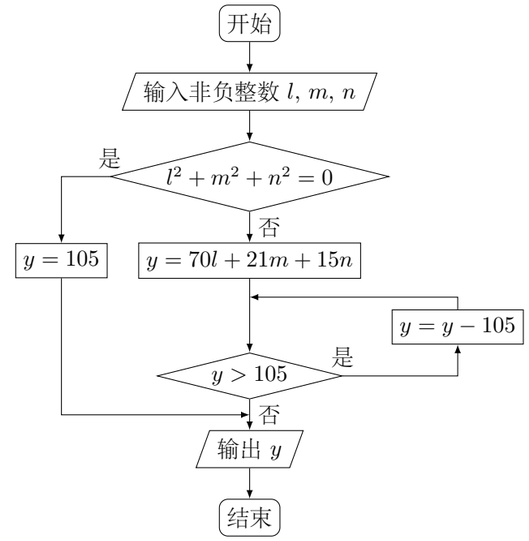
(C) C, D 可能同时在线段 AB 上

(D) C, D 不可能同时在线段 AB 的延长线上

二、填空题

13. 某高校甲、乙、丙、丁四个专业分别有 150、150、400、300 名学生, 为了解学生的就业倾向, 用分层抽样的方法从该校这四个专业共抽取 40 名学生进行调查, 应在丙专业抽取的学生人数为_____.

14. 执行如图所示的程序框图, 输入 $l=2$, $m=3$, $n=5$, 则输出的 y 的值是_____.



15. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 和椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 有相同的焦点, 且双曲线的离心率是椭圆离心率的两倍, 则双曲线的方程为_____.

16. 已知函数 $f(x)=\log_a x+x-b$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$). 当 $2<a<3<b<4$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点 $x_0\in(n,n+1)$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $n=$_____.

三、解答题

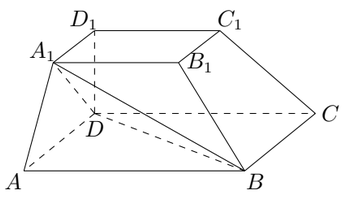
17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\dfrac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\dfrac{2c-a}{b}$.

(1) 求 $\dfrac{\sin C}{\sin A}$ 的值;

(2) 若 $\cos B=\dfrac{1}{4}$, $\triangle ABC$ 的周长为 5, 求 b 的长.

18. 甲、乙两校各有 3 名教师报名支教, 其中甲校 2 男 1 女, 乙校 1 男 2 女.
(1) 若从甲校和乙校报名的教师中各任选 1 名, 写出所有可能的结果, 并求选出的 2 名教师性别相同的概率;
(2) 若从报名的 6 名教师中任选 2 名, 写出所有可能的结果, 并求选出的 2 名教师来自同一学校的概率.

19. 如图, 在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $D_1D\perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $AB=2AD$, $AD=A_1B_1$, $\angle BAD=60^\circ$.
(1) 证明: $AA_1\perp BD$;
(2) 证明: $CC_1/\!/$ 平面 A_1BD.

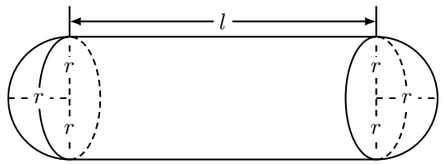


20. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 且 a_1, a_2, a_3 中的任何两个数不在下表的同一列.

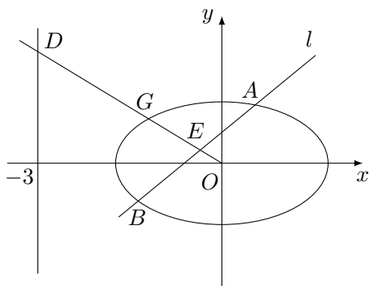
	第一列	第二列	第三列
第一行	3	2	10
第二行	6	4	14
第三行	9	8	18

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n=a_n+(-1)^n\ln a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n}.

21. 某企业拟建造如图所示的容器 (不计厚度, 长度单位: 米), 其中容器的中间为圆柱形, 左右两端均为半球形, 按照设计要求容器的容积为 $\frac{80\pi}{3}$ 立方米, 且 $l\geqslant 2r$. 假设该容器的建造费用仅与其表面积有关. 已知圆柱形部分每平方米建造费用为 3 千元, 半球形部分每平方米建造费用为 c ($c>3$) 千元. 设该容器的建造费用为 y 千元.
(1) 写出 y 关于 r 的函数表达式, 并求该函数的定义域;
(2) 求该容器的建造费用最小时的 r.



22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. 如图所示, 斜率为 k ($k>0$) 且不过原点的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 E, 射线 OE 交椭圆 C 于点 G, 交直线 $x=-3$ 于点 $D(-3,m)$.
(1) 求 m^2+k^2 的最小值;
(2) 若 $|OG|^2=|OD|\cdot|OE|$,
① 求证: 直线 l 过定点;
② 试问点 B, G 能否关于 x 轴对称? 若能, 求出此时 $\triangle ABG$ 的外接圆方程; 若不能, 请说明理由.



2011 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是向量, 命题"若 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$"的逆命题是 （ ）

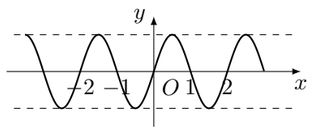
(A) 若 $\boldsymbol{a}\neq-\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$　　(B) 若 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$

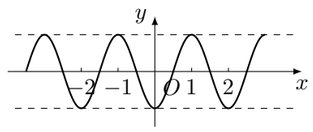
(C) 若 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}\neq-\boldsymbol{b}$　　(D) 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$

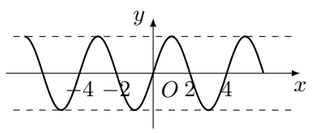
2. 设抛物线的顶点在原点, 准线方程为 $x=-2$, 则抛物线的方程是 （ ）

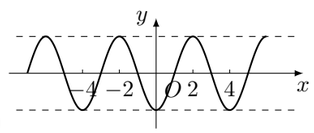
(A) $y^2=-8x$　　(B) $y^2=-4x$　　(C) $y^2=8x$　　(D) $y^2=4x$

3. 设函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=f(x)$, $f(x+2)=f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象可能是 （ ）

(A)


(B)


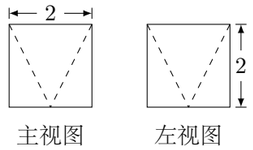
(C)


(D)


4. $(4^x-2^{-x})^6$ $(x\in\mathbf{R})$ 展开式中的常数项是 （ ）

(A) -20　　(B) -15　　(C) 15　　(D) 20

5. 某几何体的三视图如图所示, 则它的体积是 （ ）



(A) $8-\dfrac{2\pi}{3}$　　(B) $8-\dfrac{\pi}{3}$　　(C) $8-2\pi$　　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

6. 函数 $f(x)=\sqrt{x}-\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 内 （ ）

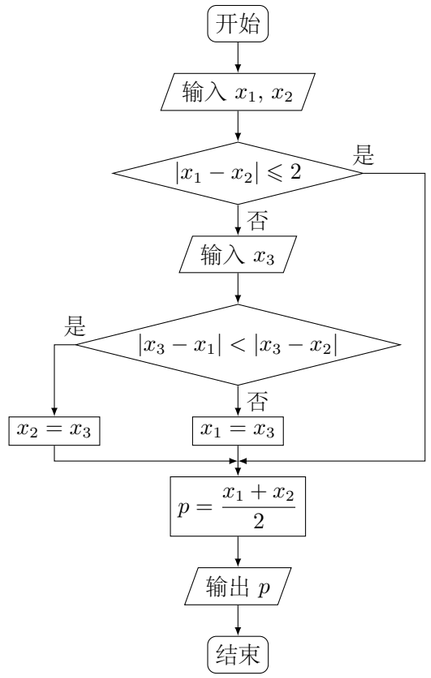
(A) 没有零点　　(B) 有且仅有一个零点

(C) 有且仅有两个零点　　(D) 有无穷多个零点

7. 设集合 $M=\{y|y=|\cos^2x-\sin^2x|,x\in\mathbf{R}\}$, $N=\left\{x\left|\left|x-\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right|<\sqrt{2},\mathrm{i}\text{ 为虚数单位},x\in\mathbf{R}\right.\right\}$, 则 $M\cap N$ 为 （ ）

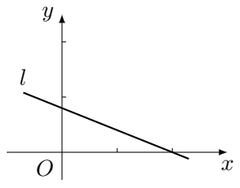
(A) $(0,1)$　　(B) $(0,1]$　　(C) $[0,1)$　　(D) $[0,1]$

8. 如图, x_1, x_2, x_3 为某次考试三个评阅人对同一道题的独立评分, p 为该题的最终得分, 当 $x_1=6$, $x_2=9$, $p=8.5$ 时, x_3 等于 （ ）



(A) 11　　(B) 10　　(C) 8　　(D) 7

9. 设 (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots$, (x_n,y_n) 是变量 x 和 y 的 n 个样本点, 直线 l 是由这些样本点通过最小二乘法得到的线性回归直线 (如图), 以下结论中正确的是 （ ）



(A) x 和 y 的相关系数为直线 l 的斜率

(B) x 和 y 的相关系数在 0 到 1 之间

(C) 当 n 为偶数时, 分布在 l 两侧的样本点的个数一定相同

(D) 直线 l 过点 $(\bar{x},\bar{y})$

10. 甲、乙两人一起去游"2011 西安世园会", 他们约定, 各自独立地从 1 到 6 号景点中任选 4 个进行游览, 每个景点参观 1 小时, 则最后一小时他们同在一个景点的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{36}$　　(B) $\dfrac{1}{9}$　　(C) $\dfrac{5}{36}$　　(D) $\dfrac{1}{6}$

二、填空题

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\lg x, & x>0\\ x+\int_0^a 3t^2\mathrm{d}t, & x\leqslant0\end{cases}$. 若 $f(f(1))=1$, 则 $a=$_____.

12. 设 $n\in\mathbf{N}_+$, 一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根的充要条件是 $n=$_____.

13. 观察下列等式

$1=1$

$2+3+4=9$

$3+4+5+6+7=25$

$4+5+6+7+8+9+10=49$

$\cdots$

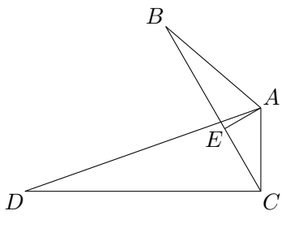
照此规律, 第 n 个等式应为_____.

14. 植树节某班 20 名同学在一段直线公路一侧植树, 每人植一棵, 相邻两棵树相距 10 米, 开始时需将树苗集中放置在某一树坑旁边, 使每位同学从各自树坑出发前来领取树苗往返所走的路程总和最小, 这个最小值为_____米.

15. 三选一.

【A】若关于 x 的不等式 $|a|\geqslant|x+1|+|x-2|$ 存在实数解, 则实数 a 的取值范围是_____.

【B】如图, $\angle B=\angle D$, $AE\perp BC$, $\angle ACD=90^\circ$, 且 $AB=6$, $AC=4$, $AD=12$, 则 $BE=$_____.



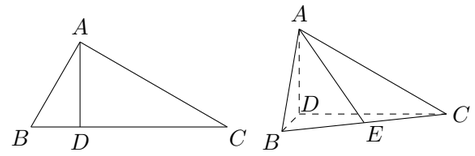
【C】直角坐标系 xOy 中, 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设点 A, B 分别在曲线 C_1: $\begin{cases}x=3+\cos\theta\\ y=4+\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 和曲线 C_2: $\rho=1$ 上, 则 $|AB|$ 的最小值为_____.

三、解答题

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=60^\circ$, $\angle BAC=90^\circ$, AD 是 BC 上的高, 沿 AD 把 $\triangle ABD$ 折起, 使 $\angle BDC=90^\circ$.

(1) 证明: 平面 $ADB\perp$ 平面 BDC;

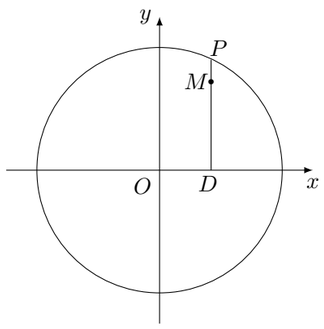
(2) 设 E 为 BC 的中点, 求 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{DB}$ 夹角的余弦值.



17. 如图, 设 P 是圆 $x^2+y^2=25$ 上的动点, 点 D 是 P 在 x 轴上的投影, M 为 PD 上一点, 且 $|MD|=\dfrac{4}{5}|PD|$.

(1) 当 P 在圆上运动时, 求点 M 的轨迹 C 的方程;

(2) 求过点 $(3,0)$ 且斜率为 $\dfrac{4}{5}$ 的直线被 C 所截线段的长度.

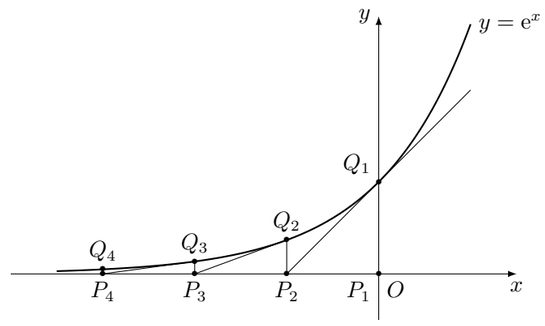


18. 叙述并证明余弦定理.

19. 如图, 从点 $P_1(0,0)$ 作 x 轴的垂线交曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 于点 $Q_1(0,1)$, 曲线在 Q_1 点处的切线与 x 轴交于点 P_2, 再从 P_2 作 x 轴的垂线交曲线于点 Q_2, 依次重复上述过程得到一系列点: P_1, Q_1; P_2, Q_2; $\cdots$; P_n, Q_n, 记 P_k 点的坐标为 $(x_k,0)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

(1) 试求 x_k 与 x_{k-1} 的关系 $(2\leqslant k\leqslant n)$;

(2) 求 $|P_1Q_1|+|P_2Q_2|+|P_3Q_3|+\cdots+|P_nQ_n|$.



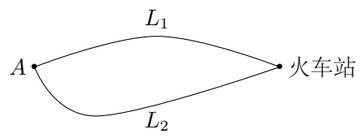
20. 如图, A 地到火车站共有两条路径 L_1 和 L_2, 据统计, 通过两条路径所用的时间互不影响, 所用时间落在各时间段内的频率如下表:

所用时间 (分钟)	$10\sim20$	$20\sim30$	$30\sim40$	$40\sim50$	$50\sim60$
选择 L_1 的人数	6	12	18	12	12
选择 L_2 的人数	0	4	16	16	4

现甲、乙两人分别有 40 分钟和 50 分钟时间用于赶往火车站.

(1) 为了尽最大可能在各自允许的时间内赶到火车站, 甲和乙应如何选择各自的路径?

(2) 用 X 表示甲、乙两人中在允许的时间内能赶到火车站的人数, 针对 (1) 的选择方案, 求 X 的分布列和数学期望.



21. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上, $f(1)=0$, 导函数 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=f(x)+f'(x)$.

(1) 求 $g(x)$ 的单调区间和最小值;

(2) 讨论 $g(x)$ 与 $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的大小关系;

(3) 是否存在 $x_0>0$, 使得 $|g(x)-g(x_0)|<\dfrac{1}{x}$ 对任意 $x>0$ 成立? 若存在, 求出 x_0 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

2011 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是向量, 命题"若 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$"的逆命题是 （ ）

(A) 若 $\boldsymbol{a}\neq-\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$　　(B) 若 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$

(C) 若 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}\neq-\boldsymbol{b}$　　(D) 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$

2. 设抛物线的顶点在原点, 准线方程为 $x=-2$, 则抛物线的方程是 （ ）

(A) $y^2=-8x$　　(B) $y^2=-4x$　　(C) $y^2=8x$　　(D) $y^2=4x$

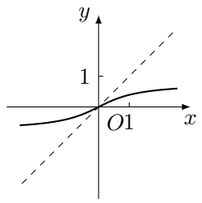
3. 设 $0<a<b$, 则下列不等式中正确的是 （ ）

(A) $a<b<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$　　(B) $a<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<b$

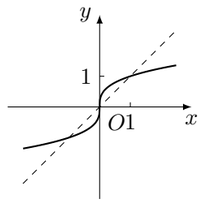
(C) $a<\sqrt{ab}<b<\dfrac{a+b}{2}$　　(D) $\sqrt{ab}<a<\dfrac{a+b}{2}<b$

4. 函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图象是 （ ）

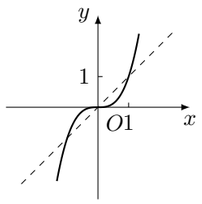
(A)



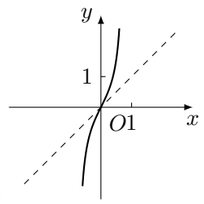
(B)



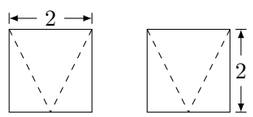
(C)



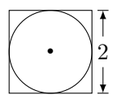
(D)



5. 某几何体的三视图如图所示, 则它的体积是 （ ）



主视图　　左视图



俯视图

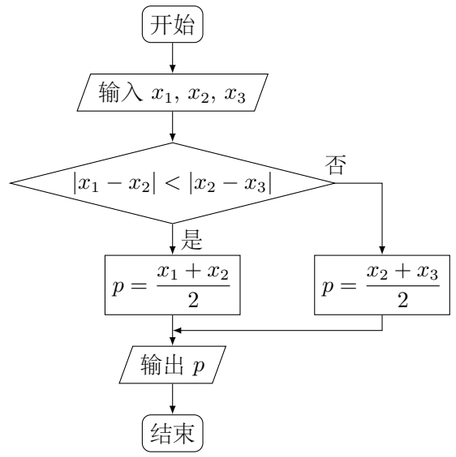
(A) $8-\dfrac{2\pi}{3}$　　(B) $8-\dfrac{\pi}{3}$　　(C) $8-2\pi$　　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

6. 方程 $|x|=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 （ ）

(A) 没有根　　(B) 有且仅有一个根

(C) 有且仅有两个根　　(D) 有无穷多个根

7. 下面的框图中, 当 $x_1=6$, $x_2=9$, $p=8.5$ 时, x_3 等于 （ ）

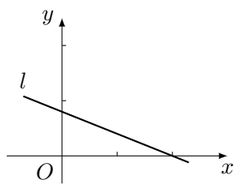


(A) 7　　(B) 8　　(C) 10　　(D) 11

8. 设集合 $M=\{y|y=|\cos^2x-\sin^2x|, x\in\mathbf{R}\}$, $N=\left\{x\left|\left|\dfrac{x}{\mathrm{i}}\right|<1, \mathrm{i}\text{ 为虚数单位}, x\in\mathbf{R}\right.\right\}$, 则 $M\cap N$ 为 （ ）

(A) $(0,1)$　　(B) $(0,1]$　　(C) $[0,1)$　　(D) $[0,1]$

9. 设 (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots$, (x_n,y_n) 是变量 x 和 y 的 n 个样本点, 直线 l 是由这些样本点通过最小二乘法得到的线性回归直线 (如图), 以下结论中正确的是 （ ）



(A) 直线 l 过点 $(\overline{x},\overline{y})$

(B) x 和 y 的相关系数为直线 l 的斜率

(C) x 和 y 的相关系数在 0 到 1 之间

(D) 当 n 为偶数时, 分布在 l 两侧的样本点的个数一定相同

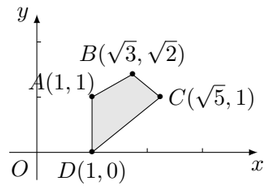
10. 植树节某班 20 名同学在一段直线公路一侧植树, 每人植一棵, 相邻两棵树相距 10 米, 开始时需将树苗集中放置在某一树坑旁边, 现将树坑从 1 到 20 依次编号, 为使各位同学从各自树坑前来领取树苗所走的路程总和最小, 树苗可以放置的两个最佳坑位的编号为 （ ）

(A) 1 和 20　　(B) 9 和 10　　(C) 9 和 11　　(D) 10 和 11

二、填空题

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lg x, & x>0\\ 10^x, & x\leqslant 0\end{cases}$, 则 $f(f(-2))=$_____.

12. 如图, 点 (x,y) 在四边形 $ABCD$ 内部和边界上运动, 那么 $2x-y$ 的最小值为_____.



13. 观察下列等式

$1=1$

$2+3+4=9$

$3+4+5+6+7=25$

$4+5+6+7+8+9+10=49$

$\cdots$

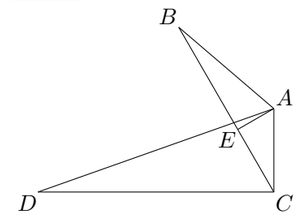
照此规律, 第五个等式应为_____.

14. 设 $n\in\mathbf{N}_+$, 一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根的充要条件是 $n=$_____.

15. 三选一.

【A】若不等式 $|x+1|+|x-2|\geqslant a$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

【B】如图, $\angle B=\angle D$, $AE\perp BC$, $\angle ACD=90^\circ$, 且 $AB=6$, $AC=4$, $AD=12$, 则 $AE=$_____.



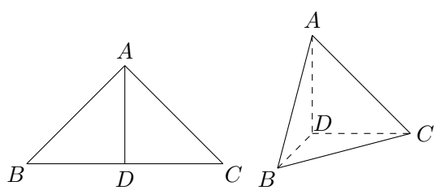
【C】直角坐标系 xOy 中, 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设点 A, B 分别在曲线 C_1: $\begin{cases}x=3+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 和曲线 C_2: $\rho=1$ 上, 则 $|AB|$ 的最小值为_____.

三、解答题

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=45^\circ$, $\angle BAC=90^\circ$, AD 是 BC 上的高, 沿 AD 把 $\triangle ABD$ 折起, 使 $\angle BDC=90^\circ$.

(1) 证明: 平面 $ADB\perp$ 平面 BDC;

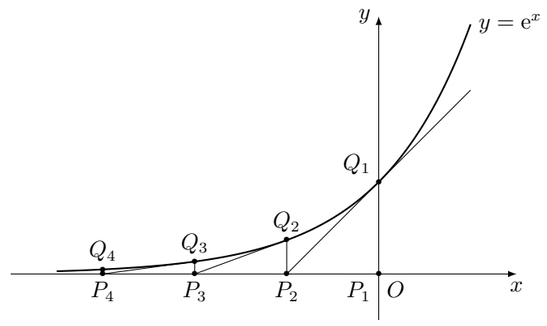
(2) 若 $BD=1$, 求三棱锥 $D-ABC$ 的表面积.



17. 设椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $(0,4)$, 离心率为 $\dfrac{3}{5}$.
(1) 求 C 的方程;
(2) 求过点 $(3,0)$ 且斜率为 $\dfrac{4}{5}$ 的直线被 C 所截线段的中点坐标.

18. 叙述并证明余弦定理.

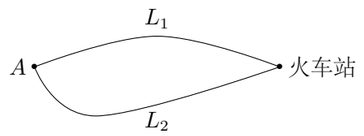
19. 如图, 从点 $P_1(0,0)$ 作 x 轴的垂线交曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 于点 $Q_1(0,1)$, 曲线在 Q_1 点处的切线与 x 轴交于点 P_2, 再从 P_2 作 x 轴的垂线交曲线于点 Q_2, 依次重复上述过程得到一系列点: P_1, Q_1; P_2, Q_2; $\cdots$; P_n, Q_n, 记 P_k 点的坐标为 $(x_k,0)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.
(1) 试求 x_k 与 x_{k-1} 的关系 $(2\leqslant k\leqslant n)$;
(2) 求 $|P_1Q_1|+|P_2Q_2|+|P_3Q_3|+\cdots+|P_nQ_n|$.



20. 如图, A 地到火车站共有两条路径 L_1 和 L_2, 现随机抽取 100 位从 A 地到达火车站的人进行调查, 调查结果如下:

所用时间 (分钟)	$10\sim20$	$20\sim30$	$30\sim40$	$40\sim50$	$50\sim60$
选择 L_1 的人数	6	12	18	12	12
选择 L_2 的人数	0	4	16	16	4

(1) 试估计 40 分钟内不能赶到火车站的概率;
(2) 分别求通过路径 L_1 和 L_2 所用时间落在上表中各时间段内的频率;
(3) 现甲、乙两人分别有 40 分钟和 50 分钟时间用于赶往火车站, 为了尽最大可能在允许的时间内赶到火车站, 试通过计算说明, 他们应如何选择各自的路径.



21. 设 $f(x)=\ln x$, $g(x)=f(x)+f'(x)$.
(1) 求 $g(x)$ 的单调区间和最小值;
(2) 讨论 $g(x)$ 与 $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的大小关系;
(3) 求 a 的取值范围, 使得 $g(a)-g(x)<\dfrac{1}{a}$ 对任意 $x>0$ 成立.

2011 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=$_____.

2. 若全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\mid x\geqslant 1\}\cup\{x\mid x\leqslant 0\}$, 则 $\complement_U A=$_____.

3. 设 m 为常数, 若点 $F(0,5)$ 是双曲线 $\dfrac{y^2}{m}-\dfrac{x^2}{9}=1$ 的一个焦点, 则 $m=$_____.

4. 不等式 $\dfrac{x+1}{x}\leqslant 3$ 的解集为_____.

5. 在极坐标系中, 直线 $\rho(2\cos\theta+\sin\theta)=2$ 与直线 $\rho\cos\theta=1$ 的夹角大小为_____. (结果用反三角函数值表示)

6. 在相距 2 千米的 A, B 两点处测量目标 C, 若 $\angle CAB=75°$, $\angle CBA=60°$, 则 A, C 两点之间的距离为_____千米.

7. 若圆锥的侧面积为 2π, 底面面积为 π, 则该圆锥的体积为_____.

8. 函数 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$ 的最大值为_____.

9. 马老师从课本上抄录一个随机变量 ξ 的概率分布列如下表:

X	1	2	3
$P(\xi=x)$	?	!	?

请小牛同学计算 ξ 的数学期望, 尽管“!”处无法完全看清, 且两个“?”处字迹模糊, 但能肯定这两个“?”处的数值相同. 据此, 小牛给出了正确答案 $E\xi=$_____.

10. 行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ (a, b, c, $d\in\{-1,1,2\}$) 所有可能的值中, 最大的是_____.

11. 在正三角形 ABC 中, D 是 BC 上的点. 若 $AB=3$, $BD=1$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$_____.

12. 随机抽取的 9 位同学中, 至少有 2 位同学在同一月份出生的概率为_____. (默认每个月的天数相同, 结果精确到 0.001)

13. 设 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上, 以 1 为周期的函数, 若函数 $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上的值域为 $[-2,5]$, 则 $f(x)$ 在区间 $[-10,10]$ 上的值域为_____.

14. 已知点 $O(0,0)$, $Q_0(0,1)$ 和点 $R_0(3,1)$, 记 Q_0R_0 的中点为 P_1, 取 Q_0P_1 和 P_1R_0 中的一条, 记其端点为 Q_1, R_1, 使之满足 $(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$, 记 Q_1R_1 的中点为 P_2, 取 Q_1P_2 和 P_2R_1 中的一条, 记其端点为 Q_2, R_2, 使之满足 $(|OQ_2|-2)(|OR_2|-2)<0$. 依次下去, 得到 P_1, P_2, $\cdots$, P_n, $\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=$_____.

二、选择题

15. 若 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $ab>0$, 则下列不等式中, 恒成立的是 （ ）

(A) $a^2+b^2>2ab$　　(B) $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

(C) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$　　(D) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$

16. 下列函数中, 既是偶函数, 又是在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的函数是 （ ）

(A) $y=\ln\dfrac{1}{|x|}$　　(B) $y=x^3$　　(C) $y=2^{|x|}$　　(D) $y=\cos x$

17. 设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是平面上给定的 5 个不同点, 则使 $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}+\overrightarrow{MA_5}=\vec{0}$ 成立的点 M 的个数为 （ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 5　　(D) 10

18. 设 $\{a_n\}$ 是各项为正数的无穷数列, A_i 是边长为 a_i, a_{i+1} 的矩形面积 ($i=1,2,\cdots$), 则 $\{A_n\}$ 为等比数列的充要条件为 （ ）

(A) $\{a_n\}$ 是等比数列

(B) a_1, a_3, $\cdots$, a_{2n-1}, $\cdots$ 或 a_2, a_4, $\cdots$, a_{2n}, $\cdots$ 是等比数列

(C) a_1, a_3, $\cdots$, a_{2n-1}, $\cdots$ 和 a_2, a_4, $\cdots$, a_{2n}, $\cdots$ 均是等比数列

(D) a_1, a_3, $\cdots$, a_{2n-1}, $\cdots$ 和 a_2, a_4, $\cdots$, a_{2n}, $\cdots$ 均是等比数列, 且公比相同

三、解答题

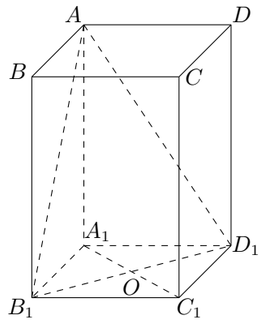
19. 已知复数 z_1 满足 $(z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 复数 z_2 的虚部为 2, 且 $z_1\cdot z_2$ 是实数, 求 z_2.

20. 已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x+b\cdot 3^x$, 其中常数 a, b 满足 $a\cdot b\neq 0$.
(1) 若 $a\cdot b>0$, 判断函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $a\cdot b<0$, 求 $f(x+1)>f(x)$ 时的 x 的取值范围.

21. 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱, O_1 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点.

(1) 设 AB_1 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的大小为 α, 二面角 $A-B_1D_1-A_1$ 的大小为 β. 求证: $\tan\beta=\sqrt{2}\tan\alpha$;

(2) 若点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\dfrac{4}{3}$, 求正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高.



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=3n+6$、$b_n=2n+7$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 将集合 $\{x\mid x=a_n,n\in\mathbf{N}^*\}\cup\{x\mid x=b_n,n\in\mathbf{N}^*\}$ 中的元素从小到大依次排列, 构成数列 c_1, c_2, c_3, $\cdots$, c_n, $\cdots$.

(1) 求 c_1, c_2, c_3, c_4;

(2) 求证: 在数列 $\{a_n\}$ 中, 但不在数列 $\{b_n\}$ 中的项恰为 a_2, a_4, $\cdots$, a_{2n}, $\cdots$;

(3) 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式.

23. 已知平面上的线段 l 及点 P, 在 l 上任取一点 Q, 线段 PQ 长度的最小值称为点 P 到线段 l 的距离, 记作 $d(P,l)$.

(1) 求点 $P(1,1)$ 到线段 $l:x-y-3=0$ $(3\leqslant x\leqslant 5)$ 的距离 $d(P,l)$;

(2) 设 l 是长为 2 的线段, 求点的集合 $D=\{P\mid d(P,l)\leqslant 1\}$ 所表示的图形面积;

(3) 写出到两条线段 l_1, l_2 距离相等的点的集合 $\Omega=\{P\mid d(P,l_1)=d(P,l_2)\}$, 其中 $l_1=AB$, $l_2=CD$, A, B, C, D 是下列三组点中的一组. 对于下列三组点只需选做一种, 满分分别是① 2 分, ② 6 分, ③ 8 分; 若选择了多于一种情形, 则按照序号较小的解答计分.

① $A(1,3)$, $B(1,0)$, $C(-1,3)$, $D(-1,0)$.

② $A(1,3)$, $B(1,0)$, $C(-1,3)$, $D(-1,-2)$.

③ $A(0,1)$, $B(0,0)$, $C(0,0)$, $D(2,0)$.

2011 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 若全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\mid x\geqslant 1\}$, 则 $\complement_U A=$_____.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3n}{n+3}\right)=$_____.

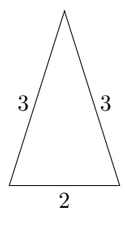
3. 若函数 $f(x)=2x+1$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(-2)=$_____.

4. 函数 $y=2\sin x-\cos x$ 的最大值为_____.

5. 若直线 l 过点 $(3,4)$, 且 $(1,2)$ 是它的一个法向量, 则直线 l 的方程为_____.

6. 不等式 $\dfrac{1}{x}<1$ 的解集为_____.

7. 若一个圆锥的主视图 (如图所示) 是边长为 3, 3, 2 的三角形, 则该圆锥的侧面积为_____.



8. 在相距 2 千米的 A, B 两点处测量目标点 C, 若 $\angle CAB=75°$, $\angle CBA=60°$, 则 A, C 两点之间的距离是千米_____.

9. 若变量 x, y 满足条件 $\begin{cases}3x-y\leqslant 0\\ x-3y+5\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

10. 课题组进行城市空气质量调查, 按地域把 24 个城市分成甲、乙、丙三组, 对应的城市数分别为 4、12、8, 若用分层抽样抽取 6 个城市, 则丙组中应抽取的城市数为_____.

11. 行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ $(a,\ b,\ c,\ d\in\{-1,1,2\})$ 所有可能的值中, 最大的是_____.

12. 在正三角形 ABC 中, D 是 BC 上的点. 若 $AB=3$, $BD=1$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$_____.

13. 随机抽取的 9 位同学中, 至少有 2 位同学在同一月份出生的概率为_____. (默认每个月的天数相同, 结果精确到 0.001)

14. 设 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上, 以 1 为周期的函数, 若函数 $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的值域为 $[-2,5]$, 则 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上的值域为_____.

二、选择题

15. 下列函数中, 既是偶函数, 又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是 （ ）

(A) $y=x^{-2}$ (B) $y=x^{-1}$ (C) $y=x^{2}$ (D) $y=x^{\frac{1}{3}}$

16. 若 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $ab>0$, 则下列不等式中, 恒成立的是 （ ）

(A) $a^2+b^2>2ab$ (B) $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

(C) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$ (D) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$

17. 若三角方程 $\sin x=0$ 与 $\sin 2x=0$ 的解集分别为 E, F, 则 （ ）

(A) $E\subsetneqq F$ (B) $E\supsetneqq F$ (C) $E=F$ (D) $E\cap F=\varnothing$

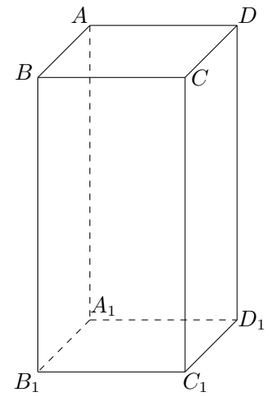
18. 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是平面上给定的 4 个不同点, 则使 $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}=\vec{0}$ 成立的点 M 的个数为 （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

三、解答题

19. 已知复数 z_1 满足 $(z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 复数 z_2 的虚部为 2, 且 $z_1\cdot z_2$ 是实数, 求 z_2.

20. 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱, 高 $AA_1=2$, 求:
(1) 异面直线 BD 与 AB_1 所成角的余弦值;
(2) 四面体 AB_1D_1C 的体积.



21. 已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x+b\cdot 3^x$, 其中常数 a, b 满足 $a\cdot b\neq 0$.
(1) 若 $a\cdot b>0$, 判断函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $a\cdot b<0$, 求 $f(x+1)>f(x)$ 时的 x 的取值范围.

22. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{m^2}+y^2=1$ (常数 $m>1$), P 是曲线 C 上的动点, M 是曲线 C 的右顶点, 定点 A 的坐标为 $(2,0)$.
(1) 若 M 与 A 重合, 求曲线 C 的焦点坐标;
(2) 若 $m=3$, 求 $|PA|$ 的最大值与最小值;
(3) 若 $|PA|$ 的最小值为 $|MA|$, 求实数 m 的取值范围.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=3n+6$、$b_n=2n+7$ ($n\in\mathbf{N}^*$), 将集合 $\{x\,|\,x=a_n, n\in\mathbf{N}^*\}\cup\{x\,|\,x=b_n, n\in\mathbf{N}^*\}$ 中的元素从小到大依次排列, 构成数列 c_1, c_2, c_3, $\cdots$, c_n, $\cdots$.
(1) 求三个最小的数, 使它们既是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 又是数列 $\{b_n\}$ 中的项;
(2) 数列 c_1, c_2, c_3, $\cdots$, c_{40} 中有多少项不是数列 $\{b_n\}$ 中的项? 请说明理由;
(3) 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $4n$ 项和 S_{4n} ($n\in\mathbf{N}^*$).

2011 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. 有一容量为 66 的样本, 数据的分组及各组的频数如下:

$[11.5,15.5)$	2	$[15.5,19.5)$	4	$[19.5,23.5)$	9	$[23.5,27.5)$	18
$[27.5,31.5)$	11	$[31.5,35.5)$	12	$[35.5,39.5)$	7	$[39.5,43.5)$	3

根据样本的频率分布, 估计数据落在 $[31.5,43.5)$ 的概率约是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

2. 复数 $-\mathrm{i}+\dfrac{1}{\mathrm{i}}=$ （ ）

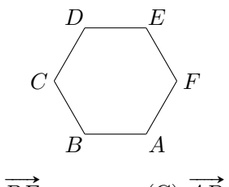
(A) $-2\mathrm{i}$ (B) $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (C) 0 (D) $2\mathrm{i}$

3. l_1, l_2, l_3 是空间三条不同的直线, 则下列命题正确的是 （ ）

(A) $l_1 \perp l_2, l_2 \perp l_3 \Rightarrow l_1 /\!/ l_3$ (B) $l_1 \perp l_2, l_2 /\!/ l_3 \Rightarrow l_1 \perp l_3$

(C) $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3 \Rightarrow l_1, l_2, l_3$ 共面 (D) l_1, l_2, l_3 共点 $\Rightarrow l_1, l_2, l_3$ 共面

4. 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 中, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=$ （ ）



(A) $\mathbf{0}$ (B) $\overrightarrow{BE}$ (C) $\overrightarrow{AD}$ (D) $\overrightarrow{CF}$

5. “函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义”是“$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续”的 （ ）

(A) 充分而不必要的条件 (B) 必要而不充分的条件

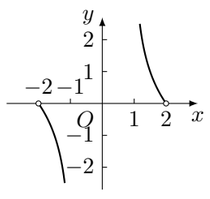
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要的条件

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A \leqslant \sin^2 B+\sin^2 C-\sin B\sin C$, 则 A 的取值范围是( )

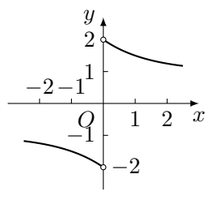
(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right)$ (C) $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ (D) $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$

7. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x>0$ 时, $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+1$, 则 $f(x)$ 的反函数的图象大致是 （ ）

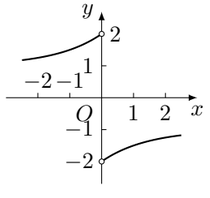
(A)



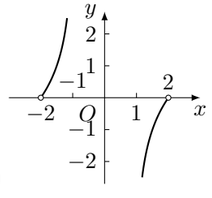
(B)



(C)



(D)



8. 数列 $\{a_n\}$ 的首项为 3, $\{b_n\}$ 为等差数列且 $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 若 $b_3=-2$, $b_{10}=12$, 则 $a_8=$ （ ）

(A) 0 (B) 3 (C) 8 (D) 11

9. 某运输公司有 12 名驾驶员和 19 名工人, 有 8 辆载重量为 10 吨的甲型卡车和 7 辆载重量为 6 吨的乙型卡车. 某天需运往 A 地至少 72 吨的货物, 派用的每辆车需载满且只运送一次, 派用的每辆甲型卡车需配 2 名工人, 运送一次可得利润 450 元; 派用的每辆乙型卡车需配 1 名工人, 运送一次可得利润 350 元, 该公司合理计划当天派用甲、乙卡车的车辆数, 可得最大利润 $z=$ （ ）

(A) 4650 元 (B) 4700 元 (C) 4900 元 (D) 5000 元

10. 在抛物线 $y=x^2+ax-5$ $(a\neq 0)$ 上取横坐标为 $x_1=-4$, $x_2=2$ 的两点, 经过两点引一条割线, 有平行于该割线的一条直线同时与抛物线和圆 $5x^2+5y^2=36$ 相切, 则抛物线顶点的坐标为 （ ）

(A) $(-2,-9)$ (B) $(0,-5)$ (C) $(2,-9)$ (D) $(1,-6)$

11. 已知定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=3f(x+2)$, 当 $x\in[0,2)$ 时, $f(x)=-x^2+2x$. 设 $f(x)$ 在 $[2n-2,2n)$ 上的最大值为 a_n $(n\in\mathbf{N}^*)$, 且 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ （ ）

(A) 3 (B) $\dfrac{5}{2}$ (C) 2 (D) $\dfrac{3}{2}$

12. 在集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 中任取一个偶数 a 和一个奇数 b 构成以原点为起点的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b)$. 从所有得到的以原点为起点的向量中任取两个向量为邻边作平行四边形. 记所有作成的平行四边形的个数为 n, 其中面积不超过 4 的平行四边形的个数为 m, 则 $\dfrac{m}{n}=$ （ ）

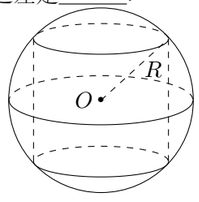
(A) $\dfrac{4}{15}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

二、填空题

13. 计算 $\left(\lg\dfrac{1}{4}-\lg 25\right)\div 100^{-\frac{1}{2}}=$_____.

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 4, 那么点 P 到左准线的距离是_____.

15. 如图, 半径为 R 的球 O 中有一内接圆柱. 当圆柱的侧面积最大时, 球的表面积与该圆柱的侧面积之差是_____.



16. 函数 $f(x)$ 的定义域为 A, 若 $x_1, x_2\in A$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$ 时总有 $x_1=x_2$, 则称 $f(x)$ 为单函数. 例如, 函数 $f(x)=2x+1$ $(x\in\mathbf{R})$ 是单函数. 下列命题:

① 函数 $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbf{R})$ 是单函数;

② 若 $f(x)$ 为单函数, $x_1, x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$, 则 $f(x_1)\neq f(x_2)$;

③ 若 $f\colon A\to B$ 为单函数, 则对于任意 $b\in B$, 它至多有一个原象;

④ 函数 $f(x)$ 在某区间上具有单调性, 则 $f(x)$ 一定是单函数.

其中的真命题是_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{7\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和最小值;

(2) 已知 $\cos(\beta-\alpha)=\dfrac{4}{5}$, $\cos(\beta+\alpha)=-\dfrac{4}{5}$, $0<\alpha<\beta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, 求证: $[f(\beta)]^2-2=0$.

18. 本着健康、低碳的生活理念, 租自行车骑游的人越来越多. 某自行车租车点的收费标准是每车每次租车时间不超过两小时免费, 超过两小时的部分每小时收费 2 元 (不足 1 小时的部分按 1 小时计算). 有甲、乙两人相互独立来该租车点租车骑游 (各租一车一次). 设甲、乙不超过两小时还车的概率分别为 $\dfrac{1}{4}$、$\dfrac{1}{2}$; 两小时以上且不超过三小时还车的概率分别是 $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{4}$; 两人租车时间都不会超过四小时.

(1) 求甲、乙两人所付的租车费用相同的概率;

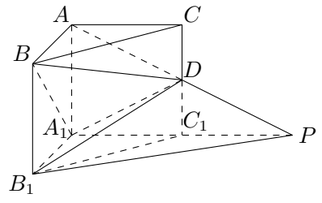
(2) 设甲、乙两人所付的租车费用之和为随机变量 ξ, 求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=AA_1=1$. D 是棱 CC_1 上的一点, P 是 AD 的延长线与 A_1C_1 的延长线的交点, 且 $PB_1\parallel$ 平面 BDA_1.

(1) 求证: $CD=C_1D$;

(2) 求二面角 $A-A_1D-B$ 的平面角的余弦值;

(3) 求点 C 到平面 B_1DP 的距离.



20. 设 d 为非零实数, $a_n=\dfrac{1}{n}\left[\mathrm{C}_n^1d+2\mathrm{C}_n^2d^2+\cdots+(n-1)\,\mathrm{C}_n^{n-1}d^{n-1}+n\mathrm{C}_n^nd^n\right]$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

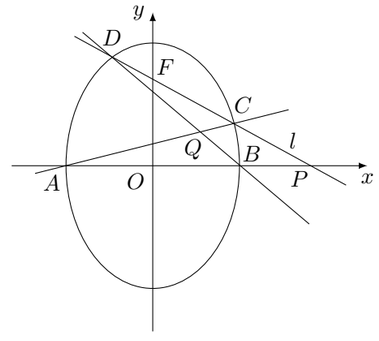
(1) 写出 a_1, a_2, a_3 并判断 $\{a_n\}$ 是否为等比数列. 若是, 给出证明; 若不是, 说明理由;

(2) 设 $b_n=nda_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21. 椭圆有两顶点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, 过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C, D 两点, 并与 x 轴交于点 P. 直线 AC 与直线 BD 交于点 Q.

(1) 当 $|CD|=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ 时, 求直线 l 的方程;

(2) 当点 P 异于 A, B 两点时, 求证: $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值.



22. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}$, $h(x)=\sqrt{x}$.

(1) 设函数 $F(x)=f(x)-h(x)$, 求 $F(x)$ 的单调区间与极值;

(2) 设 $a\in\mathbf{R}$, 解关于 x 的方程 $\log_4\left[\dfrac{3}{2}f(x-1)-\dfrac{3}{4}\right]=\log_2h(a-x)-\log_2h(4-x)$;

(3) 试比较 $f(100)\,h(100)-\sum\limits_{k=1}^{100}h(k)$ 与 $\dfrac{1}{6}$ 的大小.

2011 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

一、选择题

1. 若全集 $M=\{1,2,3,4,5\}$, $N=\{2,4\}$, 则 $\complement_M N=$ （　）

(A) $\varnothing$　　(B) $\{1,3,5\}$　　(C) $\{2,4\}$　　(D) $\{1,2,3,4,5\}$

2. 有一容量为 66 的样本, 数据的分组及各组的频数如下:

$[11.5,15.5)$	2	$[15.5,19.5)$	4	$[19.5,23.5)$	9	$[23.5,27.5)$	18
$[27.5,31.5)$	11	$[31.5,35.5)$	12	$[35.5,39.5)$	7	$[39.5,43.5)$	3

根据样本的频率分布估计, 大于或等于 31.5 的数据约占 （　）

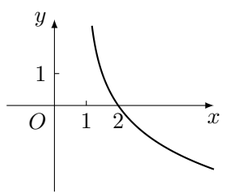
(A) $\dfrac{2}{11}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{2}{3}$

3. 圆 $x^2+y^2-4x+6y=0$ 的圆心坐标是 （　）

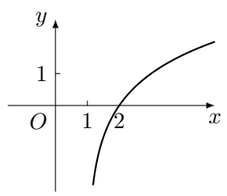
(A) $(2,3)$　　(B) $(-2,3)$　　(C) $(-2,-3)$　　(D) $(2,-3)$

4. 函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的图象大致是 （　）

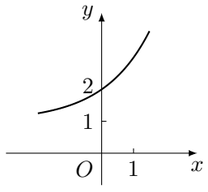
(A)



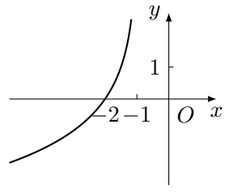
(B)



(C)



(D)



5. “$x=3$”是“$x^2=9$”的 （　）

(A) 充分而不必要的条件　　(B) 必要而不充分的条件

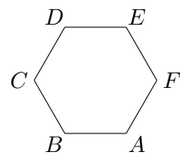
(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要的条件

6. l_1, l_2, l_3 是空间三条不同的直线, 则下列命题正确的是 （　）

(A) $l_1\perp l_2$, $l_2\perp l_3\Rightarrow l_1\parallel l_3$　　(B) $l_1\perp l_2$, $l_2\parallel l_3\Rightarrow l_1\perp l_3$

(C) $l_1\parallel l_2\parallel l_3\Rightarrow l_1$, l_2, l_3 共面　　(D) l_1, l_2, l_3 共点 $\Rightarrow$ l_1, l_2, l_3 共面

7. 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 中, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=$ （　）



(A) $\mathbf{0}$　　(B) $\overrightarrow{BE}$　　(C) $\overrightarrow{AD}$　　(D) $\overrightarrow{CF}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A\leqslant\sin^2 B+\sin^2 C-\sin B\sin C$, 则 A 的取值范围是（　）

(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right)$　　(C) $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$　　(D) $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$

9. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_1=1$, $a_{n+1}=3S_n$ $(n\geqslant 1)$, 则 $a_6=$（　）

(A) 3×4^4　　(B) $3\times 4^4+1$　　(C) 4^5　　(D) 4^5+1

10. 某运输公司有 12 名驾驶员和 19 名工人, 有 8 辆载重量为 10 吨的甲型卡车和 7 辆载重量为 6 吨的乙型卡车. 某天需运往 A 地至少 72 吨的货物, 派用的每辆车需载满且只运送一次, 派用的每辆甲型卡车需配 2 名工人, 运送一次可得利润 450 元; 派用的每辆乙型卡车需配 1 名工人, 运送一次可得利润 350 元, 该公司合理计划当天派用甲、乙卡车的车辆数, 可得最大利润 $z=$ （　）

(A) 4650 元　　(B) 4700 元　　(C) 4900 元　　(D) 5000 元

11. 在抛物线 $y=x^2+ax-5$ $(a\neq 0)$ 上取横坐标为 $x_1=-4$, $x_2=2$ 的两点, 经过两点引一条割线, 有平行于该割线的一条直线同时与抛物线和圆 $5x^2+5y^2=36$ 相切, 则抛物线顶点的坐标为 （　）

(A) $(-2,-9)$　　(B) $(0,-5)$　　(C) $(2,-9)$　　(D) $(1,-6)$

12. 在集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 中任取一个偶数 a 和一个奇数 b 构成以原点为起点的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b)$. 从所有得到的以原点为起点的向量中任取两个向量为邻边作平行四边形, 记所有作成的平行四边形的个数为 n, 其中面积等于 2 的平行四边形的个数为 m, 则 $\dfrac{m}{n}=$ （　）

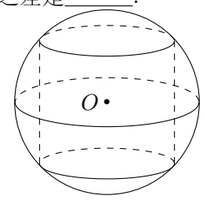
(A) $\dfrac{2}{15}$　　(B) $\dfrac{1}{5}$　　(C) $\dfrac{4}{15}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

二、填空题

13. $(x+1)^9$ 的展开式中 x^3 的系数是_____. (用数字作答)

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 4, 那么点 P 到左准线的距离是_____.

15. 如图, 半径为 4 的球 O 中有一内接圆柱. 当圆柱的侧面积最大时, 球的表面积与该圆柱的侧面积之差是_____.



16. 函数 $f(x)$ 的定义域为 A, 若 x_1, $x_2\in A$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$ 时总有 $x_1=x_2$, 则称 $f(x)$ 为单函数. 例如, 函数 $f(x)=2x+1$ $(x\in\mathbf{R})$ 是单函数. 下列命题:

① 函数 $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbf{R})$ 是单函数;

② 指数函数 $f(x)=2^x$ $(x\in\mathbf{R})$ 是单函数;

③ 若 $f(x)$ 为单函数, x_1, $x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$, 则 $f(x_1)\neq f(x_2)$;

④ 在定义域上具有单调性的函数一定是单函数.

其中的真命题是_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 本着健康、低碳的生活理念, 租自行车骑游的人越来越多. 某自行车租车点的收费标准是每车每次租车时间不超过两小时免费, 超过两小时的部分每小时收费 2 元 (不足 1 小时的部分按 1 小时计算). 有甲、乙两人相互独立来该租车点租车骑游 (各租一车一次). 设甲、乙不超过两小时还车的概率分别为 $\dfrac{1}{4}$、$\dfrac{1}{2}$; 两小时以上且不超过三小时还车的概率分别是 $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{4}$; 两人租车时间都不会超过四小时.

(1) 分别求出甲、乙在三小时以上且不超过四小时还车的概率;

(2) 求甲、乙两人所付的租车费用之和小于 6 元的概率.

18. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{7\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

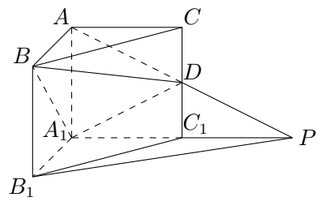
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和最小值;

(2) 已知 $\cos(\beta-\alpha)=\dfrac{4}{5}$, $\cos(\beta+\alpha)=-\dfrac{4}{5}$, $0<\alpha<\beta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, 求证: $[f(\beta)]^2-2=0$.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=AA_1=1$. 延长 A_1C_1 至点 P, 使 $C_1P=A_1C_1$, 连接 AP 交棱 CC_1 于点 D.

(1) 求证: $PB_1\parallel$ 平面 BDA_1;

(2) 求二面角 $A-A_1D-B$ 的平面角的余弦值.



20. 已知 $\{a_n\}$ 是以 a 为首项, q 为公比的等比数列, S_n 为它的前 n 项和.

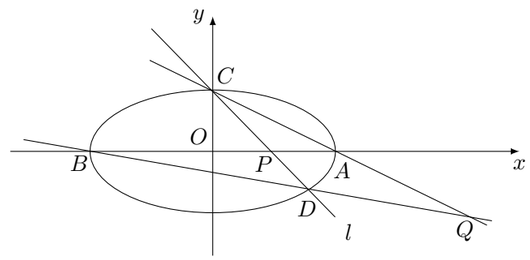
(1) 当 S_1, S_3, S_4 成等差数列时, 求 q 的值;

(2) 当 S_m, S_n, S_l 成等差数列时, 求证: 对任意自然数 k, a_{m+k}, a_{n+k}, a_{l+k} 也成等差数列.

21. 过点 $C(0,1)$ 的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆与 x 轴交于两点 $A(a,0)$, $B(-a,0)$, 过点 C 的直线 l 与椭圆交于另一点 D, 并与 x 轴交于点 P, 直线 AC 与直线 BD 交于点 Q.

(1) 当直线 l 过椭圆右焦点时, 求线段 CD 的长;

(2) 当点 P 异于点 B 时, 求证: $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值.



22. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}$, $h(x)=\sqrt{x}$.

(1) 设函数 $F(x)=18f(x)-x^2[h(x)]^2$, 求 $F(x)$ 的单调区间与极值;

(2) 设 $a\in\mathbf{R}$, 解关于 x 的方程 $\lg\left[\dfrac{3}{2}f(x-1)-\dfrac{3}{4}\right]=2\lg h(a-x)-2\lg h(4-x)$;

(3) 设 $n\in\mathbf{N}^*$, 证明: $f(n)h(n)-[h(1)+h(2)+\cdots+h(n)]\geqslant\dfrac{1}{6}$.

2011 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$ （　）

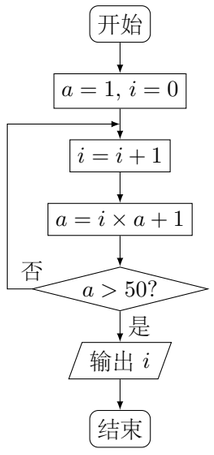
(A) $2+\mathrm{i}$　(B) $2-\mathrm{i}$　(C) $-1+2\mathrm{i}$　(D) $-1-2\mathrm{i}$

2. 设 $x, y\in\mathbf{R}$, 则“$x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 2$”是“$x^2+y^2\geqslant 4$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 阅读下面的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 i 的值为 （　）



(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

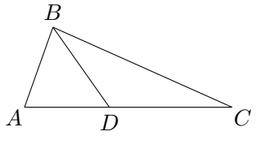
4. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其公差为 -2, 且 a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 S_{10} 的值为 （　）

(A) -110　(B) -90　(C) 90　(D) 110

5. 在 $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中, x^2 的系数为 （　）

(A) $-\dfrac{15}{4}$　(B) $\dfrac{15}{4}$　(C) $-\dfrac{3}{8}$　(D) $\dfrac{3}{8}$

6. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上的点, 且 $AB=AD$, $2AB=\sqrt{3}BD$, $BC=2BD$, 则 $\sin C$ 的值为 （　）



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

7. 已知 $a=5^{\log_2 3.4}$, $b=5^{\log_4 3.6}$, $c=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$, 则 （　）

(A) $a>b>c$　(B) $b>a>c$　(C) $a>c>b$　(D) $c>a>b$

8. 对实数 a 与 b, 定义运算“$\otimes$”: $a\otimes b=\begin{cases}a, & a-b\leqslant 1\\ b, & a-b>1\end{cases}$. 设函数 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-x^2)$, $x\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=f(x)-c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是 （　）

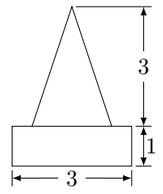
(A) $(-\infty,-2]\cup\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$　(B) $(-\infty,-2]\cup\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right)$

(C) $\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　(D) $\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right)\cup\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

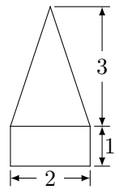
二、填空题

9. 一支田径队有男运动员 48 人, 女运动员 36 人, 若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本, 则抽取男运动员的人数为_____.

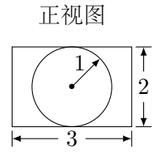
10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则这个几何体的体积为_____m^3.



正视图



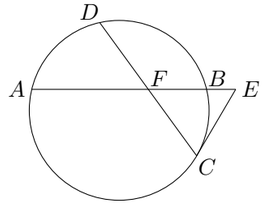
侧视图



俯视图

11. 已知抛物线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=8t^2\\ y=8t\end{cases}$ (t 为参数), 若斜率为 1 的直线经过抛物线 C 的焦点, 且与圆 $(x-4)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相切, 则 $r=$_____.

12. 如图, 已知圆中两条弦 AB 与 CD 相交于点 F, E 是 AB 延长线上一点, 且 $DF=CF=\sqrt{2}$, $AF:FB:BE=4:2:1$. 若 CE 与圆相切, 则 CE 的长为_____.



13. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x+3|+|x-4|\leqslant 9\}$, $B=\left\{x\in\mathbf{R}\,|\,x=4t+\dfrac{1}{t}-6, t\in(0,+\infty)\right\}$, 则集合 $A\cap B=$_____.

14. 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AD/\!/BC$, $\angle ADC=90^\circ$, $AD=2$, $BC=1$, P 是腰 DC 上的动点, 则 $\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|$ 的最小值为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期;

(2) 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, 若 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\cos 2\alpha$, 求 α 的大小.

16. 学校游园活动有这样一个游戏项目: 甲箱子里装有 3 个白球、2 个黑球, 乙箱子里装有 1 个白球、2 个黑球, 这些球除颜色外完全相同, 每次游戏从这两个箱子里各随机摸出 2 个球, 若摸出的白球不少于 2 个, 则获奖. (每次游戏结束后将球放回原箱)

(1) 求在一次游戏中,

① 摸出 3 个白球的概率;

② 获奖的概率;

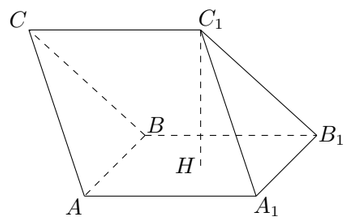
(2) 求在两次中获奖次数 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, H 是正方形 AA_1B_1B 的中心, $AA_1=2\sqrt{2}$, $C_1H\perp$ 平面 AA_1B_1B, 且 $C_1H=\sqrt{5}$.

(1) 求异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值;

(2) 求二面角 $A-A_1C_1-B_1$ 的正弦值;

(3) 设 N 为棱 B_1C_1 的中点, 点 M 在平面 AA_1B_1B 内, 且 $MN\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, 求线段 BM 的长.



18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(a,b)$ $(a>b>0)$ 为动点, F_1, F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点. 已知 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形.

(1) 求椭圆的离心率 e;

(2) 设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点, M 是直线 PF_2 上的点, 满足 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=-2$, 求点 M 的轨迹方程.

19. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\ln x-ax^2$, $x>0$. ($f(x)$ 的图象连续不断)

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a=\dfrac{1}{8}$ 时, 证明: 存在 $x_0\in(2,+\infty)$, 使 $f(x_0)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$;

(3) 若存在均属于区间 $[1,3]$ 的 α, β, 且 $\beta-\alpha\geqslant 1$, 使 $f(\alpha)=f(\beta)$, 证明: $\dfrac{\ln 3-\ln 2}{5}\leqslant a\leqslant\dfrac{\ln 2}{3}$.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足: $b_na_n+a_{n+1}+b_{n+1}a_{n+2}=0$, $b_n=\dfrac{3+(-1)^n}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $a_1=2$, $a_2=4$.

(1) 求 a_3, a_4, a_5 的值;

(2) 设 $c_n=a_{2n-1}+a_{2n+1}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明: $\{c_n\}$ 是等比数列;

(3) 设 $S_k=a_2+a_4+\cdots+a_{2k}$, $k\in\mathbf{N}^*$, 证明: $\sum\limits_{k=1}^{4n}\dfrac{S_k}{a_k}<\dfrac{7}{6}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2011 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

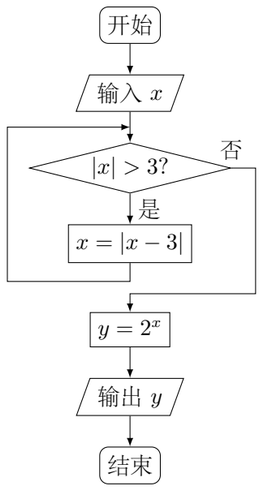
1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $2-\mathrm{i}$　(B) $2+\mathrm{i}$　(C) $-1-2\mathrm{i}$　(D) $-1+2\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x+y-4 \leqslant 0 \\ x-3y+4 \leqslant 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z=3x-y$ 的最大值为 （　）

(A) -4　(B) 0　(C) $\dfrac{4}{3}$　(D) 4

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入 x 的值为 -4, 则输出 y 的值为（　）



(A) 0.5　(B) 1　(C) 2　(D) 4

4. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x-2>0\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x<0\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x(x-2)>0\}$, 则“$x\in A\cup B$”是“$x\in C$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $a=\log_2 3.6$, $b=\log_4 3.2$, $c=\log_4 3.6$, 则 （　）

(A) $a>b>c$　(B) $a>c>b$　(C) $b>a>c$　(D) $c>a>b$

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左顶点与抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点的距离为 4, 且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2,-1)$, 则双曲线的焦距为 （　）

(A) $2\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{5}$　(C) $4\sqrt{3}$　(D) $4\sqrt{5}$

7. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $\omega>0$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 6π, 且当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 则 （　）

(A) $f(x)$ 在区间 $[-2\pi,0]$ 上是增函数

(B) $f(x)$ 在区间 $[-3\pi,-\pi]$ 上是增函数

(C) $f(x)$ 在区间 $[3\pi,5\pi]$ 上是减函数

(D) $f(x)$ 在区间 $[4\pi,6\pi]$ 上是减函数

8. 对实数 a 和 b, 定义运算“$\otimes$”: $a\otimes b=\begin{cases} a, & a-b\leqslant 1 \\ b, & a-b>1 \end{cases}$. 设函数 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-1)$, $x\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=f(x)-c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是 （　）

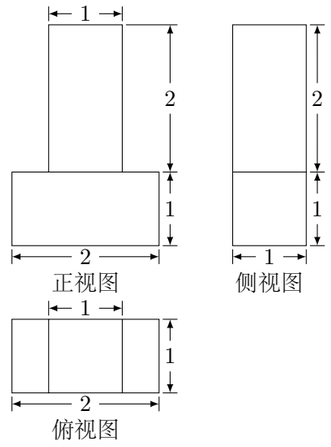
(A) $(-1,1]\cup(2,+\infty)$　(B) $(-2,-1]\cup(1,2]$

(C) $(-\infty,-2)\cup(1,2]$　(D) $[-2,-1]$

二、填空题

9. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-1|<2\}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, 则集合 $A\cap\mathbf{Z}$ 中所有元素的和等于_____.

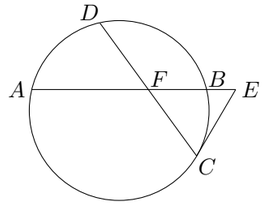
10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则这个几何体的体积为_____m^3.



11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, $n\in\mathbf{N}^*$. 若 $a_3=16$, $S_{20}=20$, 则 S_{10} 的值为_____.

12. 已知 $\log_2 a+\log_2 b\geqslant 1$, 则 3^a+9^b 的最小值为_____.

13. 如图, 已知圆中两条弦 AB 与 CD 相交于点 F, E 是 AB 延长线上一点, 且 $DF=CF=\sqrt{2}$, $AF:FB:BE=4:2:1$. 若 CE 与圆相切, 则 CE 的长为_____.



14. 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AD/\!/BC$, $\angle ADC=90^\circ$, $AD=2$, $BC=1$, P 是腰 DC 上的动点, 则 $\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|$ 的最小值为_____.

三、解答题

15. 编号分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_{16}$ 名篮球运动员在某次训练比赛中的得分记录如下:

运动员编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
得分	15	35	21	28	25	36	18	34
运动员编号	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
得分	17	26	25	33	22	12	31	38

(1) 将得分在对应区间内的人数填入相应的空格;

区间	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40]$
人数			

(2) 从得分在区间 $[20,30)$ 内的运动员中随机抽取 2 人,

① 用运动员编号列出所有可能的抽取结果;

② 求这 2 人得分之和大于 50 的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $B=C$, $2b=\sqrt{3}a$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

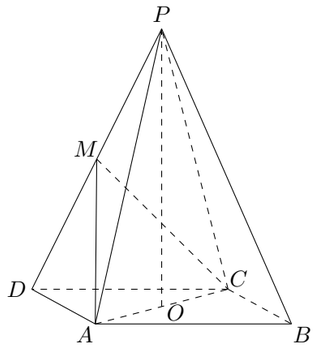
(2) $\cos\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle ADC=45^\circ$, $AD=AC=1$, O 为 AC 中点, $PO\perp$ 平面 $ABCD$, $PO=2$, M 为 PD 中点.

(1) 证明: $PB\parallel$ 平面 ACM;

(2) 证明: $AD\perp$ 平面 PAC;

(3) 求直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2. 点 $P(a,b)$ 满足 $|PF_2|=|F_1F_2|$.

(1) 求椭圆的离心率 e;

(2) 设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点, 若直线 PF_2 与圆 $(x+1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=16$ 相交于 M, N 两点, 且 $|MN|=\dfrac{5}{8}|AB|$, 求椭圆的方程.

19. 已知函数 $f(x)=4x^3+3tx^2-6t^2x+t-1$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $t\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $t=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 当 $t\neq 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 证明: 对任意的 $t\in(0,+\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内均存在零点.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足: $b_{n+1}a_n+b_na_{n+1}=(-2)^n+1$, $b_n=\dfrac{3+(-1)^{n-1}}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $a_1=2$.

(1) 求 a_2, a_3 的值;

(2) 设 $c_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明: 数列 $\{c_n\}$ 是等比数列;

(3) 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明 $\dfrac{S_1}{a_1}+\dfrac{S_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}}+\dfrac{S_{2n}}{a_{2n}}\leqslant n-\dfrac{1}{3}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2011 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

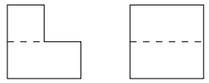
1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$. 若 $f(\alpha)=4$, 则实数 $\alpha=$ （　）

(A) -4 或 -2　(B) -4 或 2　(C) -2 或 4　(D) -2 或 2

2. 把复数 z 的共轭复数记作 $\overline{z}$, i 为虚数单位, 若 $z=1+\mathrm{i}$, 则 $(1+z)\cdot\overline{z}=$（　）

(A) $3-\mathrm{i}$　(B) $3+\mathrm{i}$　(C) $1+3\mathrm{i}$　(D) 3

3. 若某几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的直观图可以是 （　）



正视图

侧视图



俯视图

(A) 　(B) 　(C) 　(D)

4. 下列命题中错误的是 （　）

(A) 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β, 那么平面 α 内一定存在直线平行于平面 β

(B) 如果平面 α 不垂直于平面 β, 那么平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β

(C) 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 γ, 平面 $\beta\perp$ 平面 γ, $\alpha\cap\beta=l$, 那么 $l\perp$ 平面 γ

(D) 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β, 那么平面 α 内所有直线都垂直于平面 β

5. 设实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases}x+2y-5>0\\ 2x+y-7>0\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$. 若 x, y 为整数, 则 $3x+4y$ 的最小值是 （　）

(A) 14　(B) 16　(C) 17　(D) 19

6. 若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1}{3}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)=$ （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$　(D) $-\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

7. 若 a, b 为实数, 则“$0<ab<1$”是“$a<\dfrac{1}{b}$ 或 $b>\dfrac{1}{a}$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

8. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 与双曲线 C_2: $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 有公共的焦点, C_2 的一条渐近线与以 C_1 的长轴为直径的圆相交于 A, B 两点. 若 C_1 恰好将线段 AB 三等分, 则 （　）

(A) $a^2=\dfrac{13}{2}$　(B) $a^2=13$　(C) $b^2=\dfrac{1}{2}$　(D) $b^2=2$

9. 有 5 本不同的书, 其中语文书 2 本, 数学书 2 本, 物理书 1 本. 若将其随机地抽取并排摆放在书架的同一层上, 则同一科目的书都不相邻的概率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

10. 设 a, b, c 为实数, $f(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$, $g(x)=(ax+1)(cx^2+bx+1)$. 记集合 $S=\{x\mid f(x)=0, x\in\mathbf{R}\}$, $T=\{x\mid g(x)=0, x\in\mathbf{R}\}$, 若 $|S|$, $|T|$ 分别为集合 S, T 的元素个数, 则下列结论不可能的是 （　）

(A) $|S|=1$ 且 $|T|=0$　(B) $|S|=1$ 且 $|T|=1$

(C) $|S|=2$ 且 $|T|=2$　(D) $|S|=2$ 且 $|T|=3$

二、填空题

11. 若函数 $f(x)=x^2-|x+a|$ 为偶函数, 则实数 $a=$_____.

12. 某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的 k 的值是_____.

13. 设二项式 $\left(x-\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^6$ $(a>0)$ 的展开式中 x^3 的系数为 A, 常数项为 B. 若 $B=4A$, 则 a 的值是_____.

14. 若平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}|=1$, $|\boldsymbol{\beta}|\leqslant 1$, 且以向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $\dfrac{1}{2}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 的取值范围是_____.

15. 某毕业生参加人才招聘会, 分别向甲、乙、丙三个公司投递了个人简历, 假定该毕业生得到甲公司面试的概率为 $\dfrac{2}{3}$, 得到乙、丙公司面试的概率均为 p, 且三个公司是否让其面试是相互独立的. 记 X 为该毕业生得到面试的公司个数. 若 $P(X=0)=\dfrac{1}{12}$, 则随机变量 X 的数学期望 $E(X)=$_____.

16. 设 x, y 为实数, 若 $4x^2+y^2+xy=1$, 则 $2x+y$ 的最大值是_____.

17. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 的焦点, 点 A, B 在椭圆上. 若 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$, 则点 A 的坐标是_____.

三、解答题

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $\sin A+\sin C=p\sin B$ $(p\in\mathbf{R})$, 且 $ac=\dfrac{1}{4}b^2$.

(1) 当 $p=\dfrac{5}{4}$, $b=1$ 时, 求 a, c 的值;

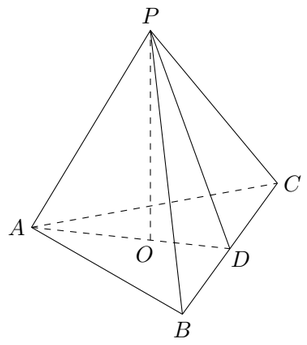
(2) 若角 B 为锐角, 求 p 的取值范围.

19. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 为 a $(a\in\mathbf{R})$. 设数列的前 n 项和为 S_n, 且 $\dfrac{1}{a_1}$, $\dfrac{1}{a_2}$, $\dfrac{1}{a_4}$ 成等比数列.

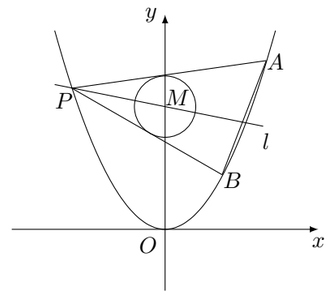
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n;

(2) 记 $A_n=\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}$, $B_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_{2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2^{n-1}}}$. 当 $n\geqslant 2$ 时, 试比较 A_n 与 B_n 的大小.

20. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=AC$, D 为 BC 的中点, $PO\perp$ 平面 ABC, 垂足 O 落在线段 AD 上, 已知 $BC=8$, $PO=4$, $AO=3$, $OD=2$.
(1) 证明: $AP\perp BC$;
(2) 在线段 AP 上是否存在点 M, 使得二面角 $A-MC-B$ 为直二面角? 若存在, 求出 AM 的长; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知抛物线 C_1: $x^2=y$, 圆 C_2: $x^2+(y-4)^2=1$ 的圆心为点 M.
(1) 求点 M 到抛物线 C_1 的准线的距离;
(2) 已知点 P 是抛物线 C_1 上一点 (异于原点), 过点 P 作圆 C_2 的两条切线, 交抛物线 C_1 于 A, B 两点, 若过 M, P 两点的直线 l 垂直于 AB, 求直线 l 的方程.



22. 设函数 $f(x)=(x-a)^2\ln x$, $a\in\mathbf{R}$.
(1) 若 $x=\mathrm{e}$ 为 $y=f(x)$ 的极值点, 求实数 a;
(2) 求实数 a 的取值范围, 使得对任意的 $x\in(0,3\mathrm{e}]$, 恒有 $f(x)\leqslant 4\mathrm{e}^2$ 成立.
注: e 为自然对数的底数.

2011 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

1. 若 $P=\{x\,|\,x<1\}$, $Q=\{x\,|\,x>-1\}$, 则 （　）

(A) $P\subseteq Q$　　(B) $Q\subseteq P$　　(C) $\complement_{\mathbf{R}}P\subseteq Q$　　(D) $Q\subseteq\complement_{\mathbf{R}}P$

2. 若复数 $z=1+\mathrm{i}$, i 为虚数单位, 则 $(1+z)\cdot z=$ （　）

(A) $1+3\mathrm{i}$　　(B) $3+3\mathrm{i}$　　(C) $3-\mathrm{i}$　　(D) 3

3. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0\\2x+y-7\geqslant 0\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $3x+4y$ 的最小值是（　）

(A) 13　　(B) 15　　(C) 20　　(D) 28

4. 若直线 l 不平行于平面 α, 且 $l\not\subset\alpha$, 则 （　）

(A) α 内的所有直线与 l 异面　　(B) α 内不存在与 l 平行的直线

(C) α 内存在唯一的直线与 l 平行　　(D) α 内的直线与 l 都相交

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若 $a\cos A=b\sin B$, 则 $\sin A\cos A+\cos^2 B=$ （　）

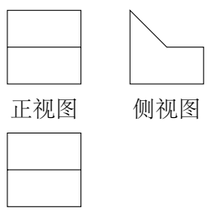
(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) -1　　(D) 1

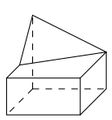
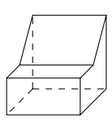
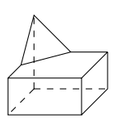
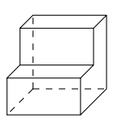
6. 若 a, b 为实数, 则“$0<ab<1$”是“$b<\dfrac{1}{a}$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 若某几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的直观图可以是 （　）



(A)  　(B)  　(C)  　(D) 

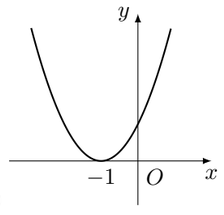
8. 从装有 3 个红球、2 个白球的袋中任取 3 个球, 则所取的 3 个球中至少有 1 个白球的概率是 （　）

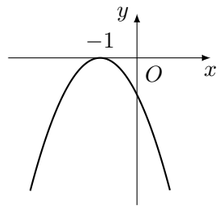
(A) $\dfrac{1}{10}$　　(B) $\dfrac{3}{10}$　　(C) $\dfrac{3}{5}$　　(D) $\dfrac{9}{10}$

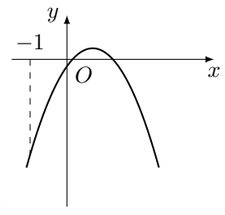
9. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 与双曲线 C_2: $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 有公共的焦点, C_2 的一条渐近线与以 C_1 的长轴为直径的圆相交于 A, B 两点. 若 C_1 恰好将线段 AB 三等分, 则 （　）

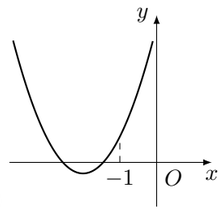
(A) $a^2=\dfrac{13}{2}$　　(B) $a^2=13$　　(C) $b^2=\dfrac{1}{2}$　　(D) $b^2=2$

10. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a,\ b,\ c\in\mathbf{R})$. 若 $x=-1$ 为函数 $y=f(x)\mathrm{e}^x$ 的一个极值点, 则下列图象不可能为 $y=f(x)$ 图象的是 （　）

(A) 

(B) 

(C) 

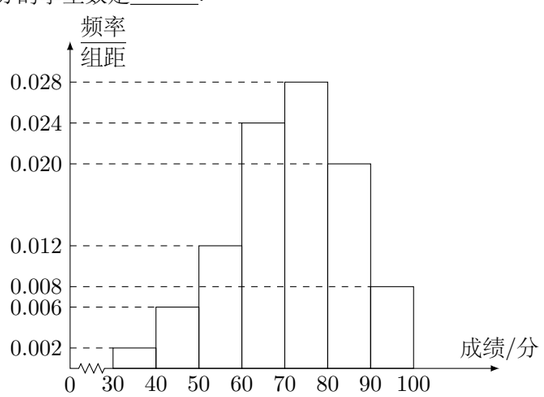
(D) 

二、填空题

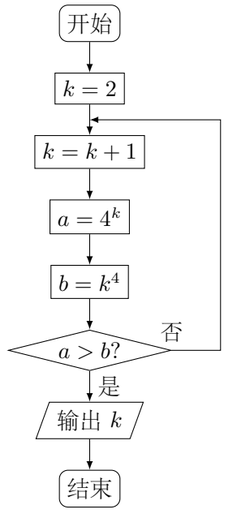
11. 设函数 $f(x)=\dfrac{4}{1-x}$. 若 $f(a)=2$, 则实数 $a=$_____.

12. 若直线 $x-2y+5=0$ 与直线 $2x+my-6=0$ 互相垂直, 则实数 $m=$_____.

13. 某小学为了解学生数学课程的学习情况, 在 3000 名学生中随机抽取 200 名, 并统计这 200 名学生的某次数学考试成绩, 得到了样本的频率分布直方图 (如图). 根据频率分布直方图, 3000 名学生在该次数学考试中成绩小于 60 分的学生数是_____.



14. 某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的 k 的值是_____.



15. 若平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}|=1$, $|\boldsymbol{\beta}|\leqslant 1$, 且以向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $\dfrac{1}{2}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 的取值范围是_____.

16. 若实数 x, y 满足 $x^2+y^2+xy=1$, 则 $x+y$ 的最大值是_____.

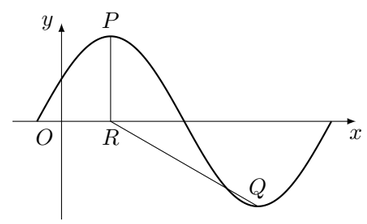
17. 若数列 $\left\{n(n+4)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ 中的最大项是第 k 项, 则 $k=$_____.

三、解答题

18. 已知函数 $f(x)=A\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\varphi\right)$, $x\in\mathbf{R}$, $A>0$, $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$. $y=f(x)$ 的部分图象如图所示, P, Q 分别为该图象的最高点和最低点, 点 P 的坐标为 $(1,A)$.

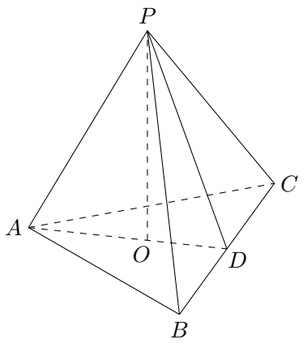
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及 φ 的值;

(2) 若点 R 的坐标为 $(1,0)$, $\angle PRQ=\dfrac{2\pi}{3}$, 求 A 的值.



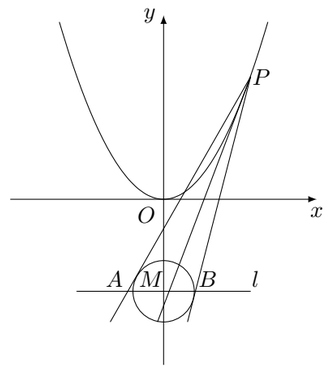
19. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 为 a ($a \in \mathbf{R}$), 且 $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_4}$ 成等比数列.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 对 $n \in \mathbf{N}^*$, 试比较 $\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_{2^2}}+\dfrac{1}{a_{2^3}}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2^n}}$ 与 $\dfrac{1}{a_1}$ 的大小.

20. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=AC$, D 为 BC 的中点, $PO \perp$ 平面 ABC, 垂足 O 落在线段 AD 上.
(1) 证明: $AP \perp BC$;
(2) 已知 $BC=8$, $PO=4$, $AO=3$, $OD=2$. 求二面角 $B-AP-C$ 的大小.



21. 设函数 $f(x)=a^2\ln x-x^2+ax$, $a>0$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 求所有实数 a, 使 $\mathrm{e}-1 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^2$ 对 $x \in [1,\mathrm{e}]$ 恒成立.
注: e 为自然对数的底数.

22. 如图, 设 P 为抛物线 C_1: $x^2=y$ 上的动点, 过点 P 做圆 C_2: $x^2+(y+3)^2=1$ 的两条切线, 交直线 $l: y=-3$ 于 A, B 两点.
(1) 求 C_2 的圆心 M 到抛物线 C_1 准线的距离.
(2) 是否存在点 P, 使线段 AB 被抛物线 C_1 在点 P 处的切线平分, 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2012 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

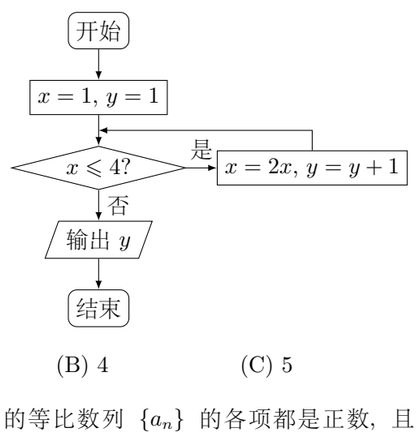
1. 复数 z 满足 $(z-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$, 则 $z=$ （　）

(A) $-2-2\mathrm{i}$　(B) $-2+2\mathrm{i}$　(C) $2-2\mathrm{i}$　(D) $2+2\mathrm{i}$

2. 下列函数中, 不满足 $f(2x)=2f(x)$ 的是 （　）

(A) $f(x)=|x|$　(B) $f(x)=x-|x|$(C) $f(x)=x+1$ (D) $f(x)=-x$

3. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是 （　）

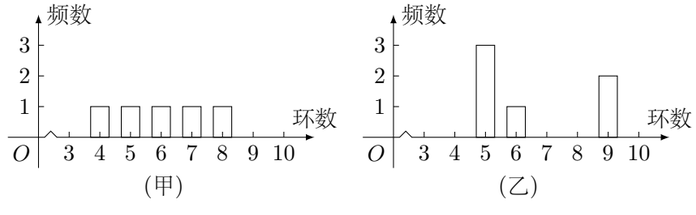


(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 8

4. 公比为 $\sqrt[3]{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且 $a_3a_{11}=16$, 则 $\log_2 a_{16}=$ （　）

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

5. 甲、乙两人在一次射击比赛中各射靶 5 次, 两人成绩的条形统计图如图所示, 则 （　）



(A) 甲的成绩的平均数小于乙的成绩的平均数

(B) 甲的成绩的中位数等于乙的成绩的中位数

(C) 甲的成绩的方差小于乙的成绩的方差

(D) 甲的成绩的极差小于乙的成绩的极差

6. 设平面 α 与平面 β 相交于直线 m, 直线 a 在平面 α 内, 直线 b 在平面 β 内, 且 $b\perp m$, 则“$\alpha\perp\beta$”是“$a\perp b$”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. $(x^2+2)\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)^5$ 的展开式的常数项是 （　）

(A) -3　(B) -2　(C) 2　(D) 3

8. 在平面直角坐标系中, 点 $O(0,0)$, $P(6,8)$, 将向量 $\overrightarrow{OP}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 $\dfrac{3\pi}{4}$ 后得向量 $\overrightarrow{OQ}$, 则点 Q 的坐标是 （　）

(A) $(-7\sqrt{2},-\sqrt{2})$ (B) $(-7\sqrt{2},\sqrt{2})$　(C) $(-4\sqrt{6},-2)$　(D) $(-4\sqrt{6},2)$

9. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若 $|AF|=3$, 则 $\triangle AOB$ 的面积为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(D) $2\sqrt{2}$

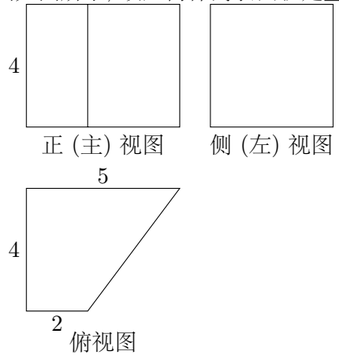
10. 6 位同学在毕业聚会活动中进行纪念品的交换, 任意两位同学之间最多交换一次, 进行交换的两位同学互赠一份纪念品. 已知 6 位同学之间共进行了 13 次交换, 则收到 4 份纪念品的同学人数为 （　）

(A) 1 或 3　(B) 1 或 4　(C) 2 或 3　(D) 2 或 4

二、填空题

11. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+2y\geqslant 3\\ 2x+y\leqslant 3\end{cases}$, 则 $x-y$ 的取值范围是_____.

12. 某几何体的三视图如图所示, 该几何体的表面积是_____.



13. 在极坐标系中, 圆 $\rho=4\sin\theta$ 的圆心到直线 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ $(\rho\in\mathbf{R})$ 的距离是_____.

14. 若平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 3$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值是_____.

15. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c, 则下列命题正确的是_____. (写出所有正确命题的编号)

① 若 $ab>c^2$, 则 $C<\dfrac{\pi}{3}$;

② 若 $a+b>2c$, 则 $C<\dfrac{\pi}{3}$;

③ 若 $a^3+b^3=c^3$, 则 $C<\dfrac{\pi}{2}$;

④ 若 $(a+b)c<2ab$, 则 $C>\dfrac{\pi}{2}$;

⑤ 若 $(a^2+b^2)c^2<2a^2b^2$, 则 $C>\dfrac{\pi}{3}$.

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin^2 x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 设函数 $g(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $g\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=g(x)$, 且当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时, $g(x)=\dfrac{1}{2}-f(x)$. 求 $g(x)$ 在区间 $[-\pi,0]$ 上的解析式.

17. 某单位招聘面试, 每次从试题库中随机调用一道试题. 若调用的是 A 类型试题, 则使用后该试题回库, 并增补一道 A 类型试题和一道 B 类型试题入库, 此次调题工作结束; 若调用的是 B 类型试题, 则使用后该试题回库, 此次调题工作结束. 试题库中现共有 $n+m$ 道试题, 其中有 n 道 A 类型试题和 m 道 B 类型试题. 以 X 表示两次调题工作完成后, 试题库中 A 类试题的数量.

(1) 求 $X=n+2$ 的概率;

(2) 设 $m=n$, 求 X 的分布列和均值 (数学期望).

18. 平面图形 $ABB_1A_1C_1C$ 如图 1 所示, 其中 BB_1C_1C 是矩形, $BC=2$, $BB_1=4$, $AB=AC=\sqrt{2}$, $A_1B_1=A_1C_1=\sqrt{5}$. 现将该平面图形分别沿 BC 和 B_1C_1 折叠, 使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 所在平面都与平面 BB_1C_1C 垂直, 再分别连接 A_1A, A_1B, A_1C, 得到如图 2 所示的空间图形, 对此空间图形解答下列问题.

(1) 证明: $AA_1\perp BC$;

(2) 求 AA_1 的长;

(3) 求二面角 $A-BC-A_1$ 的余弦值.

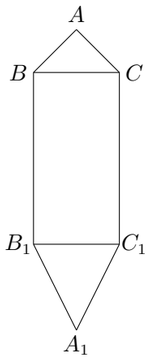


图 1

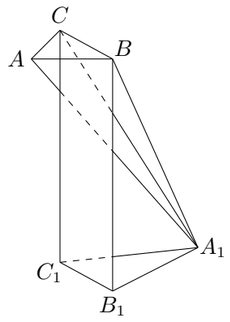


图 2

19. 设函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{a\mathrm{e}^x}+b$ $(a>0)$.

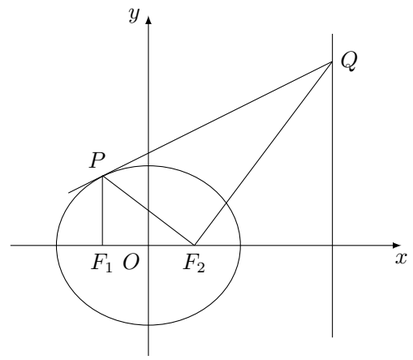
(1) 求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内的最小值;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x$, 求 a, b 的值.

20. 如图, 点 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ 分别是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆 C 的上半部分于点 P, 过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线交直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 于点 Q.

(1) 如果点 Q 的坐标是 $(4,4)$, 求此时椭圆 C 的方程;

(2) 证明: 直线 PQ 与椭圆 C 只有一个交点.



21. 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=0$, $x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明: $\{x_n\}$ 是递减数列的充分必要条件是 $c<0$;

(2) 求 c 的取值范围, 使 $\{x_n\}$ 是递增数列.

2012 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

1. 复数 z 满足 $(z-\mathrm{i})\,\mathrm{i}=2+\mathrm{i}$, 则 $z=$ （　）

(A) $-1-\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $-1+3\mathrm{i}$　(D) $1-2\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x\,|\,-3\leqslant 2x-1\leqslant 3\}$, 集合 B 为函数 $y=\lg(x-1)$ 的定义域, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $(1,2)$　(B) $[1,2]$　(C) $[1,2)$　(D) $(1,2]$

3. $\log_2 9\cdot\log_3 4=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 2　(D) 4

4. 命题“存在实数 x, 使 $x>1$”的否定是 （　）

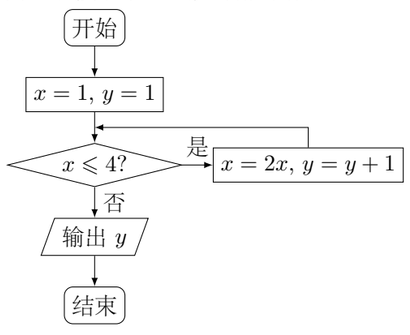
(A) 对任意实数 x, 都有 $x>1$　(B) 不存在实数 x, 使 $x\leqslant 1$

(C) 对任意实数 x, 都有 $x\leqslant 1$　(D) 存在实数 x, 使 $x\leqslant 1$

5. 公比为 2 的等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且 $a_3a_{11}=16$, 则 $a_5=$

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8

6. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是 （　）



(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 8

7. 要得到函数 $y=\cos(2x+1)$ 的图象, 只要将函数 $y=\cos 2x$ 的图象 （　）

(A) 向左平移 1 个单位　(B) 向右平移 1 个单位

(C) 向左平移 $\dfrac{1}{2}$ 个单位　(D) 向右平移 $\dfrac{1}{2}$ 个单位

8. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+2y\geqslant 3\\ 2x+y\leqslant 3\end{cases}$, 则 $z=x-y$ 的最小值是 （　）

(A) -3　(B) 0　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) 3

9. 若直线 $x-y+1=0$ 与圆 $(x-a)^2+y^2=2$ 有公共点, 则实数 a 的取值范围是 （　）

(A) $[-3,-1]$　(B) $[-1,3]$

(C) $[-3,1]$　(D) $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

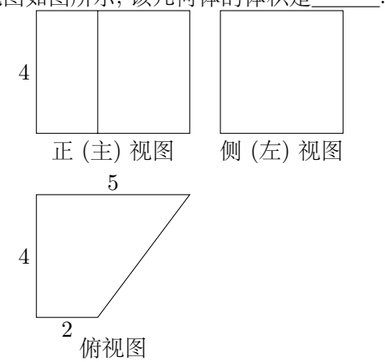
10. 袋中共有 6 个除了颜色外完全相同的球, 其中有 1 个红球、2 个白球和 3 个黑球. 从袋中任取两球, 两球颜色为一白一黑的概率等于 （　）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

二、填空题

11. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2m)$, $\boldsymbol{b}=(m+1,1)$, $\boldsymbol{c}=(2,m)$, 若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}|=$_____.

12. 某几何体的三视图如图所示, 该几何体的体积是_____.



13. 若函数 $f(x)=|2x+a|$ 的单调递增区间是 $[3,+\infty)$, 则 $a=$_____.

14. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A,B 两点, 若 $|AF|=3$, 则 $|BF|=$_____.

15. 若四面体 $ABCD$ 的三组对棱分别相等, 即 $AB=CD$, $AC=BD$, $AD=BC$, 则_____. (写出所有正确结论编号)

① 四面体 $ABCD$ 每组对棱相互垂直;

② 四面体 $ABCD$ 每个面的面积相等;

③ 从四面体 $ABCD$ 每个顶点出发的三条棱两两夹角之和大于 90° 而小于 180°;

④ 连接四面体 $ABCD$ 每组对棱中点的线段相互垂直平分;

⑤ 从四面体 $ABCD$ 每个顶点出发的三条棱的长可作为一个三角形的三边长.

三、解答题

16. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边为 a, b, c, 且有 $2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $b=2$, $c=1$, D 为 BC 的中点, 求 AD 的长.

17. 设定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=ax+\dfrac{1}{ax}+b$ $(a>0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x$, 求 a, b 的值.

18. 若某产品的直径长与标准值的差的绝对值不超过 1 mm 时, 则视为合格品, 否则视为不合格品. 在近期一次产品抽样检查中, 从某厂生产的此种产品中, 随机抽取 5000 件进行检测, 结果发现有 50 件不合格品. 计算这 50 件不合格品的直径长与标准值的差 (单位: mm), 将所得数据分组, 得到如下频率分布表:

分组	频数	频率
$[-3,-2)$		0.10
$[-2,-1)$	8	
$(1,2]$		0.50
$(2,3]$	10	
$(3,4]$		
合计	50	1.00

(1) 将上面表格中缺少的数据填在答题卡的相应位置;

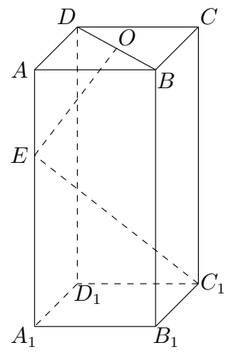
(2) 估计该厂生产的此种产品中, 不合格品的直径长与标准值的差落在区间 $(1,3]$ 内的概率;

(3) 现对该厂这种产品的某个批次进行检查, 结果发现有 20 件不合格品. 据此估算这批产品中的合格品的件数.

19. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形, O 是 BD 的中点, E 是棱 AA_1 上任意一点.

(1) 证明: $BD\perp EC_1$;

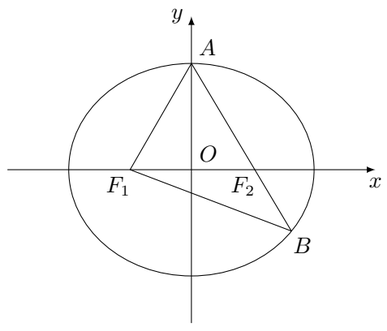
(2) 如果 $AB=2$, $AE=\sqrt{2}$, $OE\perp EC_1$, 求 AA_1 的长.



20. 如图, F_1, F_2 分别是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, A 是椭圆 C 的顶点, B 是直线 AF_2 与椭圆 C 的另一个交点, $\angle F_1AF_2=60^\circ$.

(1) 求椭圆 C 的离心率;

(2) 已知 $\triangle AF_1B$ 面积为 $40\sqrt{3}$, 求 a, b 的值.



21. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}+\sin x$ 的所有正的极小值点从小到大排成的数列为 $\{x_n\}$.

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{x_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 求 $\sin S_n$.

2012 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,3x+2>0\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,(x+1)(x-3)>0\}$, 则 $A\bigcap B=$ （ ）

(A) $(-\infty,-1)$　(B) $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$　(C) $\left(-\frac{2}{3},3\right)$　(D) $(3,+\infty)$

2. 设不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域为 D. 在区域 D 内随机取一个点, 则此点到坐标原点的距离大于 2 的概率是 （ ）

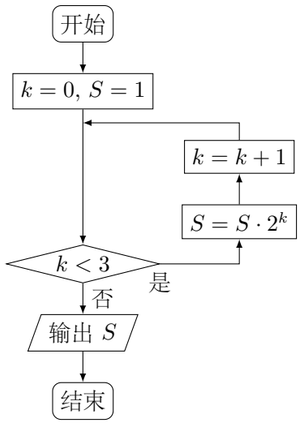
(A) $\frac{\pi}{4}$　(B) $\frac{\pi-2}{2}$　(C) $\frac{\pi}{6}$　(D) $\frac{4-\pi}{4}$

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$. "$a=0$"是"复数 $a+b\mathrm{i}$ 是纯虚数"的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

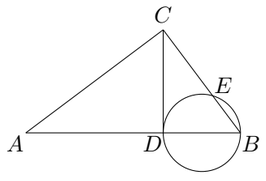
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 （ ）



(A) 2　(B) 4　(C) 8　(D) 16

5. 如图, $\angle ACB=90^\circ$, $CD\perp AB$ 于点 D, 以 BD 为直径的圆与 BC 交于点 E, 则 （ ）



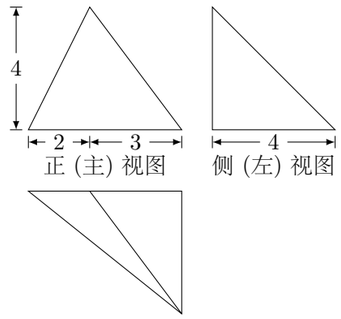
(A) $CE\cdot CB=AD\cdot DB$　(B) $CE\cdot CB=AD\cdot AB$

(C) $AD\cdot AB=CD^2$　(D) $CE\cdot EB=CD^2$

6. 从 0, 2 中选一个数字, 从 1, 3, 5 中选两个数字, 组成无重复数字的三位数, 其中奇数的个数为 （ ）

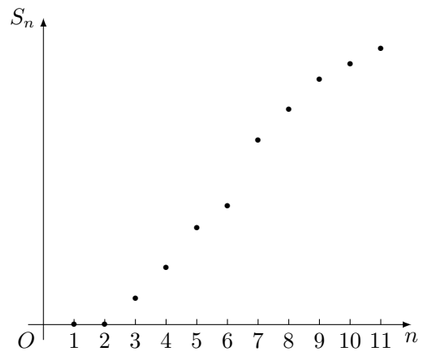
(A) 24　(B) 18　(C) 12　(D) 6

7. 某三棱锥的三视图如图所示, 该三棱锥的表面积是 （ ）



(A) $28+6\sqrt{5}$　(B) $30+6\sqrt{5}$　(C) $56+12\sqrt{5}$　(D) $60+12\sqrt{5}$

8. 某棵果树前 n 年的总产量 S_n 与 n 之间的关系如图所示. 从目前记录的结果看, 前 m 年的年平均产量最高, m 的值为 （ ）



(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 11

二、填空题

9. 直线 $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-t\end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 $\begin{cases}x=3\cos\alpha\\y=3\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数) 的交点个数为_____.

10. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_1=\frac{1}{2}$, $S_2=a_3$, 则 $a_2=$_____; $S_n=$_____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=2$, $b+c=7$, $\cos B=-\frac{1}{4}$, 则 $b=$_____.

12. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F, 且与该抛物线相交于 A, B 两点, 其中点 A 在 x 轴上方. 若直线 l 的倾斜角为 60°, 则 $\triangle OAF$ 的面积为_____.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 是 AB 边上的动点, 则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的值为_____; $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最大值为_____.

14. 已知 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$, $g(x)=2^x-2$. 若同时满足条件: ① $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)<0$ 或 $g(x)<0$; ② $\exists x\in(-\infty,-4)$, $f(x)g(x)<0$, 则 m 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\frac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域及最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

16. 如图 1, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=3$, $AC=6$. D, E 分别是 AC, AB 上的点, 且 $DE\parallel BC$, $DE=2$, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置, 使 $A_1C\perp CD$, 如图 2.

(1) 求证: $A_1C\perp$ 平面 $BCDE$;

(2) 若 M 是 A_1D 的中点, 求 CM 与平面 A_1BE 所成角的大小;

(3) 线段 BC 上是否存在点 P, 使平面 A_1DP 与平面 A_1BE 垂直? 说明理由.

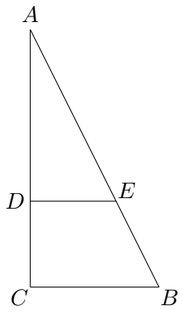


图 1

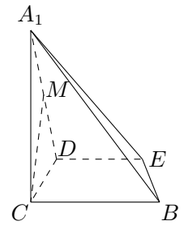


图 2

17. 近年来, 某市为促进生活垃圾的分类处理, 将生活垃圾分为厨余垃圾、可回收物和其他垃圾三类, 并分别设置了相应的垃圾箱. 为调查居民生活垃圾分类投放情况, 现随机抽取了该市三类垃圾箱中总计 1000 吨生活垃圾, 数据统计如下 (单位: 吨):

	“厨余垃圾”箱	“可回收物”箱	“其他垃圾”箱
厨余垃圾	400	100	100
可回收物	30	240	30
其他垃圾	20	20	60

(1) 试估计厨余垃圾投放正确的概率;
(2) 试估计生活垃圾投放错误的概率;
(3) 假设厨余垃圾在“厨余垃圾”箱、“可回收物”箱、“其他垃圾”箱的投放量分别为 a, b, c, 其中 $a>0$, $a+b+c=600$. 当数据 a, b, c 的方差 s^2 最大时, 写出 a, b, c 的值 (结论不要求证明), 并求此时 s^2 的值.
(注: $s^2=\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right]$, 其中 $\overline{x}$ 为数据 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的平均数)

18. 已知函数 $f(x)=ax^2+1\,(a>0)$, $g(x)=x^3+bx$.
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线, 求 a, b 的值;
(2) 当 $a^2=4b$ 时, 求函数 $f(x)+g(x)$ 的单调区间, 并求其在区间 $(-\infty,-1]$ 上的最大值.

19. 已知曲线 $C:(5-m)x^2+(m-2)y^2=8$ $(m\in\mathbf{R})$.
(1) 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆, 求 m 的取值范围;
(2) 设 $m=4$, 曲线 C 与 y 轴的交点为 A, B (点 A 位于点 B 的上方), 直线 $y=kx+4$ 与曲线 C 交于不同的两点 M, N, 直线 $y=1$ 与直线 BM 交于点 G. 求证: A, G, N 三点共线.

20. 设 A 是由 $m\times n$ 个实数组成的 m 行 n 列的数表, 满足: 每个数的绝对值不大于 1, 且所有数的和为零. 记 $S(m,n)$ 为所有这样的数表构成的集合. 对于 $A\in S(m,n)$, 记 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行各数之和 $(1\leqslant i\leqslant m)$, $c_j(A)$ 为 A 的第 j 列各数之和 $(1\leqslant j\leqslant n)$; 记 $k(A)$ 为 $|r_1(A)|$, $|r_2(A)|$, $\cdots$, $|r_m(A)|$, $|c_1(A)|$, $|c_2(A)|$, $\cdots$, $|c_n(A)|$ 中的最小值.
(1) 对如下数表 A, 求 $k(A)$ 的值;

1	1	-0.8
0.1	-0.3	-1

(2) 设数表 $A\in S(2,3)$ 形如

1	1	c
a	b	-1

求 $k(A)$ 的最大值;
(3) 给定正整数 t, 对于所有的 $A\in S(2,2t+1)$, 求 $k(A)$ 的最大值.

2012 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,3x+2>0\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,(x+1)(x-3)>0\}$, 则 $A\bigcap B=$ （　）

(A) $(-\infty,-1)$　(B) $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$　(C) $\left(-\frac{2}{3},3\right)$　(D) $(3,+\infty)$

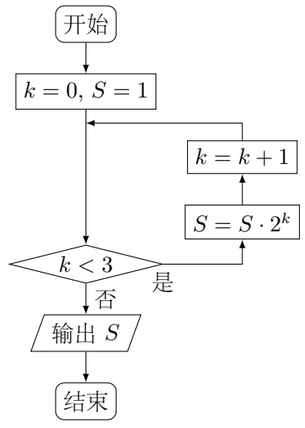
2. 在复平面内, 复数 $\frac{10\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$ 对应的点的坐标为 （　）

(A) $(1,3)$　(B) $(3,1)$　(C) $(-1,3)$　(D) $(3,-1)$

3. 设不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域为 D. 在区域 D 内随机取一个点, 则此点到坐标原点的距离大于 2 的概率是 （　）

(A) $\frac{\pi}{4}$　(B) $\frac{\pi-2}{2}$　(C) $\frac{\pi}{6}$　(D) $\frac{4-\pi}{4}$

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 （　）



(A) 2　(B) 4　(C) 8　(D) 16

5. 函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的零点个数为 （　）

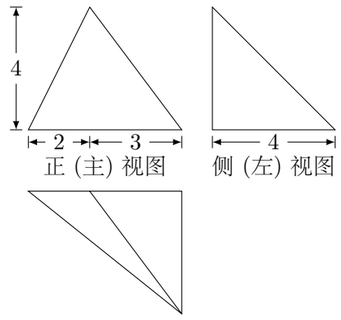
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

6. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 下面结论中正确的是 （　）

(A) $a_1+a_3\geqslant 2a_2$　(B) $a_1^2+a_3^2\geqslant 2a_2^2$

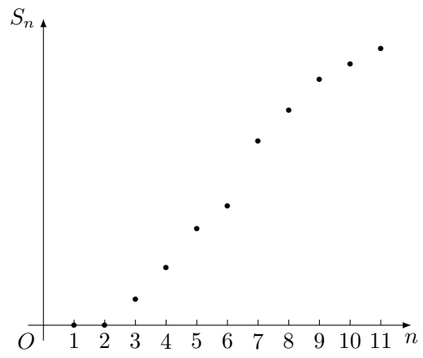
(C) 若 $a_1=a_3$, 则 $a_1=a_2$　(D) 若 $a_3>a_1$, 则 $a_4>a_2$

7. 某三棱锥的三视图如图所示, 该三棱锥的表面积是 （　）



(A) $28+6\sqrt{5}$　(B) $30+6\sqrt{5}$　(C) $56+12\sqrt{5}$　(D) $60+12\sqrt{5}$

8. 某棵果树前 n 年的总产量 S_n 与 n 之间的关系如图所示. 从目前记录的结果看, 前 m 年的年平均产量最高, m 的值为 （　）



(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 11

二、填空题

9. 直线 $y=x$ 被圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 截得的弦长为_____.

10. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_1=\frac{1}{2}$, $S_2=a_3$, 则 $a_2=$_____; $S_n=$_____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=3$, $b=\sqrt{3}$, $\angle A=\frac{\pi}{3}$, 则 $\angle C$ 的大小为_____.

12. 已知函数 $f(x)=\lg x$. 若 $f(ab)=1$, 则 $f(a^2)+f(b^2)=$_____.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 是 AB 边上的动点, 则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的值为_____; $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最大值为_____.

14. 已知 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$, $g(x)=2^x-2$. 若 $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)<0$ 或 $g(x)<0$, 则 m 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\frac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域及最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递减区间.

16. 如图 1, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle C=90°$, D, E 分别是 AC, AB 的中点, 点 F 为线段 CD 上的一点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置, 使 $A_1F\perp CD$, 如图 2.

(1) 求证: $DE\parallel$ 平面 A_1CB;

(2) 求证: $A_1F\perp BE$;

(3) 线段 A_1B 上是否存在点 Q, 使 $A_1C\perp$ 平面 DEQ? 说明理由.

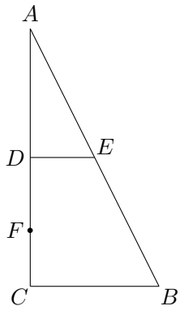


图 1

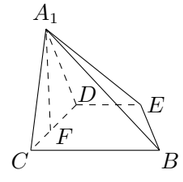


图 2

17. 近年来, 某市为促进生活垃圾的分类处理, 将生活垃圾分为厨余垃圾、可回收物和其他垃圾三类, 并分别设置了相应的垃圾箱. 为调查居民生活垃圾分类投放情况, 现随机抽取了该市三类垃圾箱中总计 1000 吨生活垃圾, 数据统计如下 (单位: 吨):

	“厨余垃圾”箱	“可回收物”箱	“其他垃圾”箱
厨余垃圾	400	100	100
可回收物	30	240	30
其他垃圾	20	20	60

(1) 试估计厨余垃圾投放正确的概率;
(2) 试估计生活垃圾投放错误的概率;
(3) 假设厨余垃圾在“厨余垃圾”箱、“可回收物”箱、“其他垃圾”箱的投放量分别为 a, b, c, 其中 $a>0$, $a+b+c=600$. 当数据 a, b, c 的方差 s^2 最大时, 写出 a, b, c 的值 (结论不要求证明), 并求此时 s^2 的值.
(注: $s^2=\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right]$, 其中 $\overline{x}$ 为数据 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的平均数)

18. 已知函数 $f(x)=ax^2+1\,(a>0)$, $g(x)=x^3+bx$.
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线, 求 a, b 的值;
(2) 当 $a=3$, $b=-9$ 时, 若函数 $f(x)+g(x)$ 在区间 $[k,2]$ 上的最大值为 28, 求 k 的取值范围.

19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(2,0)$, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ 时, 求 k 的值.

20. 设 A 是如下形式的 2 行 3 列的数表,

a	b	c
d	e	f

满足性质 P: a, b, c, d, e, $f\in[-1,1]$, 且 $a+b+c+d+e+f=0$.
记 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行各数之和 $(i=1,\ 2)$, $c_j(A)$ 为 A 的第 j 列各数之和 $(j=1,\ 2,\ 3)$; 记 $k(A)$ 为 $|r_1(A)|$, $|r_2(A)|$, $|c_1(A)|$, $|c_2(A)|$, $|c_3(A)|$ 中的最小值.
(1) 对如下数表 A, 求 $k(A)$ 的值;

1	1	-0.8
0.1	-0.3	-1

(2) 设数表 A 形如

1	1	$-1-2d$
d	d	-1

其中 $-1\leqslant d\leqslant 0$. 求 $k(A)$ 的最大值;
(3) 对所有满足性质 P 的 2 行 3 列的数表 A, 求 $k(A)$ 的最大值.

2012 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=1$, $a_4=5$, 则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=$ （ ）

(A) 7　　(B) 15　　(C) 20　　(D) 25

2. 不等式 $\dfrac{x-1}{2x+1}\leqslant 0$ 的解集为 （ ）

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},1\right]$　　(B) $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

(C) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup[1,+\infty)$　　(D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

3. 对任意的实数 k, 直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系一定是（ ）

(A) 相离　　(B) 相切

(C) 相交但直线不过圆心　　(D) 相交且直线过圆心

4. $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中常数项为 （ ）

(A) $\dfrac{35}{16}$　　(B) $\dfrac{35}{8}$　　(C) $\dfrac{35}{4}$　　(D) 105

5. 设 $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根, 则 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值为（ ）

(A) -3　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 3

6. 设 x, $y\in\mathbf{R}$, 向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,y)$, $\boldsymbol{c}=(2,-4)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ （ ）

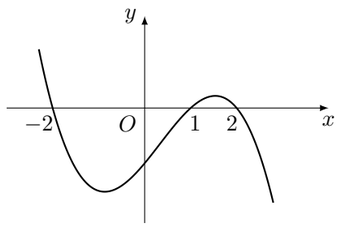
(A) $\sqrt{5}$　　(B) $\sqrt{10}$　　(C) $2\sqrt{5}$　　(D) 10

7. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且以 2 为周期, 则“$f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的增函数”是“$f(x)$ 为 $[3,4]$ 上的减函数”的 （ ）

(A) 既不充分也不必要的条件　　(B) 充分而不必要的条件

(C) 必要而不充分的条件　　(D) 充要条件

8. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论中一定成立的是 （ ）



(A) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$

(B) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$

(C) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

(D) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

9. 设四面体的六条棱的长分别为 1, 1, 1, 1, $\sqrt{2}$ 和 a, 且长为 a 的棱与长为 $\sqrt{2}$ 的棱异面, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,\sqrt{2})$　　(B) $(0,\sqrt{3})$　　(C) $(1,\sqrt{2})$　　(D) $(1,\sqrt{3})$

10. 设平面点集 $A=\left\{(x,y)\,|\,(y-x)\left(y-\dfrac{1}{x}\right)\geqslant 0\right\}$, $B=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B$ 所表示的平面图形的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{4}\pi$　　(B) $\dfrac{3}{5}\pi$　　(C) $\dfrac{4}{7}\pi$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

二、填空题

11. 若 $(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}$, 其中 a, $b\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位, 则 $a+b=$_____.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n}=$_____.

13. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且 $\cos A=\dfrac{3}{5}$, $\cos B=\dfrac{5}{13}$, $b=3$, 则 $c=$_____.

14. 过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F 作直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 若 $|AB|=\dfrac{25}{12}$, $|AF|<|BF|$, 则 $|AF|=$_____.

15. 某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其他三门艺术课各 1 节, 则在课表上的相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课的概率为_____. (用数字作答)

三、解答题

16. 设 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{2}x+1$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于 y 轴.

(1) 求 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

17. 甲、乙两人轮流投篮, 每人每次投一球. 约定甲先投且先投中者获胜, 一直到有人获胜或每人都已投球 3 次时投篮结束. 设甲每次投篮投中的概率为 $\dfrac{1}{3}$, 乙每次投篮投中的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 且各次投篮互不影响.

(1) 求甲获胜的概率;

(2) 求投篮结束时甲的投篮次数 ξ 的分布列与期望.

18. 设 $f(x)=4\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\omega x-\cos(2\omega x+\pi)$, 其中 $\omega>0$.

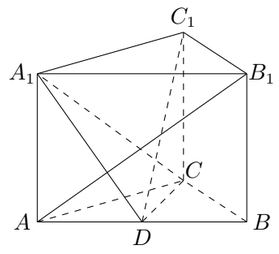
(1) 求函数 $y=f(x)$ 的值域;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数, 求 ω 的最大值.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=4$, $AC=BC=3$, D 为 AB 的中点.

(1) 求点 C 到平面 A_1ABB_1 的距离;

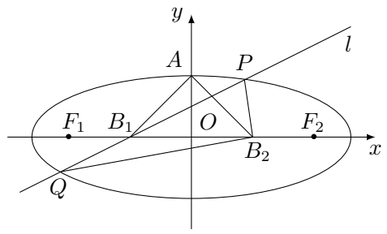
(2) 若 $AB_1\perp A_1C$, 求二面角 A_1-CD-C_1 的平面角的余弦值.



20. 如图, 设椭圆的中心为原点 O, 长轴在 x 轴上, 上顶点为 A, 左、右焦点分别为 F_1, F_2, 线段 OF_1, OF_2 的中点分别为 B_1, B_2, 且 $\triangle AB_1B_2$ 是面积为 4 的直角三角形.

(1) 求该椭圆的离心率和标准方程;

(2) 过 B_1 作直线 l 交椭圆于 P, Q 两点, 使 $PB_2\perp QB_2$, 求直线 l 的方程.



21. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1}=a_2S_n+a_1$, 其中 $a_2\neq 0$.

(1) 求证: $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列;

(2) 若 $a_2>-1$, 求证: $S_n\leqslant\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$, 并给出等号成立的充要条件.

2012 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 命题“若 p 则 q”的逆命题是 （ ）

(A) 若 q 则 p　　(B) 若 $\neg p$ 则 $\neg q$

(C) 若 $\neg q$ 则 $\neg p$　　(D) 若 p 则 $\neg q$

2. 不等式 $\dfrac{x-1}{x+2}<0$ 的解集为 （ ）

(A) $(1,+\infty)$　　(B) $(-\infty,-2)$

(C) $(-2,1)$　　(D) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

3. 设 A, B 为直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的两个交点, 则 $|AB|=$ （ ）

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 2

4. $(1-3x)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 （ ）

(A) -270　　(B) -90　　(C) 90　　(D) 270

5. $\dfrac{\sin 47^\circ-\sin 17^\circ\cos 30^\circ}{\cos 17^\circ}=$ （ ）

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 设 $x\in\mathbf{R}$, 向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ （ ）

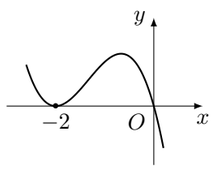
(A) $\sqrt{5}$　　(B) $\sqrt{10}$　　(C) $2\sqrt{5}$　　(D) 10

7. 已知 $a=\log_2 3+\log_2\sqrt{3}$, $b=\log_2 9-\log_2\sqrt{3}$, $c=\log_3 2$, 则 a, b, c 的大小关系是 （ ）

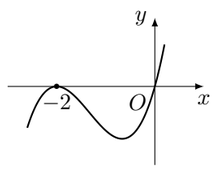
(A) $a=b<c$　　(B) $a=b>c$　　(C) $a<b<c$　　(D) $a>b>c$

8. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 且函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值, 则函数 $y=xf'(x)$ 的图象可能是 （ ）

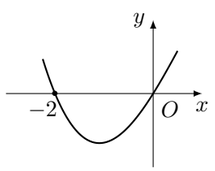
(A)



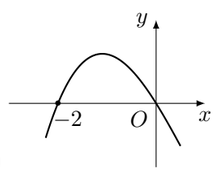
(B)



(C)



(D)



9. 设四面体的六条棱的长分别为 1, 1, 1, 1, $\sqrt{2}$ 和 a, 且长为 a 的棱与长为 $\sqrt{2}$ 的棱异面, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,\sqrt{2})$　　(B) $(0,\sqrt{3})$　　(C) $(1,\sqrt{2})$　　(D) $(1,\sqrt{3})$

10. 设函数 $f(x)=x^2-4x+3$, $g(x)=3^x-2$, 集合 $M=\{x\in\mathbf{R}\mid f(g(x))>0\}$, $N=\{x\in\mathbf{R}\mid g(x)<2\}$, 则 $M\cap N$ 为 （ ）

(A) $(1,+\infty)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(-1,1)$　　(D) $(-\infty,1)$

二、填空题

11. 首项为 1, 公比为 2 的等比数列的前 4 项和 $S_4=$_____.

12. 若 $f(x)=(x+a)(x-4)$ 为偶函数, 则实数 $a=$_____.

13. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $a=1$, $b=2$, $\cos C=\dfrac{1}{4}$, 则 $\sin B=$_____.

14. 设 P 为直线 $y=\dfrac{b}{3a}x$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 左支的交点, F_1 是左焦点, PF_1 垂直于 x 轴, 则双曲线的离心率 $e=$_____.

15. 某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其他三门艺术课各 1 节, 则在课表上的相邻两节文化课之间至少间隔 1 节艺术课的概率为_____. (用数字作答)

三、解答题

16. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_1+a_3=8$, $a_2+a_4=12$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\{S_n\}$, 若 a_1, a_k, a_{k+2} 成等比数列, 求正整数 k 的值.

17. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx+c$ 在点 $x=2$ 处取得极值 $c-16$.
(1) 求 a, b 的值;
(2) 若 $f(x)$ 有极大值 28, 求 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最小值.

18. 甲、乙两人轮流投篮, 每人每次投一球. 约定甲先投且先投中者获胜, 一直到有人获胜或每人都已投球 3 次时投篮结束. 设甲每次投篮投中的概率为 $\dfrac{1}{3}$, 乙每次投篮投中的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 且各次投篮互不影响.
(1) 求乙获胜的概率;
(2) 求投篮结束时乙只投了 2 个球的概率.

19. 设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ (其中 $A>0,\omega>0,-\pi<\varphi\leqslant\pi$) 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 处取得最大值 2, 其图象与 x 轴的相邻两个交点的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

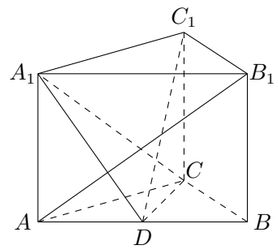
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $g(x)=\dfrac{6\cos^4 x-\sin^2 x-1}{f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$ 的值域.

20. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=4$, $AC=BC=3$, D 为 AB 的中点.

(1) 求异面直线 CC_1 和 AB 的距离;

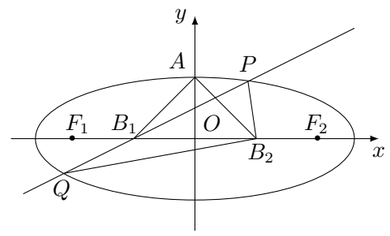
(2) 若 $AB_1\perp A_1C$, 求二面角 A_1-CD-B_1 的平面角的余弦值.



21. 如图, 设椭圆的中心为原点 O, 长轴在 x 轴上, 上顶点为 A, 左、右焦点分别为 F_1, F_2, 线段 OF_1, OF_2 的中点分别为 B_1, B_2, 且 $\triangle AB_1B_2$ 是面积为 4 的直角三角形.

(1) 求该椭圆的离心率和标准方程;

(2) 过 B_1 作直线交椭圆于 P, Q 两点, 使 $PB_2\perp QB_2$, 求 $\triangle PB_2Q$ 的面积.



2012 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{-1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $2+\mathrm{i}$　(B) $2-\mathrm{i}$　(C) $1+2\mathrm{i}$　(D) $1-2\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$, $B=\{1,m\}$, $A\cup B=A$, 则 $m=$ （　）

(A) 0 或 $\sqrt{3}$　(B) 0 或 3　(C) 1 或 $\sqrt{3}$　(D) 1 或 3

3. 椭圆的中心在原点, 焦距为 4, 一条准线为 $x=-4$, 则该椭圆的方程为（　）

(A) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

4. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $CC_1=2\sqrt{2}$, E 为 CC_1 的中点, 则直线 AC_1 到平面 BED 的距离为 （　）

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 1

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n. $a_5=5$, $S_5=15$, 则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 100 项和为 （　）

(A) $\dfrac{100}{101}$　(B) $\dfrac{99}{101}$　(C) $\dfrac{99}{100}$　(D) $\dfrac{101}{100}$

6. $\triangle ABC$ 中, AB 边的高为 CD, 若 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{AD}=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　(B) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$　(C) $\dfrac{3}{5}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{5}\boldsymbol{b}$　(D) $\dfrac{4}{5}\boldsymbol{a}-\dfrac{4}{5}\boldsymbol{b}$

7. 已知 α 为第二象限角, $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos 2\alpha=$ （　）

(A) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(B) $-\dfrac{\sqrt{5}}{9}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

8. 已知 F_1、F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $|PF_1|=2|PF_2|$, 则 $\cos\angle F_1PF_2=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

9. 已知 $x=\ln\pi$, $y=\log_5 2$, $z=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, 则 （　）

(A) $x<y<z$　(B) $z<x<y$　(C) $z<y<x$　(D) $y<z<x$

10. 已知函数 $y=x^3-3x+c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点, 则 $c=$ （　）

(A) -2 或 2　(B) -9 或 3　(C) -1 或 1　(D) -3 或 1

11. 将字母 a, a, b, b, c, c 排成三行两列, 要求每行的字母互不相同, 每列的字母也互不相同, 则不同的排列方法共有 （　）

(A) 12 种　(B) 18 种　(C) 24 种　(D) 36 种

12. 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 在边 AB 上, 点 F 在边 BC 上, $AE=BF=\dfrac{3}{7}$. 动点 P 从 E 出发沿直线向 F 运动, 每当碰到正方形的边时反弹, 反弹时反射角等于入射角, 当点 P 第一次碰到 E 时, P 与正方形的边碰撞的次数为 （　）

(A) 16　(B) 14　(C) 12　(D) 10

二、填空题

13. 若 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\\ x+3y-3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-y$ 的最小值为_____.

14. 当函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ $(0\leqslant x<2\pi)$ 取得最大值时, $x=$_____.

15. 若 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中第 3 项与第 7 项的二项式系数相等, 则该展开式中 $\dfrac{1}{x^2}$ 的系数为_____.

16. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面边长和侧棱长都相等, $\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为_____.

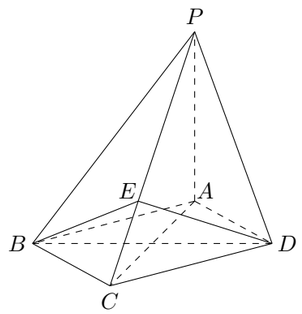
三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 已知 $\cos(A-C)+\cos B=1$, $a=2c$, 求 C.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AC=2\sqrt{2}$, $PA=2$, E 是 PC 上的一点, $PE=2EC$.

(1) 证明: $PC\perp$ 平面 BED;

(2) 设二面角 $A-PB-C$ 为 90°, 求 PD 与平面 PBC 所成角的大小.



19. 乒乓球比赛规则规定: 一局比赛, 双方比分在 10 平前, 一方连续发球 2 次后, 对方再连续发球 2 次, 依次轮换. 每次发球, 胜方得 1 分, 负方得 0 分. 设在甲、乙的比赛中, 每次发球, 发球方得 1 分的概率为 0.6, 各次发球的胜负结果相互独立. 甲、乙的一局比赛中, 甲先发球.

(1) 求开始第 4 次发球时, 甲、乙的比分为 1 比 2 的概率;

(2) ξ 表示开始第 4 次发球时乙的得分, 求 ξ 的期望.

20. 设函数 $f(x)=ax+\cos x$, $x\in[0,\pi]$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 设 $f(x)\leqslant 1+\sin x$, 求 a 的取值范围.

21. 已知抛物线 $C:y=(x+1)^2$ 与圆 $M:(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=r^2$ $(r>0)$ 有一个公共点 A, 且在 A 处两曲线的切线为同一直线 l.
(1) 求 r;
(2) 设 m、n 是异于 l 且与 C 及 M 都相切的两条直线, m、n 的交点为 D, 求 D 到 l 的距离.

22. 函数 $f(x)=x^2-2x-3$, 定义数列 $\{x_n\}$ 如下: $x_1=2$, x_{n+1} 是过两点 $P(4,5)$, $Q_n(x_n,f(x_n))$ 的直线 PQ_n 与 x 轴交点的横坐标.
(1) 证明: $2\leqslant x_n<x_{n+1}<3$;
(2) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

2012 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$, $B=\{x\mid x$ 是矩形$\}$, $C=\{x\mid x$ 是正方形$\}$, $D=\{x\mid x$ 是菱形$\}$, 则 （ ）

(A) $A\subseteq B$　(B) $C\subseteq B$　(C) $D\subseteq C$　(D) $A\subseteq D$

2. 函数 $y=\sqrt{x+1}\ (x\geqslant -1)$ 的反函数为 （ ）

(A) $y=x^2-1\ (x\geqslant 0)$　(B) $y=x^2-1\ (x\geqslant 1)$

(C) $y=x^2+1\ (x\geqslant 0)$　(D) $y=x^2+1\ (x\geqslant 1)$

3. 若函数 $f(x)=\sin\dfrac{x+\varphi}{3}\ (\varphi\in[0,2\pi])$ 是偶函数, 则 $\varphi=$ （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{2\pi}{3}$　(C) $\dfrac{3\pi}{2}$　(D) $\dfrac{5\pi}{3}$

4. 已知 α 为第二象限角, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha=$ （ ）

(A) $-\dfrac{24}{25}$　(B) $-\dfrac{12}{25}$　(C) $\dfrac{12}{25}$　(D) $\dfrac{24}{25}$

5. 椭圆的中心在原点, 焦距为 4, 一条准线为 $x=-4$, 则该椭圆的方程为（ ）

(A) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1$, $S_n=2a_{n+1}$, 则 $S_n=$ （ ）

(A) 2^{n-1}　(B) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$　(C) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　(D) $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

7. 6 位选手依次演讲, 其中选手甲不在第一个也不在最后一个演讲, 则不同的演讲次序共有 （ ）

(A) 240 种　(B) 360 种　(C) 480 种　(D) 720 种

8. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $CC_1=2\sqrt{2}$, E 为 CC_1 的中点, 则直线 AC_1 到平面 BED 的距离为 （ ）

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 1

9. $\triangle ABC$ 中, AB 边的高为 CD, 若 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{AD}=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　(B) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$　(C) $\dfrac{3}{5}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{5}\boldsymbol{b}$　(D) $\dfrac{4}{5}\boldsymbol{a}-\dfrac{4}{5}\boldsymbol{b}$

10. 已知 F_1、F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $|PF_1|=2|PF_2|$, 则 $\cos\angle F_1PF_2=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

11. 已知 $x=\ln\pi$, $y=\log_5 2$, $z=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, 则 （ ）

(A) $x<y<z$　(B) $z<x<y$　(C) $z<y<x$　(D) $y<z<x$

12. 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 在边 AB 上, 点 F 在边 BC 上, $AE=BF=\dfrac{1}{3}$. 动点 P 从 E 出发沿直线向 F 运动, 每当碰到正方形的边时反弹, 反弹时反射角等于入射角, 当点 P 第一次碰到 E 时, P 与正方形的边碰撞的次数为 （ ）

(A) 8　(B) 6　(C) 4　(D) 3

二、填空题

13. $\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式中 x^2 的系数为_____.

14. 若 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\\ x+3y-3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-y$ 的最小值为_____.

15. 当函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x\ (0\leqslant x<2\pi)$ 取得最大值时, $x=$_____.

16. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别为 BB_1、CC_1 的中点, 那么异面直线 AE 与 D_1F 所成角的余弦值为_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 成等差数列, 其对边 a、b、c 满足 $2b^2=3ac$, 求 A.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 前 n 项和 $S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n$.

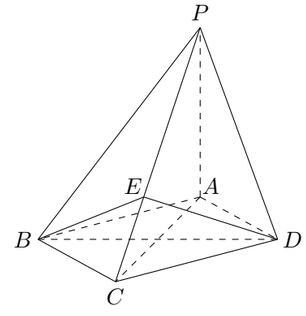
(1) 求 a_2, a_3;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AC=2\sqrt{2}$, $PA=2$, E 是 PC 上的一点, $PE=2EC$.

(1) 证明: $PC\perp$ 平面 BED;

(2) 设二面角 $A-PB-C$ 为 90°, 求 PD 与平面 PBC 所成角的大小.



20. 乒乓球比赛规则规定: 一局比赛, 双方比分在 10 平前, 一方连续发球 2 次后, 对方再连续发球 2 次, 依次轮换. 每次发球, 胜方得 1 分, 负方得 0 分. 设在甲、乙的比赛中, 每次发球, 发球方得 1 分的概率为 0.6, 各次发球的胜负结果相互独立. 甲、乙的一局比赛中, 甲先发球.
(1) 求开始第 4 次发球时, 甲、乙的比分为 1 比 2 的概率;
(2) 求开始第 5 次发球时, 甲得分领先的概率.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2, 若过两点 $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$ 的直线 l 与 x 轴的交点在曲线 $f(x)$ 上, 求 a 的值.

22. 已知抛物线 $C:y=(x+1)^2$ 与圆 $M:(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=r^2$ $(r>0)$ 有一个公共点 A, 且在 A 处两曲线的切线为同一直线 l.
(1) 求 r;
(2) 设 m、n 是异于 l 且与 C 及 M 都相切的两条直线, m、n 的交点为 D, 求 D 到 l 的距离.

2012 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 若复数 z 满足 $z\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$, 则 z 等于 （　）

(A) $-1-\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $1+\mathrm{i}$

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_5=10$, $a_4=7$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 （　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

3. 下列命题中, 真命题是 （　）

(A) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{x_0}\leqslant 0$

(B) $\forall x\in\mathbf{R}$, $2^x>x^2$

(C) $a+b=0$ 的充要条件是 $\dfrac{a}{b}=-1$

(D) $a>1$, $b>1$ 是 $ab>1$ 的充分条件

4. 一个几何体的三视图形状都相同, 大小均相等, 那么这个几何体不可以是 （　）

(A) 球　(B) 三棱锥　(C) 正方体　(D) 圆柱

5. 下列不等式一定成立的是 （　）

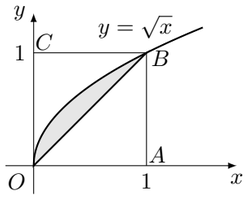
(A) $\lg\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)>\lg x\ (x>0)$

(B) $\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\geqslant 2\ \left(x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right)$

(C) $x^2+1\geqslant 2|x|\ (x\in\mathbf{R})$

(D) $\dfrac{1}{x^2+1}>1\ (x\in\mathbf{R})$

6. 如图所示, 在边长为 1 的正方形 $OABC$ 中任取一点 P, 则点 P 恰好取自阴影部分的概率为 （　）



(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{1}{6}$　(D) $\dfrac{1}{7}$

7. 设函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$, 则下列结论错误的是 （　）

(A) $D(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$　(B) $D(x)$ 是偶函数

(C) $D(x)$ 不是周期函数　(D) $D(x)$ 不是单调函数

8. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点与抛物线 $y^2=12x$ 的焦点重合, 则该双曲线的焦点到其渐近线的距离等于 （　）

(A) $\sqrt{5}$　(B) $4\sqrt{2}$　(C) 3　(D) 5

9. 若函数 $y=2^x$ 图象上存在点 (x,y) 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-3\leqslant 0\\ x-2y-3\leqslant 0\\ x\geqslant m\end{cases}$, 则实数 m 的最大值为 （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) 2

10. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 若对任意 x_1, $x_2\in[a,b]$, 有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有性质 P. 设 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上具有性质 P, 现给出如下命题:

① $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的图象是连续不断的;

② $f(x^2)$ 在 $\left[1,\sqrt{3}\right]$ 上具有性质 P;

③ 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最大值 1, 则 $f(x)=1$, $x\in[1,3]$;

④ 对任意 x_1, x_2, x_3, $x_4\in[1,3]$, 有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)\leqslant\dfrac{1}{4}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]$.

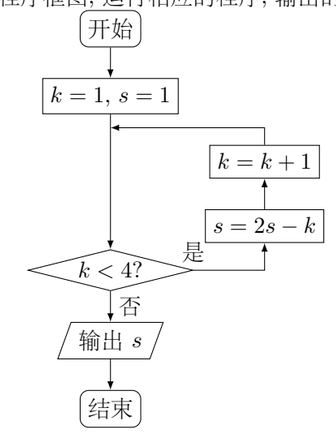
其中真命题的序号是 （　）

(A) ①②　(B) ①③　(C) ②④　(D) ③④

二、填空题

11. $(a+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数等于 8, 则实数 $a=$_____.

12. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 s 值等于_____.



13. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长成公比为 $\sqrt{2}$ 的等比数列, 则其最大角的余弦值为_____.

14. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=n\cos\dfrac{n\pi}{2}+1$, 前 n 项和为 S_n, 则 $S_{2012}=$_____.

15. 对于实数 a 和 b, 定义运算“$*$”: $a*b=\begin{cases}a^2-ab, & a\leqslant b\\ b^2-ab, & a>b\end{cases}$.

设 $f(x)=(2x-1)*(x-1)$, 且关于 x 的方程 $f(x)=m\ (m\in\mathbf{R})$ 恰有三个互不相等的实数根 x_1, x_2, x_3, 则 $x_1x_2x_3$ 的取值范围是_____.

三、解答题

16. 受轿车在保修期内维修费等因素的影响, 企业生产每辆轿车的利润与该轿车首次出现故障的时间有关. 某轿车制造厂生产甲、乙两种品牌轿车, 保修期均为 2 年. 现从该厂已售出的两种品牌轿车中各随机抽取 50 辆, 统计数据如下:

品牌	甲			乙	
首次出现故障的时间 x (年)	$0<x\leqslant 1$	$1<x\leqslant 2$	$x>2$	$0<x\leqslant 2$	$x>2$
轿车数量 (辆)	2	3	45	5	45
每辆利润 (万元)	1	2	3	1.8	2.9

将频率视为概率, 解答下列问题:

(1) 从该厂生产的甲品牌轿车中随机抽取一辆, 求其首次出现故障发生在保修期内的概率;

(2) 若该厂生产的轿车均能售出, 记生产一辆甲品牌轿车的利润为 X_1, 生产一辆乙品牌轿车的利润为 X_2, 分别求 X_1, X_2 的分布列;

(3) 该厂预计今后这两种品牌轿车销量相当, 由于资金限制, 只能生产其中一种品牌的轿车. 若从经济效益的角度考虑, 你认为应生产哪种品牌的轿车? 请说明理由.

17. 某同学在一次研究性学习中发现, 以下五个式子的值都等于同一个常数:

① $\sin^2 13^\circ+\cos^2 17^\circ-\sin 13^\circ\cos 17^\circ$;

② $\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ-\sin 15^\circ\cos 15^\circ$;

③ $\sin^2 18^\circ+\cos^2 12^\circ-\sin 18^\circ\cos 12^\circ$;

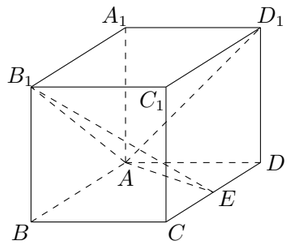
④ $\sin^2(-18^\circ)+\cos^2 48^\circ-\sin(-18^\circ)\cos 48^\circ$;

⑤ $\sin^2(-25^\circ)+\cos^2 55^\circ-\sin(-25^\circ)\cos 55^\circ$.

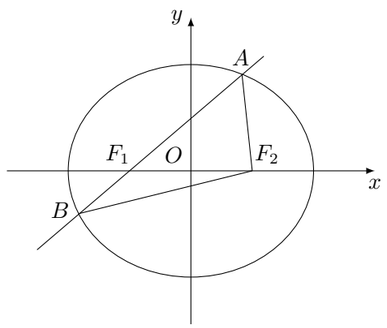
(1) 试从上述五个式子中选择一个, 求出这个常数;

(2) 根据 (1) 的计算结果, 将该同学的发现推广为三角恒等式, 并证明你的结论.

18. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AD=1$, E 为 CD 的中点.
(1) 求证: $B_1E\perp AD_1$;
(2) 在棱 AA_1 上是否存在一点 P, 使得 $DP\parallel$ 平面 B_1AE? 若存在, 求 AP 的长; 若不存在, 请说明理由;
(3) 若二面角 $A-B_1E-A_1$ 的大小为 30°, 求 AB 的长.



19. 如图, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 F_1, 右焦点为 F_2, 离心率 $e=\dfrac{1}{2}$, 过 F_1 的直线交椭圆于 A、B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8.
(1) 求椭圆 E 的方程;
(2) 设动直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 P, 且与直线 $x=4$ 相交于点 Q. 试探究: 在坐标平面内是否存在定点 M, 使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2-\mathrm{e}x$, $a\in\mathbf{R}$.
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线平行于 x 轴, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 试确定 a 的取值范围, 使得曲线 $y=f(x)$ 上存在唯一的点 P, 曲线在该点处的切线与曲线只有一个公共点 P.

21. 三选二.

【A】设曲线 $2x^2+2xy+y^2=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0\\b&1\end{pmatrix}$ $(a>0)$ 对应的变换作用下得到的曲线为 $x^2+y^2=1$.
(1) 求实数 a, b 的值;
(2) 求 $\boldsymbol{A}^2$ 的逆矩阵.

【B】在平面直角坐标系中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知直线 l 上两点 M, N 的极坐标分别为 $(2,0)$, $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\y=-\sqrt{3}+2\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).
(1) 设 P 为线段 MN 的中点, 求直线 OP 的平面直角坐标方程;
(2) 判断直线 l 与圆 C 的位置关系.

【C】已知函数 $f(x)=m-|x-2|$, $m\in\mathbf{R}$, 且 $f(x+2)\geqslant 0$ 的解集为 $[-1,1]$.
(1) 求 m 的值;
(2) 若 a, b, $c\in\mathbf{R}^+$, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=m$, 求证: $a+2b+3c\geqslant 9$.

2012 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 复数 $(2+\mathrm{i})^2$ 等于 （ ）

(A) $3+4\mathrm{i}$ (B) $5+4\mathrm{i}$ (C) $3+2\mathrm{i}$ (D) $5+2\mathrm{i}$

2. 已知集合 $M=\{1,2,3,4\}$, $N=\{-2,2\}$, 下列结论成立的是 （ ）

(A) $N\subseteq M$ (B) $M\cup N=M$

(C) $M\cap N=N$ (D) $M\cap N=\{2\}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x-1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,1)$, 则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 （ ）

(A) $x=-\dfrac{1}{2}$ (B) $x=-1$ (C) $x=5$ (D) $x=0$

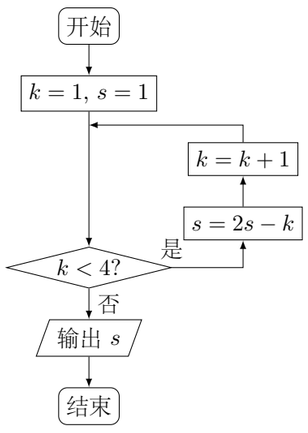
4. 一个几何体的三视图形状都相同, 大小均相等, 那么这个几何体不可以是 （ ）

(A) 球 (B) 三棱锥 (C) 正方体 (D) 圆柱

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点为 $(3,0)$, 则该双曲线的离心率等于（ ）

(A) $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $\dfrac{4}{3}$

6. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 s 值等于 （ ）



(A) -3 (B) -10 (C) 0 (D) -2

7. 直线 $x+\sqrt{3}y-2=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A, B 两点, 则弦 AB 的长度等于 （ ）

(A) $2\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 1

8. 函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象的一条对称轴是 （ ）

(A) $x=\dfrac{\pi}{4}$ (B) $x=\dfrac{\pi}{2}$ (C) $x=-\dfrac{\pi}{4}$ (D) $x=-\dfrac{\pi}{2}$

9. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$, 则 $f(g(\pi))$ 的值为 （ ）

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) π

10. 若直线 $y=2x$ 上存在点 (x,y) 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-3\leqslant 0\\ x-2y-3\leqslant 0\\ x\geqslant m\end{cases}$, 则实数 m 的最大值为 （ ）

(A) -1 (B) 1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2

11. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=n\cos\dfrac{n\pi}{2}$, 其前 n 项和为 S_n, 则 S_{2012} 等于（ ）

(A) 1006 (B) 2012 (C) 503 (D) 0

12. 已知 $f(x)=x^3-6x^2+9x-abc$, $a<b<c$, 且 $f(a)=f(b)=f(c)=0$. 现给出如下结论: ① $f(0)f(1)>0$; ② $f(0)f(1)<0$; ③ $f(0)f(3)>0$; ④ $f(0)f(3)<0$. 其中正确结论的序号是 （ ）

(A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

二、填空题

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle BAC=60^\circ$, $\angle ABC=45^\circ$, $BC=\sqrt{3}$, 则 $AC=$_____.

14. 一支田径队有男女运动员 98 人, 其中男运动员有 56 人. 按男女比例用分层抽样的方法, 从全体运动员中抽出一个容量为 28 的样本, 那么应抽取女运动员人数是_____.

15. 已知关于 x 的不等式 $x^2-ax+2a>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 某地区规划道路建设, 考虑道路铺设方案. 方案设计图中, 点表示城市, 两点之间连线表示两城市间可铺设道路, 连线上数据表示两城市间铺设道路的费用, 要求从任一城市都能到达其余各城市, 并且铺设道路的总费用最小. 例如: 在三个城市道路设计中, 若城市间可铺设道路的线路图如图 1, 则最优设计方案如图 2, 此时铺设道路的最小总费用为 10. 现给出该地区可铺设道路的线路图如图 3, 则铺设道路的最小总费用为_____.

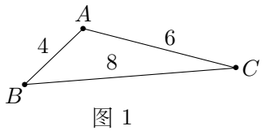


图 1

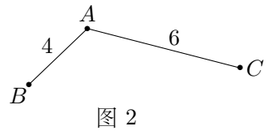


图 2

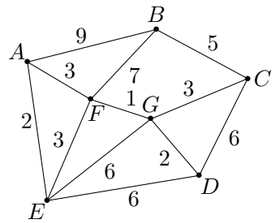


图 3

三、解答题

17. 在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中, $a_1=b_1=1$, $b_4=8$, $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10}=55$.

(1) 求 a_n 和 b_n;

(2) 现分别从 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 3 项中各随机抽取一项, 写出相应的基本事件, 并求这两项的值相等的概率.

18. 某工厂为了对新研发的一种产品进行合理定价, 将该产品按事先拟定的价格进行试销, 得到如下数据:

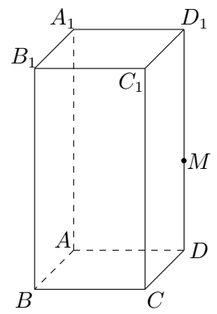
单价 x (元)	8	8.2	8.4	8.6	8.8	9
销量 y (件)	90	84	83	80	75	68

(1) 求回归直线方程 $\hat{y}=bx+a$, 其中 $b=-20$, $a=\overline{y}-b\overline{x}$;

(2) 预计在今后的销售中, 销量与单价仍然服从 (1) 中的关系, 且该产品的成本是 4 元/件, 为使工厂获得最大利润, 该产品的单价应定为多少元?

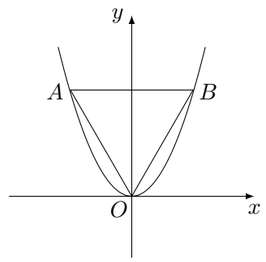
(利润 = 销售收入 − 成本)

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=1$, $AA_1=2$, M 为棱 DD_1 上的一点.
(1) 求三棱锥 $A-MCC_1$ 的体积;
(2) 当 A_1M+MC 取得最小值时, 求证: $B_1M\perp$ 平面 MAC.



20. 某同学在一次研究性学习中发现, 以下五个式子的值都等于同一个常数:
① $\sin^2 13^\circ+\cos^2 17^\circ-\sin 13^\circ\cos 17^\circ$;
② $\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ-\sin 15^\circ\cos 15^\circ$;
③ $\sin^2 18^\circ+\cos^2 12^\circ-\sin 18^\circ\cos 12^\circ$;
④ $\sin^2(-18^\circ)+\cos^2 48^\circ-\sin(-18^\circ)\cos 48^\circ$;
⑤ $\sin^2(-25^\circ)+\cos^2 55^\circ-\sin(-25^\circ)\cos 55^\circ$.
(1) 试从上述五个式子中选择一个, 求出这个常数;
(2) 根据 (1) 的计算结果, 将该同学的发现推广为三角恒等式, 并证明你的结论.

21. 如图, 等边三角形 OAB 的边长为 $8\sqrt{3}$, 且其三个顶点均在抛物线 $E: x^2=2py$ $(p>0)$ 上.
(1) 求抛物线 E 的方程;
(2) 设动直线 l 与抛物线 E 相切于点 P, 与直线 $y=-1$ 相交于点 Q. 证明: 以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上某定点.



22. 已知函数 $f(x)=ax\sin x-\dfrac{3}{2}$ $(a\in\mathbf{R})$, 且在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $\dfrac{\pi-3}{2}$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的零点个数, 并加以证明.

2012 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 i 为虚数单位, 则复数 $\dfrac{5-6\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $6+5\mathrm{i}$　(B) $6-5\mathrm{i}$　(C) $-6+5\mathrm{i}$　(D) $-6-5\mathrm{i}$

2. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $M=\{1,2,4\}$, 则 $\complement_U M=$ （　）

(A) U　(B) $\{1,3,5\}$　(C) $\{3,5,6\}$　(D) $\{2,4,6\}$

3. 若向量 $\overrightarrow{BA}=(2,3)$, $\overrightarrow{CA}=(4,7)$, 则 $\overrightarrow{BC}=$ （　）

(A) $(-2,-4)$　(B) $(3,4)$　(C) $(6,10)$　(D) $(-6,-10)$

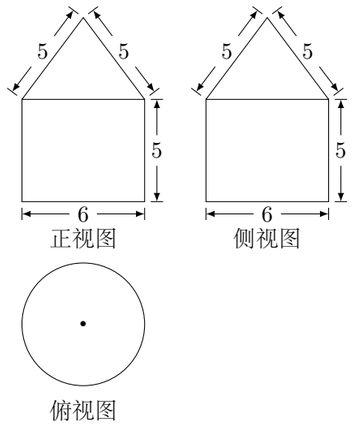
4. 下列函数中, 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是 （　）

(A) $y=\ln(x+2)$　(B) $y=-\sqrt{x+1}$　(C) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　(D) $y=x+\dfrac{1}{x}$

5. 已知变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant 2 \\ x+y\geqslant 1 \\ x-y\leqslant 1 \end{cases}$, 则 $z=3x+y$ 的最大值为（　）

(A) 12　(B) 11　(C) 3　(D) -1

6. 某几何体的三视图如图所示, 则它的体积为 （　）



(A) 12π　(B) 45π　(C) 57π　(D) 81π

7. 从个位数与十位数之和为奇数的两位数中任取一个, 其个位数为 0 的概率是 （　）

(A) $\dfrac{4}{9}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{2}{9}$　(D) $\dfrac{1}{9}$

8. 对任意两个非零的平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$, 定义 $\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}$. 若平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|>0$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, 且 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}$ 都在集合 $\left\{\dfrac{n}{2}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$ 中, 则 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) $\dfrac{5}{2}$

二、填空题

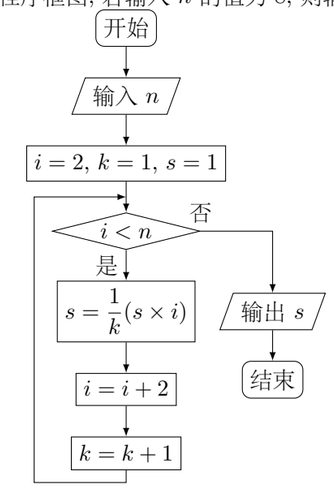
9. 不等式 $|x+2|-|x|\leqslant 1$ 的解集为_____.

10. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为_____. (用数字作答)

11. 已知递增的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_3=a_2^2-4$, 则 $a_n=$_____.

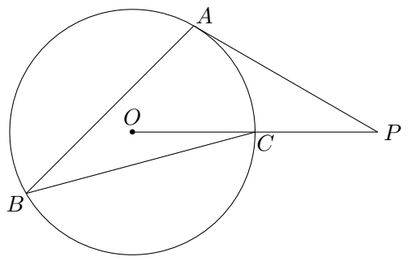
12. 曲线 $y=x^3-x+3$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程为_____.

13. 执行如图所示的程序框图, 若输入 n 的值为 8, 则输出 s 的值为_____.



14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 和 C_2 的参数方程分别为 $\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$ (t 为参数) 和 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则曲线 C_1 和 C_2 的交点坐标为_____.

15. 如图, 圆 O 的半径为 1, A, B, C 是圆周上的三点, 满足 $\angle ABC=30^\circ$, 过点 A 作圆 O 的切线与 OC 的延长线交于点 P, 则 $PA=$_____.



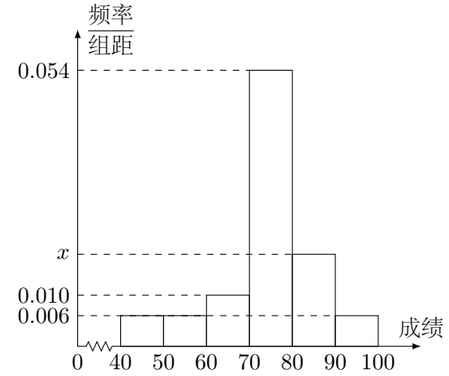
三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=2\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (其中 $\omega>0$, $x\in\mathbf{R}$) 的最小正周期为 10π.

(1) 求 ω 的值;

(2) 设 α, $\beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f\left(5\alpha+\dfrac{5}{3}\pi\right)=-\dfrac{6}{5}$, $f\left(5\beta-\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{16}{17}$, 求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

17. 某班 50 位学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图所示, 其中成绩分组区间是: $[40,50)$, $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100]$.



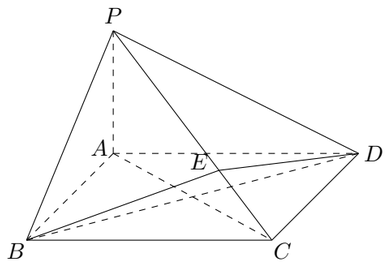
(1) 求图中 x 的值;

(2) 从成绩不低于 80 分的学生中随机选取 2 人, 该 2 人中成绩在 90 分以上 (含 90 分) 的人数记为 ξ, 求 ξ 的数学期望.

18. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 点 E 在线段 PC 上, $PC\perp$ 平面 BDE.

(1) 证明: $BD\perp$ 平面 PAC;

(2) 若 $PA=1$, $AD=2$, 求二面角 $B-PC-A$ 的正切值.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 满足 $2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1$, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 a_1, a_2+5, a_3 成等差数列.

(1) 求 a_1 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 对一切正整数 n, 有 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率 $e=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, 且椭圆 C 上的点到点 $Q(0,2)$ 的距离的最大值为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 在椭圆 C 上, 是否存在点 $M(m,n)$, 使得直线 $l:mx+ny=1$ 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相交于不同的两点 A, B, 且 $\triangle OAB$ 的面积最大? 若存在, 求出点 M 的坐标及相对应的 $\triangle OAB$ 的面积; 若不存在, 请说明理由.

21. 设 $a<1$, 集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\mid 2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$, $D=A\cap B$.

(1) 求集合 D (用区间表示);

(2) 求函数 $f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$ 在 D 内的极值点.

2012 年普通高等学校招生考试（广东卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 i 为虚数单位, 则复数 $\dfrac{3+4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $-4-3\mathrm{i}$　(B) $-4+3\mathrm{i}$　(C) $4+3\mathrm{i}$　(D) $4-3\mathrm{i}$

2. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $M=\{1,3,5\}$, 则 $\complement_U M=$ （ ）

(A) $\{2,4,6\}$　(B) $\{1,3,5\}$　(C) $\{1,2,4\}$　(D) U

3. 若向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$, $\overrightarrow{BC}=(3,4)$, 则 $\overrightarrow{AC}=$ （ ）

(A) $(4,6)$　(B) $(-4,-6)$　(C) $(-2,-2)$　(D) $(2,2)$

4. 下列函数为偶函数的是 （ ）

(A) $y=\sin x$　(B) $y=x^3$

(C) $y=\mathrm{e}^x$　(D) $y=\ln\sqrt{x^2+1}$

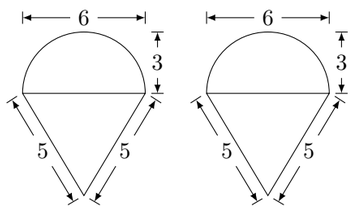
5. 已知变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 1\\ x+1\geqslant 0\\ x-y\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最小值为（ ）

(A) 3　(B) 1　(C) -5　(D) -6

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$, $BC=3\sqrt{2}$, 则 $AC=$ （ ）

(A) $4\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. 某几何体的三视图如图所示, 则它的体积为 （ ）

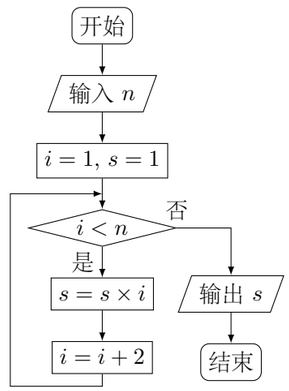


(A) 72π　(B) 48π　(C) 30π　(D) 24π

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $3x+4y-5=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A、B 两点, 则弦 AB 的长等于 （ ）

(A) $3\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 1

9. 执行如图所示的程序框图, 若输入 n 的值为 6, 则输出 s 的值为 （ ）



(A) 105　(B) 16　(C) 15　(D) 1

10. 对任意两个非零的平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$, 定义 $\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}$. 若两个非零的平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}$ 都在集合 $\left\{\dfrac{n}{2}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$ 中, 则 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=$ （ ）

(A) $\dfrac{5}{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) 1　(D) $\dfrac{1}{2}$

二、填空题

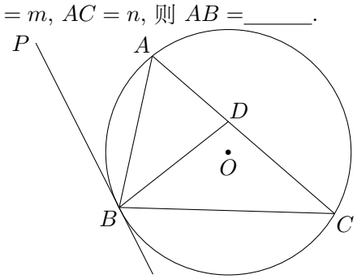
11. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域为_____.

12. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2a_4=\dfrac{1}{2}$, 则 $a_1a_3^2a_5=$_____.

13. 由正整数组成的一组数据 x_1, x_2, x_3, x_4, 其平均数和中位数都是 2, 且标准差等于 1, 则这组数据为_____. (从小到大排列)

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 和 C_2 的参数方程分别为 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta\\ y=\sqrt{5}\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数, $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$) 和 $\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数), 则曲线 C_1 与 C_2 的交点坐标为_____.

15. 如图所示, 直线 PB 与圆 O 相切于点 B, D 是弦 AC 上的点, $\angle PBA=\angle DBA$, 若 $AD=m$, $AC=n$, 则 $AB=$_____.



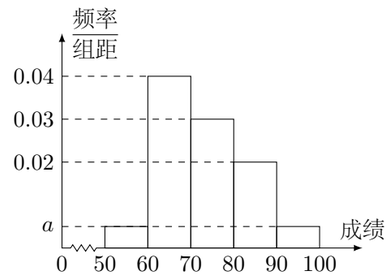
三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=A\cos\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x\in\mathbf{R}$, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$.

(1) 求 A 的值;

(2) 设 α, $\beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f\left(4\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)=-\dfrac{30}{17}$, $f\left(4\beta-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{8}{5}$, 求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

17. 某校 100 名学生期中考试语文成绩的频率分布直方图如图所示, 其中成绩分组区间是: $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100]$.



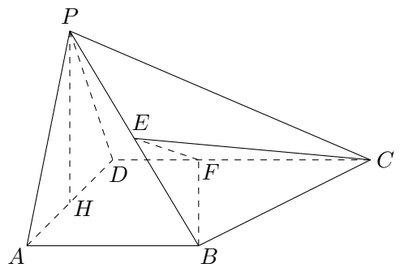
(1) 求图中 a 的值;

(2) 根据频率分布直方图, 估计这 100 名学生语文成绩的平均分;

(3) 若这 100 名学生语文成绩某些分数段的人数 (x) 与数学成绩相应分数段的人数 (y) 之比如下表所示, 求数学成绩在 $[50,90)$ 之外的人数.

分数段	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$
$x:y$	1 : 1	2 : 1	3 : 4	4 : 5

18. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \perp$ 平面 PAD, $AB \parallel CD$, $PD=AD$, E 是 PB 中点, F 是 DC 上的点且 $DF=\dfrac{1}{2}AB$, PH 为 $\triangle PAD$ 中 AD 边上的高.
(1) 证明: $PH \perp$ 平面 $ABCD$;
(2) 若 $PH=1$, $AD=\sqrt{2}$, $FC=1$, 求三棱锥 $E-BCF$ 的体积;
(3) 证明: $EF \perp$ 平面 PAB.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 满足 $T_n=2S_n-n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$.
(1) 求 a_1 的值;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点 $F_1(-1,0)$, 且点 $P(0,1)$ 在 C_1 上.
(1) 求椭圆 C_1 的方程;
(2) 设直线 l 同时与椭圆 C_1 和抛物线 $C_2: y^2=4x$ 相切, 求直线 l 的方程.

21. 设 $0<a<1$, 集合 $A=\{x \in \mathbf{R} \mid x>0\}$, $B=\{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$, $D=A \cap B$.
(1) 求集合 D (用区间表示);
(2) 求函数 $f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$ 在 D 内的极值点.

2012 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 方程 $x^2+6x+13=0$ 的一个根是 （ ）

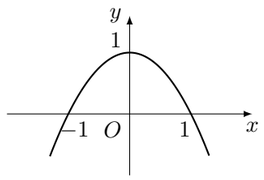
(A) $-3+2\mathrm{i}$　(B) $3+2\mathrm{i}$　(C) $-2+3\mathrm{i}$　(D) $2+3\mathrm{i}$

2. 命题“$\exists x_0 \in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$, $x_0^3 \in \mathbf{Q}$”的否定是 （ ）

(A) $\exists x_0 \notin \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$, $x_0^3 \in \mathbf{Q}$　(B) $\exists x_0 \in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$, $x_0^3 \notin \mathbf{Q}$

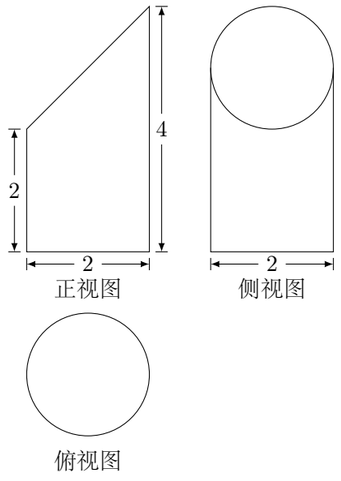
(C) $\forall x \notin \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$, $x^3 \in \mathbf{Q}$　(D) $\forall x \in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$, $x^3 \notin \mathbf{Q}$

3. 已知二次函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 则它与 x 轴所围成的图形的面积为 （ ）



(A) $\dfrac{2\pi}{5}$　(B) $\dfrac{4}{3}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

4. 已知某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 （ ）



(A) $\dfrac{8\pi}{3}$　(B) 3π　(C) $\dfrac{10\pi}{3}$　(D) 6π

5. 设 $a \in \mathbf{Z}$, 且 $0 \leqslant a < 13$, 若 $51^{2012}+a$ 能被 13 整除, 则 $a=$ （ ）

(A) 0　(B) 1　(C) 11　(D) 12

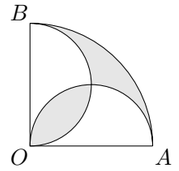
6. 设 a, b, c, x, y, z 是正数, 且 $a^2+b^2+c^2=10$, $x^2+y^2+z^2=40$, $ax+by+cz=20$, 则 $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

7. 定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 如果对于任意给定的等比数列 $\{a_n\}$, $\{f(a_n)\}$ 仍是等比数列, 则称 $f(x)$ 为“保等比数列函数”. 现有定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的如下函数:
① $f(x)=x^2$; ② $f(x)=2^x$; ③ $f(x)=\sqrt{|x|}$; ④ $f(x)=\ln|x|$.
则其中是“保等比数列函数”的 $f(x)$ 的序号为 （ ）

(A) ①②　(B) ③④　(C) ①③　(D) ②④

8. 如图, 在圆心角为直角的扇形 OAB 中, 分别以 OA, OB 为直径作两个半圆. 在扇形 OAB 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率是 （ ）



(A) $1-\dfrac{2}{\pi}$　(B) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}$　(C) $\dfrac{2}{\pi}$　(D) $\dfrac{1}{\pi}$

9. 函数 $f(x)=x\cos x^2$ 在区间 $[0,4]$ 上的零点个数为 （ ）

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

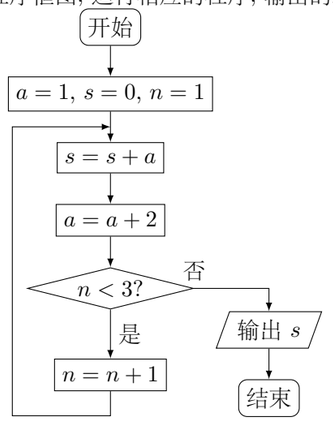
10. 我国古代数学名著《九章算术》中“开立圆术”曰: 置积尺数, 以十六乘之, 九而一, 所得开立方除之, 即立圆径. “开立圆术”相当于给出了已知球的体积 V, 求其直径 d 的一个近似公式 $d\approx\sqrt[3]{\dfrac{16}{9}V}$. 人们还用过一些类似的近似公式. 根据 $\pi=3.14159\cdots$ 判断, 下列近似公式中最精确的一个是( )

(A) $d\approx\sqrt[3]{\dfrac{16}{9}V}$　(B) $d\approx\sqrt[3]{2V}$　(C) $d\approx\sqrt[3]{\dfrac{300}{157}V}$　(D) $d\approx\sqrt[3]{\dfrac{21}{11}V}$

二、填空题

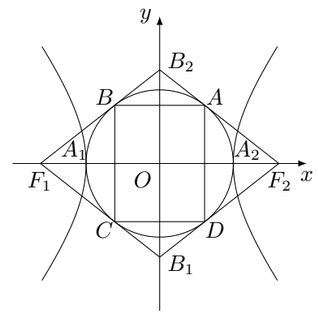
11. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若 $(a+b-c)(a+b+c)=ab$, 则角 $C=$_____.

12. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果 $s=$_____.

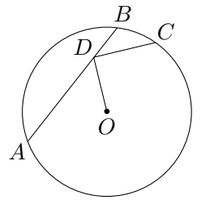


13. 回文数是指从左到右读与从右到左读都一样的正整数. 如 22, 121, 3443, 94249 等. 显然 2 位回文数有 9 个: 11, 22, 33, $\cdots$, 99; 3 位回文数有 90 个: 101, 111, 121, $\cdots$, 191, 202, $\cdots$, 999. 则
(1) 4 位回文数有_____个;
(2) $2n+1$ ($n\in\mathbf{N}^*$) 位回文数有_____个.

14. 如图, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a, $b>0$) 的两顶点为 A_1, A_2, 虚轴两端点为 B_1, B_2, 两焦点为 F_1, F_2. 若以 A_1A_2 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$, 切点分别为 A, B, C, D. 则
(1) 双曲线的离心率 $e=$_____;
(2) 菱形 $F_1B_1F_2B_2$ 的面积 S_1 与矩形 $ABCD$ 的面积 S_2 的比值 $\dfrac{S_1}{S_2}=$_____.



15. 如图, 点 D 在 $\odot O$ 的弦 AB 上移动, $AB=4$, 连接 OD, 过点 D 作 OD 的垂线交 $\odot O$ 于点 C, 则 CD 的最大值为_____.



16. 在直角坐标系 xOy 中, 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知射线 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 与曲线 $\begin{cases}x=t+1\\ y=(t-1)^2\end{cases}$ (t 为参数) 相交于 A, B 两点, 则线段 AB 的中点的直角坐标为_____.

三、解答题

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\omega x-\sin\omega x,\sin\omega x)$, $\boldsymbol{b}=\left(-\cos\omega x-\sin\omega x,2\sqrt{3}\cos\omega x\right)$, 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda$ ($x\in\mathbf{R}$) 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称, 其中 ω, λ 为常数, 且 $\omega\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 若 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{5}\right]$ 上的取值范围.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前三项的和为 -3, 前三项的积为 8.
(1) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 a_2, a_3, a_1 成等比数列, 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和.

19. 如图 1, $\angle ACB = 45^\circ$, $BC = 3$, 过动点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足 D 在线段 BC 上且异于点 B, 连接 AB, 沿 AD 将 $\triangle ABD$ 折起, 使 $\angle BDC = 90^\circ$ (如图 2 所示).
(1) 当 BD 的长为多少时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大;
(2) 当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时, 设点 E, M 分别为棱 BC, AC 的中点, 试在棱 CD 上确定一点 N, 使得 $EN \perp BM$, 并求 EN 与平面 BMN 所成角的大小.

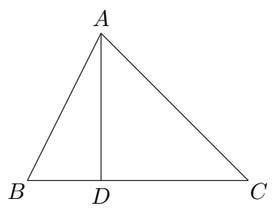


图 1

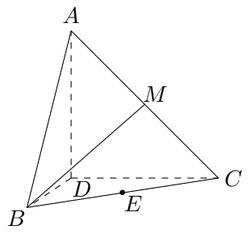


图 2

20. 根据以往的经验, 某工程施工期间的降水量 X (单位: mm) 对工期的影响如下表:

降水量 X	$X<300$	$300\leqslant X<700$	$700\leqslant X<900$	$X\geqslant 900$
工期延误天数 Y	0	2	6	10

历年气象资料表明, 该工程施工期间降水量 X 小于 300, 700, 900 的概率分别为 0.3, 0.7, 0.9. 求:
(1) 工期延误天数 Y 的均值与方差;
(2) 在降水量 X 至少是 300 的条件下, 工期延误不超过 6 天的概率.

21. 设 A 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的任意一点, l 是过点 A 与 x 轴垂直的直线, D 是直线 l 与 x 轴的交点, 点 M 在直线 l 上, 且满足 $|DM| = m|DA|$ ($m>0$ 且 $m\neq 1$). 当点 A 在圆上运动时, 记点 M 的轨迹为曲线 C.
(1) 求曲线 C 的方程, 判断曲线 C 为何种圆锥曲线, 并求其焦点坐标;
(2) 过原点且斜率为 k 的直线交曲线 C 于 P, Q 两点, 其中 P 在第一象限, 它在 y 轴上的射影为点 N, 直线 QN 交曲线 C 于另一点 H. 是否存在 m, 使得对任意的 $k>0$, 都有 $PQ \perp PH$? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (1) 已知函数 $f(x) = rx - x^r + (1-r)$ $(x>0)$, 其中 r 为有理数, 且 $0<r<1$, 求 $f(x)$ 的最小值;
(2) 试用 (1) 的结果证明如下命题: 设 $a_1\geqslant 0$, $a_2\geqslant 0$, b_1, b_2 为正有理数. 若 $b_1+b_2=1$, 则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\leqslant a_1b_1+a_2b_2$;
(3) 请将 (2) 中的命题推广到一般形式, 并用数学归纳法证明你所推广的命题.
注: 当 α 为正有理数时, 有求导公式 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

2012 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid 0<x<5, x\in\mathbf{N}\}$, 则满足条件 $A\subseteq C\subseteq B$ 的集合 C 的个数为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 容量为 20 的样本数据, 分组后的频数如下表:

分组	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$
频数	2	3	4	5	4	2

则样本数据落在区间 $[10,40)$ 的频率为 （ ）

(A) 0.35 (B) 0.45 (C) 0.55 (D) 0.65

3. 函数 $f(x)=x\cos 2x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的零点的个数为 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

4. 命题“存在一个无理数, 它的平方是有理数”的否定是 （ ）

(A) 任意一个有理数, 它的平方是有理数

(B) 任意一个无理数, 它的平方不是有理数

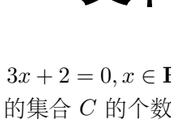
(C) 存在一个有理数, 它的平方是有理数

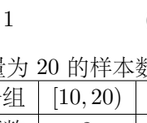
(D) 存在一个无理数, 它的平方不是有理数

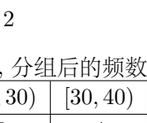
5. 过点 $P(1,1)$ 的直线, 将圆形区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$ 分为两部分, 使得这两部分的面积之差最大, 则该直线的方程为 （ ）

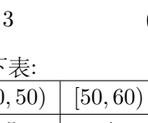
(A) $x+y-2=0$ (B) $y-1=0$ (C) $x-y=0$ (D) $x+3y-4=0$

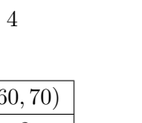
6. 已知定义在区间 $[0,2]$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 则 $y=-f(2-x)$ 的图象为 （ ）



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

7. 定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 如果对于任意给定的等比数列 $\{a_n\}$, $\{f(a_n)\}$ 仍是等比数列, 则称 $f(x)$ 为“保等比数列函数”. 现有定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的如下函数:
① $f(x)=x^2$; ② $f(x)=2^x$; ③ $f(x)=\sqrt{|x|}$; ④ $f(x)=\ln|x|$.
则其中是“保等比数列函数”的 $f(x)$ 的序号为 （ ）

(A) ①② (B) ③④ (C) ①③ (D) ②④

8. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若三边的长为连续的三个正整数, 且 $A>B>C$, $3b=20a\cos A$, 则 $\sin A:\sin B:\sin C$ 为( )

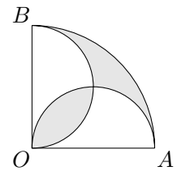
(A) 4 : 3 : 2 (B) 5 : 6 : 7 (C) 5 : 4 : 3 (D) 6 : 5 : 4

9. 设 a, b, $c\in\mathbf{R}_+$, 则“$abc=1$”是“$\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\leqslant a+b+c$”的 （ ）

(A) 充分条件但不是必要条件 (B) 必要条件但不是充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要的条件

10. 如图, 在圆心角为直角的扇形 OAB 中, 分别以 OA, OB 为直径作两个半圆. 在扇形 OAB 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率是 （ ）



(A) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}$ (B) $\dfrac{1}{\pi}$ (C) $1-\dfrac{2}{\pi}$ (D) $\dfrac{2}{\pi}$

二、填空题

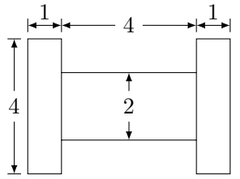
11. 一支田径运动队有男运动员 56 人, 女运动员 42 人. 现用分层抽样的方法抽取若干人, 若抽取的男运动员有 8 人, 则抽取的女运动员有_____人.

12. 若 $\dfrac{3+b\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=a+b\mathrm{i}$ (a, b 为实数, i 为虚数单位), 则 $a+b=$_____.

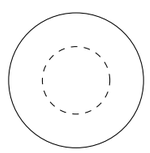
13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$, $\boldsymbol{b}=(1,1)$, 则
(1) 与 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量的坐标表示为_____;
(2) 向量 $\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 夹角的余弦值为_____.

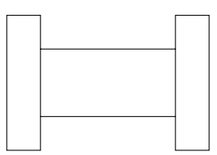
14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant -1\\ x+y\geqslant 1\\ 3x-y\leqslant 3\end{cases}$, 则目标函数 $z=2x+3y$ 的最小值是_____.

15. 已知某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为_____.

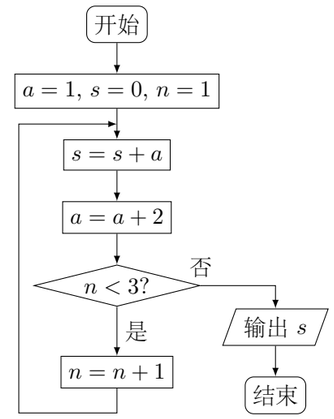


正视图

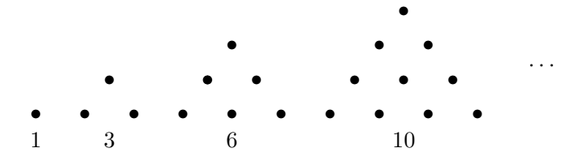

侧视图


俯视图

16. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果 $s=$_____.



17. 传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家经常在沙滩上画点或用小石子表示数. 他们研究过如图所示的三角形数:



将三角形数 1, 3, 6, 10, $\cdots$ 记为数列 $\{a_n\}$, 将可被 5 整除的三角形数按从小到大的顺序组成一个新数列 $\{b_n\}$, 可以推测:
(1) b_{2012} 是数列 $\{a_n\}$ 中的第_____项;
(2) $b_{2k-1}=$_____. (用 k 表示)

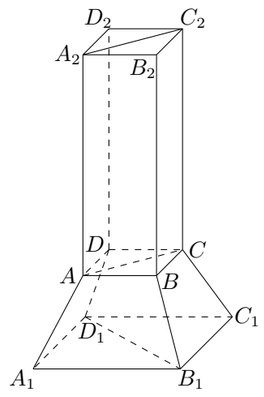
三、解答题

18. 设函数 $f(x)=\sin^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x-\cos^2\omega x+\lambda$ ($x\in\mathbf{R}$) 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称, 其中 ω, λ 为常数, 且 $\omega\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 若 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$, 求函数 $f(x)$ 的值域.

19. 某个实心零部件的形状是如图所示的几何体, 其下部是底面均是正方形, 侧面是全等的等腰梯形的四棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$, 上部是一个底面与四棱台的上底面重合, 侧面是全等的矩形的四棱柱 $ABCD-A_2B_2C_2D_2$.

(1) 证明: 直线 $B_1D_1 \perp$ 平面 ACC_2A_2;

(2) 现需要对该零部件表面进行防腐处理. 已知 $AB=10$, $A_1B_1=20$, $AA_2=30$, $AA_1=13$ (单位: 厘米), 每平方厘米的加工处理费用为 0.20 元, 需加工处理费多少元?



20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前三项的和为 -3, 前三项的积为 8.

(1) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 a_2, a_3, a_1 成等比数列, 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和.

21. 设 A 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的任意一点, l 是过点 A 与 x 轴垂直的直线, D 是直线 l 与 x 轴的交点, 点 M 在直线 l 上, 且满足 $|DM|=m|DA|$ ($m>0$ 且 $m\neq 1$). 当点 A 在圆上运动时, 记点 M 的轨迹为曲线 C.

(1) 求曲线 C 的方程, 判断曲线 C 为何种圆锥曲线, 并求其焦点坐标;

(2) 过原点且斜率为 k 的直线交曲线 C 于 P, Q 两点, 其中 P 在第一象限, 它在 y 轴上的射影为点 N, 直线 QN 交曲线 C 于另一点 H. 是否存在 m, 使得对任意的 $k>0$, 都有 $PQ \perp PH$? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. 设函数 $f(x)=ax^n(1-x)+b$ ($x>0$), n 为正整数, a, b 为常数. 曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+y=1$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(3) 证明: $f(x)<\dfrac{1}{n\mathrm{e}}$.

2012 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{-1,0,1\}$, $N=\{x\mid x^2\leqslant x\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

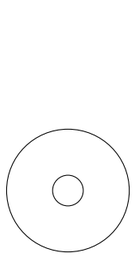
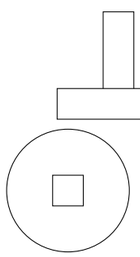
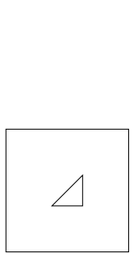
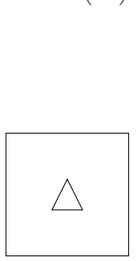
(A) $\{0\}$　(B) $\{0,1\}$　(C) $\{-1,1\}$　(D) $\{-1,0,1\}$

2. 命题“若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha=1$”的逆否命题是 （　）

(A) 若 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha\neq1$　(B) 若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha\neq1$

(C) 若 $\tan\alpha\neq1$, 则 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$　(D) 若 $\tan\alpha\neq1$, 则 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

3. 某几何体的正视图和侧视图均如下图所示, 则该几何体的俯视图不可能是 （　）

(A)  　(B)  　(C)  　(D) 

4. 设某大学的女生体重 y (单位: kg) 与身高 x (单位: cm) 具有线性相关关系, 根据一组样本数据 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$, 用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y}=0.85x-85.71$, 则下列结论中不正确的是 （　）

(A) y 与 x 具有正的线性相关关系

(B) 回归直线过样本点的中心 $(\overline{x},\overline{y})$

(C) 若该大学某女生身高增加 1 cm, 则其体重约增加 0.85 kg

(D) 若该大学某女生身高为 170 cm, 则可断定其体重必为 58.79 kg

5. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距为 10, 点 $P(2,1)$ 在 C 的渐近线上, 则 C 的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{80}-\dfrac{y^2}{20}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{80}=1$

6. 函数 $f(x)=\sin x-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值域为 （　）

(A) $[-2,2]$　(B) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　(C) $[-1,1]$　(D) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=3$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1$, 则 $BC=$ （　）

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\sqrt{7}$　(C) $2\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{23}$

8. 已知两条直线 $l_1:y=m$ 和 $l_2:y=\dfrac{8}{2m+1}$ $(m>0)$, l_1 与函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 A, B, l_2 与函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 C, D. 记线段 AC 和 BD 在 x 轴上的投影长度分别为 a, b. 当 m 变化时, $\dfrac{b}{a}$ 的最小值为 （　）

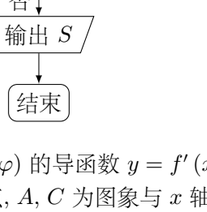
(A) $16\sqrt{2}$　(B) $8\sqrt{2}$　(C) $8\sqrt[3]{4}$　(D) $4\sqrt[3]{4}$

二、填空题

9. 在直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 $C_1:\begin{cases}x=t+1,\\y=1-2t\end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 $C_2:\begin{cases}x=a\sin\theta\\y=3\cos\theta\end{cases}$ (θ 为参数, $a>0$) 有一个公共点在 x 轴上, 则 $a=$_____.

10. 不等式 $|2x+1|-2|x-1|>0$ 的解集为_____.

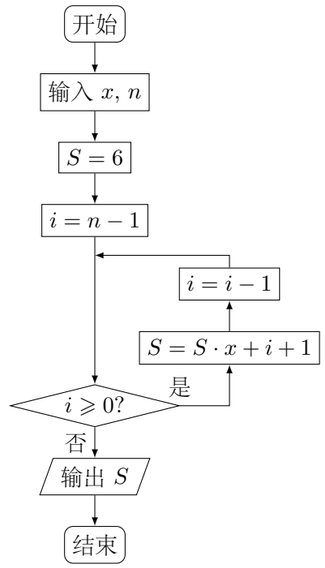
11. 如图, 过点 P 的直线与 $\odot O$ 相交于 A, B 两点. 若 $PA=1$, $AB=2$, $PO=3$, 则 $\odot O$ 的半径等于_____.



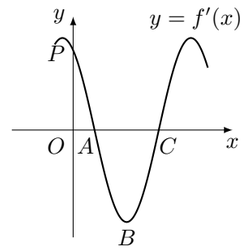
12. 已知复数 $z=(3+\mathrm{i})^2$ (i 为虚数单位), 则 $|z|=$_____.

13. $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为_____. (用数字作答)

14. 如果执行如图所示的程序框图, 输入 $x=-1$, $n=3$, 则输出的数 $S=$_____.



15. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的部分图象如图所示, 其中, P 为图象与 y 轴的交点, A, C 为图象与 x 轴的两个交点, B 为图象的最低点.



(1) 若 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$, 点 P 的坐标为 $\left(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $\omega=$_____;

(2) 若在曲线段 $\overset{\frown}{ABC}$ 与 x 轴所围成的区域内随机取一点, 则该点在 $\triangle ABC$ 内的概率为_____.

16. 设 $N=2^n$ $(n\in\mathbf{N}^*,\ n\geqslant2)$, 将 N 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 依次放入编号为 $1,2,\cdots,N$ 的 N 个位置, 得到排列 $P_0=x_1x_2\cdots x_N$. 将该排列中分别位于奇数与偶数位置的数取出, 并按原顺序依次放入对应的前 $\dfrac{N}{2}$ 和后 $\dfrac{N}{2}$ 个位置, 得到排列 $P_1=x_1x_3\cdots x_{N-1}x_2x_4\cdots x_N$, 将此操作称为 C 变换. 将 P_1 分成两段, 每段 $\dfrac{N}{2}$ 个数, 并对每段作 C 变换, 得到 P_2; 当 $2\leqslant i\leqslant n-2$ 时, 将 P_i 分成 2^i 段, 每段 $\dfrac{N}{2^i}$ 个数, 并对每段作 C 变换, 得到 P_{i+1}. 例如, 当 $N=8$ 时, $P_2=x_1x_5x_3x_7x_2x_6x_4x_8$, 此时 x_7 位于 P_2 中的第 4 个位置.

(1) 当 $N=16$ 时, x_7 位于 P_2 中的第_____个位置;

(2) 当 $N=2^n$ $(n\geqslant8)$ 时, x_{173} 位于 P_4 中的第_____个位置.

三、解答题

17. 某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示.

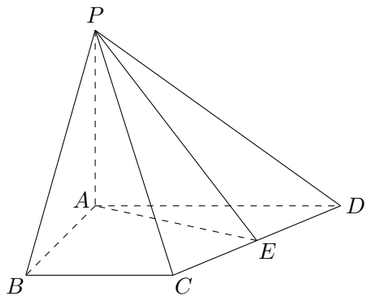
一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数 (人)	x	30	25	y	10
结算时间 (分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

(1) 确定 x, y 的值, 并求顾客一次购物的结算时间 X 的分布列与数学期望;

(2) 若某顾客到达收银台时前面恰有 2 位顾客需结算, 且各顾客的结算相互独立, 求该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率. (注: 将频率视为概率)

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=4$, $BC=3$, $AD=5$, $\angle DAB=\angle ABC=90^\circ$, E 是 CD 的中点.
(1) 证明: $CD\perp$ 平面 PAE;
(2) 若直线 PB 与平面 PAE 所成的角和 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角相等, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 $A(n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $B(n)=a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}$, $C(n)=a_3+a_4+\cdots+a_{n+2}$, $n=1,2,\cdots$.
(1) 若 $a_1=1$, $a_2=5$, 且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 三个数 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成等差数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列的充分必要条件是: 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 三个数 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成公比为 q 的等比数列.

20. 某企业接到生产 3000 台某产品的 A, B, C 三种部件的订单, 每台产品需要这三种部件的数量分别为 2, 2, 1 (单位: 件). 已知每个工人每天可生产 A 部件 6 件, 或 B 部件 3 件, 或 C 部件 2 件, 该企业计划安排 200 名工人分成三组分别生产这三种部件, 生产 B 部件的人数与生产 A 部件的人数成正比, 比例系数为 k (k 为正整数).
(1) 设生产 A 部件的人数为 x, 分别写出完成 A, B, C 三种部件生产需要的时间;
(2) 假设这三种部件的生产同时开工, 试确定正整数 k 的值, 使完成订单任务的时间最短, 并给出时间最短时具体的人数分组方案.

21. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 上的点均在圆 $C_2:(x-5)^2+y^2=9$ 外, 且对 C_1 上任意一点 M, M 到直线 $x=-2$ 的距离等于该点与圆 C_2 上点的距离的最小值.
(1) 求曲线 C_1 的方程;
(2) 设 $P(x_0,y_0)$ ($y_0\neq\pm3$) 为圆 C_2 外一点, 过 P 作圆 C_2 的两条切线, 分别与曲线 C_1 相交于点 A, B 和 C, D. 证明: 当 P 在直线 $x=-4$ 上运动时, 四点 A, B, C, D 的纵坐标之积为定值.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}-x$, 其中 $a\neq0$.
(1) 若对一切 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant1$ 恒成立, 求 a 的取值集合;
(2) 在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ $(x_1<x_2)$, 记直线 AB 的斜率为 k. 问: 是否存在 $x_0\in(x_1,x_2)$, 使 $f'(x_0)>k$ 成立? 若存在, 求 x_0 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

2012 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{-1,0,1\}$, $N=\{x\mid x^2=x\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $\{-1,0,1\}$　(B) $\{0,1\}$　(C) $\{1\}$　(D) $\{0\}$

2. 复数 $z=\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)$ (i 为虚数单位) 的共轭复数是 （　）

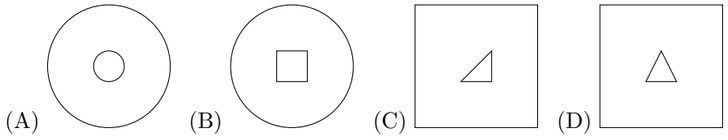
(A) $-1-\mathrm{i}$　(B) $-1+\mathrm{i}$　(C) $1-\mathrm{i}$　(D) $1+\mathrm{i}$

3. 命题“若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha=1$”的逆否命题是 （　）

(A) 若 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha\neq1$　(B) 若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha\neq1$

(C) 若 $\tan\alpha\neq1$, 则 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$　(D) 若 $\tan\alpha\neq1$, 则 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

4. 某几何体的正视图和侧视图均如下图所示, 则该几何体的俯视图不可能是 （　）



(A)　(B)　(C)　(D)

5. 设某大学的女生体重 y (单位: kg) 与身高 x (单位: cm) 具有线性相关关系, 根据一组样本数据 (x_i,y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y}=0.85x-85.71$, 则下列结论中不正确的是 （　）

(A) y 与 x 具有正的线性相关关系

(B) 回归直线过样本点的中心 $(\overline{x},\overline{y})$

(C) 若该大学某女生身高增加 1 cm, 则其体重约增加 0.85 kg

(D) 若该大学某女生身高为 170 cm, 则可断定其体重必为 58.79 kg

6. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距为 10, 点 $P(2,1)$ 在 C 的渐近线上, 则 C 的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{80}-\dfrac{y^2}{20}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{80}=1$

7. 设 $a>b>1$, $c<0$, 给出下列三个结论:
① $\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$; ② $a^c<b^c$; ③ $\log_b(a-c)>\log_a(b-c)$.
其中所有正确结论的序号是 （　）

(A) ①　(B) ①②　(C) ②③　(D) ①②③

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=\sqrt{7}$, $BC=2$, $B=60^\circ$, 则 BC 边上的高等于 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{39}}{4}$

9. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 是最小正周期为 2π 的偶函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数. 当 $x\in[0,\pi]$ 时, $0<f(x)<1$; 当 $x\in(0,\pi)$ 且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)f'(x)>0$, 则函数 $y=f(x)-\sin x$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的零点个数为 （　）

(A) 2　(B) 4　(C) 5　(D) 8

二、填空题

10. 在极坐标系中, 曲线 $C_1:\rho\left(\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta\right)=1$ 与曲线 $C_2:\rho=a$ $(a>0)$ 的一个交点在极轴上, 则 $a=$_____.

11. 某制药企业为了对某种药用液体进行生物测定, 需要优选培养温度, 试验范围定为 $29^\circ\mathrm{C}\sim63^\circ\mathrm{C}$, 精确度要求 $\pm1^\circ\mathrm{C}$. 用分数法进行优选时, 能保证找到最佳培养温度需要的最少试验次数为_____.

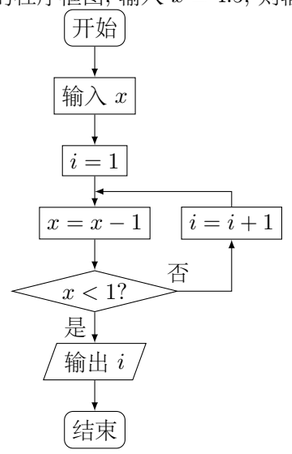
12. 不等式 $x^2-5x+6\leqslant0$ 的解集为_____.

13. 如图是某学校一名篮球运动员在五场比赛中所得分数的茎叶图, 则该运动员在这五场比赛中得分的方差为_____.

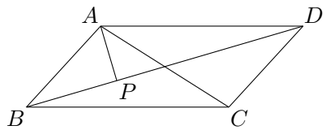
0	8	9		
1	0	3	5	

(注: 方差 $s^2=\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right]$, 其中 $\overline{x}$ 为 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的平均数)

14. 如果执行如图所示的程序框图, 输入 $x=4.5$, 则输出的数 $i=$_____.



15. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AP\perp BD$, 垂足为 P, 且 $AP=3$, 则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____.



16. 对于 $n\in\mathbf{N}^*$, 将 n 表示为 $n=a_k\times2^k+a_{k-1}\times2^{k-1}+\cdots+a_1\times2^1+a_0\times2^0$, 当 $i=k$ 时, $a_i=1$, 当 $0\leqslant i\leqslant k-1$ 时, a_i 为 0 或 1. 定义 b_n 如下: 在 n 的上述表示中, 当 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_k 中等于 1 的个数为奇数时, $b_n=1$; 否则 $b_n=0$.

(1) $b_2+b_4+b_6+b_8=$_____;
(2) 记 c_m 为数列 $\{b_n\}$ 中第 m 个为 0 的项与第 $m+1$ 个为 0 的项之间的项数, 则 c_m 的最大值是_____.

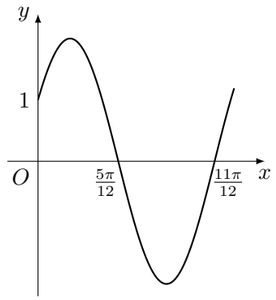
三、解答题

17. 某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示.

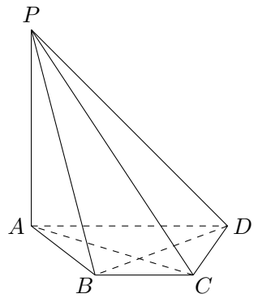
一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数 (人)	x	30	25	y	10
结算时间 (分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.
(1) 确定 x, y 的值, 并估计顾客一次购物的结算时间的平均值;
(2) 求一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟的概率. (将频率视为概率)

18. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(x\in\mathbf{R},\ \omega>0,\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示.
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 求函数 $g(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)-f\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的单调递增区间.



19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD/\!/BC$, $AC\perp BD$.
(1) 证明: $BD\perp PC$;
(2) 若 $AD=4$, $BC=2$, 直线 PD 与平面 PAC 所成的角为 $30°$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



20. 某公司一下属企业从事某种高科技产品的生产. 该企业第一年年初有资金 2000 万元, 将其投入生产, 到当年年底资金增长了 50%, 预计以后每年资金年增长率与第一年的相同. 公司要求企业从第一年开始, 每年年底上缴资金 d 万元, 并将剩余资金全部投入下一年生产. 设第 n 年年底企业上缴资金后的剩余资金为 a_n 万元.
(1) 用 d 表示 a_1, a_2, 并写出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式;
(2) 若公司希望经过 m ($m\geqslant 3$) 年使企业的剩余资金为 4000 万元, 试确定企业每年上缴资金 d 的值 (用 m 表示).

21. 在直角坐标系 xOy 中, 已知中心在原点, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$ 的椭圆 E 的一个焦点为圆 $C: x^2+y^2-4x+2=0$ 的圆心.
(1) 求椭圆 E 的方程;
(2) 设 P 是椭圆 E 上一点, 过 P 作两条斜率之积为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线 l_1, l_2, 当直线 l_1, l_2 都与圆 C 相切时, 求 P 的坐标.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$, 其中 $a>0$.
(1) 若对一切 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant 1$ 恒成立, 求 a 的取值集合;
(2) 在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ $(x_1<x_2)$, 记直线 AB 的斜率为 k, 证明: 存在 $x_0\in(x_1,x_2)$, 使 $f'(x_0)=k$ 成立.

2012 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

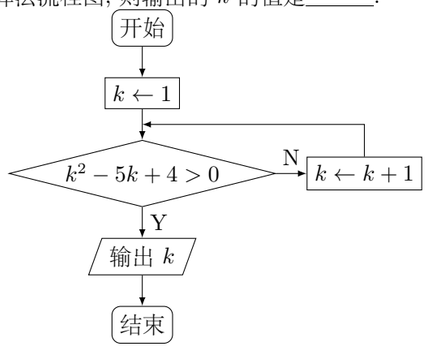
一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,2,4\}$, $B=\{2,4,6\}$, 则 $A\cup B=$_____.

2. 某学校高一、高二、高三年级的学生人数之比是 $3:3:4$, 现用分层抽样的方法从该校高中三个年级的学生中抽取容量为 50 的样本, 则应从高二年级抽取_____名学生.

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$, $a+b\mathrm{i}=\dfrac{11-7\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位), 则 $a+b$ 的值为_____.

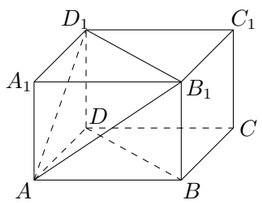
4. 如图是一个算法流程图, 则输出的 k 的值是_____.



5. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2\log_6 x}$ 的定义域为_____.

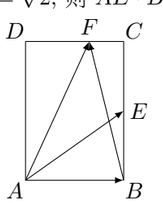
6. 现有 10 个数, 它们能构成一个以 1 为首项, -3 为公比的等比数列, 若从这 10 个数中随机抽取一个数, 则它小于 8 的概率是_____.

7. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=3$ cm, $AA_1=2$ cm, 则四棱锥 $A-BB_1D_1D$ 的体积为_____cm^3.



8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{m^2+4}=1$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, 则 m 的值为_____.

9. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=\sqrt{2}$, $BC=2$, 点 E 为 BC 的中点, 点 F 在边 CD 上, 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的值是_____.



10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数, 且在区间 $[-1,1]$ 上, $f(x)=\begin{cases}ax+1, & -1\leqslant x<0\\ \dfrac{bx+2}{x+1}, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$, 其中 $a,b\in\mathbf{R}$. 若 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, 则 $a+3b$ 的值为_____.

11. 设 α 为锐角, 若 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的值为_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $x^2+y^2-8x+15=0$, 若直线 $y=kx-2$ 上至少存在一点, 使得以该点为圆心, 1 为半径的圆与圆 C 有公共点, 则 k 的最大值是_____.

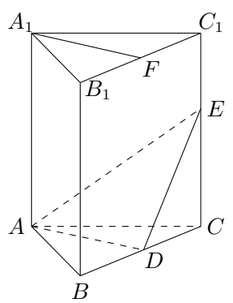
13. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$ ($a,\ b\in\mathbf{R}$) 的值域为 $[0,+\infty)$, 若关于 x 的不等式 $f(x)<c$ 的解集为 $(m,m+6)$, 则实数 c 的值为_____.

14. 已知正数 a,b,c 满足 $5c-3a\leqslant b\leqslant 4c-a$, $c\ln b\geqslant a+c\ln c$, 则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是_____.

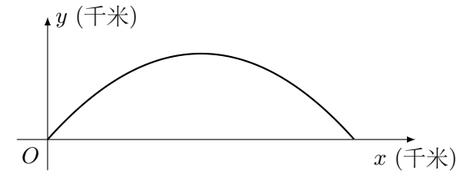
二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
(1) 求证: $\tan B=3\tan A$;
(2) 若 $\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 求 A 的值.

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1=A_1C_1$, D, E 分别是棱 BC, CC_1 上的点 (点 D 不同于点 C), 且 $AD\perp DE$, F 为 B_1C_1 的中点. 求证:
(1) 平面 $ADE\perp$ 平面 BCC_1B_1;
(2) 直线 $A_1F\parallel$ 平面 ADE.



17. 如图, 建立平面直角坐标系 xOy, x 轴在地平面上, y 轴垂直于地平面, 单位长度为 1 千米, 某炮位于坐标原点. 已知炮弹发射后的轨迹在方程 $y=kx-\dfrac{1}{20}(1+k^2)x^2$ ($k>0$) 表示的曲线上, 其中 k 与发射方向有关. 炮的射程是指炮弹落地点的横坐标.
(1) 求炮的最大射程;
(2) 设在第一象限有一飞行物 (忽略其大小), 其飞行高度为 3.2 千米, 试问它的横坐标 a 不超过多少时, 炮弹可以击中它? 请说明理由.



18. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值或极小值, 则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极值点. 已知 a,b 是实数, 1 和 -1 是函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的两个极值点.
(1) 求 a 和 b 的值;
(2) 设函数 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)=f(x)+2$, 求 $g(x)$ 的极值点;
(3) 设 $h(x)=f(f(x))-c$, 其中 $c\in[-2,2]$, 求函数 $y=h(x)$ 的零点个数.

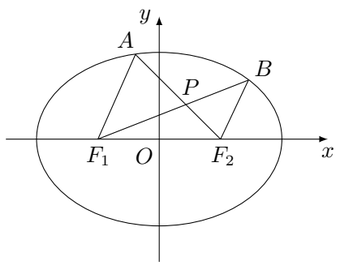
19. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, 已知点 $(1,e)$ 和 $\left(e,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 都在椭圆上, 其中 e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 A, B 是椭圆上位于 x 轴上方的两点, 且直线 AF_1 与直线 BF_2 平行, AF_2 与 BF_1 交于点 P.

① 若 $AF_1-BF_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 求直线 AF_1 的斜率;

② 求证: PF_1+PF_2 是定值.



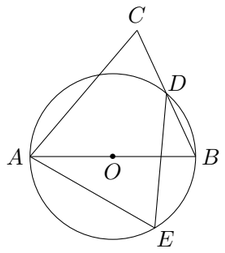
20. 已知各项均为正数的两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 设 $b_{n+1}=1+\dfrac{b_n}{a_n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求证: 数列 $\left\{\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2\right\}$ 是等差数列;

(2) 设 $b_{n+1}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{b_n}{a_n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $\{a_n\}$ 是等比数列, 求 a_1 和 b_1 的值.

21. 四选二.

【A】如图, AB 是圆 O 的直径, D, E 为圆 O 上位于 AB 异侧的两点, 连接 BD 并延长至点 C, 使 $BD=DC$, 连接 AC, AE, DE. 求证: $\angle E=\angle C$.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

【C】在极坐标系中, 已知圆 C 经过点 $P\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$, 圆心为直线 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 与极轴的交点, 求圆 C 的极坐标方程.

【D】已知实数 x, y 满足: $|x+y|<\dfrac{1}{3}$, $|2x-y|<\dfrac{1}{6}$, 求证: $|y|<\dfrac{5}{18}$.

22. 设 ξ 为随机变量, 从棱长为 1 的正方体的 12 条棱中任取两条, 当两条棱相交时, $\xi=0$; 当两条棱平行时, ξ 的值为两条棱之间的距离; 当两条棱异面时, $\xi=1$.

(1) 求概率 $P(\xi=0)$;

(2) 求 ξ 的分布列, 并求其数学期望 $E(\xi)$.

23. 设集合 $P_n=\{1,2,\cdots,n\}$, $n\in\mathbf{N}^*$. 记 $f(n)$ 为同时满足下列条件的集合 A 的个数: ① $A\subseteq P_n$; ② 若 $x\in A$, 则 $2x\notin A$; ③ 若 $x\in\complement_{P_n}A$, 则 $2x\notin\complement_{P_n}A$.

(1) 求 $f(4)$;

(2) 求 $f(n)$ 的解析式 (用 n 表示).

2012 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{-1,1\}$, $B=\{0,2\}$, 则集合 $\{z\,|\,z=x+y, x\in A, y\in B\}$ 中的元素的个数为 （ ）

(A) 5　(B) 4　(C) 3　(D) 2

2. 下列函数中, 与函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 定义域相同的函数为 （ ）

(A) $y=\dfrac{1}{\sin x}$　(B) $y=\dfrac{\ln x}{x}$　(C) $y=x\mathrm{e}^x$　(D) $y=\dfrac{\sin x}{x}$

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1\\ \lg x, & x>1\end{cases}$, 则 $f(f(10))=$ （ ）

(A) $\lg 101$　(B) 2　(C) 1　(D) 0

4. 若 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$, 则 $\sin 2\theta=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

5. 下列命题中, 假命题为 （ ）

(A) 存在四边相等的四边形不是正方形

(B) z_1, $z_2\in\mathbf{C}$, z_1+z_2 为实数的充分必要条件是 z_1, z_2 互为共轭复数

(C) 若 x, $y\in\mathbf{R}$, 且 $x+y>2$, 则 x, y 至少有一个大于 1

(D) 对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$, $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n$ 都是偶数

6. 观察下列各式: $a+b=1$, $a^2+b^2=3$, $a^3+b^3=4$, $a^4+b^4=7$, $a^5+b^5=11$, $\cdots$, 则 $a^{10}+b^{10}=$ （ ）

(A) 28　(B) 76　(C) 123　(D) 199

7. 在直角三角形 ABC 中, 点 D 是斜边 AB 的中点, 点 P 为线段 CD 的中点, 则 $\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=$ （ ）

(A) 2　(B) 4　(C) 5　(D) 10

8. 某农户计划种植黄瓜和韭菜, 种植面积不超过 50 亩, 投入资金不超过 54 万元, 假设种植黄瓜和韭菜的产量、成本和售价如下表

	年产量/亩	年种植成本/亩	每吨售价
黄瓜	4 吨	1.2 万元	0.55 万元
韭菜	6 吨	0.9 万元	0.3 万元

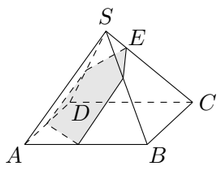
为使一年的种植总利润 (总利润 = 总销售收入 − 总种植成本) 最大, 那么黄瓜和韭菜的种植面积 (单位: 亩) 分别为 （ ）

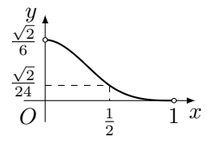
(A) 50, 0　(B) 30, 20　(C) 20, 30　(D) 0, 50

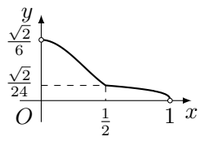
9. 样本 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 的平均数为 $\overline{x}$, 样本 $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m)$ 的平均数为 $\overline{y}$ $(\overline{x}\neq\overline{y})$. 若样本 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m)$ 的平均数 $\overline{z}=\alpha\overline{x}+(1-\alpha)\overline{y}$, 其中 $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$, 则 n, m 的大小关系为 （ ）

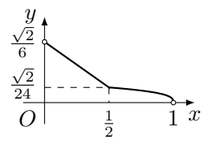
(A) $n<m$　(B) $n>m$　(C) $n=m$　(D) 不能确定

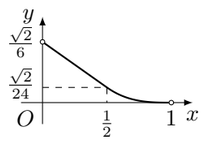
10. 如图, 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 所有棱长都为 1, 点 E 是侧棱 SC 上一动点, 过点 E 垂直于 SC 的截面将正四棱锥分成上、下两部分. 记 $SE=x$ $(0<x<1)$, 截面下面部分的体积为 $V(x)$, 则函数 $y=V(x)$ 的图象大致为 （ ）



(A)


(B)


(C)


(D)


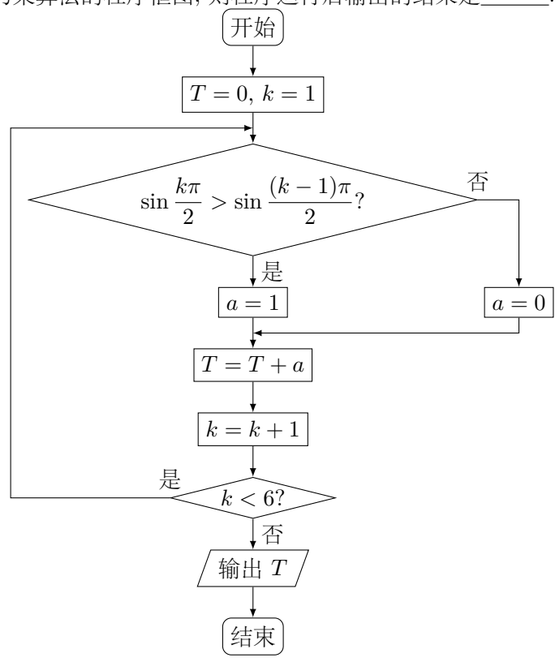
二、填空题

11. 计算定积分 $\int_{-1}^{1}(x^2+\sin x)\,\mathrm{d}x=$_____.

12. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是等差数列, 若 $a_1+b_1=7$, $a_3+b_3=21$, 则 $a_5+b_5=$_____.

13. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右顶点分别是 A, B, 左、右焦点分别是 F_1, F_2. 若 $|AF_1|$, $|F_1F_2|$, $|F_1B|$ 成等比数列, 则此椭圆的离心率为_____.

14. 如图为某算法的程序框图, 则程序运行后输出的结果是_____.



15. 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$, 以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 则曲线 C 的极坐标方程为_____.

16. 在实数范围内, 不等式 $|2x-1|+|2x+1|\leqslant 6$ 的解集为_____.

三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=-\dfrac{1}{2}n^2+kn$ (其中 $k\in\mathbf{N}_+$), 且 S_n 的最大值为 8.

(1) 确定常数 k, 并求 a_n;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{9-2a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $A=\dfrac{\pi}{4}$, $b\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+C\right)-c\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+B\right)=a$.

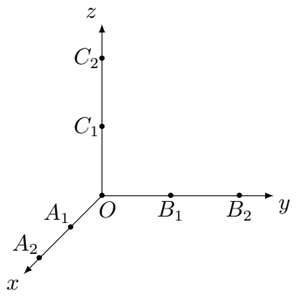
(1) 求证: $B-C=\dfrac{\pi}{2}$;

(2) 若 $a=\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 如图, 从 $A_1(1,0,0)$, $A_2(2,0,0)$, $B_1(0,1,0)$, $B_2(0,2,0)$, $C_1(0,0,1)$, $C_2(0,0,2)$ 这 6 个点中随机选取 3 个点, 将这 3 个点及原点 O 两两相连构成一个“立体”, 记该“立体”的体积为随机变量 V (如果选取的 3 个点与原点在同一个平面内, 此时“立体”的体积 $V=0$).

(1) 求 $V=0$ 的概率;

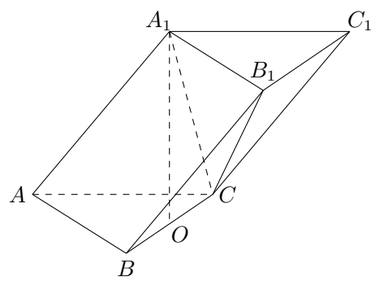
(2) 求 V 的分布列及数学期望 EV.



20. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AB=AC=AA_1=\sqrt{5}$, $BC=4$, 点 A_1 在底面 ABC 的射影是线段 BC 的中点 O.

(1) 证明: 在侧棱 AA_1 上存在一点 E, 使得 $OE\perp$ 平面 BB_1C_1C, 并求出 AE 的长;

(2) 求平面 A_1B_1C 与平面 BB_1C_1C 夹角的余弦值.



21. 已知三点 $O(0,0)$, $A(-2,1)$, $B(2,1)$, 曲线 C 上任意一点 $M(x,y)$ 满足 $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+2$.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 动点 $Q(x_0,y_0)$ $(-2<x_0<2)$ 在曲线 C 上, 曲线 C 在点 Q 处的切线为 l. 问: 是否存在定点 $P(0,t)$ $(t<0)$, 使得 l 与 PA, PB 都相交, 交点分别为 D, E, 且 $\triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比是常数? 若存在, 求 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. 若函数 $h(x)$ 满足

① $h(0)=1$, $h(1)=0$;

② 对任意 $a\in[0,1]$, 有 $h(h(a))=a$;

③ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

则称 $h(x)$ 为补函数. 已知函数 $h(x)=\left(\dfrac{1-x^p}{1+\lambda x^p}\right)^{\frac{1}{p}}$ $(\lambda>-1,\ p>0)$.

(1) 判断函数 $h(x)$ 是否为补函数, 并证明你的结论;

(2) 若存在 $m\in[0,1]$, 使 $h(m)=m$, 称 m 是函数 $h(x)$ 的中介元. 记 $p=\dfrac{1}{n}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 时 $h(x)$ 的中介元为 x_n, 且 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, 若对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$, 都有 $S_n<\dfrac{1}{2}$, 求 λ 的取值范围;

(3) 当 $\lambda=0$, $x\in(0,1)$ 时, 函数 $y=h(x)$ 的图象总在直线 $y=1-x$ 的上方, 求 p 的取值范围.

2012 年普通高等学校招生考试（江西卷）

文科数学

一、选择题

1. 若复数 $z=1+\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 $z^2+\bar{z}^2$ 的虚部为 （ ）

(A) 0　　(B) -1　　(C) 1　　(D) -2

2. 若全集 $U=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2\leqslant 4\}$, 则集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x+1|\leqslant 1\}$ 的补集 $\complement_U A$ 为 （ ）

(A) $\{x\in\mathbf{R}\,|\,0<x<2\}$　　(B) $\{x\in\mathbf{R}\,|\,0\leqslant x<2\}$

(C) $\{x\in\mathbf{R}\,|\,0<x\leqslant 2\}$　　(D) $\{x\in\mathbf{R}\,|\,0\leqslant x\leqslant 2\}$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1\\ \dfrac{2}{x}, & x>1\end{cases}$, 则 $f(f(3))=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) 3　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $\dfrac{13}{9}$

4. 若 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}$, 则 $\tan 2\alpha=$ （ ）

(A) $-\dfrac{3}{4}$　　(B) $\dfrac{3}{4}$　　(C) $-\dfrac{4}{3}$　　(D) $\dfrac{4}{3}$

5. 观察下列事实: $|x|+|y|=1$ 的不同整数解 (x,y) 的个数为 4, $|x|+|y|=2$ 的不同整数解 (x,y) 的个数为 8, $|x|+|y|=3$ 的不同整数解 (x,y) 的个数为 12, $\cdots$, 则 $|x|+|y|=20$ 的不同整数解 (x,y) 的个数为 （ ）

(A) 76　　(B) 80　　(C) 86　　(D) 92

6. 小波一星期的总开支分布如图 1 所示, 一星期的食品开支如图 2 所示, 则小波一星期的鸡蛋开支占总开支的百分比为 （ ）

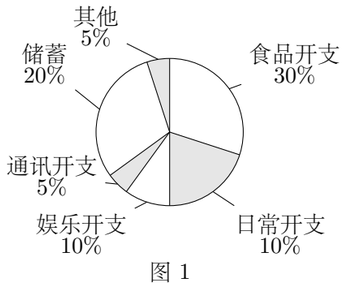


图 1

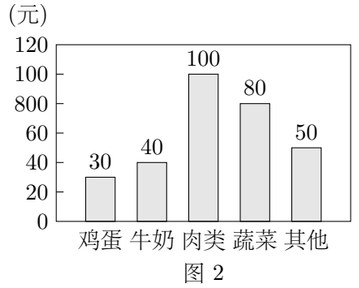
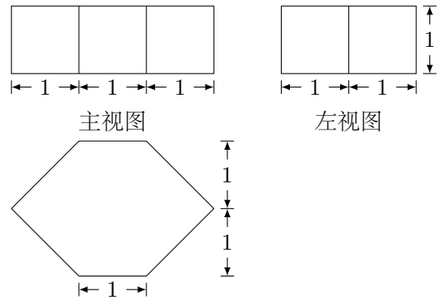


图 2

(A) 30%　　(B) 10%　　(C) 3%　　(D) 不能确定

7. 若一个几何体的三视图如图所示, 则此几何体的体积为 （ ）



(A) $\dfrac{11}{2}$　　(B) 5　　(C) $\dfrac{9}{2}$　　(D) 4

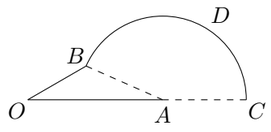
8. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左、右顶点分别是 A, B, 左、右焦点分别是 F_1, F_2. 若 $|AF_1|$, $|F_1F_2|$, $|F_1B|$ 成等比数列, 则此椭圆的离心率为( )

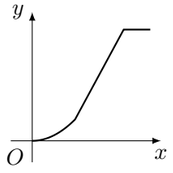
(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\sqrt{5}-2$

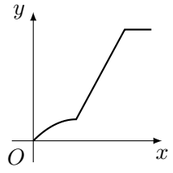
9. 已知 $f(x)=\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 若 $a=f(\lg 5)$, $b=f\left(\lg\dfrac{1}{5}\right)$, 则 （ ）

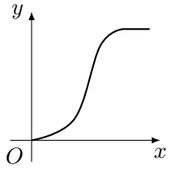
(A) $a+b=0$　　(B) $a-b=0$　　(C) $a+b=1$　　(D) $a-b=1$

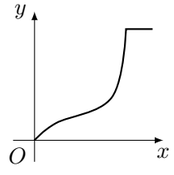
10. 如图, $|OA|=2$ (单位: m), $|OB|=1$ (单位: m), OA 与 OB 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$, 以 A 为圆心, AB 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{BDC}$ 与线段 OA 的延长线交于点 C. 甲、乙两质点同时从点 O 出发, 甲先以速率 1 (单位: m/s) 沿线段 OB 行至点 B, 再以速率 3 (单位: m/s) 沿圆弧 $\overset{\frown}{BDC}$ 行至点 C 后停止; 乙以速率 2 (单位: m/s) 沿线段 OA 行至点 A 后停止. 设 t 时刻甲、乙所到达的两点连线与它们经过的路径所围成图形的面积为 $S(t)$ ($S(0)=0$), 则函数 $y=S(t)$ 的图象大致是 （ ）



(A)


(B)


(C)


(D)


二、填空题

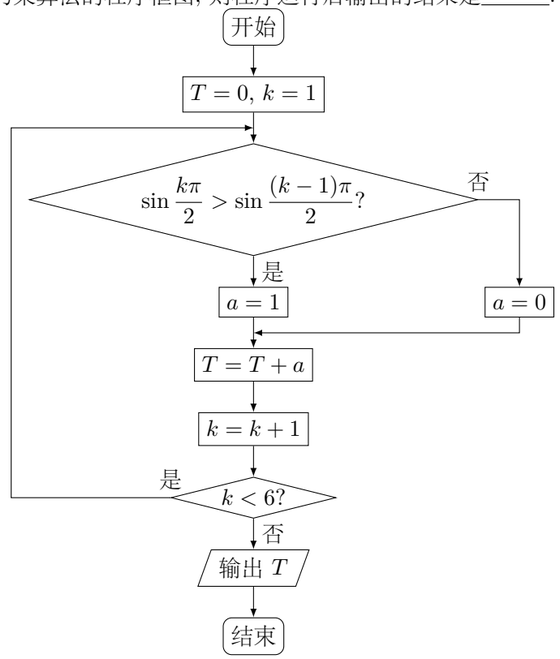
11. 不等式 $\dfrac{x^2-9}{x-2}>0$ 的解集是_____.

12. 设单位向量 $\boldsymbol{m}=(x,y)$, $\boldsymbol{b}=(2,-1)$. 若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|x+2y|=$_____.

13. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 公比不为 1. 若 $a_1=1$, 且对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$, 则 $S_5=$_____.

14. 过直线 $x+y-2\sqrt{2}=0$ 上的点 P 作圆 $x^2+y^2=1$ 的两条切线, 若两条切线的夹角是 60°, 则点 P 的坐标是_____.

15. 如图为某算法的程序框图, 则程序运行后输出的结果是_____.



三、解答题

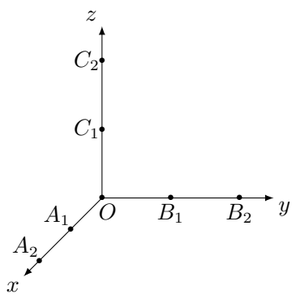
16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $3\cos(B-C)-1=6\cos B\cos C$.

(1) 求 $\cos A$;

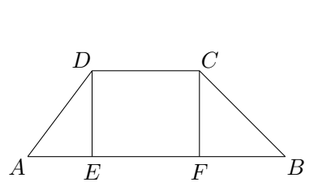
(2) 若 $a=3$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$, 求 b, c.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = kc^n - k$ (其中 c, k 为常数), 且 $a_2 = 4$, $a_6 = 8a_3$.
(1) 求 a_n;
(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. 如图, 从 $A_1(1,0,0)$, $A_2(2,0,0)$, $B_1(0,1,0)$, $B_2(0,2,0)$, $C_1(0,0,1)$, $C_2(0,0,2)$ 这 6 个点中随机选取 3 个点.
(1) 求这 3 点与原点 O 恰好是正三棱锥的四个顶点的概率;
(2) 求这 3 点与原点 O 共面的概率.



19. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, E, F 是线段 AB 上的两点, 且 $DE \perp AB$, $CF \perp AB$, $AB = 12$, $AD = 5$, $BC = 4\sqrt{2}$, $DE = 4$. 现将 $\triangle ADE$, $\triangle CFB$ 分别沿 DE, CF 折起, 使 A, B 两点重合于点 G, 得到多面体 $CDEFG$.
(1) 求证: 平面 $DEG \perp$ 平面 CFG;
(2) 求多面体 $CDEFG$ 的体积.



20. 已知三点 $O(0,0)$, $A(-2,1)$, $B(2,1)$, 曲线 C 上任意一点 $M(x,y)$ 满足 $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \overrightarrow{OM} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + 2$.
(1) 求曲线 C 的方程;
(2) 点 $Q(x_0, y_0)$ $(-2 < x_0 < 2)$ 是曲线 C 上的动点, 曲线 C 在点 Q 处的切线为 l, 点 P 的坐标是 $(0,-1)$, l 与 PA, PB 分别交于点 D, E, 求 $\triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比.

21. 已知函数 $f(x) = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^x$ 在 $[0,1]$ 上单调递减且满足 $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.
(1) 求 a 的取值范围;
(2) 设 $g(x) = f(x) - f'(x)$, 求 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值.

2012 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，集合 $A=\{0,1,3,5,8\}$，集合 $B=\{2,4,5,6,8\}$，则 $\left(\complement_U A\right)\cap\left(\complement_U B\right)=$ （　）

(A) $\{5,8\}$　(B) $\{7,9\}$　(C) $\{0,1,3\}$　(D) $\{2,4,6\}$

2. 复数 $\dfrac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　(B) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　(C) $1-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　(D) $1+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

3. 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则下面结论正确的是（　）

(A) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　(B) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

(C) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　(D) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

4. 已知命题 p: $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R},(f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)\geqslant 0$，则 $\neg p$ 是 （　）

(A) $\exists x_1,x_2\in\mathbf{R},(f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)\leqslant 0$

(B) $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R},(f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)\leqslant 0$

(C) $\exists x_1,x_2\in\mathbf{R},(f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)<0$

(D) $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R},(f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)<0$

5. 一排 9 个座位坐了 3 个三口之家，若每家人坐在一起，则不同的坐法种数为 （　）

(A) $3\times 3!$　(B) $3\times(3!)^3$　(C) $(3!)^4$　(D) $9!$

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4+a_8=16$，则该数列前 11 项和 $S_{11}=$（　）

(A) 58　(B) 88　(C) 143　(D) 176

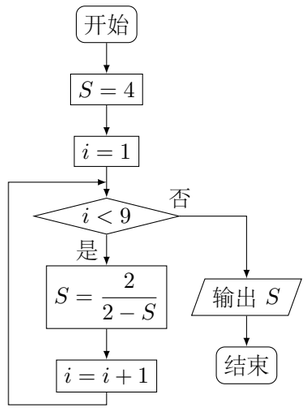
7. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则 $\tan\alpha=$ （　）

(A) -1　(B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) 1

8. 设变量 x, y 满足 $\begin{cases}x-y\leqslant 10\\0\leqslant x+y\leqslant 20\\0\leqslant y\leqslant 15\end{cases}$，则 $2x+3y$ 的最大值为 （　）

(A) 20　(B) 35　(C) 45　(D) 55

9. 执行如图所示的程序框图，则输出的 S 值是 （　）



(A) -1　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) 4

10. 在长为 12 cm 的线段 AB 上任取一点 C. 现作一矩形，邻边长分别等于线段 AC, CB 的长，则该矩形面积小于 32 cm^2 的概率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

11. 设函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=f(x)$，$f(x)=f(2-x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^3$. 又函数 $g(x)=|x\cos(\pi x)|$，则函数 $h(x)=g(x)-f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$ 上的零点个数为 （　）

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8

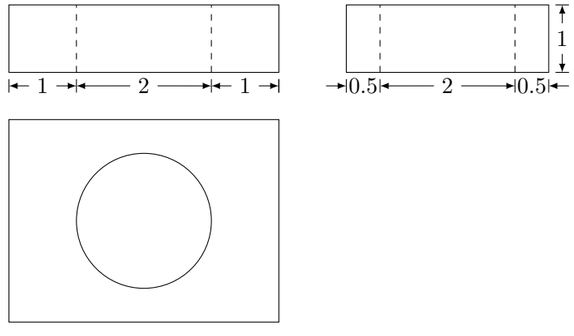
12. 若 $x\in[0,+\infty)$，则下列不等式恒成立的是 （　）

(A) $\mathrm{e}^x\leqslant 1+x+x^2$　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\leqslant 1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}x^2$

(C) $\cos x\geqslant 1-\dfrac{1}{2}x^2$　(D) $\ln(1+x)\geqslant x-\dfrac{1}{8}x^2$

二、填空题

13. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为_____.



14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，且 $a_5^2=a_{10}$，$2(a_n+a_{n+2})=5a_{n+1}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$_____.

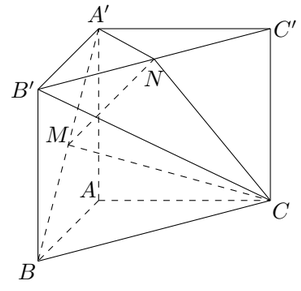
15. 已知 P, Q 为抛物线 $x^2=2y$ 上两点，点 P, Q 的横坐标分别为 4, -2，过 P, Q 分别作抛物线的切线，两切线交于 A，则点 A 的纵坐标为_____.

16. 已知正三棱锥 $P-ABC$，点 P, A, B, C 都在半径为 $\sqrt{3}$ 的球面上. 若 PA, PB, PC 两两互相垂直，则球心到截面 ABC 的距离为_____.

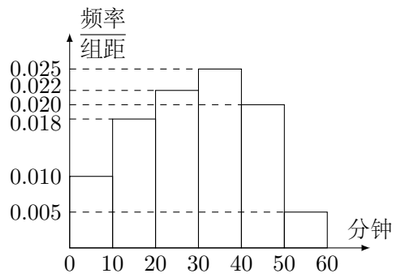
三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 角 A, B, C 成等差数列.
(1) 求 $\cos B$ 的值;
(2) 若边 a, b, c 成等比数列，求 $\sin A\sin C$ 的值.

18. 如图，直三棱柱 $ABC-A'B'C'$，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=\lambda AA'$，点 M, N 分别为 $A'B$ 和 $B'C'$ 的中点.
(1) 证明: $MN\parallel$ 平面 $A'ACC'$;
(2) 若二面角 $A'-MN-C$ 为直二面角，求 λ 的值.



19. 电视传媒公司为了解某地区电视观众对某类体育节目的收视情况, 随机抽取了 100 名观众进行调查. 下面是根据调查结果绘制的观众日均收看该体育节目时间的频率分布直方图:



将日均收看该体育节目时间不低于 40 分钟的观众称为“体育迷”.

(1) 根据已知条件完成下面的 2×2 列联表, 并据此资料你是否认为“体育迷”与性别有关?

	非体育迷	体育迷	合计
男			
女		10	55
合计			

(2) 将上述调查所得到的频率视为概率. 现在从该地区大量电视观众中, 采用随机抽样方法每次抽取一名观众, 抽取 3 次, 记被抽取的 3 名观众中的“体育迷”人数为 X. 若每次抽取的结果是相互独立的, 求 X 的分布列, 期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

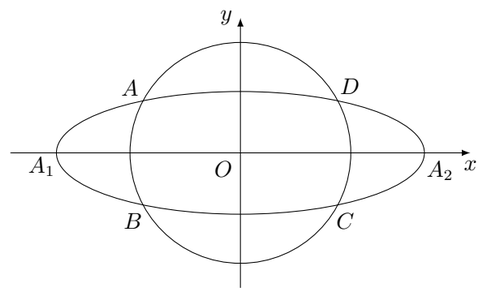
附: $\chi^2=\dfrac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$,

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.05	0.01
k	3.841	6.635

20. 如图, 椭圆 $C_0:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0,\ a,\ b$ 为常数), 动圆 $C_1:x^2+y^2=t_1^2$, $b<t_1<a$. 点 A_1, A_2 分别为 C_0 的左, 右顶点, C_1 与 C_0 相交于 A, B, C, D 四点.

(1) 求直线 AA_1 与直线 A_2B 交点 M 的轨迹方程;

(2) 设动圆 $C_2:x^2+y^2=t_2^2$ 与 C_0 相交于 A', B', C', D' 四点, 其中 $b<t_2<a$, $t_1\neq t_2$. 若矩形 $ABCD$ 与矩形 $A'B'C'D'$ 的面积相等, 证明: $t_1^2+t_2^2$ 为定值.



21. 设 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}+ax+b$ $(a,\ b\in\mathbf{R},\ a,\ b$ 为常数), 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\dfrac{3}{2}x$ 在 $(0,0)$ 点相切.

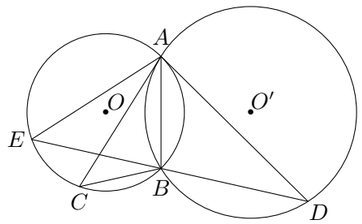
(1) 求 a, b 的值;

(2) 证明: 当 $0<x<2$ 时, $f(x)<\dfrac{9x}{x+6}$.

22. 如图, $\odot O$ 和 $\odot O'$ 相交于 A, B 两点, 过 A 作两圆的切线分别交两圆于 C, D 两点, 连接 DB 并延长交 $\odot O$ 于点 E. 证明:

(1) $AC\cdot BD=AD\cdot AB$;

(2) $AC=AE$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 圆 $C_1:x^2+y^2=4$, 圆 $C_2:(x-2)^2+y^2=4$.

(1) 在以 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴的极坐标系中, 分别写出圆 C_1、C_2 的极坐标方程, 并求出圆 C_1, C_2 的交点坐标 (用极坐标表示);

(2) 求圆 C_1 与 C_2 的公共弦的参数方程.

24. 已知 $f(x)=|ax+1|$ $(a\in\mathbf{R})$, 不等式 $f(x)\leqslant 3$ 的解集为 $\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 1\}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $\left|f(x)-2f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|\leqslant k$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

2012 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(2,x)$. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$, 则 $x=$ （ ）

(A) -1 (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

2. 已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, 集合 $A=\{0,1,3,5,8\}$, 集合 $B=\{2,4,5,6,8\}$, 则 $\left(\complement_U A\right)\cap\left(\complement_U B\right)=$ （ ）

(A) $\{5,8\}$ (B) $\{7,9\}$ (C) $\{0,1,3\}$ (D) $\{2,4,6\}$

3. 复数 $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (B) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $1+\mathrm{i}$

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_4+a_8=16$, 则 $a_2+a_{10}=$ （ ）

(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24

5. 已知命题 p: $\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R},\left(f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right)\left(x_2-x_1\right)\geqslant 0$, 则 $\neg p$ 是 （ ）

(A) $\exists x_1,\ x_2\in\mathbf{R},\left(f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right)\left(x_2-x_1\right)\leqslant 0$

(B) $\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R},\left(f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right)\left(x_2-x_1\right)\leqslant 0$

(C) $\exists x_1,\ x_2\in\mathbf{R},\left(f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right)\left(x_2-x_1\right)<0$

(D) $\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R},\left(f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right)\left(x_2-x_1\right)<0$

6. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$, $\alpha\in(0,\pi)$, 则 $\tan\alpha=$ （ ）

(A) -1 (B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 1

7. 将圆 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 平分的直线是 （ ）

(A) $x+y-1=0$ (B) $x+y+3=0$

(C) $x-y+1=0$ (D) $x-y+3=0$

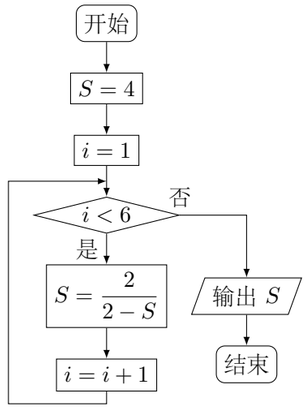
8. 函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为 （ ）

(A) $(-1,1]$ (B) $(0,1]$ (C) $[1,+\infty)$ (D) $(0,+\infty)$

9. 设变量 x, y 满足 $\begin{cases}x-y\leqslant 10\\ 0\leqslant x+y\leqslant 20\\ 0\leqslant y\leqslant 15\end{cases}$, 则 $2x+3y$ 的最大值为 （ ）

(A) 20 (B) 35 (C) 45 (D) 55

10. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 值是 （ ）



(A) 4 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) -1

11. 在长为 12 cm 的线段 AB 上任取一点 C. 现作一矩形, 邻边长分别等于线段 AC, CB 的长, 则该矩形面积大于 20 cm^2 的概率为 （ ）

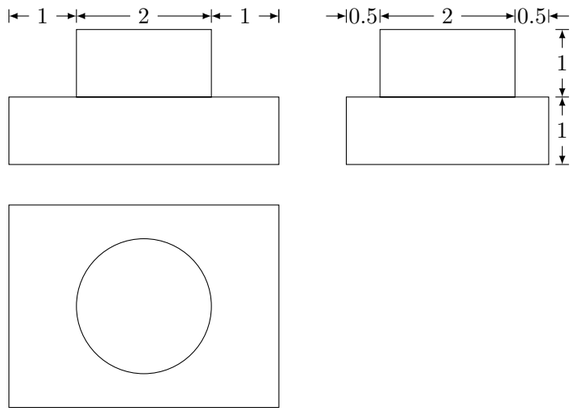
(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

12. 已知 P, Q 为抛物线 $x^2=2y$ 上两点, 点 P, Q 的横坐标分别为 4, -2, 过 P, Q 分别作抛物线的切线, 两切线交于点 A, 则点 A 的纵坐标为 （ ）

(A) 1 (B) 3 (C) -4 (D) -8

二、填空题

13. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为_____.



14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列. 若 $a_1>0$, 且 $2\left(a_n+a_{n+2}\right)=5a_{n+1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=$_____.

15. 已知双曲线 $x^2-y^2=1$, 点 F_1, F_2 为其两个焦点, 点 P 为双曲线上一点. 若 $PF_1\perp PF_2$, 则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的值为_____.

16. 已知点 P, A, B, C, D 是球 O 表面上的点, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正方形. 若 $PA=2\sqrt{6}$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 角 A, B, C 成等差数列.

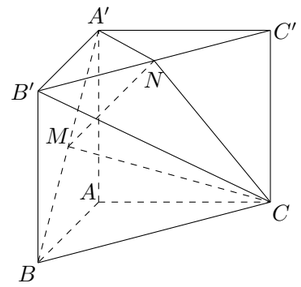
(1) 求 $\cos B$ 的值;

(2) 若边 a, b, c 成等比数列, 求 $\sin A\sin C$ 的值.

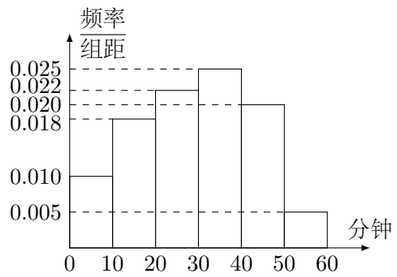
18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A'B'C'$, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=\sqrt{2}$, $AA'=1$, 点 M, N 分别为 $A'B$ 和 $B'C'$ 的中点.

(1) 证明: $MN\parallel$ 平面 $A'ACC'$;

(2) 求三棱锥 $A'-MNC$ 的体积. (锥体体积公式 $V=\dfrac{1}{3}Sh$, 其中 S 为底面面积, h 为高)



19. 电视传媒公司为了解某地区观众对某类体育节目的收视情况, 随机抽取了 100 名观众进行调查, 其中女性有 55 名. 下面是根据调查结果绘制的观众日均收看该体育节目时间的频率分布直方图:



将日均收看该体育节目时间不低于 40 分钟的观众称为“体育迷”.

(1) 根据已知条件完成下面的 2×2 列联表, 并据此资料你是否认为“体育迷”与性别有关?

	非体育迷	体育迷	合计
男			
女			
合计			

(2) 将日均收看该体育节目不低于 50 分钟的观众称为“超级体育迷”, 已知“超级体育迷”中有 2 名女性. 若从“超级体育迷”中任意选取 2 人, 求至少有 1 名女性观众的概率.

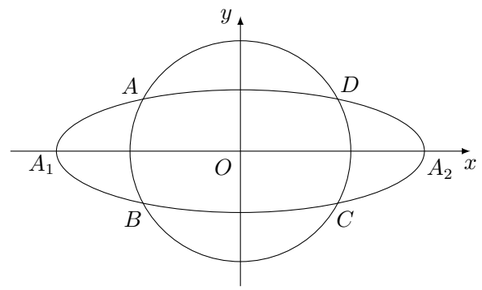
附: $\chi^2=\dfrac{n\left(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21}\right)^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$,

$P\left(\chi^2\geqslant k\right)$	0.05	0.01
k	3.841	6.635

20. 如图, 动圆 $C_1: x^2+y^2=t^2$, $1<t<3$, 与椭圆 $C_2: \dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ 相交于 A, B, C, D 四点, 点 A_1, A_2 分别为 C_2 的左, 右顶点.

(1) 当 t 为何值时, 矩形 $ABCD$ 的面积取得最大值? 并求出其最大面积;

(2) 求直线 AA_1 与直线 A_2B 交点 M 的轨迹方程.



21. 设 $f(x)=\ln x+\sqrt{x}-1$, 证明:

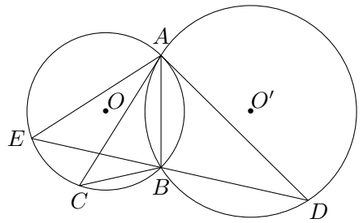
(1) 当 $x>1$ 时, $f(x)<\dfrac{3}{2}(x-1)$;

(2) 当 $1<x<3$ 时, $f(x)<\dfrac{9(x-1)}{x+5}$.

22. 如图, $\odot O$ 和 $\odot O'$ 相交于 A, B 两点, 过 A 作两圆的切线分别交两圆于 C, D 两点, 连接 DB 并延长交 $\odot O$ 于点 E. 证明:

(1) $AC\cdot BD=AD\cdot AB$;

(2) $AC=AE$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 圆 $C_1: x^2+y^2=4$, 圆 $C_2:(x-2)^2+y^2=4$.

(1) 在以 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴的极坐标系中, 分别写出圆 C_1、C_2 的极坐标方程, 并求出圆 C_1, C_2 的交点坐标 (用极坐标表示);

(2) 求圆 C_1 与 C_2 的公共弦的参数方程.

24. 已知 $f(x)=|ax+1|$ $(a\in\mathbf{R})$, 不等式 $f(x)\leqslant 3$ 的解集为 $\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 1\}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $\left|f(x)-2f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|\leqslant k$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

2012 年普通高等学校招生考试（全国卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in A, x-y\in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为 （ ）

(A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 10

2. 将 2 名教师, 4 名学生分成 2 个小组, 分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动, 每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成, 不同的安排方案共有 （ ）

(A) 12 种 (B) 10 种 (C) 9 种 (D) 8 种

3. 下面是关于复数 $z=\dfrac{2}{-1+\mathrm{i}}$ 的四个命题: p_1: $|z|=2$; p_2: $z^2=2\mathrm{i}$; p_3: z 的共轭复数为 $1+\mathrm{i}$; p_4: z 的虚部为 -1. 其中的真命题为 （ ）

(A) p_2, p_3 (B) p_1, p_2 (C) p_2, p_4 (D) p_3, p_4

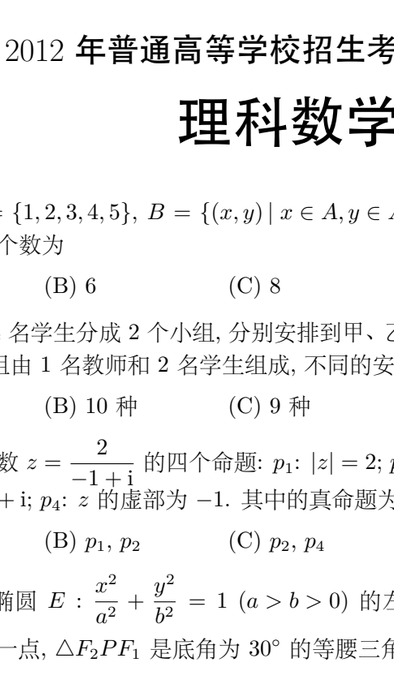
4. 设 F_1, F_2 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, P 为直线 $x=\dfrac{3a}{2}$ 上一点, $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 则 E 的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_4+a_7=2$, $a_5a_6=-8$, 则 $a_1+a_{10}=$ （ ）

(A) 7 (B) 5 (C) -5 (D) -7

6. 如果执行下面的程序框图, 输入正整数 N $(N\geqslant 2)$ 和实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_N, 输出 A, B, 则 （ ）



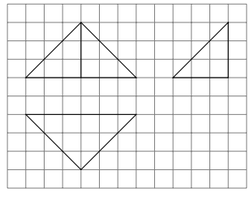
(A) $A+B$ 为 a_1, a_2, $\cdots$, a_N 的和

(B) $\dfrac{A+B}{2}$ 为 a_1, a_2, $\cdots$, a_N 的算术平均数

(C) A 和 B 分别是 a_1, a_2, $\cdots$, a_N 中最大的数和最小的数

(D) A 和 B 分别是 a_1, a_2, $\cdots$, a_N 中最小的数和最大的数

7. 如图, 网格上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则此几何体的体积为 （ ）



(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18

8. 等轴双曲线 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, C 与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于 A, B 两点, $|AB|=4\sqrt{3}$, 则 C 的实轴长为 （ ）

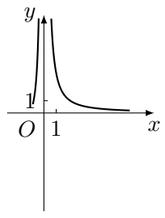
(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) 8

9. 已知 $\omega>0$, 函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减, 则 ω 的取值范围是 （ ）

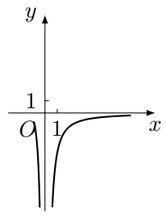
(A) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}\right]$ (B) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$ (C) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ (D) $(0,2]$

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)-x}$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 （ ）

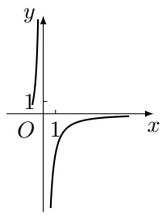
(A)



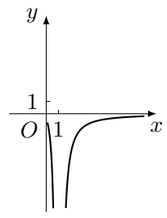
(B)



(C)



(D)



11. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, SC 为球 O 的直径, 且 $SC=2$, 则此棱锥的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. 设点 P 在曲线 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$ 上, 点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上, 则 $|PQ|$ 的最小值为 （ ）

(A) $1-\ln 2$ (B) $\sqrt{2}(1-\ln 2)$ (C) $1+\ln 2$ (D) $\sqrt{2}(1+\ln 2)$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 夹角为 45°, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$_____.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant -1\\ x+y\leqslant 3\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x-2y$ 的取值范围为_____.

15. 某一部件由三个电子元件按下图方式连接而成, 元件 1 或元件 2 正常工作, 且元件 3 正常工作, 则部件正常工作. 设三个电子元件的使用寿命 (单位: 小时) 均服从正态分布 $N(1000,50^2)$, 且各个元件能否正常工作相互独立, 那么该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为_____.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$, 则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为_____.

三、解答题

17. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$.

(1) 求 A;

(2) 若 $a=2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c.

18. 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花, 然后以每枝 10 元的价格出售, 如果当天卖不完, 剩下的玫瑰花作垃圾处理.
(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花, 求当天的利润 y (单位: 元) 关于当天需求量 n (单位: 枝, $n \in \mathbf{N}$) 的函数解析式;
(2) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量 (单位: 枝), 整理得下表:

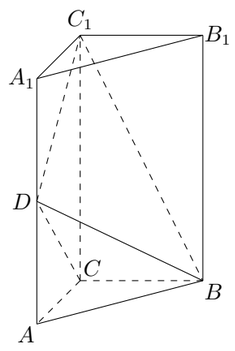
日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

① 若花店一天购进 16 枝玫瑰花, X 表示当天的利润 (单位: 元), 求 X 的分布列、数学期望及方差;

② 若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花, 你认为应购进 16 枝还是 17 枝? 请说明理由.

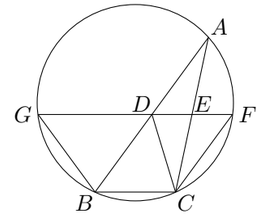
19. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=\dfrac{1}{2}AA_1$, D 是棱 AA_1 的中点, $DC_1 \perp BD$.
(1) 证明: $DC_1 \perp BC$;
(2) 求二面角 A_1-BD-C_1 的大小.



20. 设抛物线 $C: x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 准线为 l, A 为 C 上一点, 已知以 F 为圆心, FA 为半径的圆 F 交 l 于 B, D 两点.
(1) 若 $\angle BFD=90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 p 的值及圆 F 的方程;
(2) 若 A, B, F 三点在同一直线 m 上, 直线 n 与 m 平行, 且 n 与 C 只有一个公共点, 求坐标原点到 m, n 距离的比值.

21. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)\,\mathrm{e}^{x-1}-f(0)\,x+\dfrac{1}{2}x^2$.
(1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;
(2) 若 $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2}x^2+ax+b$, 求 $(a+1)\,b$ 的最大值.

22. 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 的中点, 直线 DE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 F, G 两点. 若 $CF \parallel AB$, 证明:
(1) $CD=BC$;
(2) $\triangle BCD \backsim \triangle GBD$.



23. 已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x=2\cos\varphi \\ y=3\sin\varphi \end{cases}$ (φ 是参数) 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho=2$, 正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上, 且 A, B, C, D 依逆时针次序排列, 点 A 的极坐标为 $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$.
(1) 求点 A, B, C, D 的直角坐标;
(2) 设 P 为 C_1 上任意一点, 求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$ 的取值范围.

24. 已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$.
(1) 当 $a=-3$ 时, 求不等式 $f(x) \geqslant 3$ 的解集;
(2) 若 $f(x) \leqslant |x-4|$ 的解集包含 $[1,2]$, 求 a 的取值范围.

2012 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2<0\}$, $B=\{x\mid -1<x<1\}$, 则 （ ）

(A) $A\subsetneqq B$　(B) $B\subsetneqq A$　(C) $A=B$　(D) $A\cap B=\varnothing$

2. 复数 $z=\dfrac{-3+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 的共轭复数是 （ ）

(A) $2+\mathrm{i}$　(B) $2-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

3. 在一组样本数据 (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots$, (x_n,y_n) ($n\geqslant 2$, x_1, x_2, $\cdots$, x_n 不全相等) 的散点图中, 若所有样本点 (x_i,y_i) ($i=1,2,\cdots,n$) 都在直线 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 上, 则这组样本数据的样本相关系数为 （ ）

(A) -1　(B) 0　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 1

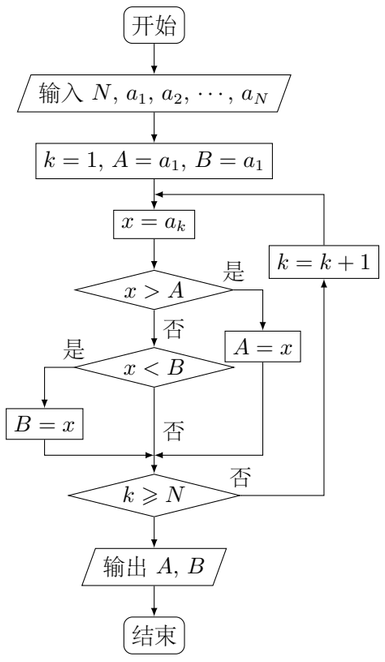
4. 设 F_1, F_2 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左、右焦点, P 为直线 $x=\dfrac{3a}{2}$ 上一点, $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 则 E 的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

5. 已知正三角形 ABC 的顶点 $A(1,1)$, $B(1,3)$, 顶点 C 在第一象限, 若点 (x,y) 在 $\triangle ABC$ 内部, 则 $z=-x+y$ 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(1-\sqrt{3},2\right)$　(B) $(0,2)$　(C) $\left(\sqrt{3}-1,2\right)$　(D) $\left(0,1+\sqrt{3}\right)$

6. 如果执行下面的程序框图, 输入正整数 N ($N\geqslant 2$) 和实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_N, 输出 A, B, 则 （ ）



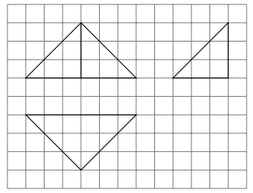
(A) $A+B$ 为 a_1, a_2, $\cdots$, a_N 的和

(B) $\dfrac{A+B}{2}$ 为 a_1, a_2, $\cdots$, a_N 的算术平均数

(C) A 和 B 分别是 a_1, a_2, $\cdots$, a_N 中最大的数和最小的数

(D) A 和 B 分别是 a_1, a_2, $\cdots$, a_N 中最小的数和最大的数

7. 如图, 网格上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则此几何体的体积为 （ ）



(A) 6　(B) 9　(C) 12　(D) 18

8. 平面 α 截球 O 的球面所得圆的半径为 1, 球心 O 到平面 α 的距离为 $\sqrt{2}$, 则此球的体积为 （ ）

(A) $\sqrt{6}\pi$　(B) $4\sqrt{3}\pi$　(C) $4\sqrt{6}\pi$　(D) $6\sqrt{3}\pi$

9. 已知 $\omega>0$, $0<\varphi<\pi$, 直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的两条相邻的对称轴, 则 $\varphi=$ （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\dfrac{3\pi}{4}$

10. 等轴双曲线 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, C 与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于 A, B 两点, $|AB|=4\sqrt{3}$, 则 C 的实轴长为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $2\sqrt{2}$　(C) 4　(D) 8

11. 当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, $4^x<\log_a x$, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　(C) $\left(1,\sqrt{2}\right)$　(D) $\left(\sqrt{2},2\right)$

12. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$, 则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为 （ ）

(A) 3690　(B) 3660　(C) 1845　(D) 1830

二、填空题

13. 曲线 $y=x(3\ln x+1)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为_____.

14. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_3+3S_2=0$, 则公比 $q=$_____.

15. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 夹角为 45°, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$_____.

16. 设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 则 $M+m=$_____.

三、解答题

17. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$.

(1) 求 A;

(2) 若 $a=2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c.

18. 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花, 然后以每枝 10 元的价格出售, 如果当天卖不完, 剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花, 求当天的利润 y (单位: 元) 关于当天需求量 n (单位: 枝, $n\in\mathbf{N}$) 的函数解析式;

(2) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量 (单位: 枝), 整理得下表:

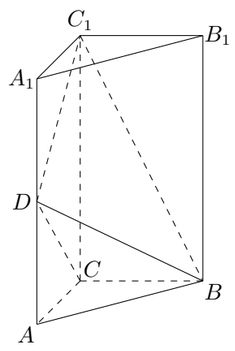
日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

① 假设花店在这 100 天内每天购进 17 枝玫瑰花, 求这 100 天的日利润 (单位: 元) 的平均数;

② 若花店一天购进 17 枝玫瑰花, 以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率, 求当天的利润不少于 75 元的概率.

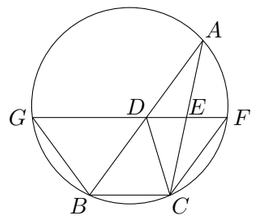
19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱垂直底面, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=\dfrac{1}{2}AA_1$, D 是棱 AA_1 的中点.
(1) 证明: 平面 $BDC_1\perp$ 平面 BDC;
(2) 平面 BDC_1 分此棱柱为两部分, 求这两部分体积的比.



20. 设抛物线 $C:x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 准线为 l, A 为 C 上一点, 已知以 F 为圆心, FA 为半径的圆 F 交 l 于 B, D 两点.
(1) 若 $\angle BFD=90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 p 的值及圆 F 的方程;
(2) 若 A, B, F 三点在同一直线 m 上, 直线 n 与 m 平行, 且 n 与 C 只有一个公共点, 求坐标原点到 m, n 距离的比值.

21. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-2$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若 $a=1$, k 为整数, 且当 $x>0$ 时, $(x-k)f'(x)+x+1>0$, 求 k 的最大值.

22. 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 的中点, 直线 DE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 F, G 两点. 若 $CF\parallel AB$, 证明:
(1) $CD=BC$;
(2) $\triangle BCD\backsim\triangle GBD$.



23. 已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=3\sin\varphi\end{cases}$ (φ 是参数) 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho=2$, 正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上, 且 A, B, C, D 依逆时针次序排列, 点 A 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$.
(1) 求点 A, B, C, D 的直角坐标;
(2) 设 P 为 C_1 上任意一点, 求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$ 的取值范围.

24. 已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$.
(1) 当 $a=-3$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 3$ 的解集;
(2) 若 $f(x)\leqslant|x-4|$ 的解集包含 $[1,2]$, 求 a 的取值范围.

2012 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 若复数 z 满足 $z(2-\mathrm{i})=11+7\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 z 为 （ ）

(A) $3+5\mathrm{i}$ (B) $3-5\mathrm{i}$ (C) $-3+5\mathrm{i}$ (D) $-3-5\mathrm{i}$

2. 已知全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4\}$, 则 $(\complement_U A)\cup B=$ （ ）

(A) $\{1,2,4\}$ (B) $\{2,3,4\}$ (C) $\{0,2,4\}$ (D) $\{0,2,3,4\}$

3. 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 则“函数 $f(x)=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数”是“函数 $g(x)=(2-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数”的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

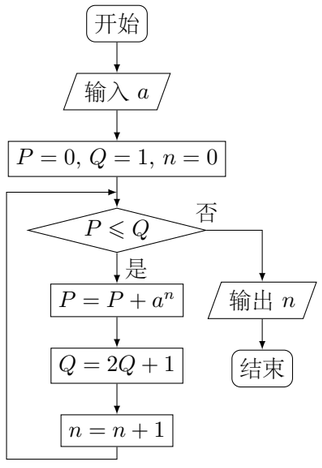
4. 采用系统抽样方法从 960 人中抽取 32 人做问卷调查. 为此将他们随机编号为 1, 2, $\cdots$, 960, 分组后在第一组采用简单随机抽样的方法抽到的号码为 9. 抽到的 32 人中, 编号落入区间 $[1,450]$ 的人做问卷 A, 编号落入区间 $[451,750]$ 的人做问卷 B, 其余的人做问卷 C. 则抽到的人中, 做问卷 B 的人数为 （ ）

(A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 15

5. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\geqslant 2\\2x+y\leqslant 4\\4x-y\geqslant -1\end{cases}$, 则目标函数 $z=3x-y$ 的取值范围是 （ ）

(A) $\left[-\frac{3}{2},6\right]$ (B) $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$ (C) $[-1,6]$ (D) $\left[-6,\frac{3}{2}\right]$

6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $a=4$, 那么输出的 n 的值为 （ ）



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

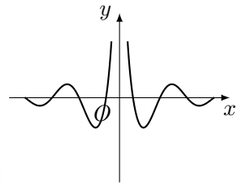
7. 若 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin 2\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$, 则 $\sin\theta=$ （ ）

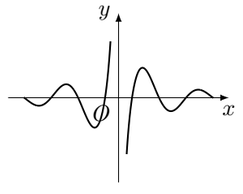
(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

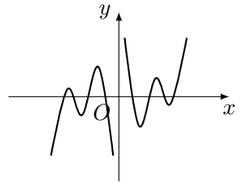
8. 定义在 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6)=f(x)$. 当 $-3\leqslant x<-1$ 时, $f(x)=-(x+2)^2$; 当 $-1\leqslant x<3$ 时, $f(x)=x$. 则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2012)=$ （ ）

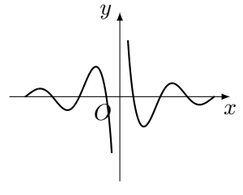
(A) 335 (B) 338 (C) 1678 (D) 2012

9. 函数 $f(x)=\frac{\cos 6x}{2^x-2^{-x}}$ 的图象大致为 （ ）

(A)


(B)


(C)


(D)


10. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线与椭圆 C 有四个交点, 以这四个交点为顶点的四边形的面积为 16, 则椭圆 C 的方程为 （ ）

(A) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ (B) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$ (C) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ (D) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

11. 现有 16 张不同的卡片, 其中红色、黄色、蓝色、绿色卡片各 4 张, 从中任取 3 张. 要求这 3 张卡片不能是同一种颜色, 且红色卡片至多 1 张. 不同的取法种数为 （ ）

(A) 232 (B) 252 (C) 472 (D) 484

12. 设函数 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=ax^2+bx$ $(a,\ b\in\mathbf{R},\ a\neq 0)$. 若 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 图象有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 则下列判断正确的是 （ ）

(A) 当 $a<0$ 时, $x_1+x_2<0$, $y_1+y_2>0$

(B) 当 $a<0$ 时, $x_1+x_2>0$, $y_1+y_2<0$

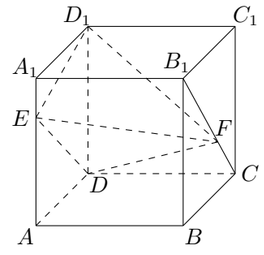
(C) 当 $a>0$ 时, $x_1+x_2<0$, $y_1+y_2<0$

(D) 当 $a>0$ 时, $x_1+x_2>0$, $y_1+y_2>0$

二、填空题

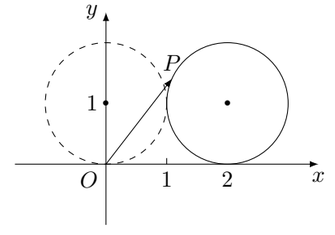
13. 若不等式 $|kx-4|\leqslant 2$ 的解集为 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$, 则实数 $k=$_____.

14. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F 分别为线段 AA_1, B_1C 上的点, 则三棱锥 D_1-EDF 的体积为_____.



15. 设 $a>0$, 若曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=a$, $y=0$ 所围成封闭图形的面积为 a^2, 则 $a=$_____.

16. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一单位圆的圆心的初始位置在 $(0,1)$, 此时圆上一点 P 的位置在 $(0,0)$, 圆在 x 轴上沿正向滚动. 当圆滚动到圆心位于 $(2,1)$ 时, $\overrightarrow{OP}$ 的坐标为_____.



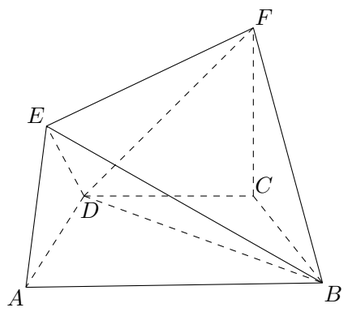
三、解答题

17. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin x,1)$, $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3}A\cos x,\frac{A}{2}\cos 2x\right)$ $(A>0)$, 函数 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 的最大值为 6.

(1) 求 A;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 再将所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{5\pi}{24}\right]$ 上的值域.

18. 在如图所示的几何体中, 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 60^\circ$, $FC \perp$ 平面 $ABCD$, $AE \perp BD$, $CB = CD = CF$.
(1) 求证: $BD \perp$ 平面 AED;
(2) 求二面角 $F - BD - C$ 的余弦值.



19. 现有甲乙两个靶, 某射手向甲靶射击一次命中的概率为 $\dfrac{3}{4}$, 命中得 1 分, 没有命中得 0 分; 向乙靶射击两次, 每次命中的概率为 $\dfrac{2}{3}$, 每命中一次得 2 分, 没有命中得 0 分. 该射手每次射击的结果相互独立, 假设该射手完成以上三次射击.
(1) 求该射手恰好命中一次的概率;
(2) 求该射手的总得分 X 的分布列及数学期望 EX.

20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_4 + a_5 = 84$, $a_9 = 73$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 对任意 $m \in \mathbf{N}^*$, 将数列 $\{a_n\}$ 中落入区间 $(9^m, 9^{2m})$ 内的项的个数记为 b_m, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 m 项和 S_m.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是抛物线 $C: x^2 = 2py$ $(p > 0)$ 的焦点, M 是抛物线 C 上位于第一象限内的任意一点, 过 M, F, O 三点的圆的圆心为 Q, 点 Q 到抛物线 C 的准线的距离为 $\dfrac{3}{4}$.
(1) 求抛物线 C 的方程;
(2) 是否存在点 M, 使得直线 MQ 与抛物线 C 相切于点 M? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由;
(3) 若点 M 的横坐标为 $\sqrt{2}$, 直线 $l: y = kx + \dfrac{1}{4}$ 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B, l 与圆 Q 有两个不同的交点 D, E, 求当 $\dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant 2$ 时, $|AB|^2 + |DE|^2$ 的最小值.

22. 已知函数 $f(x) = \dfrac{\ln x + k}{\mathrm{e}^x}$ (k 为常数, $\mathrm{e} = 2.71828\cdots$ 是自然对数的底数), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.
(1) 求 k 的值;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(3) 设 $g(x) = xf'(x)$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数. 证明: 对任意 $x > 0$, $g(x) < 1 + \mathrm{e}^{-2}$.

2012 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 若复数 z 满足 $z(2-\mathrm{i})=11+7\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 z 为 （ ）

(A) $3+5\mathrm{i}$ (B) $3-5\mathrm{i}$ (C) $-3+5\mathrm{i}$ (D) $-3-5\mathrm{i}$

2. 已知全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4\}$, 则 $(\complement_U A)\cup B=$ （ ）

(A) $\{1,2,4\}$ (B) $\{2,3,4\}$ (C) $\{0,2,4\}$ (D) $\{0,2,3,4\}$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 （ ）

(A) $[-2,0)\cup(0,2]$ (B) $(-1,0)\cup(0,2]$

(C) $[-2,2]$ (D) $(-1,2]$

4. 在某次测量中得到的 A 样本数据如下: 82, 84, 84, 86, 86, 86, 88, 88, 88, 88. 若 B 样本数据恰好是 A 样本数据每个都加 2 后所得数据, 则 A, B 两样本的下列数字特征对应相同的是 （ ）

(A) 众数 (B) 平均数 (C) 中位数 (D) 标准差

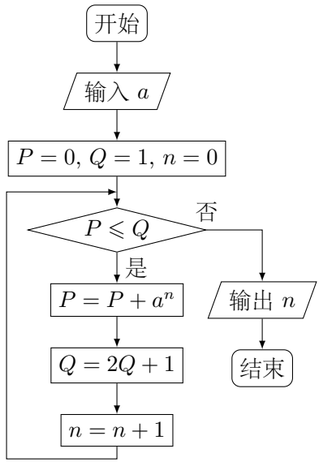
5. 设命题 p: 函数 $y=\sin 2x$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$; 命题 q: 函数 $y=\cos x$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称. 则下列判断正确的是 （ ）

(A) p 为真 (B) $\neg q$ 为假 (C) $p\wedge q$ 为假 (D) $p\vee q$ 为真

6. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\geqslant 2\\ 2x+y\leqslant 4\\ 4x-y\geqslant -1\end{cases}$, 则目标函数 $z=3x-y$ 的取值范围是 （ ）

(A) $\left[-\dfrac{3}{2},6\right]$ (B) $\left[-\dfrac{3}{2},-1\right]$ (C) $[-1,6]$ (D) $\left[-6,\dfrac{3}{2}\right]$

7. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $a=4$, 那么输出的 n 的值为 （ ）



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

8. 函数 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi x}{6}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(0\leqslant x\leqslant 9)$ 的最大值与最小值之和为 （ ）

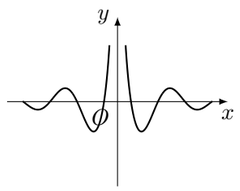
(A) $2-\sqrt{3}$ (B) 0 (C) -1 (D) $-1-\sqrt{3}$

9. 圆 $(x+2)^2+y^2=4$ 与圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ 的位置关系为 （ ）

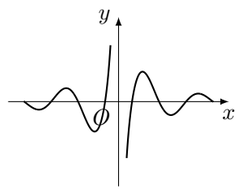
(A) 内切 (B) 相交 (C) 外切 (D) 相离

10. 函数 $f(x)=\dfrac{\cos 6x}{2^x-2^{-x}}$ 的图象大致为 （ ）

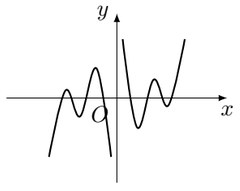
(A)



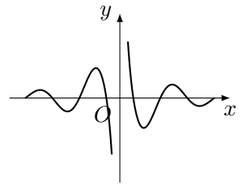
(B)



(C)



(D)



11. 已知双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 2, 若抛物线 $C_2:x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为 2, 则抛物线 C_2 的方程为 （ ）

(A) $x^2=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}y$ (B) $x^2=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}y$ (C) $x^2=8y$ (D) $x^2=16y$

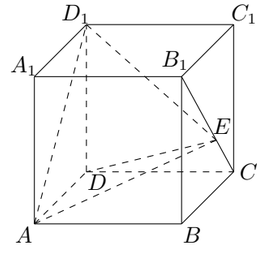
12. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=-x^2+bx$. 若 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 则下列判断正确的是 （ ）

(A) $x_1+x_2>0$, $y_1+y_2>0$ (B) $x_1+x_2>0$, $y_1+y_2<0$

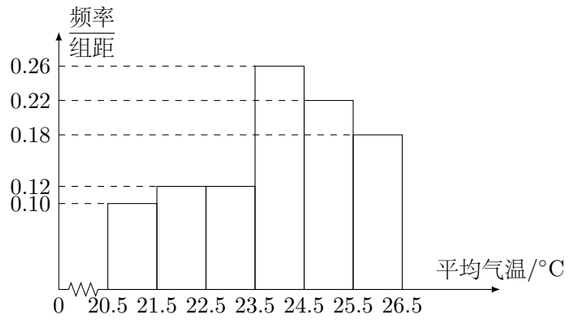
(C) $x_1+x_2<0$, $y_1+y_2>0$ (D) $x_1+x_2<0$, $y_1+y_2<0$

二、填空题

13. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E 为线段 B_1C 上的一点, 则三棱锥 $A-DED_1$ 的体积为_____.



14. 如图是根据部分城市某年 6 月份的平均气温 (单位: °C) 数据得到的样本频率分布直方图, 其中平均气温的范围是 $[20.5,26.5]$, 样本数据的分组为 $[20.5,21.5)$, $[21.5,22.5)$, $[22.5,23.5)$, $[23.5,24.5)$, $[24.5,25.5)$, $[25.5,26.5]$. 已知样本中平均气温低于 22.5 °C 的城市个数为 11, 则样本中平均气温不低于 25.5 °C 的城市个数为_____.



15. 若函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 m, 且函数 $g(x)=(1-4m)\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数, 则 $a=$_____.

16. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一单位圆的圆心的初始位置在 $(0,1)$, 此时圆上一点 P 的位置在 $(0,0)$, 圆在 x 轴上沿正向滚动. 当圆滚动到圆心位于 $(2,1)$ 时, $\overrightarrow{OP}$ 的坐标为_____.

三、解答题

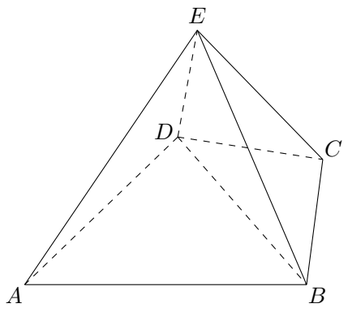
17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 已知 $\sin B(\tan A+\tan C)=\tan A\tan C$.

(1) 求证: a, b, c 成等比数列;

(2) 若 $a=1$, $c=2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

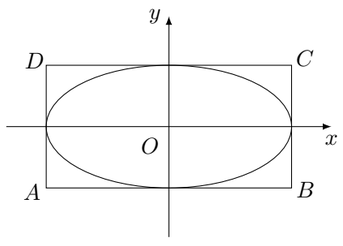
18. 袋中有五张卡片, 其中红色卡片三张, 标号分别为 1, 2, 3; 蓝色卡片两张, 标号分别为 1, 2.
(1) 从以上五张卡片中任取两张, 求这两张卡片颜色不同且标号之和小于 4 的概率;
(2) 现袋中再放入一张标号为 0 的绿色卡片, 从这六张卡片中任取两张, 求这两张卡片颜色不同且标号之和小于 4 的概率.

19. 如图, 几何体 $E-ABCD$ 是四棱锥, $\triangle ABD$ 为正三角形, $CB=CD$, $EC\perp BD$.
(1) 求证: $BE=DE$;
(2) 若 $\angle BCD=120^\circ$, M 为线段 AE 的中点, 求证: $DM\parallel$ 平面 BEC.



20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项和为 105, 且 $a_{10}=2a_5$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 对任意 $m\in\mathbf{N}^*$, 将数列 $\{a_n\}$ 中不大于 7^{2m} 的项的个数记为 b_m. 求数列 $\{b_m\}$ 的前 m 项和 S_m.

21. 如图, 椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 所围成的矩形 $ABCD$ 的面积为 8.
(1) 求椭圆 M 的标准方程;
(2) 设直线 $l:y=x+m\ (m\in\mathbf{R})$ 与椭圆 M 有两个不同的交点 P, Q, l 与矩形 $ABCD$ 有两个不同的交点 S, T. 求 $\dfrac{|PQ|}{|ST|}$ 的最大值及取得最大值时 m 的值.



22. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x+k}{\mathrm{e}^x}$ (k 为常数, $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数), 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.
(1) 求 k 的值;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(3) 设 $g(x)=xf'(x)$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数. 证明: 对任意 $x>0$, $g(x)<1+\mathrm{e}^{-2}$.

2012 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

理科数学

一、选择题

1. 集合 $M=\{x\,|\,\lg x>0\}$, $N=\{x\,|\,x^2\leqslant 4\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $(1,2)$　(B) $[1,2)$　(C) $(1,2]$　(D) $[1,2]$

2. 下列函数中, 既是奇函数又是增函数的为 （　）

(A) $y=x+1$　(B) $y=-x^3$　(C) $y=\dfrac{1}{x}$　(D) $y=x|x|$

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则“$ab=0$”是“复数 $a+\dfrac{b}{\mathrm{i}}$ 为纯虚数”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

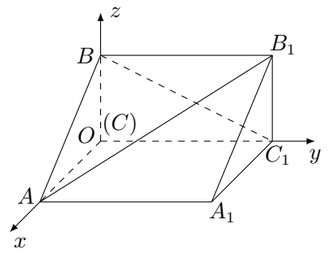
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 已知圆 $C:x^2+y^2-4x=0$, l 是过点 $P(3,0)$ 的直线, 则 （　）

(A) l 与 C 相交　(B) l 与 C 相切

(C) l 与 C 相离　(D) 以上三个选项均有可能

5. 如图, 在空间直角坐标系中有直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $CA=CC_1=2CB$, 则直线 BC_1 与直线 AB_1 夹角的余弦值为 （　）



(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(D) $\dfrac{3}{5}$

6. 从甲、乙两个城市分别随机抽取 16 台自动售货机, 对其销售额进行统计, 统计数据用茎叶图表示 (如图所示). 设甲、乙两组数据的平均数分别为 $\overline{x}$, $\overline{x}$, 中位数分别为 $m_{甲}$, $m_{乙}$, 则 （　）

甲		乙
8 6 5	0	
8 8 4 0 0	1	0 2 8
7 5 2	2	0 2 3 3 7
8 0 0	3	1 2 4 4 8
3 1	4	2 3 8

(A) $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$, $m_{甲}>m_{乙}$　(B) $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$, $m_{甲}<m_{乙}$

(C) $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$, $m_{甲}>m_{乙}$　(D) $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$, $m_{甲}<m_{乙}$

7. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$, 则 （　）

(A) $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点　(B) $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C) $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点　(D) $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

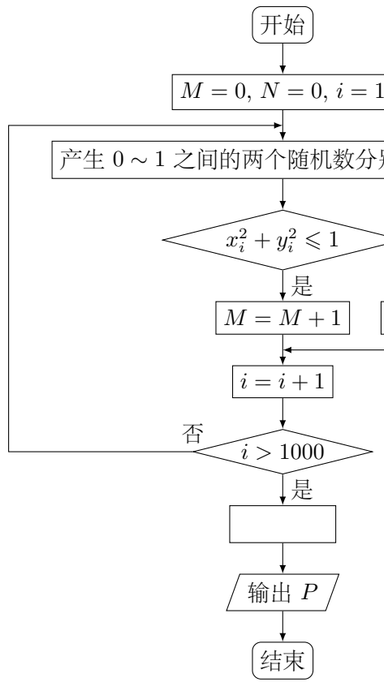
8. 两人进行乒乓球比赛, 先赢 3 局者获胜, 决出胜负为止, 则所有可能出现的情形 (各人输赢局次的不同视为不同情形) 共有 （　）

(A) 10 种　(B) 15 种　(C) 20 种　(D) 30 种

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c, 若 $a^2+b^2=2c^2$, 则 $\cos C$ 的最小值为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $-\dfrac{1}{2}$

10. 如图所示是用模拟方法估计圆周率 π 值的程序框图, P 表示估计结果, 则图中空白框内应填入 （　）



(A) $P=\dfrac{N}{1000}$　(B) $P=\dfrac{4N}{1000}$　(C) $P=\dfrac{M}{1000}$　(D) $P=\dfrac{4M}{1000}$

二、填空题

11. 观察下列不等式:

$1+\dfrac{1}{2^2}<\dfrac{3}{2}$,

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}<\dfrac{5}{3}$,

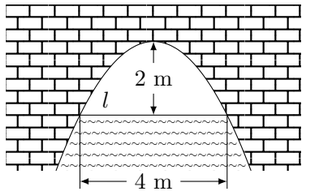
$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}<\dfrac{7}{4}$,

……

照此规律, 第五个不等式为_____.

12. $(a+x)^5$ 展开式中 x^2 的系数为 10, 则实数 a 的值为_____.

13. 如图是抛物线形拱桥, 当水面在 l 时, 拱顶离水面 2 米, 水面宽 4 米, 水位下降 1 米后, 水面宽_____米.

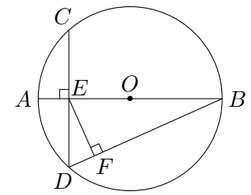


14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ -2x-1, & x\leqslant 0\end{cases}$, D 是由 x 轴和曲线 $y=f(x)$ 及该曲线在点 $(1,0)$ 处的切线所围成的封闭区域, 则 $z=x-2y$ 在 D 上的最大值为_____.

15. 三选一.

【A】若存在实数 x 使 $|x-a|+|x-1|\leqslant 3$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

【B】如图, 在圆 O 中, 直径 AB 与弦 CD 垂直, 垂足为 E, $EF\perp DB$, 垂足为 F, 若 $AB=6$, $AE=1$, 则 $DF\cdot DB=$_____.



【C】直线 $2\rho\cos\theta=1$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 相交的弦长为_____.

三、解答题

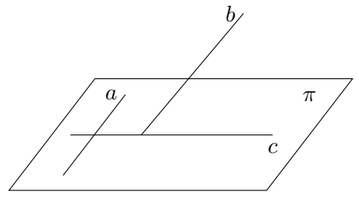
16. 函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$ $(A>0,\ \omega>0)$ 的最大值为 3, 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=2$, 求 α 的值.

17. 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, 其前 n 项和为 S_n, 且 a_5, a_3, a_4 成等差数列.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的公比;
(2) 证明: 对任意 $k \in \mathbf{N}_+$, S_{k+2}, S_k, S_{k+1} 成等差数列.

18. (1) 如图, 证明命题"a 是平面 π 内的一条直线, b 是 π 外的一条直线 (b 不垂直于 π), c 是直线 b 在 π 上的投影, 若 $a \perp b$, 则 $a \perp c$"为真;
(2) 写出上述命题的逆命题, 并判断其真假 (不需证明).



19. 已知椭圆 $C_1: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 椭圆 C_2 以 C_1 的长轴为短轴, 且与 C_1 有相同的离心率.
(1) 求椭圆 C_2 的方程;
(2) 设 O 为坐标原点, 点 A, B 分别在椭圆 C_1 和 C_2 上, $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$, 求直线 AB 的方程.

20. 某银行柜台设有一个服务窗口, 假设顾客办理业务所需的时间互相独立, 且都是整数分钟, 对以往顾客办理业务所需的时间统计结果如下:

办理业务所需的时间 (分)	1	2	3	4	5
频率	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1

从第一个顾客开始办理业务时计时.
(1) 估计第三个顾客恰好等待 4 分钟开始办理业务的概率;
(2) X 表示至第 2 分钟末已办理完业务的顾客人数, 求 X 的分布列及数学期望.

21. 设函数 $f_n(x)=x^n+bx+c$ ($n \in \mathbf{N}_+$, b, $c \in \mathbf{R}$).
(1) 设 $n \geqslant 2$, $b=1$, $c=-1$, 证明: $f_n(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内存在唯一零点;
(2) 设 $n=2$, 若对任意 x_1, $x_2 \in [-1,1]$, 有 $|f_2(x_1)-f_2(x_2)| \leqslant 4$, 求 b 的取值范围;
(3) 在 (1) 的条件下, 设 x_n 是 $f_n(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内的零点, 判断数列 x_2, x_3, $\cdots$, x_n, $\cdots$ 的增减性.

2012 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

文科数学

一、选择题

1. 集合 $M=\{x\mid \lg x>0\}$, $N=\{x\mid x^2\leqslant 4\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $(1,2)$　(B) $[1,2)$　(C) $(1,2]$　(D) $[1,2]$

2. 下列函数中, 既是奇函数又是增函数的为 （　）

(A) $y=x+1$　(B) $y=-x^3$　(C) $y=\dfrac{1}{x}$　(D) $y=x|x|$

3. 对某商店一个月内每天的顾客人数进行了统计, 得到样本的茎叶图 (如图所示), 则该样本的中位数、众数、极差分别是 （　）

1	2 5
2	0 2 3 3
3	1 2 4 4 8 9
4	5 5 5 7 7 8 8 9
5	0 0 1 1 4 7 9
6	1 7 8

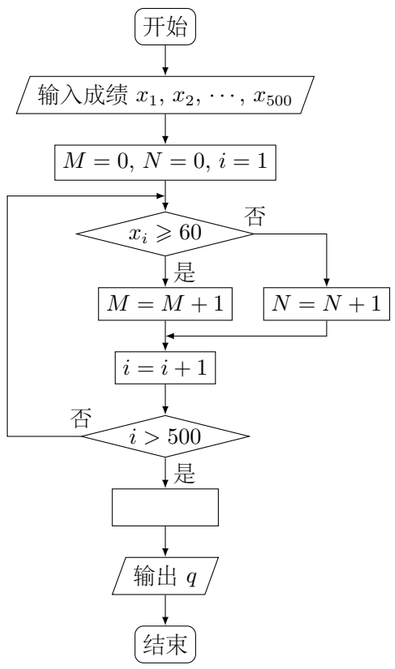
(A) 46, 45, 56　(B) 46, 45, 53　(C) 47, 45, 56　(D) 45, 47, 53

4. 设 $a,b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则“$ab=0$”是“复数 $a+\dfrac{b}{\mathrm{i}}$ 为纯虚数”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 如图所示是计算某年级 500 名学生期末考试 (满分为 100 分) 及格率 q 的程序框图, 则图中空白框内应填入 （　）



(A) $q=\dfrac{N}{M}$　(B) $q=\dfrac{M}{N}$　(C) $q=\dfrac{N}{M+N}$　(D) $q=\dfrac{M}{M+N}$

6. 已知圆 $C: x^2+y^2-4x=0$, l 是过点 $P(3,0)$ 的直线, 则 （　）

(A) l 与 C 相交　(B) l 与 C 相切

(C) l 与 C 相离　(D) 以上三个选项均有可能

7. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,\cos\theta)$ 与 $\boldsymbol{b}=(-1,2\cos\theta)$ 垂直, 则 $\cos 2\theta$ 等于 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 0　(D) -1

8. 将正方体 (如图 1 所示) 截去两个三棱锥, 得到图 2 所示的几何体, 则该几何体的左视图为 （　）

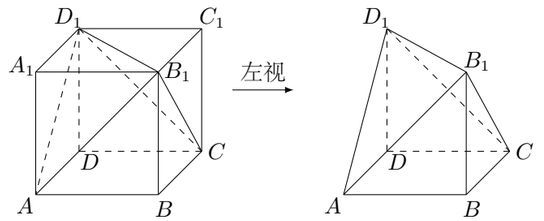
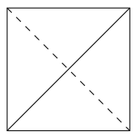
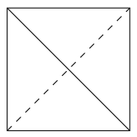
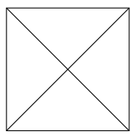
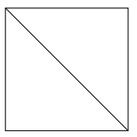


图 1　图 2

(A)  　(B)  　(C)  　(D) 

9. 设函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}+\ln x$, 则 （　）

(A) $x=\dfrac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极大值点　(B) $x=\dfrac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C) $x=2$ 为 $f(x)$ 的极大值点　(D) $x=2$ 为 $f(x)$ 的极小值点

10. 小王从甲地到乙地的往返时速分别为 a 和 b $(a<b)$, 其全程的平均时速为 v, 则 （　）

(A) $a<v<\sqrt{ab}$　(B) $v=\sqrt{ab}$

(C) $\sqrt{ab}<v<\dfrac{a+b}{2}$　(D) $v=\dfrac{a+b}{2}$

二、填空题

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x<0\end{cases}$, 则 $f(f(-4))=$_____.

12. 观察下列不等式:

$1+\dfrac{1}{2^2}<\dfrac{3}{2}$,

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}<\dfrac{5}{3}$,

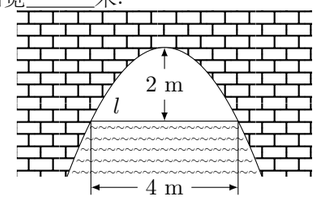
$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}<\dfrac{7}{4}$,

……

照此规律, 第五个不等式为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对应的边长分别为 a,b,c, 若 $a=2, B=\dfrac{\pi}{6}, c=2\sqrt{3}$, 则 $b=$_____.

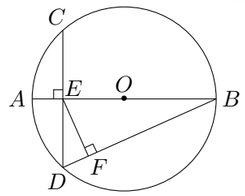
14. 如图是抛物线形拱桥, 当水面在 l 时, 拱顶离水面 2 米, 水面宽 4 米, 水位下降 1 米后, 水面宽_____米.



15. 三选一.

【A】若存在实数 x 使 $|x-a|+|x-1|\leqslant 3$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

【B】如图, 在圆 O 中, 直径 AB 与弦 CD 垂直, 垂足为 E, $EF\perp DB$, 垂足为 F, 若 $AB=6$, $AE=1$, 则 $DF\cdot DB=$_____.



【C】直线 $2\rho\cos\theta=1$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 相交的弦长为_____.

三、解答题

16. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q=-\dfrac{1}{2}$.

(1) 若 $a_3=\dfrac{1}{4}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和;

(2) 证明: 对任意 $k\in\mathbf{N}_+$, a_k, a_{k+2}, a_{k+1} 成等差数列.

17. 函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$ $(A>0,\ \omega>0)$ 的最大值为 3, 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

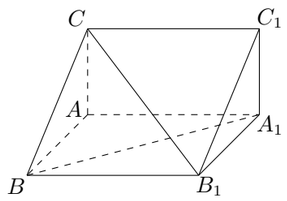
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=2$, 求 α 的值.

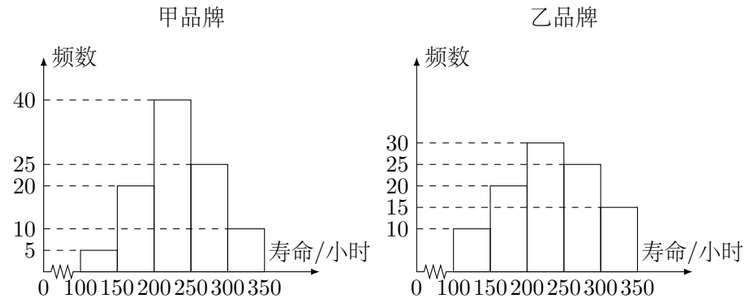
18. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AA_1$, $\angle CAB=\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 证明: $CB_1\perp BA_1$;

(2) 已知 $AB=2$, $BC=\sqrt{5}$, 求三棱锥 C_1-ABA_1 的体积.



19. 假设甲乙两种品牌的同类产品在某地区市场上销售量相等, 为了解他们的使用寿命, 现从两种品牌的产品中分别随机抽取 100 个进行测试, 结果统计如下:



(1) 估计甲品牌产品寿命小于 200 小时的概率;

(2) 这两种品牌产品中, 某个产品已使用了 200 小时, 试估计该产品是甲品牌的概率.

20. 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 椭圆 C_2 以 C_1 的长轴为短轴, 且与 C_1 有相同的离心率.

(1) 求椭圆 C_2 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 点 A, B 分别在椭圆 C_1 和 C_2 上, $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$, 求直线 AB 的方程.

21. 设函数 $f_n(x)=x^n+bx+c$ $(n\in\mathbf{N}_+,\ b,\ c\in\mathbf{R})$.

(1) 设 $n\geqslant 2$, $b=1$, $c=-1$, 证明: $f_n(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内存在唯一零点;

(2) 设 n 为偶数, $|f(-1)|\leqslant 1$, $|f(1)|\leqslant 1$, 求 $b+3c$ 的最小值和最大值;

(3) 设 $n=2$, 若对任意 x_1, $x_2\in[-1,1]$, 有 $|f_2(x_1)-f_2(x_2)|\leqslant 4$, 求 b 的取值范围.

2012 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 计算: $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$_____. ($\mathrm{i}$ 为虚数单位)

2. 若集合 $A=\{x\mid 2x+1>0\}$, $B=\{x\mid |x-1|<2\}$, 则 $A\cap B=$_____.

3. 函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2 & \cos x\\ \sin x & -1\end{vmatrix}$ 的值域是_____.

4. 若 $\vec{n}=(-2,1)$ 是直线 l 的一个法向量, 则 l 的倾斜角的大小为_____. (结果用反三角函数值表示)

5. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项等于_____.

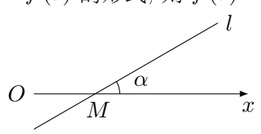
6. 有一列正方体, 棱长组成以 1 为首项, $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 体积分别记为 $V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(V_1+V_2+\cdots+V_n)=$_____.

7. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{|x-a|}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是_____.

8. 若一个圆锥的侧面展开图是面积为 2π 的半圆面, 则该圆锥的体积为_____.

9. 已知 $y=f(x)+x^2$ 是奇函数, 且 $f(1)=1$. 若 $g(x)=f(x)+2$, 则 $g(-1)=$_____.

10. 如图, 在极坐标系中, 过点 $M(2,0)$ 的直线 l 与极轴的夹角 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$. 若将 l 的极坐标方程写成 $\rho=f(\theta)$ 的形式, 则 $f(\theta)=$_____.

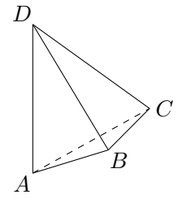


11. 三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛. 若每人都选择其中两个项目, 则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是_____. (结果用最简分数表示)

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$, 边 AB, AD 的长分别为 2, 1. 若 M, N 分别是边 BC, CD 上的点, 且满足 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{CN}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}$, 则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围是_____.

13. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象是折线段 ABC, 其中 $A(0,0)$, $B\left(\dfrac{1}{2},5\right)$, $C(1,0)$. 函数 $y=xf(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的图象与 x 轴围成的图形的面积为_____.

14. 如图, AD 与 BC 是四面体 $ABCD$ 中互相垂直的棱, $BC=2$. 若 $AD=2c$, 且 $AB+BD=AC+CD=2a$, 其中 a、c 为常数, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值是_____.



二、选择题

15. 若 $1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个复数根, 则(　)

(A) $b=2$, $c=3$　　(B) $b=-2$, $c=3$

(C) $b=-2$, $c=-1$　　(D) $b=2$, $c=-1$

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是　(　)

(A) 锐角三角形　(B) 直角三角形　(C) 钝角三角形　(D) 不能确定

17. 设 $10\leqslant x_1<x_2<x_3<x_4\leqslant 10^4$, $x_5=10^5$. 随机变量 ξ_1 取值 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的概率均为 0.2, 随机变量 ξ_2 取值 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $\dfrac{x_2+x_3}{2}$, $\dfrac{x_3+x_4}{2}$, $\dfrac{x_4+x_5}{2}$, $\dfrac{x_5+x_1}{2}$ 的概率也均为 0.2. 若记 $D\xi_1$, $D\xi_2$ 分别为 ξ_1, ξ_2 的方差, 则　(　)

(A) $D\xi_1>D\xi_2$

(B) $D\xi_1=D\xi_2$

(C) $D\xi_1<D\xi_2$

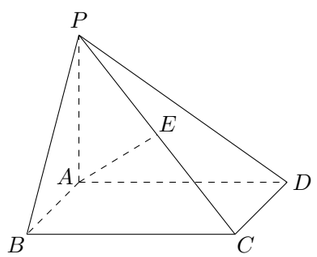
(D) $D\xi_1$ 与 $D\xi_2$ 的大小关系与 x_1, x_2, x_3, x_4 的取值有关

18. 设 $a_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{25}$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 在 S_1, S_2, $\cdots$, S_{100} 中, 正数的个数是　(　)

(A) 25　　(B) 50　　(C) 75　　(D) 100

三、解答题

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, E 是 PC 的中点. 已知 $AB=2$, $AD=2\sqrt{2}$, $PA=2$. 求:
(1) 三角形 PCD 的面积;
(2) 异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小.

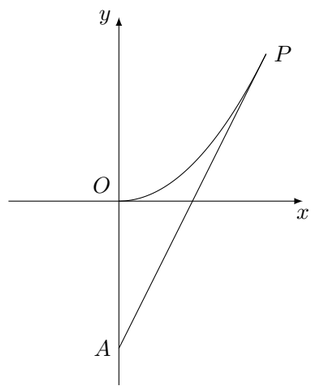


20. 已知函数 $f(x)=\lg(x+1)$.
(1) 若 $0<f(1-2x)-f(x)<1$, 求 x 的取值范围;
(2) 若 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, 有 $g(x)=f(x)$, 求函数 $y=g(x)$ $(x\in[1,2])$ 的反函数.

21. 海事救援船对一艘失事船进行定位: 以失事船的当前位置为原点, 以正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系 (以 1 海里为单位长度), 则救援船恰好在失事船正南方向 12 海里 A 处, 如图. 现假设: ①失事船的移动路径可视为抛物线 $y=\dfrac{12}{49}x^2$; ②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援; ③救援船出发 t 小时后, 失事船所在位置的横坐标为 $7t$.

(1) 当 $t=0.5$ 时, 写出失事船所在位置 P 的纵坐标. 若此时两船恰好会合, 求救援船速度的大小和方向;

(2) 问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船?



22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $C_1: 2x^2-y^2=1$.

(1) 过 C_1 的左顶点引 C_1 的一条渐近线的平行线, 求该直线与另一条渐近线及 x 轴围成的三角形的面积;

(2) 设斜率为 1 的直线 l 交 C_1 于 P, Q 两点. 若 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切. 求证: $OP\perp OQ$;

(3) 设椭圆 $C_2: 4x^2+y^2=1$. 若 M, N 分别是 C_1, C_2 上的动点, 且 $OM\perp ON$, 求证: O 到直线 MN 的距离是定值.

23. 对于数集 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$, $n\geqslant 2$, 定义向量集 $Y=\{\vec{a}\mid \vec{a}=(s,t), s\in X, t\in X\}$. 若对任意 $\vec{a}_1\in Y$, 存在 $\vec{a}_2\in Y$, 使得 $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0$, 则称 X 具有性质 $\mathbf{P}$. 例如 $\{-1,1,2\}$ 具有性质 $\mathbf{P}$.

(1) 若 $x>2$, 且 $\{-1,1,2,x\}$ 具有性质 $\mathbf{P}$, 求 x 的值;

(2) 若 X 具有性质 $\mathbf{P}$, 求证: $1\in X$, 且当 $x_n>1$ 时, $x_1=1$;

(3) 若 X 具有性质 $\mathbf{P}$, 且 $x_1=1$, $x_2=q$ (q 为常数), 求有穷数列 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的通项公式.

2012 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 计算: $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$_____. ($\mathrm{i}$ 为虚数单位)

2. 若集合 $A=\{x\,|\,2x-1>0\}$, $B=\{x\,|\,|x|<1\}$, 则 $A\cap B=$_____.

3. 函数 $f(x)=\begin{vmatrix}\sin x & 2\\ -1 & \cos x\end{vmatrix}$ 的最小正周期是_____.

4. 若 $\vec{d}=(2,1)$ 是直线 l 的一个方向向量, 则 l 的倾斜角的大小为_____. (结果用反三角函数值表示)

5. 一个高为 2 的圆柱, 底面周长为 2π. 该圆柱的表面积为_____.

6. 方程 $4^x-2^{x+1}-3=0$ 的解是_____.

7. 有一列正方体, 棱长组成以 1 为首项, $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 体积分别记为 $V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(V_1+V_2+\cdots+V_n)=$_____.

8. 在 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项等于_____.

9. 已知 $y=f(x)$ 是奇函数, 若 $g(x)=f(x)+2$ 且 $g(1)=1$, 则 $g(-1)=$_____.

10. 满足约束条件 $|x|+2|y|\leqslant 2$ 的目标函数 $z=y-x$ 的最小值是_____.

11. 三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛. 若每人只选择一个项目, 则有且仅有两人选择的项目相同的概率是_____. (结果用最简分数表示)

12. 在矩形 $ABCD$ 中, 边 AB, AD 的长分别为 2, 1. 若 M, N 分别是 BC, CD 上的点, 且满足 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{CN}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}$, 则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围是_____.

13. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象是折线段 ABC, 其中 $A(0,0)$, $B\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, $C(1,0)$. 函数 $y=xf(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的图象与 x 轴围成的图形的面积为_____.

14. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+2}=f(a_n)$. 若 $a_{2010}=a_{2012}$, 则 $a_{20}+a_{11}$ 的值是_____.

二、选择题

15. 若 $1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个复数根, 则(　　)

(A) $b=2$, $c=3$　　(B) $b=2$, $c=-1$

(C) $b=-2$, $c=-1$　　(D) $b=-2$, $c=3$

16. 对于常数 m, n, "$mn>0$"是"方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示的曲线是椭圆"的(　　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是(　　)

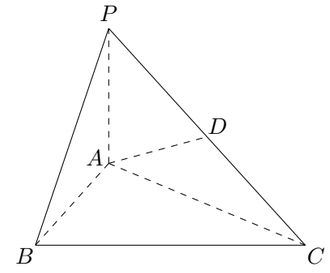
(A) 钝角三角形　(B) 直角三角形　(C) 锐角三角形　(D) 不能确定

18. 若 $S_n=\sin\dfrac{\pi}{7}+\sin\dfrac{2\pi}{7}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{7}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则在 $S_1, S_2, \cdots, S_{100}$ 中, 正数的个数是(　　)

(A) 16　　(B) 72　　(C) 86　　(D) 100

三、解答题

19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 底面 ABC, D 是 PC 的中点. 已知 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$, $AB=2$, $AC=2\sqrt{3}$, $PA=2$. 求:
(1) 三棱锥 $P-ABC$ 的体积;
(2) 异面直线 BC 与 AD 所成的角的大小 (结果用反三角函数值表示).

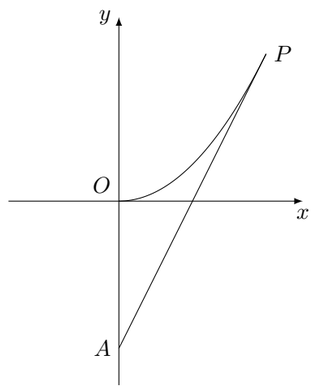


20. 已知函数 $f(x)=\lg(x+1)$.
(1) 若 $0<f(1-2x)-f(x)<1$, 求 x 的取值范围;
(2) 若 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, 有 $g(x)=f(x)$, 求函数 $y=g(x)$ $(x\in[1,2])$ 的反函数.

21. 海事救援船对一艘失事船进行定位: 以失事船的当前位置为原点, 以正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系 (以 1 海里为单位长度), 则救援船恰好在失事船正南方向 12 海里 A 处, 如图. 现假设: ①失事船的移动路径可视为抛物线 $y=\dfrac{12}{49}x^2$; ②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援; ③救援船出发 t 小时后, 失事船所在位置的横坐标为 $7t$.

(1) 当 $t=0.5$ 时, 写出失事船所在位置 P 的纵坐标. 若此时两船恰好会合, 求救援船速度的大小和方向;

(2) 问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船?



22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $C: 2x^2-y^2=1$.

(1) 设 F 是 C 的左焦点, M 是 C 右支上一点. 若 $|MF|=2\sqrt{2}$, 求点 M 的坐标;

(2) 过 C 的左顶点作 C 的两条渐近线的平行线, 求这两组平行线围成的平行四边形的面积;

(3) 设斜率为 k $\left(|k|<\sqrt{2}\right)$ 的直线 l 交 C 于 P, Q 两点. 若 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切, 求证: $OP\perp OQ$.

23. 对于项数为 m 的有穷数列 $\{a_n\}$, 记 $b_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ $(k=1,2,\cdots,m)$, 即 b_k 为 a_1, a_2, $\cdots$, a_k 中的最大值, 并称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列. 如 1, 3, 2, 5, 5 的控制数列是 1, 3, 3, 5, 5.

(1) 若各项均为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的控制数列为 $2,3,4,5,5$, 写出所有的 $\{a_n\}$;

(2) 设 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列, 满足 $a_k+b_{m-k+1}=C$ (C 为常数, $k=1,2,\cdots,m$). 求证: $b_k=a_k$ $(k=1,2,\cdots,m)$;

(3) 设 $m=100$, 常数 $a\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$. 若 $a_n=an^2-(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n$, $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列, 求 $(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots+(b_{100}-a_{100})$.

2012 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. $(1+x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是 （ ）

(A) 42 (B) 35 (C) 28 (D) 21

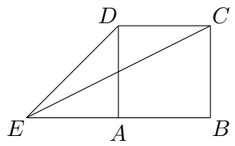
2. 复数 $\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{2\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x<3\\ \ln(x-2), & x\geqslant 3\end{cases}$ 在 $x=3$ 处的极限是 （ ）

(A) 不存在 (B) 等于 6 (C) 等于 3 (D) 等于 0

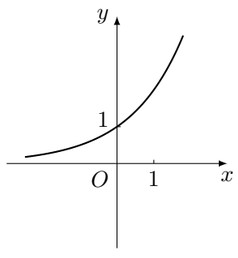
4. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 延长 BA 至 E, 使 $AE=1$, 连接 EC, ED, 则 $\sin\angle CED=$ （ ）



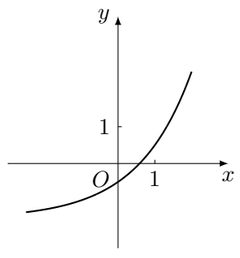
(A) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{15}$

5. 函数 $y=a^x-\dfrac{1}{a}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象可能是 （ ）

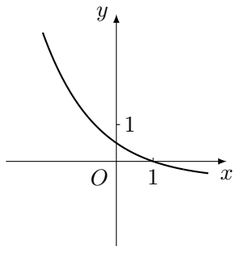
(A)



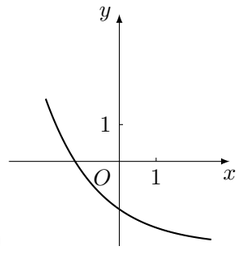
(B)



(C)



(D)



6. 下列命题正确的是 （ ）

(A) 若两条直线和同一个平面所成的角相等, 则这两条直线平行

(B) 若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等, 则这两个平面平行

(C) 若一条直线平行于两个相交平面, 则这条直线与这两个平面的交线平行

(D) 若两个平面都垂直于第三个平面, 则这两个平面平行

7. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量. 下列四个条件中, 使 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 成立的充分条件是 （ ）

(A) $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ (B) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

(C) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$ (D) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

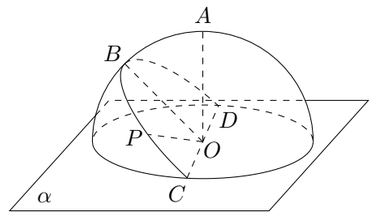
8. 已知抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点在坐标原点 O, 并且经过点 $M(2,y_0)$. 若点 M 到该抛物线焦点的距离为 3, 则 $|OM|=$ （ ）

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $2\sqrt{5}$

9. 某公司生产甲、乙两种桶装产品. 已知生产甲产品 1 桶需耗 A 原料 1 千克、B 原料 2 千克; 生产乙产品 1 桶需耗 A 原料 2 千克, B 原料 1 千克. 每桶甲产品的利润是 300 元, 每桶乙产品的利润是 400 元. 公司在生产这两种产品的计划中, 要求每天消耗 A, B 原料都不超过 12 千克. 通过合理安排生产计划, 从每天生产的甲、乙两种产品中, 公司共可获得的最大利润是 （ ）

(A) 1800 元 (B) 2400 元 (C) 2800 元 (D) 3100 元

10. 如图, 半径为 R 的半球 O 的底面圆 O 在平面 α 内, 过点 O 作平面 α 的垂线交半球面于点 A, 过圆 O 的直径 CD 作与平面 α 成 45° 角的平面与半球面相交, 所得交线上到平面 α 的距离最大的点为 B, 该交线上的一点 P 满足 $\angle BOP=60°$, 则 A, P 两点间的球面距离为 （ ）



(A) $R\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\dfrac{\pi R}{4}$ (C) $R\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{\pi R}{3}$

11. 方程 $ay=b^2x^2+c$ 中的 a, b, $c\in\{-3,-2,0,1,2,3\}$, 且 a, b, c 互不相同, 在所有这些方程所表示的曲线中, 不同的抛物线共有 （ ）

(A) 60 条 (B) 62 条 (C) 71 条 (D) 80 条

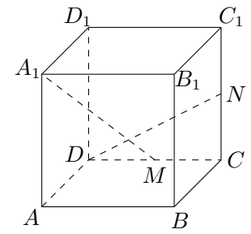
12. 设函数 $f(x)=2x-\cos x$, $\{a_n\}$ 是公差为 $\dfrac{\pi}{8}$ 的等差数列, $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$, 则 $[f(a_3)]^2-a_1a_5=$ （ ）

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{16}\pi^2$ (C) $\dfrac{1}{8}\pi^2$ (D) $\dfrac{13}{16}\pi^2$

二、填空题

13. 设全集 $U=\{a,b,c,d\}$, 集合 $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c,d\}$, 则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$_____.

14. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是 CD, CC_1 的中点, 则异面直线 A_1M 与 DN 所成角的大小是_____.



15. 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点为 F, 直线 $x=m$ 与椭圆相交于点 A, B, 当 $\triangle FAB$ 的周长最大时, $\triangle FAB$ 的面积是_____.

16. 记 $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数, 例如, $[2]=2$, $[1.5]=1$, $[-0.3]=-1$. 设 a 为正整数, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=a$, $x_{n+1}=\left[\dfrac{x_n+\left[\dfrac{a}{x_n}\right]}{2}\right]$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 现有下列命题:

① 当 $a=5$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 的前 3 项依次为 5, 3, 2;

② 对数列 $\{x_n\}$ 都存在正整数 k, 当 $n\geqslant k$ 时总有 $x_n=x_k$;

③ 当 $n\geqslant 1$ 时, $x_n>\sqrt{a}-1$;

④ 对某个正整数 k, 若 $x_{k+1}\geqslant x_k$, 则 $x_n=[\sqrt{a}]$.

其中的真命题有_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 某居民小区有两个相互独立的安全防范系统 (简称系统)A 和 B, 系统 A 和 B 在任意时刻发生故障的概率分别为 $\dfrac{1}{10}$ 和 p.

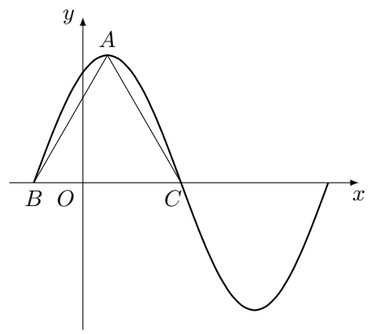
(1) 若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为 $\dfrac{49}{50}$, 求 p 的值;

(2) 设系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数为随机变量 ξ, 求 ξ 的概率分布列及数学期望 $E\xi$.

18. 函数 $f(x)=6\cos^2\dfrac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin\omega x-3$ $(\omega>0)$ 在一个周期内的图象如图所示, A 为图象的最高点, B, C 为图象与 x 轴的交点, 且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(1) 求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的值域;

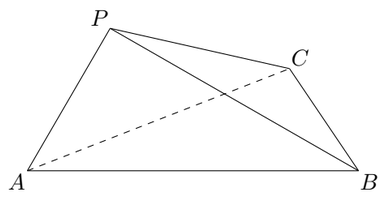
(2) 若 $f(x_0)=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$, 且 $x_0\in\left(-\dfrac{10}{3},\dfrac{2}{3}\right)$, 求 $f(x_0+1)$ 的值.



19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\angle APB=90^\circ$, $\angle PAB=60^\circ$, $AB=BC=CA$, 平面 $PAB\perp$ 平面 ABC.

(1) 求直线 PC 与平面 ABC 所成角的正弦值;

(2) 求二面角 $B-AP-C$ 的余弦值.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $a_2a_n=S_2+S_n$ 对一切正整数 n 都成立.

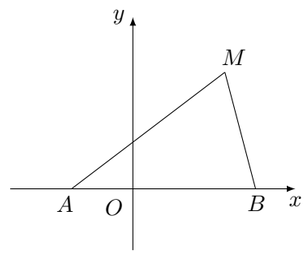
(1) 求 a_1, a_2 的值;

(2) 设 $a_1>0$, 数列 $\left\{\lg\dfrac{10a_1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n, 当 n 为何值时, T_n 最大? 并求出 T_n 的最大值.

21. 如图, 动点 M 与两定点 $A(-1,0)$, $B(2,0)$ 构成 $\triangle MAB$, 且 $\angle MBA=2\angle MAB$, 设动点 M 的轨迹为 C.

(1) 求轨迹 C 的方程;

(2) 设直线 $y=-2x+m$ 与 y 轴相交于点 P, 与轨迹 C 相交于点 Q、R, 且 $|PQ|<|PR|$, 求 $\dfrac{|PR|}{|PQ|}$ 的取值范围.



22. 已知 a 为正实数, n 为自然数, 抛物线 $y=-x^2+\dfrac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A, 设 $f(n)$ 为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距.

(1) 用 a 和 n 表示 $f(n)$;

(2) 求对所有 n 都有 $\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}\geqslant\dfrac{n^3}{n^3+1}$ 成立的 a 的最小值;

(3) 当 $0<a<1$ 时, 比较 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{f(k)-f(2k)}$ 与 $\dfrac{27}{4}\cdot\dfrac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)}$ 的大小, 并说明理由.

2012 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c,d\}$, 则 $A\cup B=$ （　）

(A) $\{b\}$　(B) $\{b,c,d\}$　(C) $\{a,c,d\}$　(D) $\{a,b,c,d\}$

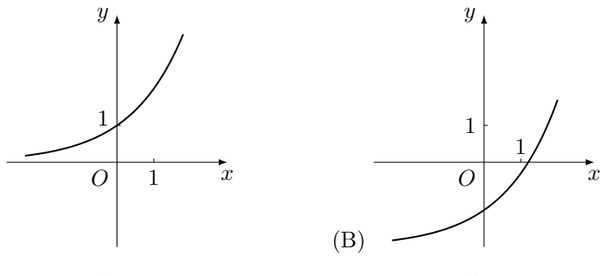
2. $(1+x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是 （　）

(A) 21　(B) 28　(C) 35　(D) 42

3. 交通管理部门为了解机动车驾驶员 (简称驾驶员) 对某新法规的知晓情况, 对甲、乙、丙、丁四个社区做分层抽样调查. 假设四个社区驾驶员的总人数为 N, 其中甲社区有驾驶员 96 人. 若在甲、乙、丙、丁四个社区抽取驾驶员的人数分别为 12, 21, 25, 43, 则这四个社区驾驶员的总人数 N 为 （　）

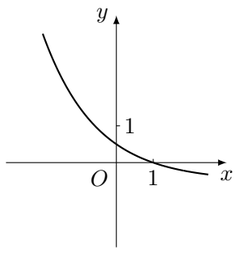
(A) 101　(B) 808　(C) 1212　(D) 2012

4. 函数 $y=a^x-a$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的图象可能是 （　）

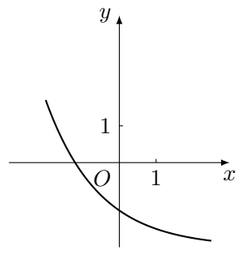


(A)

(B)

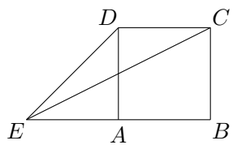


(C)



(D)

5. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 延长 BA 至 E, 使 $AE=1$, 连接 EC, ED, 则 $\sin\angle CED=$ （　）



(A) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　(B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$　(C) $\frac{\sqrt{5}}{10}$　(D) $\frac{\sqrt{5}}{15}$

6. 下列命题正确的是 （　）

(A) 若两条直线和同一个平面所成的角相等, 则这两条直线平行

(B) 若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等, 则这两个平面平行

(C) 若一条直线平行于两个相交平面, 则这条直线与这两个平面的交线平行

(D) 若两个平面都垂直于第三个平面, 则这两个平面平行

7. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量. 下列四个条件中, 使 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 成立的充分条件是 （　）

(A) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　(B) $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$

(C) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　(D) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$

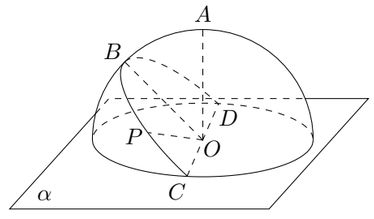
8. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant -3\\ x+2y\leqslant 12\\ 2x+y\leqslant 12\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+4y$ 的最大值是 （　）

(A) 12　(B) 26　(C) 28　(D) 33

9. 已知抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点在坐标原点 O, 并且经过点 $M(2,y_0)$. 若点 M 到该抛物线焦点的距离为 3, 则 $|OM|=$ （　）

(A) $2\sqrt{2}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 4　(D) $2\sqrt{5}$

10. 如图, 半径为 R 的半球 O 的底面圆 O 在平面 α 内, 过点 O 作平面 α 的垂线交半球面于点 A, 过圆 O 的直径 CD 作与平面 α 成 45° 角的平面与半球面相交, 所得交线上到平面 α 的距离最大的点为 B, 该交线上的一点 P 满足 $\angle BOP=60°$, 则 A, P 两点间的球面距离为 （　）



(A) $R\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$　(B) $\frac{\pi R}{4}$　(C) $R\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{\pi R}{3}$

11. 方程 $ay=b^2x^2+c$ 中的 a, b, $c\in\{-2,0,1,2,3\}$, 且 a, b, c 互不相同. 在所有这些方程所表示的曲线中, 不同的抛物线共有 （　）

(A) 28 条　(B) 32 条　(C) 36 条　(D) 48 条

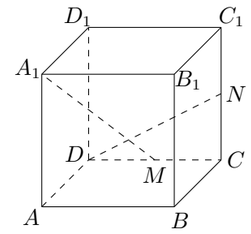
12. 设函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$, $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$ （　）

(A) 0　(B) 7　(C) 14　(D) 21

二、填空题

13. 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ 的定义域是_____. (用区间表示)

14. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是 CD, CC_1 的中点, 则异面直线 A_1M 与 DN 所成角的大小是_____.



15. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1$ (a 为定值, 且 $a>\sqrt{5}$) 的左焦点为 F, 直线 $x=m$ 与椭圆相交于点 A、B, $\triangle FAB$ 的周长的最大值是 12, 则该椭圆的离心率是_____.

16. 设 a, b 为正实数. 现有下列命题:

① 若 $a^2-b^2=1$, 则 $a-b<1$;

② 若 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$, 则 $a-b<1$;

③ 若 $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|=1$, 则 $|a-b|<1$;

④ 若 $|a^3-b^3|=1$, 则 $|a-b|<1$.

其中的真命题有_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 某居民小区有两个相互独立的安全防范系统 (简称系统)A 和 B, 系统 A 和 B 在任意时刻发生故障的概率分别为 $\frac{1}{10}$ 和 p.

(1) 若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为 $\frac{49}{50}$, 求 p 的值;

(2) 求系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数大于发生故障的次数的概率.

18. 已知函数 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$.

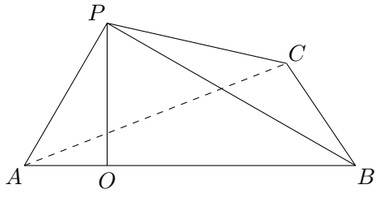
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和值域;

(2) 若 $f(\alpha)=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$, 求 $\sin 2\alpha$ 的值.

19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\angle APB=90^\circ$, $\angle PAB=60^\circ$, $AB=BC=CA$, 点 P 在平面 ABC 内的射影 O 在 AB 上.

(1) 求直线 PC 与平面 ABC 所成角的正弦值;

(2) 求二面角 $B-AP-C$ 的余弦值.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 常数 $\lambda>0$, 且 $\lambda a_1a_n=S_1+S_n$ 对一切正整数 n 都成立.

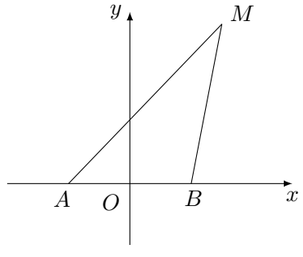
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $a_1>0$, $\lambda=100$. 当 n 为何值时, 数列 $\left\{\lg\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和最大?

21. 如图, 动点 M 与两定点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$ 构成 $\triangle MAB$, 且直线 MA, MB 的斜率之积为 4. 设动点 M 的轨迹为 C.

(1) 求轨迹 C 的方程;

(2) 设直线 $y=x+m$ $(m>0)$ 与 y 轴相交于点 P, 与轨迹 C 相交于点 Q, R, 且 $|PQ|<|PR|$, 求 $\dfrac{|PR|}{|PQ|}$ 的取值范围.



22. 已知 a 为正实数, n 为自然数, 抛物线 $y=-x^2+\dfrac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A. 设 $f(n)$ 为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距.

(1) 用 a 和 n 表示 $f(n)$;

(2) 求对所有 n 都有 $\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}\geqslant\dfrac{n}{n+1}$ 成立的 a 的最小值;

(3) 当 $0<a<1$ 时, 比较 $\dfrac{1}{f(1)-f(2)}+\dfrac{1}{f(2)-f(4)}+\cdots+\dfrac{1}{f(n)-f(2n)}$ 与 $6\cdot\dfrac{f(1)-f(n+1)}{f(0)-f(1)}$ 的大小, 并说明理由.

2012 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{7-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=$ （　）

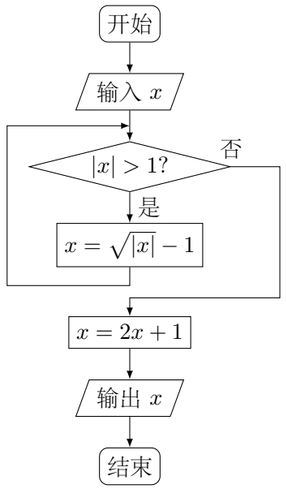
(A) $2+\mathrm{i}$　(B) $2-\mathrm{i}$　(C) $-2+\mathrm{i}$　(D) $-2-\mathrm{i}$

2. 设 $\varphi\in\mathbf{R}$, 则"φ=0"是"$f(x)=\cos(x+\varphi)$ $(x\in\mathbf{R})$ 为偶函数"的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 当输入 x 的值为 -25 时, 输出 x 的值为 （　）



(A) -1　(B) 1　(C) 3　(D) 9

4. 函数 $f(x)=2^x+x^3-2$ 在区间 $(0,1)$ 内的零点个数是 （　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

5. 在 $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的二项展开式中, x 的系数为 （　）

(A) 10　(B) -10　(C) 40　(D) -40

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c, 已知 $8b=5c$, C=2B, 则 $\cos C=$ （　）

(A) $\dfrac{7}{25}$　(B) $-\dfrac{7}{25}$　(C) $\pm\dfrac{7}{25}$　(D) $\dfrac{24}{25}$

7. 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AB=2$, 设点 P, Q 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$, $\lambda\in\mathbf{R}$, 若 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-\dfrac{3}{2}$, 则 $\lambda=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{2}$　(D) $\dfrac{-3\pm2\sqrt{2}}{2}$

8. 设 $m,n\in\mathbf{R}$, 若直线 $(m+1)x+(n+1)y-2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 相切, 则 $m+n$ 的取值范围是 （　）

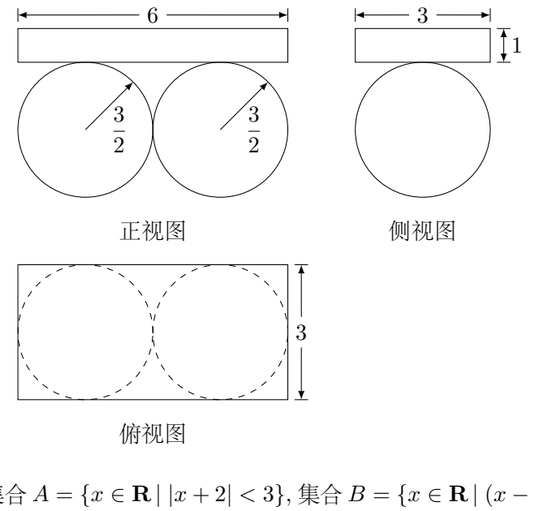
(A) $\left[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right]$　(B) $\left(-\infty,1-\sqrt{3}\right]\cup\left[1+\sqrt{3},+\infty\right)$

(C) $\left[2-2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}\right]$　(D) $\left(-\infty,2-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2+2\sqrt{2},+\infty\right)$

二、填空题

9. 某地区有小学 150 所, 中学 75 所, 大学 25 所. 现采用分层抽样的方法从这些学校中抽取 30 所学校对学生进行视力调查, 应从小学中抽取_____所学校, 中学中抽取_____所学校.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____m^3.



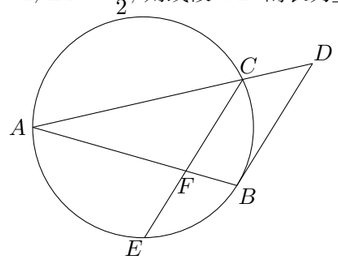
正视图　侧视图

俯视图

11. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x+2|<3\}$, 集合 $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,(x-m)(x-2)<0\}$, 且 $A\cap B=(-1,n)$, 则 $m=$_____, $n=$_____.

12. 已知抛物线的参数方程为 $\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}$ (t 为参数), 其中 $p>0$, 焦点为 F, 准线为 l, 过抛物线上一点 M 作 l 的垂线, 垂足为 E, 若 $|EF|=|MF|$, 点 M 的横坐标是 3, 则 $p=$_____.

13. 如图, 已知 AB 和 AC 是圆的两条弦, 过点 B 作圆的切线与 AC 的延长线相交于点 D. 过点 C 作 BD 的平行线与圆相交于点 E, 与 AB 相交于点 F, $AF=3$, $FB=1$, $EF=\dfrac{3}{2}$, 则线段 CD 的长为_____.



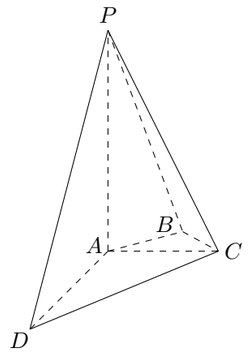
14. 已知函数 $y=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ 的图象与函数 $y=kx-2$ 的图象恰有两个交点, 则实数 k 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos^2x-1$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 有 4 个人去参加某娱乐活动, 该活动有甲、乙两个游戏可供参加者选择. 为增加趣味性, 约定: 每个人通过掷一枚质地均匀的骰子决定自己去参加哪个游戏, 掷出点数为 1 或 2 的人去参加甲游戏, 掷出点数大于 2 的人去参加乙游戏.
(1) 求这 4 个人中恰有 2 人去参加甲游戏的概率;
(2) 求这 4 个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率;
(3) 用 X, Y 分别表示这 4 个人中去参加甲、乙游戏的人数, 记 $\xi=|X-Y|$, 求随机变量 ξ 的分布列与数学期望 $E\xi$.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AC\perp AD$, $AB\perp BC$, $\angle BAC=45^\circ$, $PA=AD=2$, $AC=1$.
(1) 证明 $PC\perp AD$;
(2) 求二面角 $A-PC-D$ 的正弦值;
(3) 设 E 为棱 PA 上的点, 满足异面直线 BE 与 CD 所成的角为 30°, 求 AE 的长.



18. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1=b_1=2$, $a_4+b_4=27$, $S_4-b_4=10$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 $T_n=a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明 $T_n+12=-2a_n+10b_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A, B, 点 P 在椭圆上且异于 A, B 两点, O 为坐标原点.
(1) 若直线 AP 与 BP 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$, 求椭圆的离心率;
(2) 若 $|AP|=|OA|$, 证明直线 OP 的斜率 k 满足 $|k|>\sqrt{3}$.

20. 已知函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为 0, 其中 $a>0$.
(1) 求 a 的值;
(2) 若对任意的 $x\in[0,+\infty)$, 有 $f(x)\leqslant kx^2$ 成立, 求实数 k 的最小值;
(3) 证明: $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)<2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2012 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

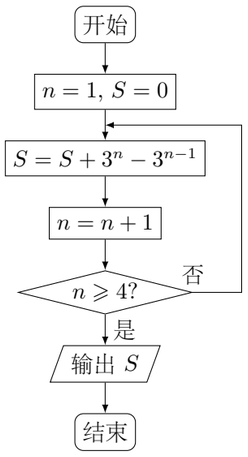
1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{5+3\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $1-\mathrm{i}$　　(B) $-1+\mathrm{i}$　　(C) $1+\mathrm{i}$　　(D) $-1-\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\geqslant 0\\ x-2y+4\geqslant 0\\ x-1\leqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=3x-2y$ 的最小值为 （　）

(A) -5　　(B) -4　　(C) -2　　(D) 3

3. 阅读如图程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为 （　）



(A) 8　　(B) 18　　(C) 26　　(D) 80

4. 已知 $a=2^{1.2}$, $b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-0.8}$, $c=2\log_5 2$, 则 a, b, c 的大小关系为 （　）

(A) $c<b<a$　　(B) $c<a<b$　　(C) $b<a<c$　　(D) $b<c<a$

5. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$x>\dfrac{1}{2}$”是“$2x^2+x-1>0$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

6. 下列函数中, 既是偶函数, 又在区间 $(1,2)$ 内是增函数的为 （　）

(A) $y=\cos 2x$, $x\in\mathbf{R}$　　(B) $y=\log_2|x|$, $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$

(C) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$, $x\in\mathbf{R}$　　(D) $y=x^3+1$, $x\in\mathbf{R}$

7. 将函数 $f(x)=\sin\omega x$ (其中 $\omega>0$) 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度, 所得图象经过点 $\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$, 则 ω 的最小值是 （　）

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{5}{3}$　　(D) 2

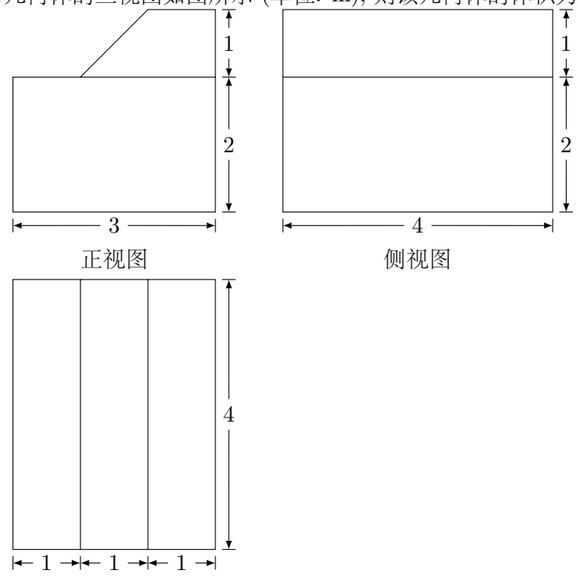
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, $AB=1$, $AC=2$. 设点 P, Q 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$, $\lambda\in\mathbf{R}$. 若 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$, 则 $\lambda=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{4}{3}$　　(D) 2

二、填空题

9. 集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-2|\leqslant 5\}$ 中的最小整数为_____.

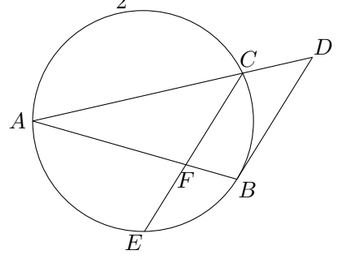
10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____m^3.



11. 已知双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 与双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 有相同的渐近线, 且 C_1 的右焦点为 $F\left(\sqrt{5},0\right)$, 则 $a=$_____, $b=$_____.

12. 设 $m, n\in\mathbf{R}$, 若直线 $l: mx+ny-1=0$ 与 x 轴相交于点 A, 与 y 轴相交于点 B, 且 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交所得弦的长为 2, O 为坐标原点, 则 $\triangle AOB$ 面积的最小值为_____.

13. 如图, 已知 AB 和 AC 是圆的两条弦, 过点 B 作圆的切线与 AC 的延长线相交于点 D. 过点 C 作 BD 的平行线与圆相交于点 E, 与 AB 相交于点 F, $AF=3$, $FB=1$, $EF=\dfrac{3}{2}$, 则线段 CD 的长为_____.



14. 已知函数 $y=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ 的图象与函数 $y=kx$ 的图象恰有两个交点, 则实数 k 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 某地区有小学 21 所, 中学 14 所, 大学 7 所, 现采用分层抽样的方法从这些学校中抽取 6 所学校对学生进行视力调查.

(1) 求应从小学、中学、大学中分别抽取的学校数目;

(2) 若从抽取的 6 所学校中随机抽取 2 所学校做进一步数据分析,

① 列出所有可能的抽取结果;

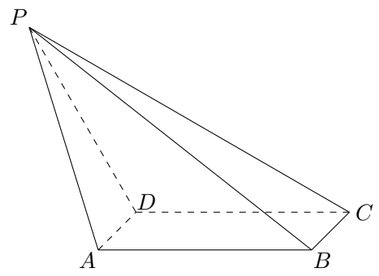
② 求抽取的 2 所学校均为小学的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c. 已知 $a=2$, $c=\sqrt{2}$, $\cos A=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

(1) 求 $\sin C$ 和 b 的值;

(2) 求 $\cos\left(2A+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $AD \perp PD$, $BC=1$, $PC=2\sqrt{3}$, $PD=CD=2$.
(1) 求异面直线 PA 与 BC 所成角的正切值;
(2) 证明: 平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$;
(3) 求直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



18. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1=b_1=2$, $a_4+b_4=27$, $S_4-b_4=10$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 $T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $T_n-8=a_{n-1}b_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N}^*,\ n>2)$.

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 点 $P\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}a, \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 在椭圆上.
(1) 求椭圆的离心率;
(2) 设 A 为椭圆的左顶点, O 为坐标原点. 若点 Q 在椭圆上且满足 $|AQ|=|AO|$, 求直线 OQ 的斜率的值.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1-a}{2}x^2-ax-a$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a>0$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-2,0)$ 内恰有两个零点, 求 a 的取值范围;
(3) 当 $a=1$ 时, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+3]$ 上的最大值为 $M(t)$, 最小值为 $m(t)$, 记 $g(t)=M(t)-m(t)$, 求函数 $g(t)$ 在区间 $[-3,-1]$ 上的最小值.

2012 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\,|\,1<x<4\}$, 集合 $B=\{x\,|\,x^2-2x-3\leqslant 0\}$, 则 $A\cap\left(\complement_{\mathbf{R}}B\right)=$ （　）

(A) $(1,4)$　(B) $(3,4)$　(C) $(1,3)$　(D) $(1,2)\cup(3,4)$

2. 已知 i 是虚数单位, 则 $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $1-2\mathrm{i}$　(B) $2-\mathrm{i}$　(C) $2+\mathrm{i}$　(D) $1+2\mathrm{i}$

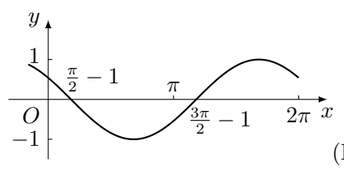
3. 设 $a\in\mathbf{R}$, 则“$a=1$”是“直线 $l_1:ax+2y-1=0$ 与直线 $l_2:x+(a+1)y+4=0$ 平行”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

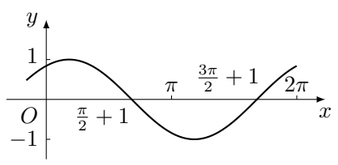
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 把函数 $y=\cos 2x+1$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 然后向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度, 得到的图象是 （　）

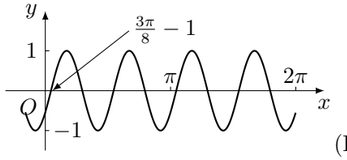
(A)



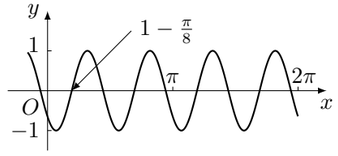
(B)



(C)



(D)



5. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量. （　）

(A) 若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

(B) 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

(C) 若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$, 则存在实数 λ, 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

(D) 若存在实数 λ, 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

6. 若从 1, 2, 3, $\cdots$, 9 这 9 个整数中同时取 4 个不同的数, 其和为偶数, 则不同的取法共有 （　）

(A) 60 种　(B) 63 种　(C) 65 种　(D) 66 种

7. 设 S_n 是公差为 d $(d\neq 0)$ 的无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则下列命题错误的是 （　）

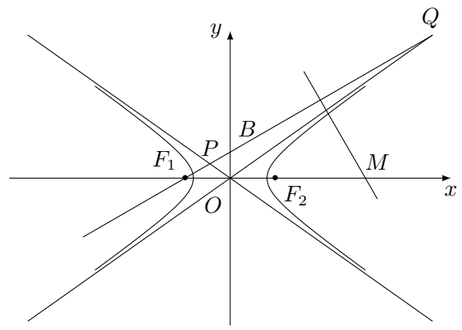
(A) 若 $d<0$, 则数列 $\{S_n\}$ 有最大项

(B) 若数列 $\{S_n\}$ 有最大项, 则 $d<0$

(C) 若数列 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 均有 $S_n>0$

(D) 若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 均有 $S_n>0$, 则数列 $\{S_n\}$ 是递增数列

8. 如图, F_1, F_2 分别是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\,b>0)$ 的左、右焦点, B 是虚轴的端点, 直线 F_1B 与 C 的两条渐近线分别交于 P, Q 两点, 线段 PQ 的垂直平分线与 x 轴交于点 M. 若 $|MF_2|=|F_1F_2|$, 则 C 的离心率是 （　）



(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{3}$

9. 设 $a>0$, $b>0$. （　）

(A) 若 $2^a+2a=2^b+3b$, 则 $a>b$　(B) 若 $2^a+2a=2^b+3b$, 则 $a<b$

(C) 若 $2^a-2a=2^b-3b$, 则 $a>b$　(D) 若 $2^a-2a=2^b-3b$, 则 $a<b$

10. 已知矩形 $ABCD$, $AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, 将 $\triangle ABD$ 沿矩形的对角线 BD 所在的直线进行翻折, 在翻折过程中 （　）

(A) 存在某个位置, 使得直线 AC 与直线 BD 垂直

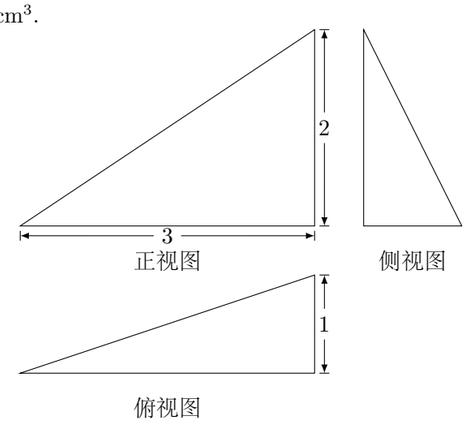
(B) 存在某个位置, 使得直线 AB 与直线 CD 垂直

(C) 存在某个位置, 使得直线 AD 与直线 BC 垂直

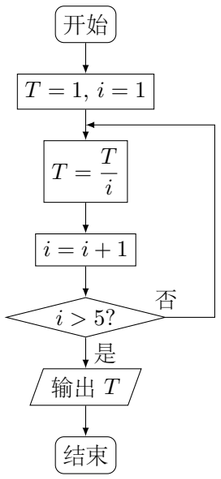
(D) 对任意位置, 三对直线“AC 与 BD”, “AB 与 CD”, “AD 与 BC”均不垂直

二、填空题

11. 已知某三棱锥的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该三棱锥的体积等于_____cm^3.



12. 若某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的值是_____.



13. 设公比为 q $(q>0)$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $S_2=3a_2+2$, $S_4=3a_4+2$, 则 $q=$_____.

14. 若将函数 $f(x)=x^5$ 表示为 $f(x)=a_0+a_1(1+x)+a_2(1+x)^2+\cdots+a_5(1+x)^5$, 其中 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_5 为实数, 则 $a_3=$_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM=3$, $BC=10$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____.

16. 定义: 曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最小值称为曲线 C 到直线 l 的距离. 已知曲线 $C_1:y=x^2+a$ 到直线 $l:y=x$ 的距离等于曲线 $C_2:x^2+(y+4)^2=2$ 到直线 $l:y=x$ 的距离, 则实数 $a=$_____.

17. 设 $a\in\mathbf{R}$, 若 $x>0$ 时均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$, 则 $a=$_____.

三、解答题

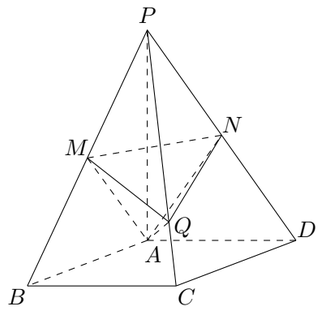
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $\cos A=\dfrac{2}{3}$, $\sin B=\sqrt{5}\cos C$.

(1) 求 $\tan C$ 的值;

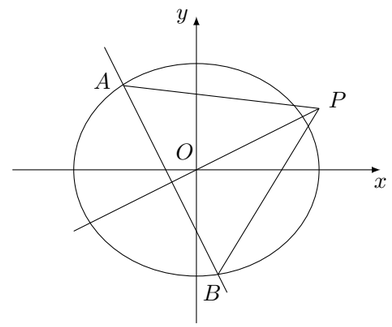
(2) 若 $a=\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 已知箱中装有 4 个白球和 5 个黑球, 且规定: 取出一个白球得 2 分, 取出一个黑球得 1 分. 现从该箱中任取 (无放回, 且每球取到的机会均等)3 个球, 记随机变量 X 为取出此 3 球所得分数之和.
(1) 求 X 的分布列;
(2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形, $\angle BAD=120^\circ$, 且 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $PA=2\sqrt{6}$, M, N 分别为 PB, PD 的中点.
(1) 证明: $MN\parallel$ 平面 $ABCD$;
(2) 过点 A 作 $AQ\perp PC$, 垂足为点 Q, 求二面角 $A-MN-Q$ 的平面角的余弦值.



21. 如图, 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 其左焦点到点 $P(2,1)$ 的距离为 $\sqrt{10}$, 不过原点 O 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 且线段 AB 被直线 OP 平分.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 求 $\triangle ABP$ 面积取最大值时直线 l 的方程.



22. 已知 $a>0$, $b\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=4ax^3-2bx-a+b$.
(1) 证明: 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,
① 函数 $f(x)$ 的最大值为 $|2a-b|+a$;
② $f(x)+|2a-b|+a\geqslant 0$;
(2) 若 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ 对 $x\in[0,1]$ 恒成立, 求 $a+b$ 的取值范围.

2012 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

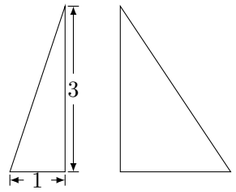
1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, 集合 $P=\{1,2,3,4\}$, $Q=\{3,4,5\}$, 则 $P\cap(\complement_U Q)=$

(A) $\{1,2,3,4,6\}$ (B) $\{1,2,3,4,5\}$ (C) $\{1,2,5\}$ (D) $\{1,2\}$

2. 已知 i 是虚数单位, 则 $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $1-2\mathrm{i}$ (B) $2-\mathrm{i}$ (C) $2+\mathrm{i}$ (D) $1+2\mathrm{i}$

3. 已知某三棱锥的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该三棱锥的体积是（ ）



侧视图



(A) 1 cm^3 (B) 2 cm^3 (C) 3 cm^3 (D) 6 cm^3

4. 设 l 是直线, α,β 是两个不同的平面, 下列选项正确的是 （ ）

(A) 若 $l\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$ (B) 若 $l\parallel\alpha$, $l\perp\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

(C) 若 $\alpha\perp\beta$, $l\perp\alpha$, 则 $l\perp\beta$ (D) 若 $\alpha\perp\beta$, $l\parallel\alpha$, 则 $l\perp\beta$

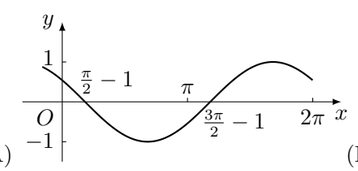
5. 设 $a\in\mathbf{R}$, 则“$a=1$”是“直线 $l_1:ax+2y-1=0$ 与直线 $l_2:x+2y+4=0$ 平行”的 （ ）

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

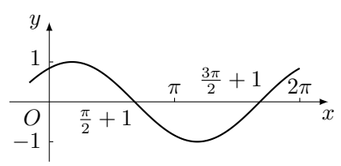
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 把函数 $y=\cos 2x+1$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 然后向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度, 得到的图象是 （ ）

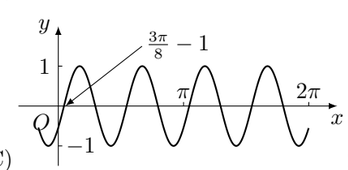
(A)



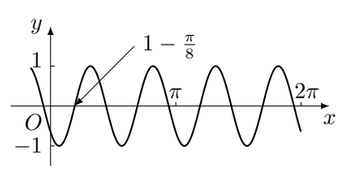
(B)



(C)



(D)



7. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量. （ ）

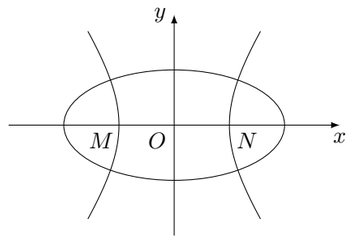
(A) 若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

(B) 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

(C) 若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$, 则存在实数 λ, 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

(D) 若存在实数 λ, 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

8. 如图, 中心均为原点 O 的双曲线与椭圆有公共焦点, M, N 是双曲线的两顶点. 若 M, O, N 将椭圆长轴四等分, 则双曲线与椭圆的离心率的比值是 （ ）



(A) 3 (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

9. 若正数 x, y 满足 $x+3y=5xy$, 则 $3x+4y$ 的最小值是 （ ）

(A) $\dfrac{24}{5}$ (B) $\dfrac{28}{5}$ (C) 5 (D) 6

10. 设 $a>0$, $b>0$, e 是自然对数的底数 （ ）

(A) 若 $\mathrm{e}^a+2a=\mathrm{e}^b+3b$, 则 $a>b$ (B) 若 $\mathrm{e}^a+2a=\mathrm{e}^b+3b$, 则 $a<b$

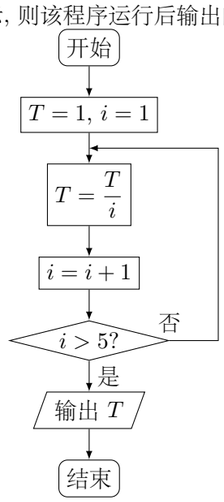
(C) 若 $\mathrm{e}^a-2a=\mathrm{e}^b-3b$, 则 $a>b$ (D) 若 $\mathrm{e}^a-2a=\mathrm{e}^b-3b$, 则 $a<b$

二、填空题

11. 某个年级有男生 560 人, 女生 420 人, 用分层抽样的方法从该年级全体学生中抽取一个容量为 280 的样本, 则此样本中男生人数为_____.

12. 从边长为 1 的正方形的中心和顶点这五点中, 随机 (等可能) 取两点, 则该两点间的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的概率是_____.

13. 若某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的值是_____.



14. 设 $z=x+2y$, 其中实数 x, y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 z 的取值范围是_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM=3$, $BC=10$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____.

16. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的偶函数, 当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)=x+1$, 则 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=$_____.

17. 定义: 曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最小值称为曲线 C 到直线 l 的距离. 已知曲线 $C_1:y=x^2+a$ 到直线 $l:y=x$ 的距离等于曲线 $C_2:x^2+(y+4)^2=2$ 到直线 $l:y=x$ 的距离, 则实数 $a=$_____.

三、解答题

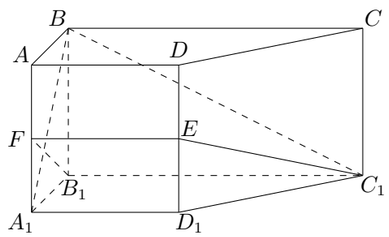
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 且 $b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $b=3$, $\sin C=2\sin A$, 求 a, c 的值.

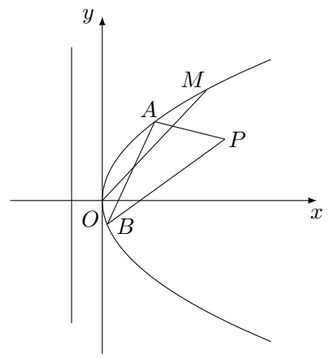
19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_n = 2n^2 + n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n = 4\log_2 b_n + 3$, $n \in \mathbf{N}^*$.
(1) 求 a_n, b_n;
(2) 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 如图, 在侧棱垂直底面的四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = \sqrt{2}$, $AD = 2$, $BC = 4$, $AA_1 = 2$, E 是 DD_1 的中点, F 是平面 B_1C_1E 与直线 AA_1 的交点.
(1) 证明: ① $EF \parallel A_1D_1$; ② $BA_1 \perp$ 平面 B_1C_1EF;
(2) 求 BC_1 与平面 B_1C_1EF 所成的角的正弦值.



21. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = 4x^3 - 2ax + a$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 证明: 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $f(x) + |2 - a| > 0$.

22. 如图, 在直角坐标系 xOy 中, 点 $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 到抛物线 $C: y^2 = 2px$ $(p > 0)$ 的准线的距离为 $\frac{5}{4}$. 点 $M(t, 1)$ 是 C 上的定点, A, B 是 C 上的两动点, 且线段 AB 被直线 OM 平分.
(1) 求 p, t 的值;
(2) 求 $\triangle ABP$ 面积的最大值.



2013 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

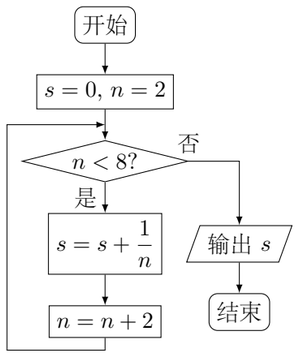
理科数学

一、选择题

1. 设 i 是虚数单位, $\overline{z}$ 是复数 z 的共轭复数, 若 $z\cdot\overline{z}\mathrm{i}+2=2z$, 则 $z=$（　）

(A) $1+\mathrm{i}$　　(B) $1-\mathrm{i}$　　(C) $-1+\mathrm{i}$　　(D) $-1-\mathrm{i}$

2. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是（　）



(A) $\dfrac{1}{6}$　　(B) $\dfrac{25}{24}$　　(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) $\dfrac{11}{12}$

3. 在下列命题中, 不是公理的是（　）

(A) 平行于同一个平面的两个平面相互平行

(B) 过不在同一条直线上的三点, 有且只有一个平面

(C) 如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在此平面内

(D) 如果两个不重合的平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条过该点的公共直线

4. “$a\leqslant 0$”是“函数 $f(x)=|(ax-1)x|$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增”的（　）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

5. 某班级有 50 名学生, 其中有 30 名男生和 20 名女生, 随机询问了该班五名男生和五名女生在某次数学测验中的成绩, 五名男生的成绩分别为 86、94、88、92、90, 五名女生的成绩分别为 88、93、93、88、93. 下列说法一定正确的是（　）

(A) 这种抽样方法是一种分层抽样

(B) 这种抽样方法是一种系统抽样

(C) 这五名男生成绩的方差大于这五名女生成绩的方差

(D) 该班男生成绩的平均数小于该班女生成绩的平均数

6. 已知一元二次不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\left\{x\,|\,x<-1\text{ 或 }x>\dfrac{1}{2}\right\}$, 则 $f(10^x)>0$ 的解集为（　）

(A) $\{x\,|\,x<-1\text{ 或 }x>-\lg 2\}$　　(B) $\{x\,|\,-1<x<-\lg 2\}$

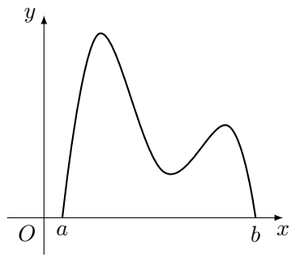
(C) $\{x\,|\,x>-\lg 2\}$　　(D) $\{x\,|\,x<-\lg 2\}$

7. 在极坐标系中, 圆 $\rho=2\cos\theta$ 的垂直于极轴的两条切线方程分别为（　）

(A) $\theta=0$ $(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=2$　　(B) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ $(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=2$

(C) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ $(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=1$　　(D) $\theta=0$ $(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=1$

8. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 在区间 $[a,b]$ 上可找到 n $(n\geqslant 2)$ 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 使得 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$, 则 n 的取值范围为（　）



(A) $\{2,3\}$　　(B) $\{2,3,4\}$　　(C) $\{3,4\}$　　(D) $\{3,4,5\}$

9. 在平面直角坐标系中, O 是坐标原点, 两定点 A, B 满足 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$, 则点集 $\left\{P\,|\,\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\,\lambda\,|+|\,\mu\,|\leqslant 1,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\right\}$ 所表示的区域的面积是（　）

(A) $2\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) $4\sqrt{2}$　　(D) $4\sqrt{3}$

10. 若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有极值点 x_1,x_2, 且 $f(x_1)=x_1$, 则关于 x 的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 的不同实根个数是（　）

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

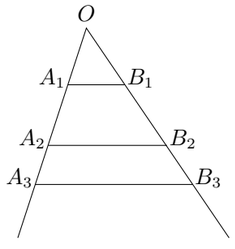
二、填空题

11. 若 $\left(x+\dfrac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数为 7, 则实数 $a=$_____.

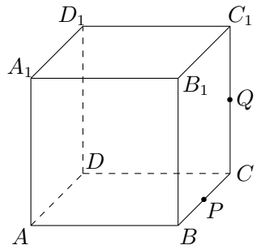
12. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c. 若 $b+c=2a$, $3\sin A=5\sin B$, 则角 $C=$_____.

13. 已知直线 $y=a$ 交抛物线 $y=x^2$ 于 A, B 两点. 若该抛物线上存在点 C, 使得 $\angle ACB$ 为直角, 则 a 的取值范围为_____.

14. 如图, 互不相同的点 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 分别在角 O 的两条边上, 所有 A_nB_n 相互平行, 且所有梯形 $A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}$ 的面积均相等. 设 $OA_n=a_n$. 若 $a_1=1$, $a_2=2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是_____.



15. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P 为 BC 中点, Q 为线段 CC_1 上的动点, 过 A、P、Q 的平面截该正方体所得的截面记为 S, 则下列命题正确的是_____. (写出所有正确命题的编号)



① 当 $0<CQ<\dfrac{1}{2}$ 时, S 为四边形;

② 当 $CQ=\dfrac{1}{2}$ 时, S 为等腰梯形;

③ 当 $CQ=\dfrac{3}{4}$ 时, S 与 C_1D_1 交点 R 满足 $C_1R_1=\dfrac{1}{3}$;

④ 当 $\dfrac{3}{4}<CQ<1$ 时, S 为六边形;

⑤ 当 $CQ=1$ 时, S 的面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=4\cos\omega x\cdot\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1) 求 ω 的值;

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性.

17. 设函数 $f(x)=ax-(1+a^2)x^2$, 其中 $a>0$, 区间 $I=\{x\,|\,f(x)>0\}$,

(1) 求 I 的长度 (注: 区间 (α,β) 的长度定义为 $\beta-\alpha$);

(2) 给定常数 $k\in(0,1)$, 当 $1-k\leqslant a\leqslant 1+k$ 时, 求 I 长度的最小值.

18. 设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1-a^2}=1$ 的焦点在 x 轴上.

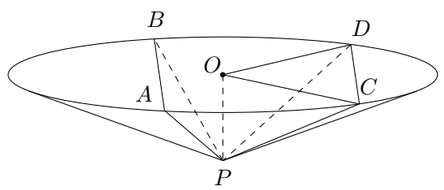
(1) 若椭圆 E 的焦距为 1, 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 F_1, F_2 分别是椭圆 E 的左、右焦点, P 为椭圆 E 上第一象限内的点, 直线 F_2P 交 y 轴于点 Q, 并且 $F_1P\perp F_1Q$, 证明: 当 a 变化时, 点 P 在某定直线上.

19. 如图, 圆锥顶点为 P. 底面圆心为 O, 其母线与底面所成的角为 22.5°. AB 和 CD 是底面圆 O 上的两条平行的弦, 轴 OP 与平面 PCD 所成的角为 60°.

(1) 证明: 平面 PAB 与平面 PCD 的交线平行于底面;

(2) 求 $\cos\angle COD$.



20. 设函数 $f_n(x)=-1+x+\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^3}{3^2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n^2}$ ($x\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}^*$). 证明:

(1) 对每个 $n\in\mathbf{N}^*$, 存在唯一的 $x_n\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]$, 满足 $f_n(x_n)=0$;

(2) 对任意 $p\in\mathbf{N}^*$, 由 (1) 中 x_n 构成的数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_n-x_{n+p}<\dfrac{1}{n}$.

21. 某高校数学系计划在周六和周日各举行一次主题不同的心理测试活动, 分别由李老师和张老师负责, 已知该系共有 n 位学生, 每次活动均需该系 k 位学生参加 (n 和 k 都是固定的正整数). 假设李老师和张老师分别将各自活动通知的信息独立、随机地发给该系 k 位学生, 且所发信息都能收到. 记该系收到李老师或张老师所发活动通知信息的学生人数为 X.

(1) 求该系学生甲收到李老师或张老师所发活动通知信息的概率;

(2) 求使 $P(X=m)$ 取得最大值的整数 m.

2013 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

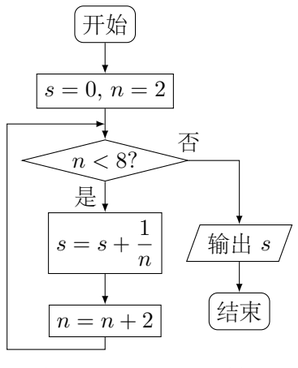
1. 设 i 是虚数单位, 若复数 $a-\dfrac{10}{3-\mathrm{i}}$ $(a\in\mathbf{R})$ 是纯虚数, 则 a 的值为 （　）

(A) -3　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 3

2. 已知 $A=\{x\mid x+1>0\}$, $B=\{-2,-1,0,1\}$, 则 $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B=$ （　）

(A) $\{-2,-1\}$　　(B) $\{-2\}$　　(C) $\{-1,0,1\}$　　(D) $\{0,1\}$

3. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是 （　）



(A) $\dfrac{3}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{6}$　　(C) $\dfrac{11}{12}$　　(D) $\dfrac{25}{24}$

4. “$(2x-1)x=0$”是“$x=0$”的 （　）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

5. 若某公司从五位大学毕业生甲、乙、丙、丁、戊中录用三人, 这五人被录用的机会均等, 则甲或乙被录用的概率为 （　）

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{2}{5}$　　(C) $\dfrac{3}{5}$　　(D) $\dfrac{9}{10}$

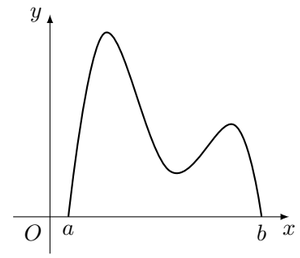
6. 直线 $x+2y-5+\sqrt{5}=0$ 被圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 截得的弦长为（　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 4　　(D) $4\sqrt{6}$

7. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_8=4a_3$, $a_7=-2$, 则 $a_9=$ （　）

(A) -6　　(B) -4　　(C) -2　　(D) 2

8. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 在区间 $[a,b]$ 上可找到 n $(n\geqslant 2)$ 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 使得 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$, 则 n 的取值范围为 （　）



(A) $\{2,3\}$　　(B) $\{2,3,4\}$　　(C) $\{3,4\}$　　(D) $\{3,4,5\}$

9. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c, 若 $b+c=2a$, $3\sin A=5\sin B$, 则角 $C=$ （　）

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　　(B) $\dfrac{2\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{3\pi}{4}$　　(D) $\dfrac{5\pi}{6}$

10. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有两个极值点 x_1, x_2, 若 $f(x_1)=x_1<x_2$, 则关于 x 的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 的不同实根个数为（　）

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

二、填空题

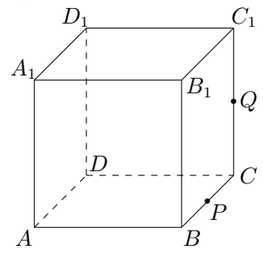
11. 函数 $y=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为_____.

12. 若非负变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant -1\\ x+2y\leqslant 4\end{cases}$, 则 $x+y$ 的最大值为_____.

13. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为_____.

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)$. 若当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=x(1-x)$, 则当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时, $f(x)=$_____.

15. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P 为 BC 中点, Q 为线段 CC_1 上的动点, 过 A、P、Q 的平面截该正方体所得的截面记为 S, 则下列命题正确的是_____. (写出所有正确命题的编号)



① 当 $0<CQ<\dfrac{1}{2}$ 时, S 为四边形;

② 当 $CQ=\dfrac{1}{2}$ 时, S 为等腰梯形;

③ 当 $CQ=\dfrac{3}{4}$ 时, S 与 C_1D_1 交点 R 满足 $C_1R_1=\dfrac{1}{3}$;

④ 当 $\dfrac{3}{4}<CQ<1$ 时, S 为六边形;

⑤ 当 $CQ=1$ 时, S 的面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值, 并求使 $f(x)$ 取得最小值的 x 的集合;

(2) 不画图, 说明函数 $y=f(x)$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变化得到.

17. 为调查甲、乙两校高三年级学生某次联考数学成绩情况, 用简单随机抽样, 从这两校中各抽取 30 名高三年级学生, 以他们的数学成绩 (百分制) 作为样本, 样本数据的茎叶图如图:

甲		乙
7	4	5
5 3 3 2	5	3 3 8
5 5 4 3 3 3 1 0 0	6	0 0 0 1 1 2 2 3 3 5
8 6 6 2 2 1 1 0 0	7	0 0 2 2 2 3 3 6 6 9
7 5 4 4 2	8	1 1 5 5 8
2 0	9	0

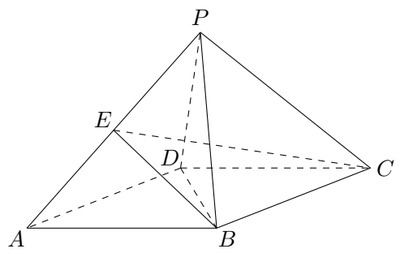
(1) 若甲校高三年级每位学生被抽取的概率为 0.05, 求甲校高三年级学生总人数, 并估计甲校高三年级这次联考数学成绩的及格率 (60 分及 60 分以上为及格);

(2) 设甲、乙两校高三年级学生这次联考数学平均成绩分别为 $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, 估计 $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ 的值.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD=60^\circ$. 已知 $PB=PD=2$, $PA=\sqrt{6}$.

(1) 证明: $PC\perp BD$;

(2) 若 E 为 PA 的中点, 求三棱锥 $P-BCE$ 的体积.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_2+a_4=8$, 且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 函数 $f(x)=(a_n-a_{n+1}+a_{n+2})x+a_{n+1}\cos x-a_{n+2}\sin x$ 满足 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n=2\left(a_n+\dfrac{1}{2^{a_n}}\right)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20. 设函数 $f(x)=ax-(1+a^2)x^2$, 其中 $a>0$, 区间 $I=\{x\mid f(x)>0\}$.

(1) 求 I 的长度 (注: 区间 (α,β) 的长度定义为 $\beta-\alpha$);

(2) 给定常数 $k\in(0,1)$, 当 $1-k\leqslant a\leqslant 1+k$ 时, 求 I 长度的最小值.

21. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦距为 4, 且过点 $P\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 $Q(x_0,y_0)$ $(x_0y_0\neq 0)$ 为椭圆 C 上一点, 过点 Q 作 x 轴的垂线, 垂足为 E. 取点 $A\left(0,2\sqrt{2}\right)$, 连接 AE. 过点 A 作 AE 的垂线交 x 轴于点 D. 点 G 是点 D 关于 y 轴的对称点, 作直线 QG, 问这样作出的直线 QG 是否与椭圆 C 一定有唯一的公共点? 并说明理由.

2013 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{x\mid -1\leqslant x<1\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{0\}$　(B) $\{-1,0\}$　(C) $\{0,1\}$　(D) $\{-1,0,1\}$

2. 在复平面内, 复数 $(2-\mathrm{i})^2$ 对应的点位于 （ ）

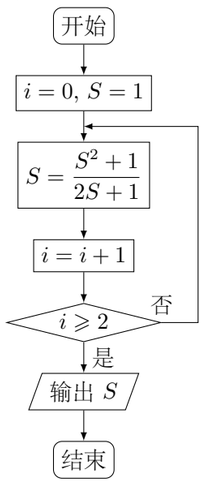
(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3. “$\varphi=\pi$”是“曲线 $y=\sin(2x+\varphi)$ 过坐标原点”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 （ ）



(A) 1　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{13}{21}$　(D) $\dfrac{610}{987}$

5. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 所得图象与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 关于 y 轴对称, 则 $f(x)=$ （ ）

(A) e^{x+1}　(B) e^{x-1}　(C) e^{-x+1}　(D) e^{-x-1}

6. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为 （ ）

(A) $y=\pm 2x$　(B) $y=\pm\sqrt{2}x$　(C) $y=\pm\dfrac{1}{2}x$　(D) $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

7. 直线 l 过抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点且与 y 轴垂直, 则 l 与 C 所围成的图形的面积等于 （ ）

(A) $\dfrac{4}{3}$　(B) 2　(C) $\dfrac{8}{3}$　(D) $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

8. 设关于 x, y 的不等式组 $\begin{cases}2x-y+1>0\\ x+m<0\\ y-m>0\end{cases}$ 表示的平面区域内存在点 $P(x_0,y_0)$, 满足 $x_0-2y_0=2$, 则 m 的取值范围是 （ ）

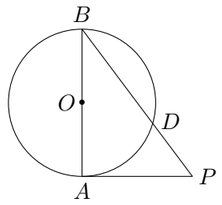
(A) $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)$　(B) $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$　(C) $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$　(D) $\left(-\infty,-\dfrac{5}{3}\right)$

二、填空题

9. 在极坐标系中, 点 $\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 到直线 $\rho\sin\theta=2$ 的距离等于_____.

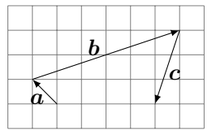
10. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20$, $a_3+a_5=40$, 则公比 $q=$_____, 前 n 项和 $S_n=$_____.

11. 如图, AB 为圆 O 的直径, PA 为圆 O 的切线, PB 与圆 O 相交于 D, 若 $PA=3$. $PD:DB=9:16$, 则 $PD=$_____, $AB=$_____.

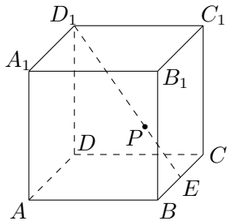


12. 将序号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 张参观券全部分给 4 人, 每人至少 1 张, 如果分给同一人的 2 张参观券连号, 那么不同的分法种数是_____.

13. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示, 若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbf{R})$, 则 $\dfrac{\lambda}{\mu}=$_____.



14. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 BC 的中点, 点 P 在线段 D_1E 上, 点 P 到直线 CC_1 的距离的最小值为_____.



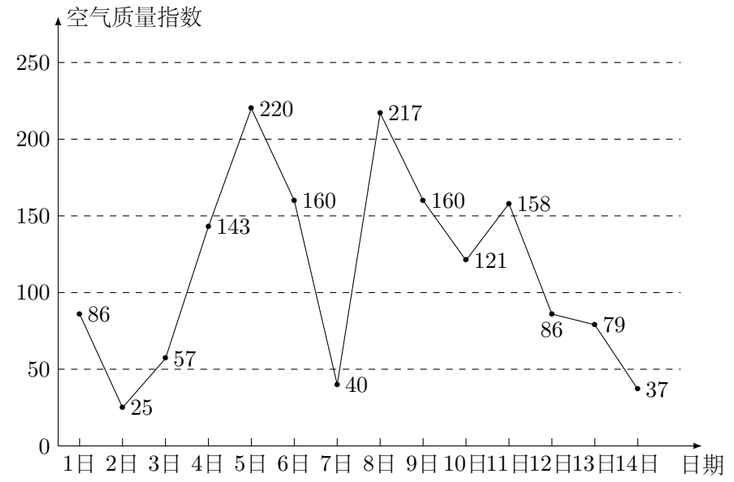
三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b=2\sqrt{6}$, $\angle B=2\angle A$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 求 c 的值.

16. 下图是某市 3 月 1 日至 14 日的空气质量指数趋势图, 空气质量指数小于 100 表示空气质量优良, 空气质量指数大于 200 表示空气重度污染. 某人随机选择 3 月 1 日至 3 月 13 日中的某一天到达该市, 并停留 2 天.



(1) 求此人到达当日空气重度污染的概率;

(2) 设 X 是此人停留期间空气质量优良的天数, 求 X 的分布列与数学期望;

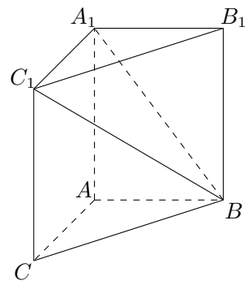
(3) 由图判断从哪天开始连续三天的空气质量指数方差最大? (结论不要求证明)

17. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, AA_1C_1C 是边长为 4 的正方形. 平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C, $AB=3, BC=5$.

(1) 求证: $AA_1\perp$ 平面 ABC;

(2) 求二面角 $A_1-BC_1-B_1$ 的余弦值;

(3) 证明: 在线段 BC_1 上存在点 D, 使得 $AD\perp A_1B$, 并求 $\dfrac{BD}{BC_1}$ 的值.



18. 设 L 为曲线 $C: y=\dfrac{\ln x}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线.

(1) 求 L 的方程;

(2) 证明: 除切点 $(1,0)$ 之外, 曲线 C 在直线 L 的下方.

19. 已知 A, B, C 是椭圆 $W: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的三个点, O 是坐标原点.

(1) 当点 B 是 W 的右顶点, 且四边形 $OABC$ 为菱形时, 求此菱形的面积;

(2) 当点 B 不是 W 的顶点时, 判断四边形 $OABC$ 是否可能为菱形, 并说明理由.

20. 已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的无穷数列, 该数列前 n 项的最大值记为 A_n, 第 n 项之后各项 a_{n+1}, a_{n+2}, $\cdots$ 的最小值记为 B_n, $d_n=A_n-B_n$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, $\cdots$, 是一个周期为 4 的数列 (即对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_{n+4}=a_n$), 写出 d_1, d_2, d_3, d_4 的值;

(2) 设 d 是非负整数, 证明: $d_n=-d$ $(n=1,\ 2,\ 3\ \cdots)$ 的充分必要条件为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列;

(3) 证明: 若 $a_1=2$, $d_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$, 则 $\{a_n\}$ 的项只能是 1 或者 2, 且有无穷多项为 1.

2013 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{x\mid -1\leqslant x<1\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{0\}$　(B) $\{-1,0\}$　(C) $\{0,1\}$　(D) $\{-1,0,1\}$

2. 设 a, b, $c\in\mathbf{R}$, 且 $a>b$, 则 （ ）

(A) $ac>bc$　(B) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　(C) $a^2>b^2$　(D) $a^3>b^3$

3. 下列函数中, 既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是 （ ）

(A) $y=\dfrac{1}{x}$　(B) $y=\mathrm{e}^{-x}$　(C) $y=-x^2+1$　(D) $y=\lg|x|$

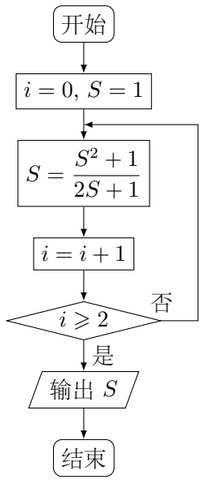
4. 在复平面内, 复数 $\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$ 对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b=5$, $\sin A=\dfrac{1}{3}$, 则 $\sin B=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{5}{9}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(D) 1

6. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 （ ）

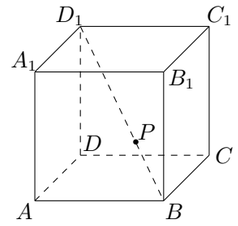


(A) 1　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{13}{21}$　(D) $\dfrac{610}{987}$

7. 双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率大于 $\sqrt{2}$ 的充分必要条件是 （ ）

(A) $m>\dfrac{1}{2}$　(B) $m\geqslant 1$　(C) $m>1$　(D) $m>2$

8. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为对角线 BD_1 的三等分点, P 到各顶点的距离的不同取值有 （ ）

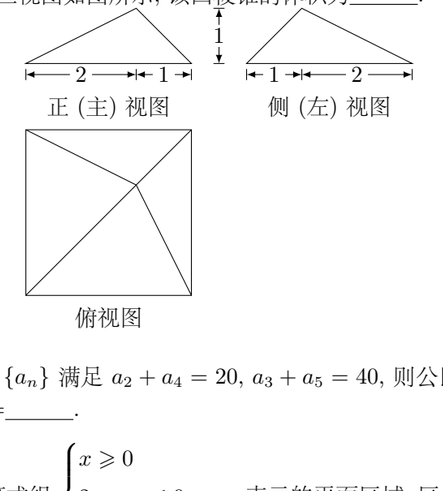


(A) 3 个　(B) 4 个　(C) 5 个　(D) 6 个

二、填空题

9. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点坐标为 $(1,0)$, 则 $p=$_____; 准线方程为_____.

10. 某四棱锥的三视图如图所示, 该四棱锥的体积为_____.



俯视图

11. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20$, $a_3+a_5=40$, 则公比 $q=$_____, 前 n 项和 $S_n=$_____.

12. 设 D 为不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ 2x-y\leqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域, 区域 D 上的点与点 $(1,0)$ 之间的距离的最小值为_____.

13. 函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, & x\geqslant 1\\ 2^x, & x<1\end{cases}$ 的值域为_____.

14. 已知点 $A(1,-1)$, $B(3,0)$, $C(2,1)$. 若平面区域 D 由所有满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ $(1\leqslant\lambda\leqslant 2,\ 0\leqslant\mu\leqslant 1)$ 的点 P 组成, 则 D 的面积为_____.

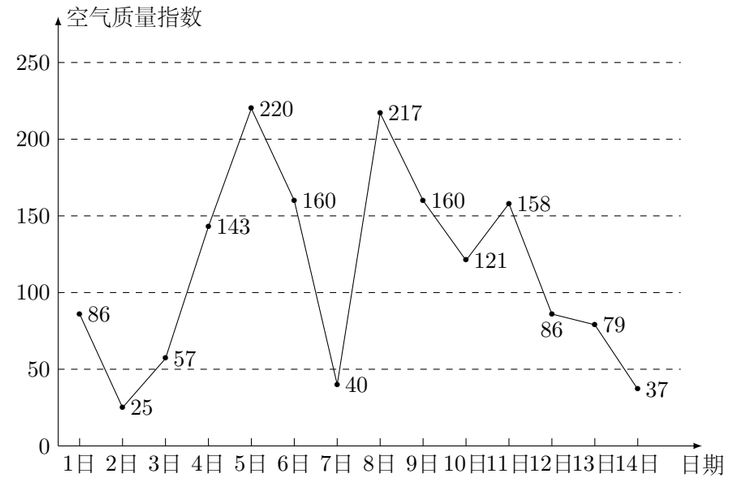
三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=(2\cos^2x-1)\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 4x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及最大值;

(2) 若 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 且 $f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求 α 的值.

16. 下图是某市 3 月 1 日至 14 日的空气质量指数趋势图, 空气质量指数小于 100 表示空气质量优良, 空气质量指数大于 200 表示空气重度污染. 某人随机选择 3 月 1 日至 3 月 13 日中的某一天到达该市, 并停留 2 天.



(1) 求此人到达当日空气质量优良的概率;

(2) 求此人在该市停留期间只有 1 天空气质量重度污染的概率;

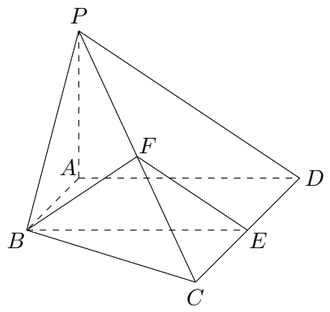
(3) 由图判断从哪天开始连续三天的空气质量指数方差最大? (结论不要求证明)

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB /\!\!/ CD$, $AB \perp AD$, $CD=2AB$, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, $PA \perp AD$, E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点. 求证:

(1) $PA \perp$ 底面 $ABCD$;

(2) $BE /\!\!/$ 平面 PAD;

(3) 平面 $BEF \perp$ 平面 PCD.



18. 已知函数 $f(x)=x^2+x\sin x+\cos x$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处与直线 $y=b$ 相切, 求 a 与 b 的值;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=b$ 有两个不同交点, 求 b 的取值范围.

19. 直线 $y=kx+m$ $(m \neq 0)$ 与椭圆 $W: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A, C 两点, O 是坐标原点.

(1) 当点 B 的坐标为 $(0,1)$, 且四边形 $OABC$ 为菱形时, 求 AC 的长;

(2) 当点 B 在 W 上且不是 W 的顶点时, 证明: 四边形 $OABC$ 不可能为菱形.

20. 给定数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 对 $i=1, 2, \cdots, n-1$, 该数列前 i 项的最大值记为 A_i, 后 $n-i$ 项 $a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_n$ 的最小值记为 B_i, $d_i=A_i-B_i$.

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 为 3, 4, 7, 1, 写出 d_1, d_2, d_3 的值;

(2) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geqslant 4)$ 是公比大于 1 的等比数列, 且 $a_1>0$. 证明: $d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}$ 是等比数列;

(3) 设 $d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}$ 是公差大于 0 的等差数列, 且 $d_1>0$. 证明: $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 是等差数列.

2013 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ （　）

(A) $\{1,3,4\}$　(B) $\{3,4\}$　(C) $\{3\}$　(D) $\{4\}$

2. 命题“对任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $x^2\geqslant 0$”的否定为 （　）

(A) 对任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $x^2<0$　(B) 不存在 $x\in\mathbf{R}$, 使得 $x^2<0$

(C) 存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得 $x_0^2\geqslant 0$　(D) 存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得 $x_0^2<0$

3. $\sqrt{(3-a)(a+6)}$ $(-6\leqslant a\leqslant 3)$ 的最大值为 （　）

(A) 9　(B) $\dfrac{9}{2}$　(C) 3　(D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

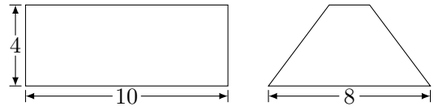
4. 以下茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名学生在一次英语听力测试中的成绩 (单位: 分).

甲组		乙组
9	0	9
x 2	1	5 y 8
7 4	2	4

已知甲组数据的中位数为 15, 乙组数据的平均数为 16.8, 则 x, y 的值分别为 （　）

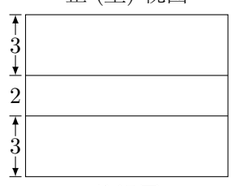
(A) 2, 5　(B) 5, 5　(C) 5, 8　(D) 8, 8

5. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 （　）



正 (主) 视图

侧 (左) 视图



俯视图

(A) $\dfrac{560}{3}$　(B) $\dfrac{580}{3}$　(C) 200　(D) 240

6. 若 $a<b<c$, 则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间 （　）

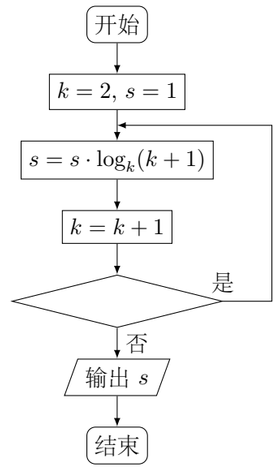
(A) (a,b) 和 (b,c) 内　(B) $(-\infty,a)$ 和 (a,b) 内

(C) (b,c) 和 $(c,+\infty)$ 内　(D) $(-\infty,a)$ 和 $(c,+\infty)$ 内

7. 已知圆 $C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=1$, 圆 $C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=9$, M, N 分别是圆 C_1, C_2 上的动点, P 为 x 轴上的动点, 则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为 （　）

(A) $5\sqrt{2}-4$　(B) $\sqrt{17}-1$　(C) $6-2\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{17}$

8. 执行如图所示的程序框图, 如果输出 $s=3$, 那么判断框内应填入的条件是 （　）



(A) $k\leqslant 6$　(B) $k\leqslant 7$　(C) $k\leqslant 8$　(D) $k\leqslant 9$

9. $4\cos 50^\circ-\tan 40^\circ=$ （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) $2\sqrt{2}-1$

10. 在平面上, $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$, $\left|\overrightarrow{OB_1}\right|=\left|\overrightarrow{OB_2}\right|=1$, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$. 若 $\left|\overrightarrow{OP}\right|<\dfrac{1}{2}$, 则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 的取值范围是 （　）

(A) $\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right]$　(C) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right]$　(D) $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$

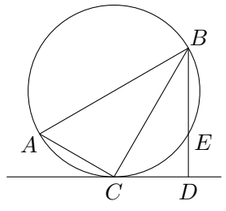
二、填空题

11. 已知复数 $z=\dfrac{5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ (i 是虚数单位), 则 $|z|=$_____.

12. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1=1$, 公差 $d\neq 0$, S_n 为其前 n 项和, 若 a_1, a_2, a_5 成等比数列, 则 $S_8=$_____.

13. 从 3 名骨科、4 名脑外科和 5 名内科医生中选派 5 人组成一个抗震救灾医疗小组, 则骨科、脑外科和内科医生都至少有 1 人的选派方法种数是_____. (用数字作答)

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$, $AB=20$, 过 C 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 CD, $BD\perp CD$, BD 与外接圆交于点 E, 则 DE 的长为_____.



15. 在直角坐标系 xOy 中, 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 若极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$ 的直线与曲线 $\begin{cases}x=t^2\\y=t^3\end{cases}$ (t 为参数) 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$_____.

16. 若关于实数 x 的不等式 $|x-5|+|x+3|<a$ 无解, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 设 $f(x)=a(x-5)^2+6\ln x$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,6)$.

(1) 确定 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

18. 某商场举行的“三色球”购物摸奖活动规定: 在一次摸奖中, 摸奖者先从装有 3 个红球与 4 个白球的袋中任意摸出 3 个球, 再从装有 1 个蓝球与 2 个白球的袋中任意摸出 1 个球, 根据摸出 4 个球中红球与蓝球的个数, 设一、二、三等奖如下:

奖级	摸出红、蓝球个数	获奖金额
一等奖	3 红 1 蓝	200 元
二等奖	3 红 0 蓝	50 元
三等奖	2 红 1 蓝	10 元

其余情况无奖且每次摸奖最多只能获得一个奖级.

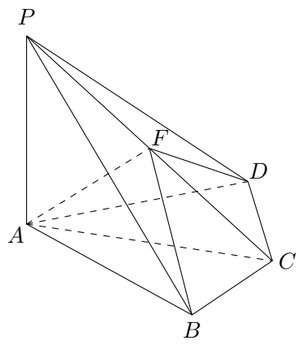
(1) 求一次摸球恰好摸到 1 个红球的概率;

(2) 求摸奖者在一次摸奖中获奖金额 X 的分布列与期望 $E(X)$.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $BC=CD=2$, $AC=4$, $\angle ACB=\angle ACD=\dfrac{\pi}{3}$, F 为 PC 的中点, $AF\perp PB$.

(1) 求 PA 的长;

(2) 求二面角 $B-AF-D$ 的正弦值.



20. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c, 且 $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$.

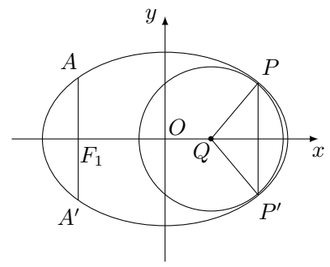
(1) 求 C;

(2) 设 $\cos A\cos B=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$, $\dfrac{\cos(\alpha+A)\cos(\alpha+B)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$, 求 $\tan\alpha$ 的值.

21. 如图, 椭圆的中心为原点 O, 长轴在 x 轴上, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 过左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于 A, A' 两点, $|AA'|=4$.

(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 取垂直于 x 轴的直线与椭圆相交于不同的两点 P, P', 过 P, P' 作圆心为 Q 的圆, 使椭圆上的其余点均在圆 Q 外. 若 $PQ\perp P'Q$, 求圆 Q 的标准方程.



22. 对正整数 n, 记 $I_n=\{1,2,\cdots,n\}$, $P_n=\left\{\dfrac{m}{\sqrt{k}}\mid m\in I_n,k\in I_n\right\}$.

(1) 求集合 P_7 中元素的个数;

(2) 若 P_n 的子集 A 中任意两个元素之和不是整数的平方, 则称 A 为"稀疏集". 求 n 的最大值, 使 P_n 能分成两个不相交的稀疏集的并.

2013 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ （　）

(A) $\{1,3,4\}$　(B) $\{3,4\}$　(C) $\{3\}$　(D) $\{4\}$

2. 命题“对任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $x^2\geqslant 0$”的否定为 （　）

(A) 存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得 $x_0^2<0$　(B) 不存在 $x\in\mathbf{R}$, 使得 $x^2<0$

(C) 存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得 $x_0^2\geqslant 0$　(D) 对任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $x^2<0$

3. 函数 $y=\dfrac{1}{\log_2(x-2)}$ 的定义域是 （　）

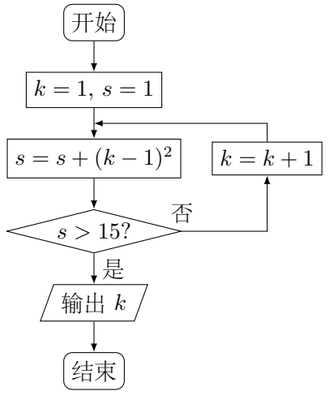
(A) $(-\infty,2)$　(B) $(2,+\infty)$

(C) $(2,3)\cup(3,+\infty)$　(D) $(2,4)\cup(4,+\infty)$

4. 设 P 是圆 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ 上的动点, Q 是直线 $x=-3$ 上的动点, 则 $|PQ|$ 的最小值为 （　）

(A) 6　(B) 4　(C) 3　(D) 2

5. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 k 的值是 （　）



(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

6. 如图是某公司 10 个销售店某月销售某产品数量 (单位: 台) 的茎叶图, 则数据落在区间 $[22,30)$ 内的频率为 （　）

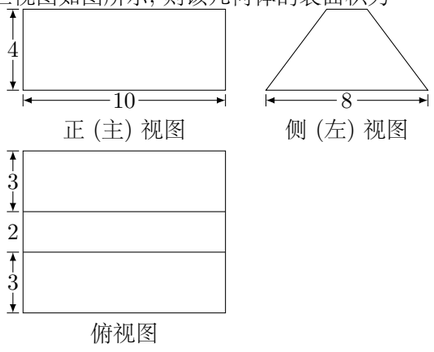
1	8　9
2	1　2　2　7　9
3	0　0　3

(A) 0.2　(B) 0.4　(C) 0.5　(D) 0.6

7. 关于 x 的不等式 $x^2-2ax-8a^2<0$ $(a>0)$ 的解集为 (x_1,x_2), 且 $x_2-x_1=15$, 则 $a=$ （　）

(A) $\dfrac{5}{2}$　(B) $\dfrac{7}{2}$　(C) $\dfrac{15}{4}$　(D) $\dfrac{15}{2}$

8. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 （　）



(A) 180　(B) 200　(C) 220　(D) 240

9. 已知函数 $f(x)=ax^3+b\sin x+4$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$, $f(\lg(\log_2 10))=5$, 则 $f(\lg(\lg 2))=$ （　）

(A) -5　(B) -1　(C) 3　(D) 4

10. 设双曲线 C 的中心为点 O, 若有且只有一对相交于点 O, 所成的角为 60° 的直线 A_1B_1 和 A_2B_2, 使 $|A_1B_1|=|A_2B_2|$, 其中 A_1, B_1 和 A_2, B_2 分别是这对直线与双曲线 C 的交点, 则该双曲线的离心率的取值范围是 （　）

(A) $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},2\right]$　(B) $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$　(C) $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$　(D) $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

二、填空题

11. 设复数 $z=1+2\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 $|z|=$_____.

12. 若 2, a, b, c, 9 成等差数列, 则 $c-a=$_____.

13. 若甲、乙、丙三人随机地站成一排, 则甲、乙两人相邻而站的概率为_____.

14. 在 OA 为边、OB 为对角线的矩形中, 已知 $\overrightarrow{OA}=(-3,1)$, $\overrightarrow{OB}=(-2,k)$, 则实数 $k=$_____.

15. 设 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, 不等式 $8x^2-(8\sin\alpha)x+\cos 2\alpha\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 则 α 的取值范围为_____.

三、解答题

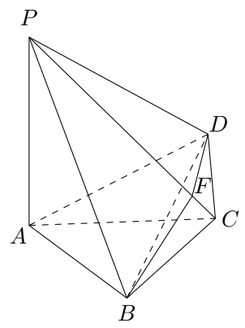
16. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n$, $n\in\mathbf{N}_+$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n;
(2) 已知 $\{b_n\}$ 是等差数列, T_n 为其前 n 项和, 且 $b_1=a_2$, $b_3=a_1+a_2+a_3$, 求 T_{20}.

17. 从某居民区随机抽取 10 个家庭, 获得第 i 个家庭的月收入 x_i (单位: 千元) 与月储蓄 y_i (单位: 千元) 的数据资料, 算得 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=80$, $\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=20$, $\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=184$, $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=720$.
(1) 求家庭的月储蓄 y 对月收入 x 的线性回归方程 $y=bx+a$;
(2) 判断变量 x 与 y 之间是正相关还是负相关;
(3) 若该居民区某家庭月收入为 7 千元, 预测该家庭的月储蓄.

附: 线性回归方程 $y=bx+a$ 中, $b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$, $a=\overline{y}-b\overline{x}$, 其中 $\overline{x}$, $\overline{y}$ 为样本平均值, 线性回归方程也可写为 $\widehat{y}=\widehat{b}x+\widehat{a}$.

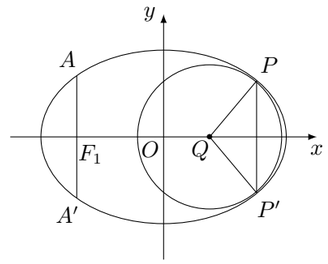
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}bc$.
(1) 求 A;
(2) 设 $a=\sqrt{3}$, S 为 $\triangle ABC$ 的面积, 求 $S+3\cos B\cos C$ 的最大值, 并指出此时 B 的值.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $PA=2\sqrt{3}$, $BC=CD=2$, $\angle ACB=\angle ACD=\dfrac{\pi}{3}$.
(1) 求证: $BD\perp$ 平面 PAC;
(2) 若侧棱 PC 上的点 F 满足 $PF=7FC$, 求三棱锥 $P-BDF$ 的体积.



20. 某村庄拟修建一个无盖的圆柱形蓄水池 (不计厚度). 设该蓄水池的底面半径为 r 米, 高为 h 米, 体积为 V 立方米. 假设建造成本仅与表面积有关, 侧面的建造成本为 100 元/平方米, 底面的建造成本为 160 元/平方米, 该蓄水池的总建造成本为 12000π 元 (π 为圆周率).
(1) 将 V 表示成 r 的函数 $V(r)$, 并求该函数的定义域;
(2) 讨论函数 $V(r)$ 的单调性, 并确定 r 和 h 为何值时该蓄水池的体积最大.

21. 如图, 椭圆的中心为原点 O, 长轴在 x 轴上, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 过左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于 A, A' 两点, $|AA'|=4$.
(1) 求该椭圆的标准方程;
(2) 取平行于 y 轴的直线与椭圆相交于不同的两点 P, P', 过 P, P' 作圆心为 Q 的圆, 使椭圆上的其余点均在圆 Q 外, 求 $\triangle PP'Q$ 的面积 S 的最大值, 并写出对应的圆 Q 的标准方程.



2013 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$, $M=\{x\mid x=a+b, a\in A, b\in B\}$, 则 M 中元素的个数为 （ ）

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

2. $\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^3=$ （ ）

(A) -8 (B) 8 (C) $-8\mathrm{i}$ (D) $8\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\lambda+1,1)$, $\boldsymbol{n}=(\lambda+2,2)$, 若 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$, 则 $\lambda=$ （ ）

(A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) -1

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$, 则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 （ ）

(A) $(-1,1)$ (B) $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ (C) $(-1,0)$ (D) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

5. 函数 $f(x)=\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2^x-1}$ $(x>0)$ (B) $\dfrac{1}{2^x-1}$ $(x\neq 0)$

(C) 2^x-1 $(x\in\mathbf{R})$ (D) 2^x-1 $(x>0)$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1}+a_n=0$, $a_2=-\dfrac{4}{3}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和等于 （ ）

(A) $-6\left(1-3^{-10}\right)$ (B) $\dfrac{1}{9}\left(1-3^{10}\right)$ (C) $3\left(1-3^{-10}\right)$ (D) $3\left(1+3^{-10}\right)$

7. $(1+x)^8(1+y)^4$ 的展开式中 x^2y^2 的系数是 （ ）

(A) 56 (B) 84 (C) 112 (D) 168

8. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2, 点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2,-1]$, 那么直线 PA_1 斜率的取值范围是（ ）

(A) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$ (B) $\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{4}\right]$ (C) $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ (D) $\left[\dfrac{3}{4},1\right]$

9. 若函数 $f(x)=x^2+ax+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 是增函数, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,0]$ (B) $[-1,+\infty)$ (C) $[0,3]$ (D) $[3,+\infty)$

10. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, 则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

11. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, 则 $k=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

12. 已知函数 $f(x)=\cos x\sin 2x$, 下列结论中错误的是 （ ）

(A) $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 中心对称

(B) $y=f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

(C) $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数

二、填空题

13. 已知 α 是第三象限角, $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$, 则 $\cot\alpha=$_____.

14. 6 个人排成一行, 其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有_____种. (用数字作答)

15. 记不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+3y\geqslant 4\\ 3x+y\leqslant 4\end{cases}$ 所表示的平面区域为 D, 若直线 $y=a(x+1)$ 与 D 有公共点, 则 a 的取值范围是_____.

16. 已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆, 其公共弦长等于球 O 的半径, $OK=\dfrac{3}{2}$, 且圆 O 与圆 K 所在的平面所成的一个二面角为 60°, 则球 O 的表面积等于_____.

三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_3=a_2^2$, 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $(a+b+c)(a-b+c)=ac$.

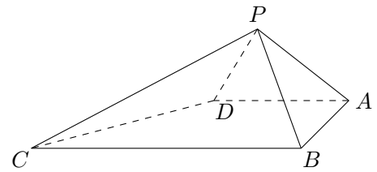
(1) 求 B;

(2) 若 $\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$, 求 C.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$, $BC=2AD$, $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 都是等边三角形.

(1) 证明: $PB\perp CD$;

(2) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



20. 甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判. 设各局中双方获胜的概率均为 $\dfrac{1}{2}$, 各局比赛的结果都相互独立, 第 1 局甲当裁判.
(1) 求第 4 局甲当裁判的概率;
(2) X 表示前 4 局中乙当裁判的次数, 求 X 的数学期望.

21. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 3, 直线 $y=2$ 与 C 的两个交点间的距离为 $\sqrt{6}$.
(1) 求 a、b;
(2) 设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A、B 两点, 且 $|AF_1|=|BF_1|$, 证明: $|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$ 成等比数列.

22. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x(1+\lambda x)}{1+x}$.
(1) 若 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\leqslant 0$, 求 λ 的最小值;
(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 证明: $a_{2n}-a_n+\dfrac{1}{4n}>\ln 2$.

2013 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

文科数学

一、选择题

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $A=\{1,2\}$, 则 $\complement_U A=$ （　）

(A) $\{1,2\}$　(B) $\{3,4,5\}$　(C) $\{1,2,3,4,5\}$　(D) $\varnothing$

2. 已知 α 是第二象限角, $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$, 则 $\cos\alpha=$ （　）

(A) $-\dfrac{12}{13}$　(B) $-\dfrac{5}{13}$　(C) $\dfrac{5}{13}$　(D) $\dfrac{12}{13}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\lambda+1,1)$, $\boldsymbol{n}=(\lambda+2,2)$, 若 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$, 则 $\lambda=$ （　）

(A) -4　(B) -3　(C) -2　(D) -1

4. 不等式 $|x^2-2|<2$ 的解集是 （　）

(A) $(-1,1)$　(B) $(-2,2)$

(C) $(-1,0)\cup(0,1)$　(D) $(-2,0)\cup(0,2)$

5. $(x+2)^8$ 的展开式中 x^6 的系数是 （　）

(A) 28　(B) 56　(C) 112　(D) 224

6. 函数 $f(x)=\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2^x-1}(x>0)$　(B) $\dfrac{1}{2^x-1}(x\neq 0)$

(C) $2^x-1(x\in\mathbf{R})$　(D) $2^x-1(x>0)$

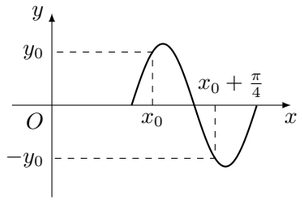
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1}+a_n=0$, $a_2=-\dfrac{4}{3}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和等于 （　）

(A) $-6(1-3^{-10})$　(B) $\dfrac{1}{9}(1-3^{10})$　(C) $3(1-3^{-10})$　(D) $3(1+3^{-10})$

8. 已知 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$ 是椭圆 C 的两个焦点, 过 F_2 且垂直于 x 轴的直线交 C 于 A、B 两点, 且 $|AB|=3$, 则 C 的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　(B) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

9. 若函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的部分图象如图所示, 则 $\omega=$ （　）



(A) 5　(B) 4　(C) 3　(D) 2

10. 已知曲线 $y=x^4+ax^2+1$ 在点 $(-1,a+2)$ 处切线的斜率为 8, 则 $a=$（　）

(A) 9　(B) 6　(C) -9　(D) -6

11. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, 则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于 （　）

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(D) $\dfrac{1}{3}$

12. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, 则 $k=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

二、填空题

13. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数, 且当 $x\in[1,3)$ 时, $f(x)=x-2$, 则 $f(-1)=$_____.

14. 从进入决赛的 6 名选手中决出 1 名一等奖, 2 名二等奖, 3 名三等奖, 则可能的决赛结果共有_____种. (用数字作答)

15. 若 x, y 满足的约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+3y\geqslant 4\\ 3x+y\leqslant 4\end{cases}$, 则 $z=-x+y$ 的最小值为_____.

16. 已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆, 其公共弦长等于球 O 的半径, $OK=\dfrac{3}{2}$, 且圆 O 与圆 K 所在的平面所成的一个二面角为 $60°$, 则球 O 的表面积等于_____.

三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7=4$, $a_{19}=2a_9$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{1}{na_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $(a+b+c)(a-b+c)=ac$.

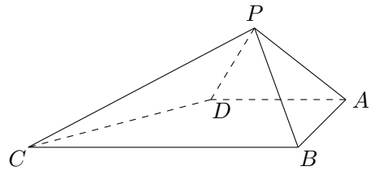
(1) 求 B;

(2) 若 $\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$, 求 C.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC=\angle BAD=90°$, $BC=2AD$, $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 都是边长为 2 的等边三角形.

(1) 证明: $PB\perp CD$;

(2) 求点 A 到平面 PCD 的距离.



20. 甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判. 设各局中双方获胜的概率均为 $\dfrac{1}{2}$, 各局比赛的结果都相互独立, 第 1 局甲当裁判.
(1) 求第 4 局甲当裁判的概率;
(2) 求前 4 局中乙恰好当 1 次裁判的概率.

21. 已知函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3x+1$.
(1) 当 $a=-\sqrt{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $x\in[2,+\infty)$ 时, $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

22. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 3, 直线 $y=2$ 与 C 的两个交点间的距离为 $\sqrt{6}$.
(1) 求 a、b;
(2) 设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A、B 两点, 且 $|AF_1|=|BF_1|$, 证明: $|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$ 成等比数列.

2013 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知复数 z 的共轭复数 $\overline{z}=1+2\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 z 在复平面内对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 已知集合 $A=\{1,a\}$, $B=\{1,2,3\}$, 则“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的 （ ）

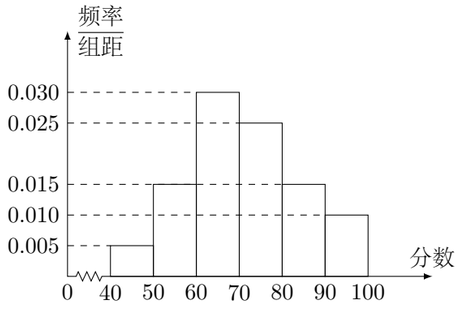
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的顶点到渐近线的距离等于 （ ）

(A) $\dfrac{2}{5}$　(B) $\dfrac{4}{5}$　(C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(D) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

4. 某校从高一年级学生中随机抽取部分学生, 将他们的模块测试成绩分成 6 组: $[40,50)$, $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100)$ 加以统计, 得到如图所示的频率分布直方图. 已知高一年级共有学生 600 名, 据此估计, 该模块测试成绩不少于 60 分的学生人数为 （ ）



(A) 588　(B) 480　(C) 450　(D) 120

5. 满足 $a,b\in\{-1,0,1,2\}$, 且关于 x 的方程 $ax^2+2x+b=0$ 有实数解的有序数对 (a,b) 的个数为 （ ）

(A) 14　(B) 13　(C) 12　(D) 10

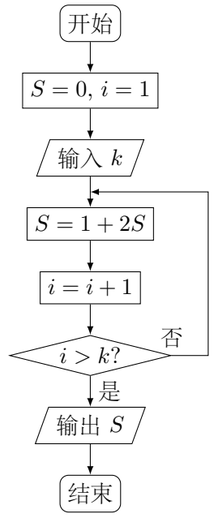
6. 阅读如图所示的程序框图, 若输入的 $k=10$, 则该算法的功能是 （ ）

(A) 计算数列 $\{2^{n-1}\}$ 的前 10 项和

(B) 计算数列 $\{2^{n-1}\}$ 的前 9 项和

(C) 计算数列 $\{2^n-1\}$ 的前 10 项和

(D) 计算数列 $\{2^n-1\}$ 的前 9 项和



7. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AC}=(1,2)$, $\overrightarrow{BD}=(-4,2)$, 则该四边形的面积为 （ ）

(A) $\sqrt{5}$　(B) $2\sqrt{5}$　(C) 5　(D) 10

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, x_0 ($x_0\neq 0$) 是 $f(x)$ 的极大值点, 以下结论一定正确的是 （ ）

(A) $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\leqslant f(x_0)$　(B) $-x_0$ 是 $f(-x)$ 的极小值点

(C) $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极小值点　(D) $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 记 $b_n=a_{m(n-1)+1}+a_{m(n-1)+2}+\cdots+a_{m(n-1)+m}$, $c_n=a_{m(n-1)+1}\cdot a_{m(n-1)+2}\cdot\cdots\cdot a_{m(n-1)+m}$, $(m,\ n\in\mathbf{N}^*)$, 则以下结论一定正确的是 （ ）

(A) 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 公差为 q^m

(B) 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比为 q^{2m}

(C) 数列 $\{c_n\}$ 为等比数列, 公比为 q^{m^2}

(D) 数列 $\{c_n\}$ 为等比数列, 公比为 q^{m^m}

10. 设 S, T 是 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足:

① $T=\{f(x)\,|\,x\in S\}$;

② 对任意 x_1, $x_2\in S$, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$;

那么称这两个集合“保序同构”, 以下集合对不是“保序同构”的是 （ ）

(A) $A=\mathbf{N}^*$, $B=\mathbf{N}$

(B) $A=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x\,|\,x=-8$ 或 $0<x\leqslant 10\}$

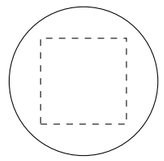
(C) $A=\{x\,|\,0<x<1\}$, $B=\mathbf{R}$

(D) $A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{Q}$

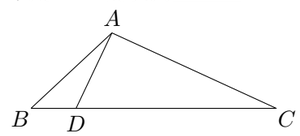
二、填空题

11. 利用计算机产生 $0\sim 1$ 之间的均匀随机数 a, 则事件“$3a-1>0$”发生的概率为_____.

12. 已知某一多面体内接于球构成一个简单组合体, 如果该组合体的正视图、侧视图、俯视图均如图所示, 且图中的四边形是边长为 2 的正方形, 则该球的表面积是_____.



13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知点 D 在 BC 边上, $AD\perp AC$, $\sin\angle BAC=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $AB=3\sqrt{2}$, $AD=3$, 则 BD 的长为_____.



14. 椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2, 焦距为 $2c$, 若直线 $y=\sqrt{3}(x+c)$ 与椭圆 Γ 的一个交点 M 满足 $\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$, 则该椭圆的离心率等于_____.

15. 当 $x\in\mathbf{R}$, $|x|<1$ 时, 有如下表达式:

$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$.

两边同时积分得:

$\int_0^{\frac{1}{2}}1\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}x+\cdots+\int_0^{\frac{1}{2}}x^n\mathrm{d}x+\cdots=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x$,

从而得到如下等式:

$1\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\cdots=\ln 2$.

请根据以上材料所蕴含的数学思想方法, 计算:

$\mathrm{C}_n^0\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=$_____.

三、解答题

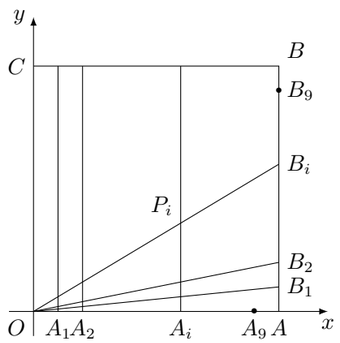
16. 某联欢晚会举行抽奖活动, 举办方设置了甲、乙两种抽奖方案, 方案甲的中奖率为 $\dfrac{2}{3}$, 中奖可以获得 2 分; 方案乙的中奖率为 $\dfrac{2}{5}$, 中奖可以获得 3 分; 未中奖则不得分. 每人有且只有一次抽奖机会, 每次抽奖中奖与否互不影响, 晚会结束后凭分数兑换奖品.

(1) 若小明选择方案甲抽奖, 小红选择方案乙抽奖, 记他们的累计得分为 X, 求 $X\leqslant 3$ 的概率;

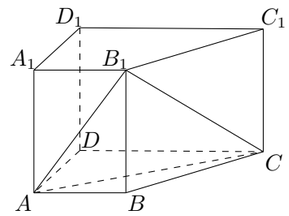
(2) 若小明、小红两人都选择方案甲或都选择方案乙进行抽奖, 问: 他们选择何种方案抽奖, 累计得分的数学期望较大?

17. 已知函数 $f(x)=x-a\ln x$ $(a\in\mathbf{R})$.
(1) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线方程;
(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

18. 如图, 在正方形 $OABC$ 中, O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(10,0)$, 点 C 的坐标为 $(0,10)$. 分别将线段 OA 和 AB 十等分, 分点分别记为 $A_1, A_2, \cdots, A_9$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_9$, 连接 OB_i, 过 A_i 作 x 轴的垂线与 OB_i 交于点 P_i $(i\in\mathbf{N}^*,\ 1\leqslant i\leqslant 9)$.
(1) 求证: 点 P_i $(i\in\mathbf{N}^*,\ 1\leqslant i\leqslant 9)$ 都在同一条抛物线上, 并求该抛物线 E 的方程;
(2) 过点 C 作直线 l 与抛物线 E 交于不同的两点 M, N, 若 $\triangle OCM$ 与 $\triangle OCN$ 的面积之比为 $4:1$, 求直线 l 的方程.



19. 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$, $AB/\!/DC$, $AA_1=1$, $AB=3k$, $AD=4k$, $BC=5k$, $DC=6k$ $(k>0)$.
(1) 求证: $CD\perp$ 平面 ADD_1A_1;
(2) 若直线 AA_1 与平面 AB_1C 所成角的正弦值为 $\dfrac{6}{7}$, 求 k 的值;
(3) 现将与四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 形状和大小完全相同的两个四棱柱拼成一个新的四棱柱, 规定: 若拼成的新四棱柱形状和大小完全相同, 则视为同一种拼接方案, 问: 共有几种不同的拼接方案? 在这些拼接成的新四棱柱中, 记其中最小的表面积为 $f(k)$, 写出 $f(k)$ 的解析式. (直接写出答案, 不必说明理由)



20. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0<\varphi<\pi)$ 的周期为 π, 图象的一个对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$, 将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象.
(1) 求函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式;
(2) 是否存在 $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$, 使得 $f(x_0)$, $g(x_0)$, $f(x_0)g(x_0)$ 按照某种顺序成等差数列? 若存在, 请确定 x_0 的个数, 若不存在, 说明理由;
(3) 求实数 a 与正整数 n, 使得 $F(x)=f(x)+ag(x)$ 在 $(0,n\pi)$ 内恰有 2013 个零点.

21. 三选二.

【A】已知直线 $l: ax+y=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ 对应的变换作用下变为直线 $l': x+by=1$.
(1) 求实数 a, b 的值;
(2) 若点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 l 上, 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, 求点 P 的坐标.

【B】在平面直角坐标系中, 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系. 已知点 A 的极坐标为 $\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=a$, 且点 A 在直线 l 上.
(1) 求 a 的值及直线 l 的直角坐标方程;
(2) 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数), 试判断直线 l 与圆 C 的位置关系.

【C】设不等式 $|x-2|<a$ $(a\in\mathbf{N}^*)$ 的解集为 A, 且 $\dfrac{3}{2}\in A$, $\dfrac{1}{2}\notin A$.
(1) 求 a 的值;
(2) 求函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$ 的最小值.

2013 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 复数 $z=-1-2\mathrm{i}$ (i 为虚数单位) 在复平面内对应的点位于 （　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 设点 $P(x,y)$, 则“$x=2$ 且 $y=-1$”是“点 P 在直线 $l: x+y-1=0$ 上”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 若集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,4\}$, 则 $A\cap B$ 的子集个数为 （　）

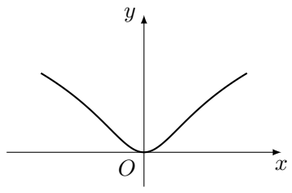
(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 16

4. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的顶点到其渐近线的距离等于 （　）

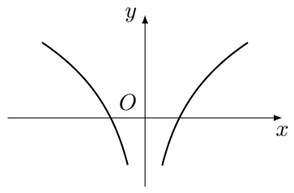
(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) 1　(D) $\sqrt{2}$

5. 函数 $f(x)=\ln(x^2+1)$ 的图象大致是 （　）

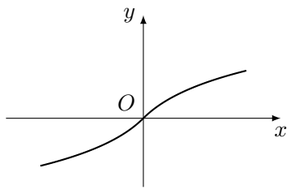
(A)



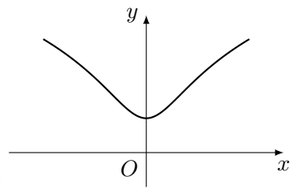
(B)



(C)



(D)



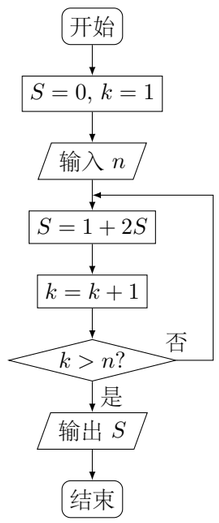
6. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 2 \\ x\geqslant 1 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值和最小值分别为 （　）

(A) 4 和 3　(B) 4 和 2　(C) 3 和 2　(D) 2 和 0

7. 若 $2^x+2^y=1$, 则 $x+y$ 的取值范围是 （　）

(A) $[0,2]$　(B) $[-2,0]$　(C) $[-2,+\infty)$　(D) $(-\infty,-2]$

8. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 如果输入某个正整数 n 后, 输出的 $S\in(10,20)$, 那么 n 的值为 （　）



(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

9. 将函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 φ ($\varphi>0$) 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $f(x)$, $g(x)$ 的图象都经过点 $P\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 φ 的值可以是 （　）

(A) $\dfrac{5\pi}{3}$　(B) $\dfrac{5\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

10. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AC}=(1,2)$, $\overrightarrow{BD}=(-4,2)$, 则该四边形的面积为 （　）

(A) $\sqrt{5}$　(B) $2\sqrt{5}$　(C) 5　(D) 10

11. 已知 x 与 y 之间的几组数据如下表:

x	1	2	3	4	5	6
y	0	2	1	3	3	4

假设根据上表数据所得线性回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$, 若某同学根据上表中的前两组数据 $(1,0)$ 和 $(2,2)$ 求得的直线方程为 $y=b'x+a'$, 则以下结论正确的是 （　）

(A) $\hat{b}>b'$, $\hat{a}>a'$　(B) $\hat{b}>b'$, $\hat{a}<a'$　(C) $\hat{b}<b'$, $\hat{a}>a'$　(D) $\hat{b}<b'$, $\hat{a}<a'$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, x_0 ($x_0\neq 0$) 是 $f(x)$ 的极大值点, 以下结论一定正确的是 （　）

(A) $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\leqslant f(x_0)$　(B) $-x_0$ 是 $f(-x)$ 的极小值点

(C) $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极小值点　(D) $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2x^3, & x<0 \\ -\tan x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=$_____.

14. 利用计算机产生 $0\sim 1$ 之间的均匀随机数 a, 则事件“$3a-1<0$”发生的概率为_____.

15. 椭圆 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2, 焦距为 $2c$, 若直线 $y=\sqrt{3}(x+c)$ 与椭圆 Γ 的一个交点 M 满足 $\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$, 则该椭圆的离心率等于_____.

16. 设 S, T 是 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足:

(1) $T=\{f(x)\,|\,x\in S\}$;

(2) 对任意 x_1, $x_2\in S$, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,

那么称这两个集合“保序同构”. 现给出以下 3 对集合:

① $A=\mathbf{N}$, $B=\mathbf{N}^*$;

② $A=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x\,|\,-8\leqslant x\leqslant 10\}$;

③ $A=\{x\,|\,0<x<1\}$, $B=\mathbf{R}$.

其中, “保序同构”的集合对的序号是_____. (写出所有“保序同构”的集合对的序号)

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=1$, 前 n 项和为 S_n.

(1) 若 1, a_1, a_3 成等比数列, 求 a_1;

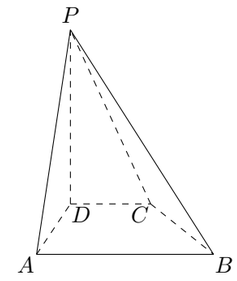
(2) 若 $S_5>a_1a_9$, 求 a_1 的取值范围.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\parallel DC$, $AB\perp AD$, $BC=5$, $DC=3$, $AD=4$, $\angle PAD=60^\circ$.

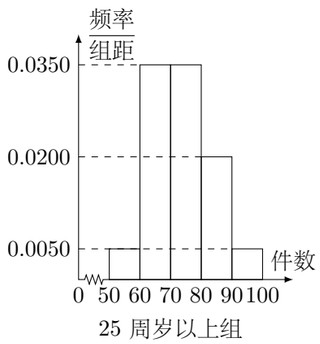
(1) 当正视方向与向量 $\overrightarrow{AD}$ 的方向相同时, 画出四棱锥 $P-ABCD$ 的正视图 (要求标出尺寸, 并写出演算过程);

(2) 若 M 为 PA 的中点, 求证: $DM\parallel$ 平面 PBC;

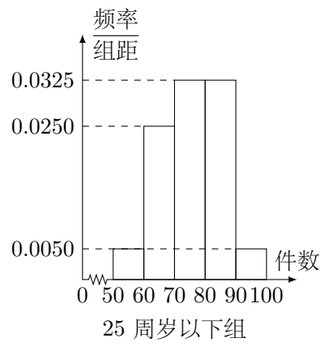
(3) 求三棱锥 $D-PBC$ 的体积.



19. 某工厂有 25 周岁以上 (含 25 周岁) 工人 300 名, 25 周岁以下工人 200 名. 为研究工人的日平均生产量是否与年龄有关, 现采用分层抽样的方法, 从中抽取了 100 名工人, 先统计了他们某月的日平均生产件数, 然后按工人年龄在"25 周岁以上 (含 25 周岁)" 和"25 周岁以下" 分为两组, 再将两组工人的日平均生产件数分成 5 组: $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100]$ 分别加以统计, 得到如图所示的频率分布直方图.



25 周岁以上组



25 周岁以下组

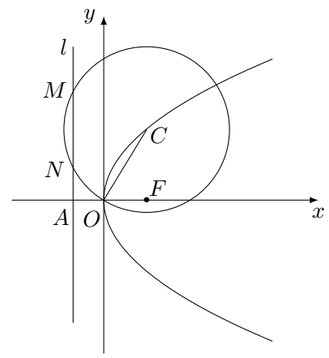
(1) 从样本中日平均生产件数不足 60 件的工人中随机抽取 2 人, 求至少抽到一名"25 周岁以下组"工人的概率;
(2) 规定日平均生产件数不少于 80 件者为"生产能手", 请你根据已知条件完成 2×2 列联表, 并判断是否有 90% 的把握认为"生产能手与工人所在的年龄组有关"?

附: $\chi^2=\dfrac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$

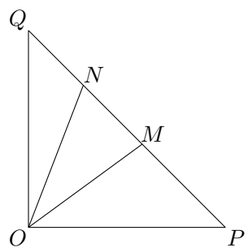
$P(\chi^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

(注: 此公式也可以写成 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$)

20. 如图, 抛物线 $E:y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线 l 与 x 轴的交点为 A. 点 C 在抛物线 E 上, 以 C 为圆心, $|CO|$ 为半径作圆, 设圆 C 与准线 l 交于不同的两点 M, N.
(1) 若点 C 的纵坐标为 2, 求 $|MN|$;
(2) 若 $|AF|^2=|AM|\cdot|AN|$, 求圆 C 的半径.



21. 如图, 在等腰直角 $\triangle OPQ$ 中, $\angle POQ=90^\circ$, $OP=2\sqrt{2}$, 点 M 在线段 PQ 上.
(1) 若 $OM=\sqrt{5}$, 求 PM 的长;
(2) 若点 N 在线段 MQ 上, 且 $\angle MON=30^\circ$, 问: 当 $\angle POM$ 取何值时, $\triangle OMN$ 的面积最小? 并求出面积的最小值.



22. 已知函数 $f(x)=x-1+\dfrac{a}{\mathrm{e}^x}$, ($a\in\mathbf{R}$, e 为自然对数的底数).
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线平行于 x 轴, 求 a 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的极值;
(3) 当 $a=1$ 时, 若直线 $l:y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点, 求 k 的最大值.

2013 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\,|\,x^2+2x=0,x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{x\,|\,x^2-2x=0,x\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cup N=$ （　）

(A) $\{0\}$　(B) $\{0,2\}$　(C) $\{-2,0\}$　(D) $\{-2,0,2\}$

2. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的四个函数 $y=x^3$, $y=2^x$, $y=x^2+1$, $y=2\sin x$ 中, 奇函数的个数是 （　）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

3. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}z=2+4\mathrm{i}$, 则在复平面内, z 对应的点的坐标是 （　）

(A) $(2,4)$　(B) $(2,-4)$　(C) $(4,-2)$　(D) $(4,2)$

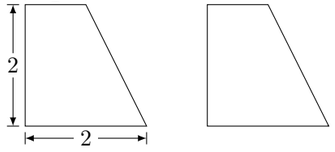
4. 已知离散型随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

则 X 的数学期望 $E(X)=$ （　）

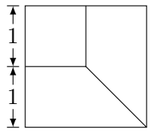
(A) $\frac{3}{2}$　(B) 2　(C) $\frac{5}{2}$　(D) 3

5. 某四棱台的三视图如图所示, 则该四棱台的体积是 （　）



正视图

侧视图



俯视图

(A) 4　(B) $\frac{14}{3}$　(C) $\frac{16}{3}$　(D) 6

6. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 （　）

(A) 若 $\alpha\perp\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 $m\perp n$

(B) 若 $\alpha/\!/\beta$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 $m/\!/n$

(C) 若 $m\perp n$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

(D) 若 $m\perp\alpha$, $m/\!/n$, $n/\!/\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

7. 已知中心在原点的双曲线 C 的右焦点为 $F(3,0)$, 离心率等于 $\frac{3}{2}$, 则 C 的方程是 （　）

(A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{\sqrt{5}}=1$ (B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　(C) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$　(D) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{\sqrt{5}}=1$

8. 设整数 $n\geqslant 4$, 集合 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$. 令集合 $S=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in X$, 且三条件 $x<y<z$, $y<z<x$, $z<x<y$ 恰有一个成立$\}$, 若 (x,y,z) 和 (z,w,x) 都在 S 中, 则下列选项正确的是 （　）

(A) $(y,z,w)\in S$, $(x,y,w)\notin S$　(B) $(y,z,w)\in S$, $(x,y,w)\in S$

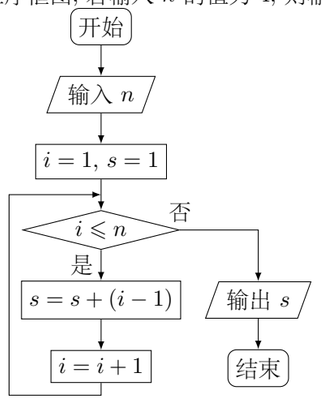
(C) $(y,z,w)\notin S$, $(x,y,w)\in S$　(D) $(y,z,w)\notin S$, $(x,y,w)\notin S$

二、填空题

9. 不等式 $x^2+x-2<0$ 的解集为_____.

10. 若曲线 $y=kx+\ln x$ 在点 $(1,k)$ 处的切线平行于 x 轴, 则 $k=$_____.

11. 执行如图所示的程序框图, 若输入 n 的值为 4, 则输出 s 的值为_____.

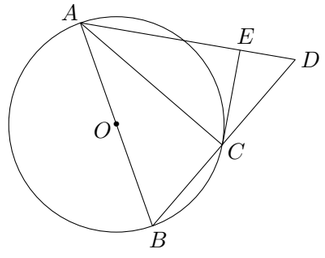


12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3+a_8=10$, 则 $3a_5+a_7=$_____.

13. 给定区域 $D:\begin{cases}x+4y\geqslant 4\\ x+y\leqslant 4\\ x\geqslant 0\end{cases}$, 令点集 $T=\{(x_0,y_0)\in D\,|\,x_0,y_0\in\mathbf{Z},(x_0,y_0)$ 是 $z=x+y$ 在 D 上取得最大值或最小值的点$\}$, 则 T 中的点共确定_____条不同的直线.

14. 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\end{cases}$ (t 为参数), C 在点 $(1,1)$ 处的切线为 l, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 则 l 的极坐标方程为_____.

15. 如图, AB 是圆 O 的直径, 点 C 在圆 O 上, 延长 BC 到 D 使 $BC=CD$, 过 C 作圆 O 的切线交 AD 于 E. 若 $AB=6$, $ED=2$, 则 $BC=$_____.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值;

(2) 若 $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$, 求 $f\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$.

17. 某车间共有 12 名工人, 随机抽取 6 名, 他们某日加工零件个数的茎叶图如图所示, 其中茎为十位数, 叶为个位数.

1	7　9
2	0　1　5
3	0

(1) 根据茎叶图计算样本均值;

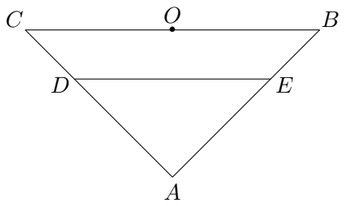
(2) 日加工零件个数大于样本均值的工人为优秀工人. 根据茎叶图推断该车间 12 名工人中有几名优秀工人?

(3) 从该车间 12 名工人中, 任取 2 人, 求恰有 1 名优秀工人的概率.

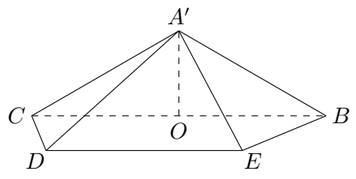
18. 如图①, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle A=90^\circ, BC=6$, D, E 分别是 AC, AB 上的点, $CD=BE=\sqrt{2}$, O 为 BC 的中点. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 得到下图②所示的四棱锥 $A'-BCDE$, 其中 $A'O=\sqrt{3}$.

(1) 证明: $A'O\perp$ 平面 $BCDE$;

(2) 求二面角 $A'-CD-B$ 的平面角的余弦值.



图①



图②

19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=1$, $\dfrac{2S_n}{n}=a_{n+1}-\dfrac{1}{3}n^2-n-\dfrac{2}{3}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 对一切正整数 n, 有 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{7}{4}$.

20. 已知抛物线 C 的顶点为原点, 其焦点 $F(0,c)$ $(c>0)$ 到直线 $l: x-y-2=0$ 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. 设 P 为直线 l 上的点, 过点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA, PB, 其中 A, B 为切点.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 当点 $P(x_0,y_0)$ 为直线 l 上的定点时, 求直线 AB 的方程;

(3) 当点 P 在直线 l 上移动时, 求 $|AF|\cdot|BF|$ 的最小值.

21. 设函数 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-kx^2$ $(k\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $k=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[0,k]$ 上的最大值 M.

2013 年普通高等学校招生考试（广东卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $S=\{x\mid x^2+2x=0,x\in\mathbf{R}\}$, $T=\{x\mid x^2-2x=0,x\in\mathbf{R}\}$, 则 $S\cap T=$ （　）

(A) $\{0\}$　(B) $\{0,2\}$　(C) $\{-2,0\}$　(D) $\{-2,0,2\}$

2. 函数 $y=\dfrac{\lg(x+1)}{x-1}$ 的定义域是 （　）

(A) $(-1,+\infty)$　(B) $[-1,+\infty)$

(C) $(-1,1)\cup(1,+\infty)$　(D) $[-1,1)\cup(1,+\infty)$

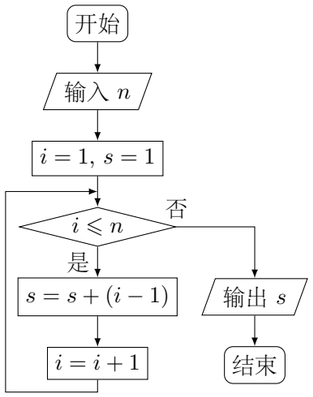
3. 若 $\mathrm{i}(x+y\mathrm{i})=3+4\mathrm{i}$, x, $y\in\mathbf{R}$, 则复数 $x+y\mathrm{i}$ 的模是 （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

4. 已知 $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{1}{5}$, 那么 $\cos\alpha=$ （　）

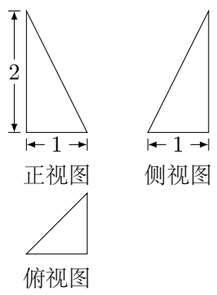
(A) $-\dfrac{2}{5}$　(B) $-\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{2}{5}$

5. 执行如图所示的程序框图, 若输入 n 的值为 3, 则输出 s 的值是 （　）



(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 7

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积是 （　）



(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) 1

7. 垂直于直线 $y=x+1$ 且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切于第一象限的直线方程是 （　）

(A) $x+y-\sqrt{2}=0$　(B) $x+y+1=0$

(C) $x+y-1=0$　(D) $x+y+\sqrt{2}=0$

8. 设 l 为直线, α, β 是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 （　）

(A) 若 $l\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$　(B) 若 $l\perp\alpha$, $l\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(C) 若 $l\perp\alpha$, $l\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$　(D) 若 $\alpha\perp\beta$, $l\parallel\alpha$, 则 $l\perp\beta$

9. 已知中心在原点的椭圆 C 的右焦点为 $F(1,0)$, 离心率等于 $\dfrac{1}{2}$, 则 C 的方程是 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{\sqrt{3}}=1$

(C) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

10. 设 $\boldsymbol{a}$ 是已知的平面向量且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. 关于向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解, 有如下四个命题:
① 给定向量 $\boldsymbol{b}$, 总存在向量 $\boldsymbol{c}$, 使 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;
② 给定向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$, 总存在实数 λ 和 μ, 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$;
③ 给定单位向量 $\boldsymbol{b}$ 和正数 μ, 总存在单位向量 $\boldsymbol{c}$ 和实数 λ, 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$;
④ 给定正数 λ 和 μ, 总存在单位向量 $\boldsymbol{b}$ 和单位向量 $\boldsymbol{c}$, 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$.
上述命题中的向量 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 在同一平面内且两两不共线, 则真命题的个数是 （　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

二、填空题

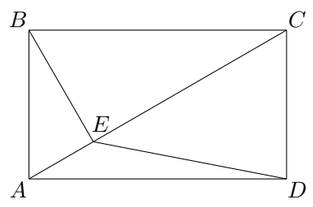
11. 设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 -2 的等比数列, 则 $a_1+|a_2|+a_3+|a_4|=$_____.

12. 若曲线 $y=ax^2-\ln x$ 在点 $(1,a)$ 处的切线平行于 x 轴, 则 $a=$_____.

13. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+3\geqslant 0\\-1\leqslant x\leqslant 1\\y\geqslant 1\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值是_____.

14. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴的正半轴建立直角坐标系, 则曲线 C 的参数方程为_____.

15. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=\sqrt{3}$, $BC=3$, $BE\perp AC$, 垂足为 E, 则 $ED=$_____.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值;
(2) 若 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, $\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$, 求 $f\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

17. 从一批苹果中, 随机抽取 50 个, 其重量 (单位: 克) 的频数分布表如下:

分组 (重量)	$[80,85)$	$[85,90)$	$[90,95)$	$[95,100)$
频数	5	10	20	15

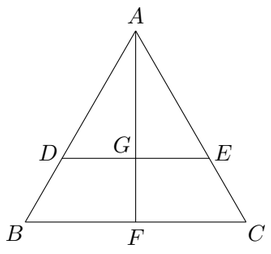
(1) 根据频数分布表计算苹果的重量在 $[90,95)$ 的频率;
(2) 用分层抽样的方法从重量在 $[80,85)$ 和 $[95,100)$ 的苹果中共抽取 4 个, 其中重量在 $[80,85)$ 的有几个?
(3) 在 (2) 中抽出的 4 个苹果中, 任取 2 个, 求重量在 $[80,85)$ 和 $[95,100)$ 中各有 1 个的概率.

18. 如图①, 在边长为 1 的等边三角形 ABC 中, D, E 分别是 AB, AC 上的点, $AD=AE$, F 是 BC 的中点, AF 与 DE 交于点 G, 将 $\triangle ABF$ 沿 AF 折起, 得到如图②所示的三棱锥 $A-BCF$, 其中 $BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

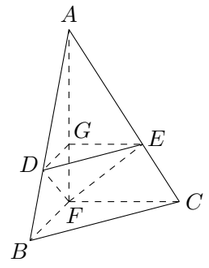
(1) 证明: $DE\parallel$ 平面 BCF;

(2) 证明: $CF\perp$ 平面 ABF;

(3) 当 $AD=\dfrac{2}{3}$ 时, 求三棱锥 $F-DEG$ 的体积 V_{F-DEG}.



图①



图②

19. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 满足 $4S_n=a_{n+1}^2-4n-1$, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 a_2, a_5, a_{14} 构成等比数列.

(1) 证明: $a_2=\sqrt{4a_1+5}$;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 对一切正整数 n, 有 $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}<\dfrac{1}{2}$.

20. 已知抛物线 C 的顶点为原点, 其焦点 $F(0,c)$ $(c>0)$ 到直线 $l: x-y-2=0$ 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. 设 P 为直线 l 上的点, 过点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA, PB, 其中 A, B 为切点.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 当点 $P(x_0,y_0)$ 为直线 l 上的定点时, 求直线 AB 的方程;

(3) 当点 P 在直线 l 上移动时, 求 $|AF|\cdot|BF|$ 的最小值.

21. 设函数 $f(x)=x^3-kx^2+x$ $(x\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $k=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k<0$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[k,-k]$ 上的最小值 m 和最大值 M.

2013 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位) 的共轭复数对应的点位于(　　)

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

2. 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A=\left\{x\,|\,\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}\leqslant 1\right\}$, $B=\{x\,|\,x^2-6x+8\leqslant 0\}$, 则 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=$　　(　　)

(A) $\{x\,|\,x\leqslant 0\}$　　(B) $\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 4\}$

(C) $\{x\,|\,0\leqslant x<2$ 或 $x>4\}$　　(D) $\{x\,|\,0<x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 4\}$

3. 在一次跳伞训练中, 甲、乙两位学员各跳一次. 设命题 p 是“甲降落在指定范围”, q 是“乙降落在指定范围”, 则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为　　(　　)

(A) $(\neg p)\vee(\neg q)$　　(B) $p\vee(\neg q)$　　(C) $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　(D) $p\vee q$

4. 将函数 $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ ($x\in\mathbf{R}$) 的图象向左平移 m ($m>0$) 个单位长度后, 所得到的图象关于 y 轴对称, 则 m 的最小值是　　(　　)

(A) $\dfrac{\pi}{12}$　　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{5\pi}{6}$

5. 已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$, 则双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=1$ 与 $C_2:\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}-\dfrac{x^2}{\sin^2\theta\tan^2\theta}=1$ 的　　(　　)

(A) 实轴长相等　　(B) 虚轴长相等　　(C) 焦距相等　　(D) 离心率相等

6. 已知点 $A(-1,1)$, $B(1,2)$, $C(-2,-1)$, $D(3,4)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影为　　(　　)

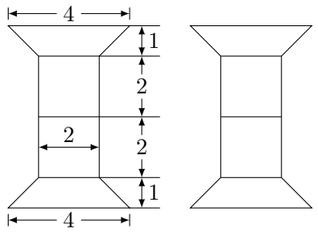
(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　(B) $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$　　(C) $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　(D) $-\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

7. 一辆汽车在高速公路上行驶, 由于遇到紧急情况而刹车, 以速度 $v(t)=7-3t+\dfrac{25}{1+t}$ (t 的单位: s, v 的单位: m/s) 行驶至停止, 在此期间汽车继续行驶的距离 (单位: m) 是　　(　　)

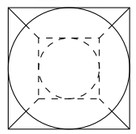
(A) $1+25\ln 5$　　(B) $8+25\ln\dfrac{11}{3}$

(C) $4+25\ln 5$　　(D) $4+50\ln 2$

8. 一个几何体的三视图如图所示, 该几何体从上到下由四个简单几何体组成, 其体积分别记为 V_1, V_2, V_3, V_4, 上面两个简单几何体均为旋转体, 下面两个简单几何体均为多面体, 则有　　(　　)



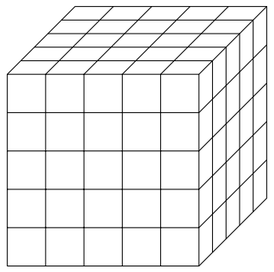
正视图　　侧视图


俯视图

(A) $V_1<V_2<V_4<V_3$　　(B) $V_1<V_3<V_2<V_4$

(C) $V_2<V_1<V_3<V_4$　　(D) $V_2<V_3<V_1<V_4$

9. 如图, 将一个各面都涂了油漆的正方体, 切割为 125 个同样大小的小正方体, 经过搅拌后, 从中随机取一个小正方体, 记它的涂漆面数为 X, 则 X 的均值 $E(X)=$　　(　　)



(A) $\dfrac{126}{125}$　　(B) $\dfrac{6}{5}$　　(C) $\dfrac{168}{125}$　　(D) $\dfrac{7}{5}$

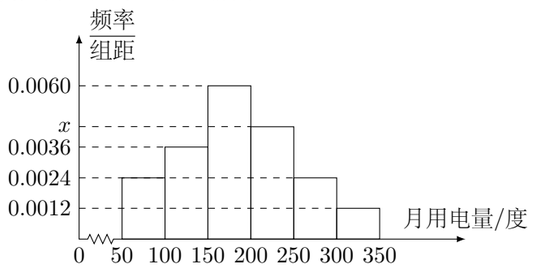
10. 已知 a 为常数, 函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1<x_2$), 则　　(　　)

(A) $f(x_1)>0$, $f(x_2)>-\dfrac{1}{2}$　　(B) $f(x_1)<0$, $f(x_2)<-\dfrac{1}{2}$

(C) $f(x_1)>0$, $f(x_2)<-\dfrac{1}{2}$　　(D) $f(x_1)<0$, $f(x_2)>-\dfrac{1}{2}$

二、填空题

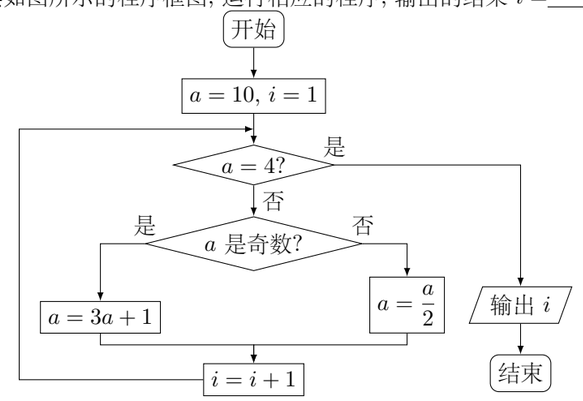
11. 从某小区抽取 100 户居民进行月用电量调查, 发现其用电量都在 50 至 350 度之间, 频率分布直方图如图所示.



(1) 直方图中 x 的值为_____;

(2) 在这些用户中, 用电量落在区间 $[100,250)$ 内的户数为_____.

12. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果 $i=$_____.



13. 设 x, y, $z\in\mathbf{R}$, 且满足: $x^2+y^2+z^2=1$, $x+2y+3z=\sqrt{14}$, 则 $x+y+z=$_____.

14. 古希腊毕达哥拉斯学派的数学家研究过各种多边形数, 如三角形数 1, 3, 6, 10, $\cdots$, 第 n 个三角形数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$. 记第 n 个 k 边形数为 $N(n,k)$ ($k\geqslant 3$), 以下列出了部分 k 边形数中第 n 个数的表达式:

三角形数 $N(n,3)=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$,

正方形数 $N(n,4)=n^2$,

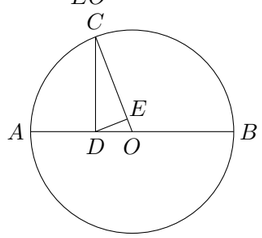
五边形数 $N(n,5)=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$,

六边形数 $N(n,6)=2n^2-n$,

$\cdots\cdots$

可以推测 $N(n,k)$ 的表达式, 由此计算 $N(10,24)=$_____.

15. 如图, 圆 O 上一点 C 在直径 AB 上的射影为 D, 点 D 在半径 OC 上的射影为 E, 若 $AB=3AD$, 则 $\dfrac{CE}{EO}$ 的值为_____.



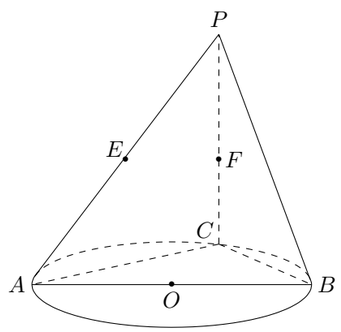
16. 在直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$ (φ 为参数, $a>b>0$), 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 直线 l 与圆 O 的极坐标方程分别为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$ (m 为非零常数) 与 $\rho=b$, 若直线 l 经过椭圆 C 的焦点, 且与圆 O 相切, 则椭圆 C 的离心率为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c, 已知 $\cos 2A - 3\cos(B+C) = 1$.
(1) 求角 A 的大小;
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, 求 $\sin B \sin C$ 的值.

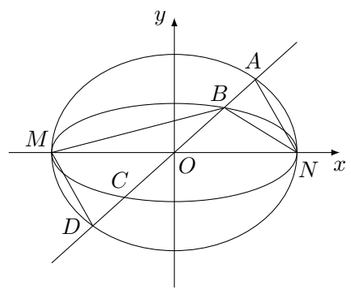
18. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $|a_2 - a_3| = 10$, $a_1 a_2 a_3 = 125$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 是否存在正整数 m, 使得 $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_m} \geqslant 1$? 若存在, 求 m 的最小值; 若不存在, 说明理由.

19. 如图, AB 是圆 O 的直径, 点 C 是圆 O 上异于 A, B 的点, 直线 $PC \perp$ 平面 ABC, E, F 分别是 PA, PC 的中点.
(1) 记平面 BEF 与平面 ABC 的交线为 l, 试判断直线 l 与平面 PAC 的位置关系, 并加以证明;
(2) 设 (1) 中的直线 l 与圆 O 的另一个交点为 D, 且点 Q 满足 $\overrightarrow{DQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CP}$, 记直线 PQ 与平面 ABC 所成的角为 θ, 异面直线 PQ 与 EF 所成的角为 α, 二面角 $E - l - C$ 的大小为 β, 求证: $\sin\theta = \sin\alpha \sin\beta$.



20. 假设每天从甲地去乙地的旅客人数 X 是服从正态分布 $N\left(800, 50^2\right)$ 的随机变量, 记一天中从甲地去乙地的旅客人数不超过 900 的概率为 P_0.
(1) 求 P_0 的值;
(参考数据: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 有 $P(\mu - \sigma < X \leqslant \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0.9974$)
(2) 某客运公司用 A, B 两种型号的车辆承担甲、乙两地间的长途客运业务, 每车每天往返一次, A, B 两种车辆的载客量分别为 36 人和 60 人, 从甲地去乙地的营运成本分别为 1600 元/辆和 2400 元/辆. 公司拟组建一个不超过 21 辆车的客运车队, 并要求 B 型车不多于 A 型车 7 辆. 若每天要以不小于 p_0 的概率运完从甲地去乙地的旅客, 且使公司从甲地去乙地的营运成本最小, 那么应配备 A 型车、B 型车各多少辆?

21. 如图, 已知椭圆 C_1 与 C_2 的中心在坐标原点 O, 长轴均为 MN 且在 x 轴上, 短轴长分别为 $2m$, $2n$ $(m > n)$, 过原点且不与 x 轴重合的直线 l 与 C_1, C_2 的四个交点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D, 记 $\lambda = \dfrac{m}{n}$, $\triangle BDM$ 和 $\triangle ABN$ 的面积分别为 S_1 和 S_2.
(1) 当直线 l 与 y 轴重合时, 若 $S_1 = \lambda S_2$, 求 λ 的值;
(2) 当 λ 变化时, 是否存在与坐标轴不重合的直线 l, 使得 $S_1 = \lambda S_2$? 并说明理由.



22. 设 n 为正整数, r 为正有理数.
(1) 求函数 $f(x) = (1+x)^{r+1} - (r+1)x - 1$ $(x > -1)$ 的最小值;
(2) 证明: $\dfrac{n^{r+1} - (n-1)^{r+1}}{r+1} < n^r < \dfrac{(n+1)^{r+1} - n^{r+1}}{r+1}$;
(3) 设 $x \in \mathbf{R}$, 记 $\lceil x \rceil$ 为不小于 x 的最小整数, 例如 $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\left\lceil -\dfrac{3}{2} \right\rceil = -1$. 令 $S = \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{82} + \sqrt[3]{83} + \cdots + \sqrt[3]{125}$, 求 $\lceil S \rceil$ 的值.
(参考数据: $80^{\frac{4}{3}} \approx 344.7$, $81^{\frac{4}{3}} \approx 350.5$, $124^{\frac{4}{3}} \approx 618.3$, $126^{\frac{4}{3}} \approx 631.7$)

2013 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $B\cap \complement_U A=$ （ ）

(A) $\{2\}$　(B) $\{3,4\}$　(C) $\{1,4,5\}$　(D) $\{2,3,4,5\}$

2. 已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$, 则双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{\sin^2\theta}-\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}=1$ 与 $C_2:\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{x^2}{\sin^2\theta}=1$ 的 （ ）

(A) 实轴长相等　(B) 虚轴长相等　(C) 离心率相等　(D) 焦距相等

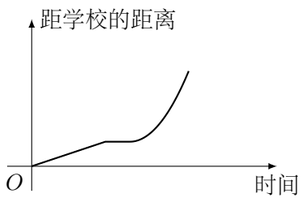
3. 在一次跳伞训练中, 甲、乙两位学员各跳一次. 设命题 p 是“甲降落在指定范围”, q 是“乙降落在指定范围”, 则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为 （ ）

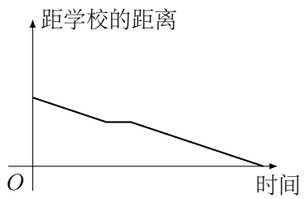
(A) $(\neg p)\vee(\neg q)$　(B) $p\vee(\neg q)$　(C) $(\neg p)\wedge(\neg q)$　(D) $p\vee q$

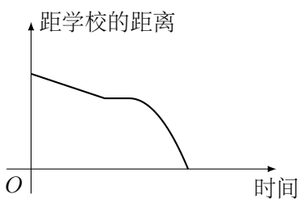
4. 四名同学根据各自的样本数据研究变量 x, y 之间的相关关系, 并求得回归直线方程, 分别得到以下四个结论:
① y 与 x 负相关且 $\hat{y}=2.347x-6.423$;
② y 与 x 负相关且 $\hat{y}=-3.476x+5.648$;
③ y 与 x 正相关且 $\hat{y}=5.437x+8.493$;
④ y 与 x 正相关且 $\hat{y}=-4.326x-4.578$.
其中一定不正确的结论的序号是 （ ）

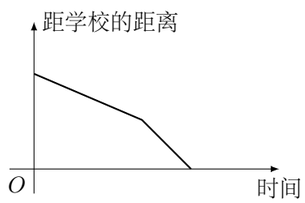
(A) ①②　(B) ②③　(C) ③④　(D) ①④

5. 小明骑车上学, 开始时匀速行驶, 途中因交通堵塞停留了一段时间后, 为了赶时间加快速度行驶, 与以上事件吻合得最好的图象是 （ ）

(A)


(B)


(C)


(D)


6. 将函数 $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象向左平移 m $(m>0)$ 个单位长度后, 所得到的图象关于 y 轴对称, 则 m 的最小值是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{12}$　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{5\pi}{6}$

7. 已知点 $A(-1,1)$, $B(1,2)$, $C(-2,-1)$, $D(3,4)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影为 （ ）

(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(B) $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$　(C) $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(D) $-\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

8. x 为实数, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则函数 $f(x)=x-[x]$ 在 $\mathbf{R}$ 上为 （ ）

(A) 奇函数　(B) 偶函数　(C) 增函数　(D) 周期函数

9. 某旅行社租用 A, B 两种型号的客车安排 900 名客人旅行, A, B 两种车辆的载客量分别为 36 人和 60 人, 租金分别为 1600 元/辆和 2400 元/辆, 旅行社要求租车总数不超过 21 辆, 且 B 型车不多于 A 型车 7 辆, 则租金最少为 （ ）

(A) 31200 元　(B) 36000 元　(C) 36800 元　(D) 38400 元

10. 已知函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围是（ ）

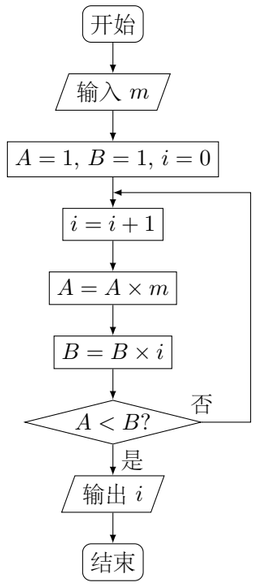
(A) $(-\infty,0)$　(B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　(C) $(0,1)$　(D) $(0,+\infty)$

二、填空题

11. i 为虚数单位, 设复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于原点对称, 若 $z_1=2-3\mathrm{i}$, 则 $z_2=$_____.

12. 某学员在一次射击测试中射靶 10 次, 命中环数如下:
7, 8, 7, 9, 5, 4, 9, 10, 7, 4
则: (1) 平均命中环数为_____; (2) 命中环数的标准差为_____.

13. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序. 若输入 m 的值为 2, 则输出的结果 $i=$_____.

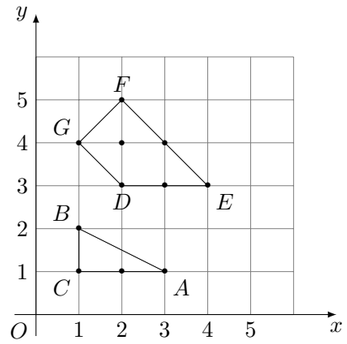


14. 已知圆 $O:x^2+y^2=5$, 直线 $l:x\cos\theta+y\sin\theta=1$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 设圆 O 上到直线 l 的距离等于 1 的点的个数为 k, 则 $k=$_____.

15. 在区间 $[-2,4]$ 上随机地取一个数 x, 若 x 满足 $|x|\leqslant m$ 的概率为 $\dfrac{5}{6}$, 则 $m=$_____.

16. 我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题: 在下雨时, 用一个圆台形的天池盆接雨水, 天池盆盆口直径为二尺八寸, 盆底直径为一尺二寸, 盆深一尺八寸, 若盆中积水深九寸, 则平地降雨量是_____寸.
(注: ① 平地降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积; ② 一尺等于十寸)

17. 在平面直角坐标系中, 若点 $P(x,y)$ 的坐标 x, y 均为整数, 则称点 P 为格点, 若一个多边形的顶点全是格点, 则称该多边形为格点多边形, 格点多边形的面积为 S, 其内部的格点数记为 N, 边界上的格点数记为 L. 例如图中 $\triangle ABC$ 是格点三角形, 对应的 $S=1$, $N=0$, $L=4$.



(1) 图中格点四边形 $DEFG$ 对应的 S, N, L 分别是_____;
(2) 已知格点多边形的面积可表示为 $S=aN+bL+c$, 其中 a, b, c 为常数. 若某格点多边形对应的 $N=71$, $L=18$, 则 $S=$_____. (用数值作答)

三、解答题

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c, 已知 $\cos 2A-3\cos(B+C)=1$.
(1) 求角 A 的大小;
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=5\sqrt{3}$, $b=5$, 求 $\sin B\sin C$ 的值.

19. 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, S_4, S_2, S_3 成等差数列, 且 $a_2+a_3+a_4=-18$.

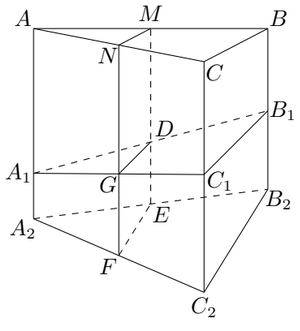
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 是否存在正整数 n, 使得 $S_n \geqslant 2013$? 若存在, 求出符合条件的所有 n 的集合; 若不存在, 说明理由.

20. 如图, 某地质队自水平地面 A, B, C 三处垂直向地下钻探, 自 A 点向下钻到 A_1 处发现矿藏, 再继续下钻到 A_2 处后下面已无矿, 从而得到在 A 处正下方的矿层厚度为 $A_1A_2=d_1$, 同样可得在 B, C 处正下方的矿层厚度分别为 $B_1B_2=d_2$, $C_1C_2=d_3$, 且 $d_1<d_2<d_3$, 过 AB, AC 的中点 M, N 且与直线 AA_2 平行的平面截多面体 $A_1B_1C_1-A_2B_2C_2$ 所得的截面 $DEFG$ 为该多面体的一个中截面, 其面积记为 $S_{中}$.

(1) 证明: 中截面 $DEFG$ 是梯形;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 记 $BC=a$, BC 边上的高为 h, 面积为 S. 在估测三角形 ABC 区域内正下方的矿藏储量 (即多面体 $A_1B_1C_1-A_2B_2C_2$ 的体积 V) 时, 可用近似公式 $V_{估}=S_{中}\cdot h$ 来估算. 已知 $V=\dfrac{1}{3}(d_1+d_2+d_3)S$, 试判断 $V_{估}$ 与 V 的大小关系, 并加以证明.



21. 设 $a>0$, $b>0$, 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+1}$.

(1) 当 $a\neq b$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x>0$ 时, 称 $f(x)$ 为 a, b 关于 x 的加权平均数.

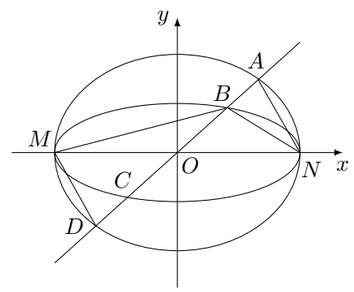
① 判断 $f(1)$, $f\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$ 是否成等比数列, 并证明 $f\left(\dfrac{b}{a}\right) \leqslant f\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$;

② a、b 的几何平均数记为 G, 称 $\dfrac{2ab}{a+b}$ 为 a, b 的调和平均数, 记为 H, 若 $H \leqslant f(x) \leqslant G$, 求 x 的取值范围.

22. 如图, 已知椭圆 C_1 与 C_2 的中心在坐标原点 O, 长轴均为 MN 且在 x 轴上, 短轴长分别为 $2m$, $2n$ $(m>n)$, 过原点且不与 x 轴重合的直线 l 与 C_1, C_2 的四个交点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D, 记 $\lambda=\dfrac{m}{n}$, $\triangle BDM$ 和 $\triangle ABN$ 的面积分别为 S_1 和 S_2.

(1) 当直线 l 与 y 轴重合时, 若 $S_1=\lambda S_2$, 求 λ 的值;

(2) 当 λ 变化时, 是否存在与坐标轴不重合的直线 l, 使得 $S_1=\lambda S_2$? 并说明理由.



2013 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $z=\mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 某学校有男、女学生各 500 名. 为了解男女学生在学习兴趣与业余爱好方面是否存在显著差异, 拟从全体学生中抽取 100 名学生进行调查, 则宜采用的抽样方法是 （ ）

(A) 抽签法　(B) 随机数法　(C) 系统抽样法　(D) 分层抽样法

3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B 所对的边长分别为 a, b. 若 $2a\sin B=\sqrt{3}b$, 则角 A 等于 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{12}$　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant 2x\\ x+y\leqslant 1\\ y\geqslant -1\end{cases}$, 则 $x+2y$ 的最大值是 （ ）

(A) $-\dfrac{5}{2}$　(B) 0　(C) $\dfrac{5}{3}$　(D) $\dfrac{5}{2}$

5. 函数 $f(x)=2\ln x$ 的图象与函数 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图象的交点个数为 （ ）

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

6. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是单位向量, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{c}|$ 的取值范围是 （ ）

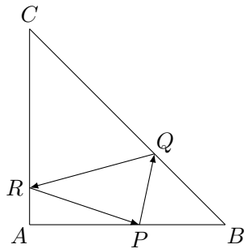
(A) $\left[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right]$　(B) $\left[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+2\right]$

(C) $\left[1,\sqrt{2}+1\right]$　(D) $\left[1,\sqrt{2}+2\right]$

7. 已知棱长为 1 的正方体的俯视图是一个面积为 1 的正方形, 则该正方体的正视图的面积不可能等于 （ ）

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

8. 在等腰直角三角形 ABC 中, $AB=AC=4$, 点 P 是边 AB 上异于 A, B 的一点, 光线从点 P 出发, 经 BC, CA 反射后又回到点 P (如图). 若光线 QR 经过 $\triangle ABC$ 的重心, 则 AP 等于 （ ）



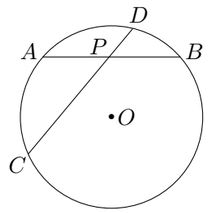
(A) 2　(B) 1　(C) $\dfrac{8}{3}$　(D) $\dfrac{4}{3}$

二、填空题

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 l : $\begin{cases}x=t\\ y=t-a\end{cases}$ (t 为参数) 过椭圆 C : $\begin{cases}x=3\cos\varphi\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$ (φ 为参数) 的右顶点, 则常数 a 的值为_____.

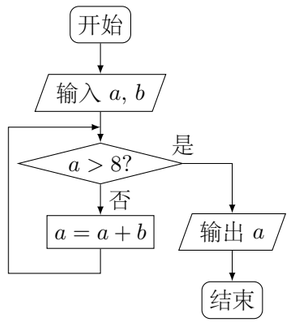
10. 已知 a, b, $c\in\mathbf{R}$, $a+2b+3c=6$, 则 $a^2+4b^2+9c^2$ 的最小值为_____.

11. 如图, 在半径为 $\sqrt{7}$ 的 $\odot O$ 中, 弦 AB, CD 相交于点 P, $PA=PB=2$, $PD=1$, 则圆心 O 到弦 CD 的距离为_____.



12. 若 $\int_0^T x^2\mathrm{d}x=9$, 则常数 T 的值为_____.

13. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $a=1$, $b=2$, 则输出的 a 的值为_____.



14. 设 F_1, F_2 是双曲线 C : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的两个焦点, P 是 C 上一点, 若 $|PF_1|+|PF_2|=6a$, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30°, 则 C 的离心率为_____.

15. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n=(-1)^n a_n-\dfrac{1}{2^n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则
(1) $a_3=$_____; (2) $S_1+S_2+\cdots+S_{100}=$_____.

16. 设函数 $f(x)=a^x+b^x-c^x$, 其中 $c>a>0$, $c>b>0$.
(1) 记集合 $M=\{(a,b,c)\,|\,a,\ b,\ c$ 不能构成一个三角形的三条边长, 且 $a=b\}$, 则 $(a,b,c)\in M$ 所对应的 $f(x)$ 的零点的取值集合为_____;
(2) 若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长, 则下列结论正确的是_____. (写出所有正确结论的序号)
① $\forall x\in(-\infty,1)$, $f(x)>0$;
② $\exists x\in\mathbf{R}$, 使 a^x, b^x, c^x 不能构成一个三角形的三条边长;
③ 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则 $\exists x\in(1,2)$, 使 $f(x)=0$.

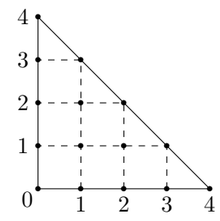
三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $g(x)=2\sin^2\dfrac{x}{2}$.
(1) 若 α 是第一象限角, 且 $f(\alpha)=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$, 求 $g(\alpha)$ 的值;
(2) 求使 $f(x)\geqslant g(x)$ 成立的 x 的取值集合.

18. 某人在如图所示的直角边长为 4 米的三角形地块的每个格点 (指纵、横直线的交叉点以及三角形的顶点) 处都种了一株相同品种的作物. 根据历年的种植经验, 一株该种作物的年收获量 Y (单位: kg) 与它的“相近”作物株数 X 之间的关系如下表所示:

X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

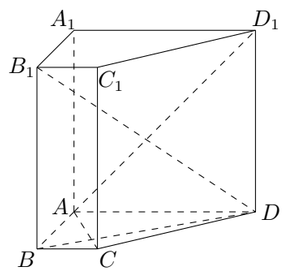
这里, 两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米.
(1) 从三角形地块的内部和边界上分别随机选取一株作物, 求它们恰好“相近”的概率;
(2) 从所种作物中随机选取一株, 求它的年收获量的分布列与数学期望.



19. 如图, 在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD\parallel BC$, $\angle BAD=90^\circ$, $AC\perp BD$, $BC=1$, $AD=AA_1=3$.

(1) 证明: $AC\perp B_1D$;

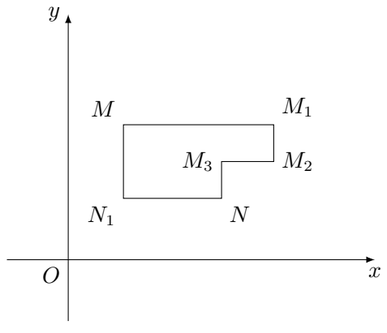
(2) 求直线 B_1C_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值.



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将从点 M 出发沿纵、横方向到达点 N 的任一路径称为 M 到 N 的“L 路径”. 如图所示的路径 $MM_1M_2M_3N$ 与路径 MN_1N 都是 M 到 N 的“L 路径”. 某地有三个新建的居民区, 分别位于平面 xOy 内三点 $A(3,20)$, $B(-10,0)$, $C(14,0)$ 处. 现计划在 x 轴上方区域 (包含 x 轴) 内的某一点 P 处修建一个文化中心.

(1) 写出点 P 到居民区 A 的“L 路径”长度最小值的表达式 (不要求证明);

(2) 若以原点 O 为圆心, 半径为 1 的圆的内部是保护区, “L 路径”不能进入保护区, 请确定点 P 的位置, 使其到三个居民区的“L 路径”长度之和最小.



21. 过抛物线 $E:x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点 F 作斜率分别为 k_1, k_2 的两条不同的直线 l_1, l_2, 且 $k_1+k_2=2$, l_1 与 E 相交于点 A, B, l_2 与 E 相交于点 C, D. 以 AB, CD 为直径的圆 M, 圆 N (M, N 为圆心) 的公共弦所在的直线记为 l.

(1) 若 $k_1>0$, $k_2>0$, 证明; $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}<2p^2$;

(2) 若点 M 到直线 l 的距离的最小值为 $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$, 求抛物线 E 的方程.

22. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\left|\dfrac{x-a}{x+2a}\right|$.

(1) 记 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的最大值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式;

(2) 是否存在 a, 使函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,4)$ 内的图象上存在两点, 在该两点处的切线相互垂直? 若存在, 求 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

2013 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 复数 $z=\mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. “$1<x<2$”是“$x<2$”成立的 （ ）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 某工厂甲、乙、丙三个车间生产了同一种产品, 数量分别为 120 件, 80 件, 60 件. 为了解它们的产品质量是否存在显著差异, 用分层抽样方法抽取了一个容量为 n 的样本进行调查, 其中从丙车间的产品中抽取了 3 件, 则 $n=$ （ ）

(A) 9　(B) 10　(C) 12　(D) 13

4. 已知 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 且 $f(-1)+g(1)=2$, $f(1)+g(-1)=4$, 则 $g(1)$ 等于 （ ）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B 所对的边长分别为 a, b. 若 $2a\sin B=\sqrt{3}b$, 则角 A 等于 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{6}$　(D) $\dfrac{\pi}{12}$

6. 函数 $f(x)=\ln x$ 的图象与函数 $g(x)=x^2-4x+4$ 的图象的交点个数为 （ ）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

7. 已知正方体的棱长为 1, 其俯视图是一个面积为 1 的正方形, 侧视图是一个面积为 $\sqrt{2}$ 的矩形, 则该正方体的正视图的面积等于 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) 1　(C) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$　(D) $\sqrt{2}$

8. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是单位向量, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 （ ）

(A) $\sqrt{2}-1$　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{2}+1$　(D) $\sqrt{2}+2$

9. 已知事件“在矩形 $ABCD$ 的边 CD 上随机取一点 P, 使 $\triangle APB$ 的最大边是 AB”发生的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 则 $\dfrac{AD}{AB}=$ （ ）

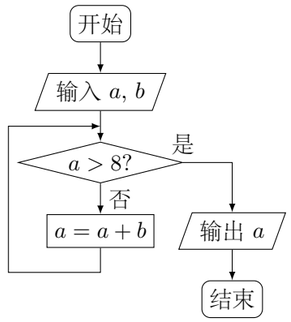
(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

二、填空题

10. 已知集合 $U=\{2,3,6,8\}$, $A=\{2,3\}$, $B=\{2,6,8\}$, 则 $\left(\complement_U A\right)\cap B=$_____.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $l_1:\begin{cases}x=2s+1\\y=s\end{cases}$ (s 为参数) 和直线 $l_2:\begin{cases}x=at\\y=2t-1\end{cases}$ (t 为参数) 平行, 则常数 a 的值为_____.

12. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $a=1$, $b=2$, 则输出的 a 的值为_____.



13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\leqslant 8\\0\leqslant x\leqslant 4\\0\leqslant y\leqslant 3\end{cases}$, 则 $x+y$ 的最大值为_____.

14. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的两个焦点. 若在 C 上存在一点 P, 使 $PF_1\perp PF_2$, 且 $\angle PF_1F_2=30^\circ$, 则 C 的离心率为_____.

15. 对于 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$ 的子集 $X=\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\}$, 定义 X 的“特征数列”为 x_1, x_2, $\cdots$, x_{100}, 其中 $x_{i_1}=x_{i_2}=\cdots=x_{i_k}=1$, 其余项均为 0, 例如: 子集 $\{a_2,a_3\}$ 的“特征数列”为 0, 1, 1, 0, 0, $\cdots$, 0.

(1) 子集 $\{a_1,a_3,a_5\}$ 的“特征数列”的前 3 项和等于_____.

(2) 若 E 的子集 P 的“特征数列” $p_1,p_2,\cdots,p_{100}$ 满足 $p_1=1$, $p_i+p_{i+1}=1$, $1\leqslant i\leqslant 99$; E 的子集 Q 的“特征数列” $q_1,q_2,\cdots,q_{100}$ 满足 $q_1=1$, $q_j+q_{j+1}+q_{j+2}=1$, $1\leqslant j\leqslant 98$, 则 $P\cap Q$ 的元素个数为_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\cos x\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

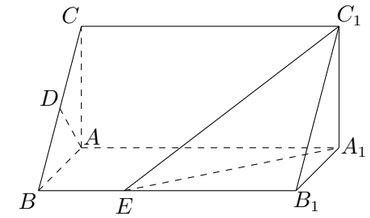
(1) 求 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 求使 $f(x)<\dfrac{1}{4}$ 成立的 x 的取值集合.

17. 如图, 在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=\sqrt{2}$, $AA_1=3$, D 是 BC 的中点, 点 E 在棱 BB_1 上运动.

(1) 证明: $AD\perp C_1E$;

(2) 当异面直线 AC, C_1E 所成的角为 60° 时, 求三棱锥 $C_1-A_1B_1E$ 的体积.



18. 某人在如图所示的直角边长为 4 米的三角形地块的每个格点 (指纵、横直线的交叉点以及三角形的顶点) 处都种了一株相同品种的作物. 根据历年的种植经验, 一株该种作物的年收获量 Y (单位: kg) 与它的“相近”作物株数 X 之间的关系如下表所示:

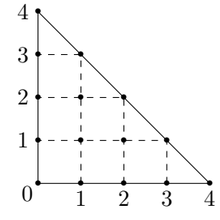
X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

这里, 两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米.

(1) 完成下表, 并求所种作物的平均年收获量;

Y	51	48	45	42
频数		4		

(2) 在所种作物中随机选取一株, 求它的年收获量至少为 48 kg 的概率.



19. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 \neq 0$, $2a_n - a_1 = S_1 \cdot S_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.
(1) 求 a_1, a_2, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

20. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \dfrac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的左、右焦点, F_1, F_2 关于直线 $x + y - 2 = 0$ 的对称点是圆 C 的一条直径的两个端点.
(1) 求圆 C 的方程;
(2) 设过点 F_2 的直线 l 被椭圆 E 和圆 C 所截得的弦长分别为 a, b. 当 ab 最大时, 求直线 l 的方程.

21. 已知函数 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}\mathrm{e}^x$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 证明: 当 $f(x_1) = f(x_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ 时, $x_1 + x_2 < 0$.

2013 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

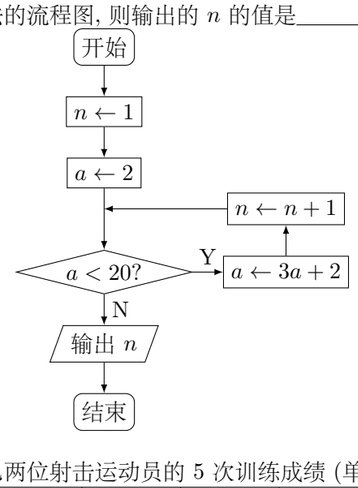
1. 函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为_____.

2. 设 $z=(2-\mathrm{i})^2$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的模为_____.

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两条渐近线的方程为_____.

4. 集合 $\{-1,0,1\}$ 共有_____个子集.

5. 如图是一个算法的流程图, 则输出的 n 的值是_____.



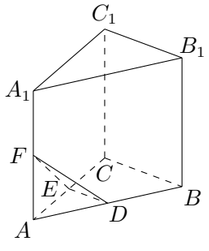
6. 抽样统计甲、乙两位射击运动员的 5 次训练成绩 (单位: 环), 结果如下:

运动员	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次
甲	87	91	90	89	93
乙	89	90	91	88	92

则成绩较为稳定 (方差较小) 的那位运动员成绩的方差为_____.

7. 现有某类病毒记作 X_mY_n, 其中正整数 m, n ($m\leqslant 7$, $n\leqslant 9$) 可以任意选取, 则 m, n 都取到奇数的概率为_____.

8. 如图, 在三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, AC, AA_1 的中点. 设三棱锥 $F-ADE$ 的体积为 V_1, 三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的体积为 V_2, 则 $V_1:V_2=$_____.



9. 抛物线 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形区域为 D (包含三角形内部与边界). 若点 $P(x,y)$ 是区域 D 内的任意一点, 则 $x+2y$ 的取值范围是_____.

10. 设 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC 上的点, $AD=\dfrac{1}{2}AB$, $BE=\dfrac{2}{3}BC$. 若 $\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$ (λ_1, λ_2 为实数), 则 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值为_____.

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2-4x$, 则不等式 $f(x)>x$ 的解集用区间表示为_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$), 右焦点为 F, 右准线为 l, 短轴的一个端点为 B, 设原点到直线 BF 的距离为 d_1, F 到 l 的距离为 d_2, 若 $d_2=\sqrt{6}d_1$, 则椭圆 C 的离心率为_____.

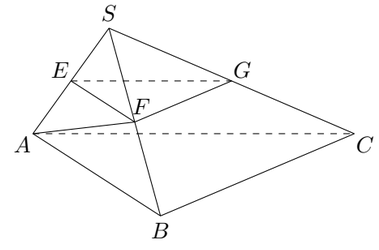
13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设定点 $A(a,a)$, P 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ ($x>0$) 图象上一动点, 若点 P, A 之间的最短距离为 $2\sqrt{2}$, 则满足条件的实数 a 的所有值为_____.

14. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5=\dfrac{1}{2}$, $a_6+a_7=3$, 则满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n>a_1a_2\cdots a_n$ 的最大正整数 n 的值为_____.

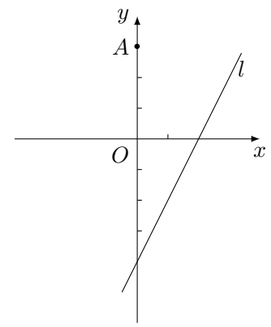
二、解答题

15. 已知 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$, $0<\beta<\alpha<\pi$.
(1) 若 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$, 求证: $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;
(2) 设 $\boldsymbol{c}=(0,1)$, 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, 求 α, β 的值.

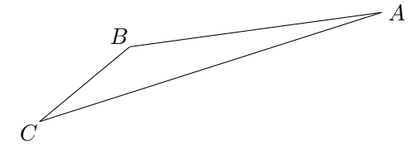
16. 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 平面 $SAB\perp$ 平面 SBC, $AB\perp BC$, $AS=AB$. 过 A 作 $AF\perp SB$, 垂足为 F, 点 E, G 分别是棱 SA, SC 的中点. 求证:
(1) 平面 $EFG\parallel$ 平面 ABC;
(2) $BC\perp SA$.



17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(0,3)$, 直线 $l:y=2x-4$. 设圆 C 的半径为 1, 圆心在 l 上.
(1) 若圆心 C 也在直线 $y=x-1$ 上, 过点 A 作圆 C 的切线, 求切线的方程;
(2) 若圆 C 上存在点 M, 使 $MA=2MO$, 求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围.



18. 如图, 游客从某旅游景区的景点 A 处下山至 C 处有两种路径. 一种是从 A 沿直线步行到 C, 另一种是先从 A 沿索道乘缆车到 B, 然后从 B 沿直线步行到 C. 现有甲、乙两位游客从 A 处下山, 甲沿 AC 匀速步行, 速度为 50 m/min. 在甲出发 2 min 后, 乙从 A 乘缆车到 B, 在 B 处停留 1 min 后, 再从 B 匀速步行到 C. 假设缆车匀速直线运动的速度为 130 m/min, 山路 AC 长为 1260 m, 经测量, $\cos A=\dfrac{12}{13}$, $\cos C=\dfrac{3}{5}$.
(1) 求索道 AB 的长;
(2) 问乙出发多少分钟后, 乙在缆车上与甲的距离最短?
(3) 为使两位游客在 C 处互相等待的时间不超过 3 分钟, 乙步行的速度应控制在什么范围内?



19. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a, 公差为 d 的等差数列 $(d \neq 0)$, S_n 是其前 n 项的和. 记 $b_n = \dfrac{nS_n}{n^2+c}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 其中 c 为实数.

(1) 若 $c = 0$, 且 b_1, b_2, b_4 成等比数列, 证明: $S_{nk} = n^2 S_k$ $(k,\ n \in \mathbf{N}^*)$;

(2) 若 $\{b_n\}$ 是等差数列, 证明: $c = 0$.

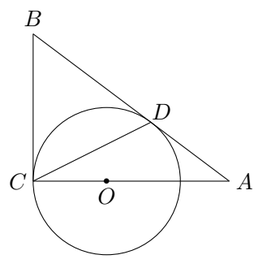
20. 设函数 $f(x) = \ln x - ax$, $g(x) = \mathrm{e}^x - ax$, 其中 a 为实数.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调减函数, 且 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有最小值, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是单调增函数, 试求 $f(x)$ 的零点个数, 并证明你的结论.

21. 四选二.

【A】如图, AB 和 BC 分别与圆 O 相切于点 D, C, AC 经过圆心 O, 且 $BC = 2OC$. 求证: $AC = 2AD$.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

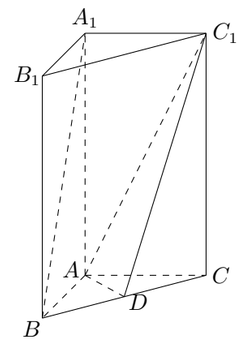
【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\tan^2\theta \\ y = 2\tan\theta \end{cases}$ (θ 为参数). 试求直线 l 和曲线 C 的普通方程, 并求出它们的公共点的坐标.

【D】已知 $a \geqslant b > 0$, 求证: $2a^3 - b^3 \geqslant 2ab^2 - a^2 b$.

22. 如图, 在直三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中, $AB \perp AC$, $AB = AC = 2$, $A_1A = 4$, 点 D 是 BC 的中点.

(1) 求异面直线 A_1B 与 C_1D 所成角的余弦值;

(2) 求平面 ADC_1 与平面 ABA_1 所成二面角的正弦值.



23. 设数列 $\{a_n\}$: $1,\ -2,\ -2,\ 3,\ 3,\ 3,\ -4,\ -4,\ -4,\ -4,\ \cdots,\ \overbrace{(-1)^{k-1}k, \cdots, (-1)^{k-1}k}^{k\text{ 个}},\ \cdots$, 即当 $\dfrac{(k-1)k}{2} < n \leqslant \dfrac{k(k+1)}{2}$ $(k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $a_n = (-1)^{k-1}k$. 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$. 对于 $l \in \mathbf{N}^*$, 定义集合 $P_l = \{n \mid S_n$ 是 a_n 的整数倍, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $1 \leqslant n \leqslant l\}$.

(1) 求集合 P_{11} 中元素的个数;

(2) 求集合 P_{2000} 中元素的个数.

2013 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{1,2,z\mathrm{i}\}$, i 为虚数单位, $N=\{3,4\}$, $M\cap N=\{4\}$, 则复数 z 等于 （ ）

(A) $-2\mathrm{i}$ (B) $2\mathrm{i}$ (C) $-4\mathrm{i}$ (D) $4\mathrm{i}$

2. 函数 $y=\sqrt{x}\ln(1-x)$ 的定义域为 （ ）

(A) $(0,1)$ (B) $[0,1)$ (C) $(0,1]$ (D) $[0,1]$

3. 等比数列 x, $3x+3$, $6x+6$, $\cdots$ 的第四项等于 （ ）

(A) -24 (B) 0 (C) 12 (D) 24

4. 总体由编号为 01, 02, $\cdots$, 19, 20 的 20 个个体组成. 利用下面的随机数表选取 5 个个体, 选取方法从随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右依次选取两个数字, 则选出来的第 5 个个体的编号为 （ ）

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

(A) 08 (B) 07 (C) 02 (D) 01

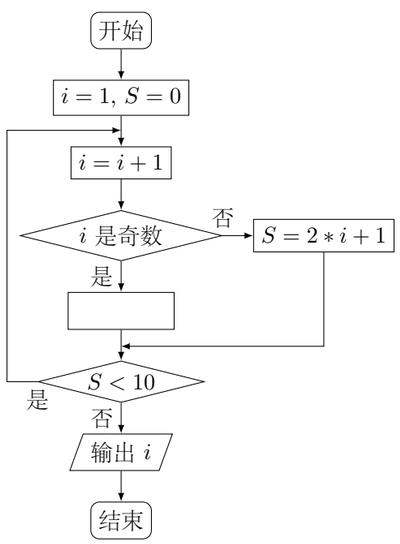
5. $\left(x^2-\dfrac{2}{x^3}\right)^5$ 展开式中的常数项为 （ ）

(A) 80 (B) -80 (C) 40 (D) -40

6. 若 $S_1=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$, $S_2=\int_1^2 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$, $S_3=\int_1^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, 则 S_1, S_2, S_3 的大小关系为 （ ）

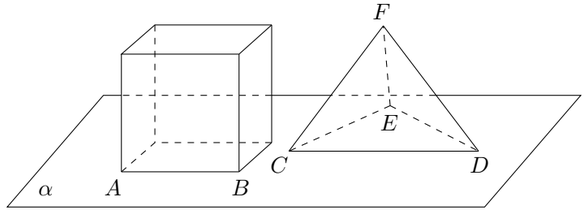
(A) $S_1<S_2<S_3$ (B) $S_2<S_1<S_3$ (C) $S_2<S_3<S_1$ (D) $S_3<S_2<S_1$

7. 阅读如图所示程序框图, 如果输出 $i=5$, 那么在空白矩形框中应填入的语句为 （ ）



(A) $S=2*i-2$ (B) $S=2*i-1$ (C) $S=2*i$ (D) $S=2*i+4$

8. 如图, 正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上, 且 $AB\parallel CD$, 正方体的六个面所在的平面与直线 CE, EF 相交的平面个数分别记为 m, n, 那么 $m+n=$ （ ）

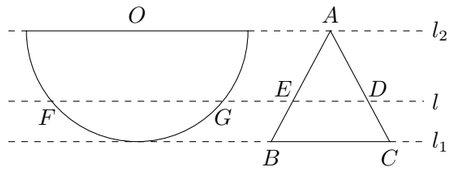


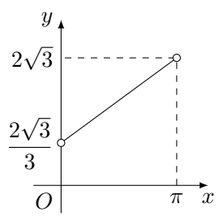
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

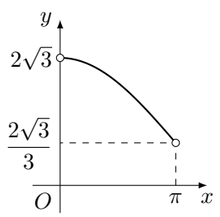
9. 过点 $\left(\sqrt{2},0\right)$ 引直线 l 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 当 $\triangle AOB$ 的面积取最大值时, 直线 l 的斜率等于 （ ）

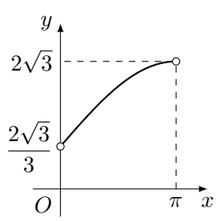
(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $-\sqrt{3}$

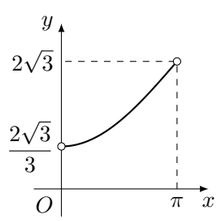
10. 如图, 半径为 1 的半圆 O 与等边三角形 ABC 夹在两平行线 l_1, l_2 之间, $l\parallel l_1$, l 与半圆相交于 F, G 两点, 与三角形 ABC 两边相交于 E, D 两点. 设弧 $\overset{\frown}{FG}$ 的长为 x $(0<x<\pi)$, $y=EB+BC+CD$, 若 l 从 l_1 平行移动到 l_2, 则函数 $y=f(x)$ 的图象大致是 （ ）



(A)


(B)


(C)


(D)


二、填空题

11. 函数 $y=\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x$ 的最小正周期 T 为_____.

12. $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量, 且 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的射影为_____.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $f\left(\mathrm{e}^x\right)=x+\mathrm{e}^x$, 则 $f'(1)=$_____.

14. 抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 其准线与双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 相交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF$ 为等边三角形, 则 $p=$_____.

15. 设曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases}$ (t 为参数), 若以直角坐标系的原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 则曲线 C 的极坐标方程为_____.

16. 在实数范围内, 不等式 $||x-2|-1|\leqslant 1$ 的解集为_____.

三、解答题

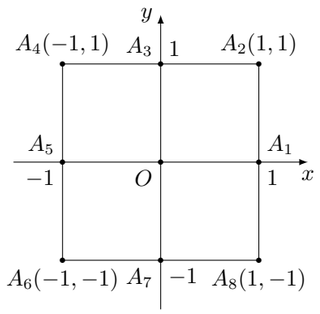
17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 已知 $\cos C+\left(\cos A-\sqrt{3}\sin A\right)\cos B=0$.
(1) 求角 B 的大小;
(2) 若 $a+c=1$, 求 b 的取值范围.

18. 正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 令 $b_n=\dfrac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n. 证明: 对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $T_n<\dfrac{5}{64}$.

19. 小波以游戏方式决定是参加学校合唱团还是参加学校排球队, 游戏规则为: 以 O 为起点, 再从 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 (如图) 这 8 个点中任取两点分别为终点得到两个向量, 记这两个向量的数量积为 X. 若 $X=0$ 就参加学校合唱团, 否则就参加学校排球队.

(1) 求小波参加学校合唱团的概率;

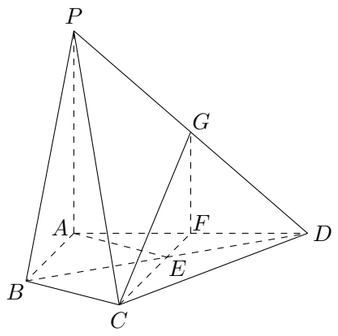
(2) 求 X 的分布列和数学期望.



20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, E 为 BD 的中点, G 为 PD 的中点, $\triangle DAB\cong\triangle DCB$, $EA=EB=AB=1$, $PA=\dfrac{3}{2}$, 连接 CE 并延长交 AD 于 F.

(1) 求证: $AD\perp$ 平面 CFG;

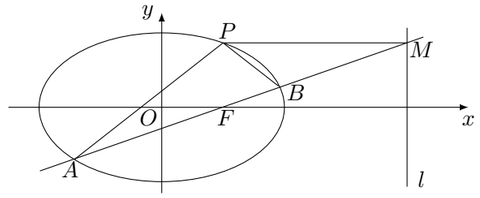
(2) 求平面 BCP 与平面 DCP 的夹角的余弦值.



21. 如图, 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 经过点 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$, 离心率 $e=\dfrac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x=4$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M, 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3. 问: 是否存在常数 λ, 使得 $k_1+k_2=\lambda k_3$? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



22. 已知函数 $f(x)=a\left(1-2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\right)$, a 为常数且 $a>0$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称;

(2) 若 x_0 满足 $f(f(x_0))=x_0$, 但 $f(x_0)\neq x_0$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的二阶周期点, 如果 $f(x)$ 有两个二阶周期点 x_1, x_2, 试确定 a 的取值范围;

(3) 对于 (2) 中的 x_1, x_2 和 a, 设 x_3 为函数 $f(f(x))$ 的最大值点, $A(x_1, f(f(x_1)))$, $B(x_2, f(f(x_2)))$, $C(x_3, 0)$, 记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S(a)$, 讨论 $S(a)$ 的单调性.

2013 年普通高等学校招生考试（江西卷）

文科数学

一、选择题

1. 复数 $z=\mathrm{i}(-2-\mathrm{i})$ (i 为虚数单位) 在复平面内所对应的点在 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,ax^2+ax+1=0\}$ 中只有一个元素, 则 $a=$ （ ）

(A) 4　(B) 2　(C) 0　(D) 0 或 4

3. 若 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\alpha=$ （ ）

(A) $-\dfrac{2}{3}$　(B) $-\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

4. 集合 $A=\{2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$, 从 A, B 中各任意取一个数, 则这两数之和等于 4 的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{6}$

5. 总体由编号为 01, 02, $\cdots$, 19, 20 的 20 个个体组成. 利用下面的随机数表选取 5 个个体, 选取方法从随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右依次选取两个数字, 则选出来的第 5 个个体的编号为 （ ）

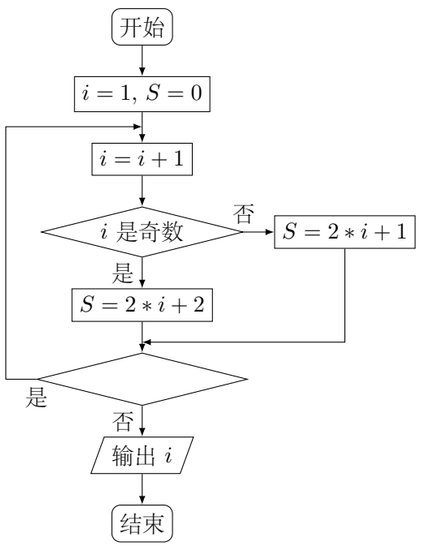
7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

(A) 08　(B) 07　(C) 02　(D) 01

6. 下列选项中, 使不等式 $x<\dfrac{1}{x}<x^2$ 成立的 x 的取值范围是 （ ）

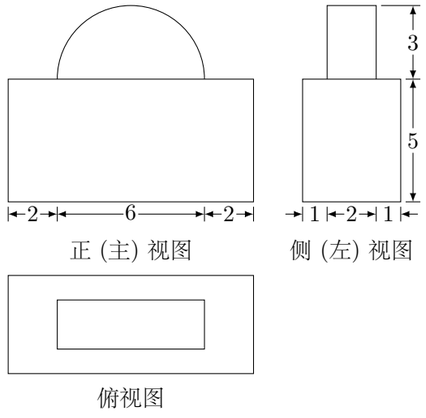
(A) $(-\infty,-1)$　(B) $(-1,0)$　(C) $(0,1)$　(D) $(1,+\infty)$

7. 阅读如图所示程序框图, 如果输出 $i=4$, 那么在空白的判断框中应填入的条件是 （ ）



(A) $S<8$　(B) $S<9$　(C) $S<10$　(D) $S<11$

8. 一几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 （ ）

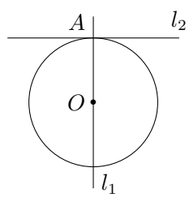


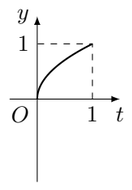
(A) $200+9\pi$　(B) $200+18\pi$　(C) $140+9\pi$　(D) $140+18\pi$

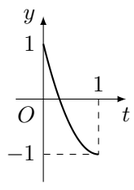
9. 已知点 $A(2,0)$, 抛物线 C: $x^2=4y$ 的焦点为 F, 射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M, 与其准线相交于点 N, 则 $|FM|:|MN|=$ （ ）

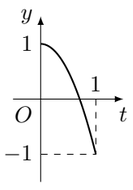
(A) $2:\sqrt{5}$　(B) $1:2$　(C) $1:\sqrt{5}$　(D) $1:3$

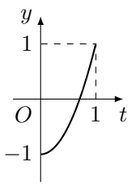
10. 如图, 已知 $l_1\perp l_2$, 圆心在 l_1 上, 半径为 1 m 的圆 O 在 $t=0$ 时与 l_2 相切于点 A, 圆 O 沿 l_1 以 1 m/s 的速度匀速向上移动, 圆被直线 l_2 所截上方圆弧长记为 x, 令 $y=\cos x$, 则 y 与时间 t ($0\leqslant t\leqslant 1$, 单位: s) 的函数 $y=f(t)$ 的图象大致为 （ ）



(A)


(B)


(C)


(D)


二、填空题

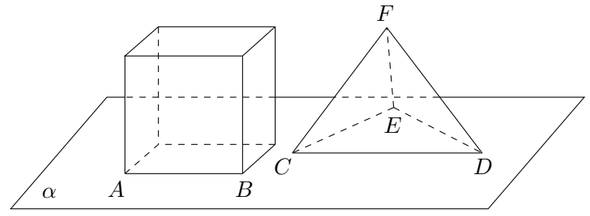
11. 若曲线 $y=x^{\alpha}+1$ ($\alpha\in\mathbf{R}$) 在点 $(1,2)$ 处的切线经过坐标原点, 则 $\alpha=$_____.

12. 某住宅小区计划植树不少于 100 棵, 若第一天植 2 棵, 以后每天植树的棵数是前一天的 2 倍, 则需要的最少天数 n ($n\in\mathbf{N}^*$) 等于_____.

13. 设 $f(x)=\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x$, 若对任意实数 x 都有 $|f(x)|\leqslant a$, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 若圆 C 经过坐标原点和点 $(4,0)$, 且与直线 $y=1$ 相切, 则圆 C 的方程是_____.

15. 如图, 正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上, 且 $AB\parallel CD$, 则直线 EF 与正方体的六个面所在的平面相交的平面个数为_____.



三、解答题

16. 正项数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n^2-(2n-1)a_n-2n=0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n=\dfrac{1}{(n+1)a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin A\sin B+\sin B\sin C+\cos 2B=1$.

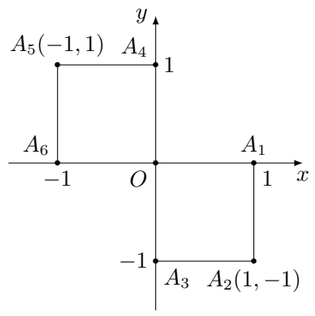
(1) 求证: a, b, c 成等差数列;

(2) 若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$, 求 $\dfrac{a}{b}$ 的值.

18. 小波以游戏方式决定是去打球、唱歌还是去下棋, 游戏规则为: 以 O 为起点, 再从 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (如图) 这 6 个点中任取两点分别为终点得到两个向量, 记这两个向量的数量积为 X, 若 $X>0$ 就去打球, 若 $X=0$ 就去唱歌, 若 $X<0$ 就去下棋.

(1) 写出数量积 X 的所有可能取值;

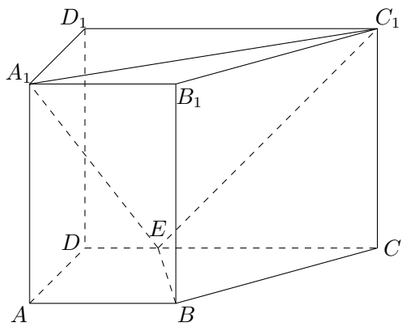
(2) 分别求小波去下棋的概率和不去唱歌的概率.



19. 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB\parallel CD$, $AD\perp AB$, $AB=2$, $AD=\sqrt{2}$, $AA_1=3$, E 为 CD 上一点, $DE=1$, $EC=3$.

(1) 证明: $BE\perp$ 平面 BB_1C_1C;

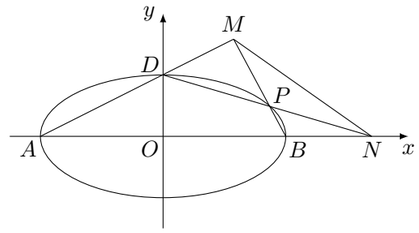
(2) 求点 B_1 到平面 EA_1C_1 的距离.



20. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $a+b=3$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 如图所示, A, B, D 是椭圆 C 的顶点, P 是椭圆 C 上除顶点外的任意一点, 直线 DP 交 x 轴于点 N, 直线 AD 交 BP 于点 M, 设 BP 的斜率为 k, MN 的斜率为 m, 证明: $2m-k$ 为定值.



21. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}x, & 0\leqslant x\leqslant a\\ \dfrac{1}{1-a}(1-x), & a<x\leqslant 1\end{cases}$, a 为常数且 $a\in(0,1)$.

(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时, 求 $f\left(f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$;

(2) 若 x_0 满足 $f(f(x_0))=x_0$, 但 $f(x_0)\neq x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的二阶周期点, 证明: 函数 $f(x)$ 有且仅有两个二阶周期点, 并求出二阶周期点 x_1, x_2;

(3) 对于 (2) 中的 x_1, x_2, 设 $A(x_1,f(f(x_1)))$, $B(x_2,f(f(x_2)))$, $C(a^2,0)$, 记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S(a)$, 求 $S(a)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

2013 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数的 $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}-1}$ 模为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

2. 已知集合 $A=\{x\mid 0<\log_4 x<1\}$, $B=\{x\mid x\leqslant 2\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $(0,1)$ (B) $(0,2]$ (C) $(1,2)$ (D) $(1,2]$

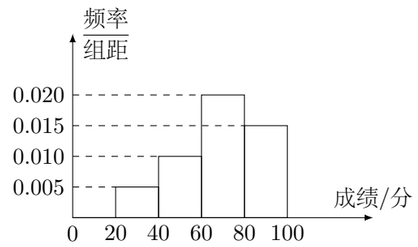
3. 已知点 $A(1,3)$, $B(4,-1)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 （ ）

(A) $\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ (B) $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ (C) $\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$ (D) $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$

4. 下面是关于公差 $d>0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的四个命题:
p_1: 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列;
p_2: 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列;
p_3: 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列;
p_4: 数列 $\{a_n+3nd\}$ 是递增数列.
其中的真命题为 （ ）

(A) p_1, p_2 (B) p_3, p_4 (C) p_2, p_3 (D) p_1, p_4

5. 某班的全体学生参加英语测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为: $[20,40)$, $[40,60)$, $[60,80)$, $[80,100]$. 若低于 60 分的人数是 15, 则该班的学生人数是 （ ）



(A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 60

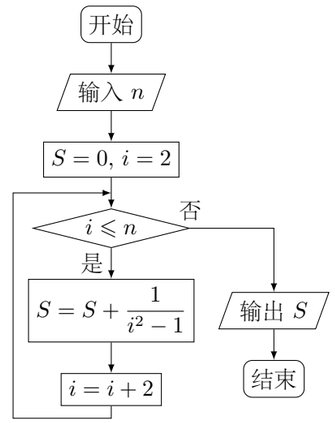
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 若 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\dfrac{1}{2}b$, 且 $a>b$, 则 $\angle B=$ （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{6}$

7. 使 $\left(3x+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 的展开式中含有常数项的最小的 n 为 （ ）

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

8. 执行如图所示的程序框图, 若输入 $n=10$, 则输出 $S=$ （ ）



(A) $\dfrac{5}{11}$ (B) $\dfrac{10}{11}$ (C) $\dfrac{36}{55}$ (D) $\dfrac{72}{55}$

9. 已知点 $O(0,0)$, $A(0,b)$, $B(a,a^3)$. 若 $\triangle OAB$ 为直角三角形, 则必有( )

(A) $b=a^3$ (B) $b=a^3+\dfrac{1}{a}$

(C) $(b-a^3)\left(b-a^3-\dfrac{1}{a}\right)=0$ (D) $|b-a^3|+\left|b-a^3-\dfrac{1}{a}\right|=0$

10. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上. 若 $AB=3$, $AC=4$, $AB\perp AC$, $AA_1=12$, 则球 O 的半径为 （ ）

(A) $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$ (B) $2\sqrt{10}$ (C) $\dfrac{13}{2}$ (D) $3\sqrt{10}$

11. 已知函数 $f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2$, $g(x)=-x^2+2(a-2)x-a^2+8$, 设 $H_1(x)=\max\{f(x),g(x)\}$, $H_2(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ ($\max\{p,q\}$ 表示 p, q 中的较大值, $\min\{p,q\}$ 表示 p, q 中的较小值). 记 $H_1(x)$ 的最小值为 A, $H_2(x)$ 的最大值为 B, 则 $A-B=$ （ ）

(A) 16 (B) -16 (C) $a^2-2a-16$ (D) $a^2+2a-16$

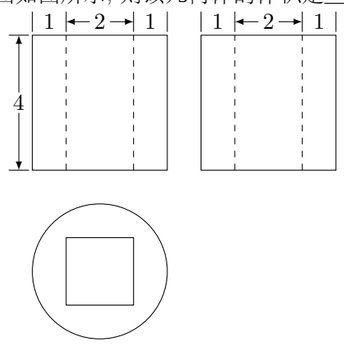
12. 设函数 $f(x)$ 满足 $x^2f'(x)+2xf(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, $f(2)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{8}$, 则 $x>0$ 时, $f(x)$ （ ）

(A) 有极大值, 无极小值 (B) 有极小值, 无极大值

(C) 既有极大值又有极小值 (D) 既无极大值也无极小值

二、填空题

13. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是_____.



14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 a_1, a_3 是方程 $x^2-5x+4=0$ 的两个根, 则 $S_6=$_____.

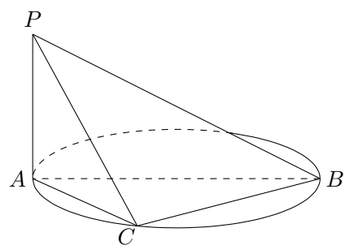
15. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 F, C 与过原点的直线相交于 A, B 两点, 连接 AF, BF, 若 $|AB|=10$, $|AF|=6$, $\cos\angle ABF=\dfrac{4}{5}$, 则椭圆 C 的离心率 $e=$_____.

16. 为了考察某校各班参加课外书法小组的人数, 从全校随机抽取 5 个班级, 把每个班级参加该小组的人数作为样本数据. 已知样本平均数为 7, 样本方差为 4, 且样本数据互不相同, 则样本数据中的最大值为_____.

三、解答题

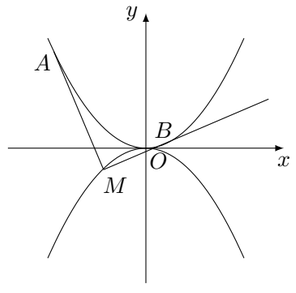
17. 设向量 $\boldsymbol{a}=\left(\sqrt{3}\sin x,\sin x\right)$, $\boldsymbol{b}=(\cos x,\sin x)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
(1) 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, 求 x 的值;
(2) 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值.

18. 如图, AB 是圆的直径, PA 垂直圆所在的平面, C 是圆上的点.
(1) 求证: 平面 $PAC\perp$ 平面 PBC;
(2) 若 $AB=2$, $AC=1$, $PA=1$, 求二面角 $C-PB-A$ 的余弦值.



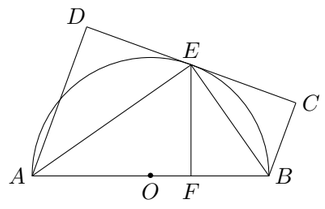
19. 现有 10 道题, 其中 6 道甲类题, 4 道乙类题, 张同学从中任取 3 道题解答.
(1) 求张同学至少取到 1 道乙类题的概率;
(2) 已知所取的 3 道题中有 2 道甲类题, 1 道乙类题. 设张同学答对每道甲类题的概率都是 $\dfrac{3}{5}$, 答对每道乙类题的概率都是 $\dfrac{4}{5}$, 且各题答对与否相互独立. 用 X 表示张同学答对题的个数, 求 X 的分布列和数学期望.

20. 如图, 抛物线 $C_1: x^2=4y$, $C_2: x^2=-2py$ $(p>0)$. 点 $M(x_0,y_0)$ 在抛物线 C_2 上, 过 M 作 C_1 的切线, 切点为 A, B (M 为原点 O 时, A, B 重合于 O). 当 $x_0=1-\sqrt{2}$ 时, 切线 MA 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$.
(1) 求 p 的值;
(2) 当 M 在 C_2 上运动时, 求线段 AB 中点 N 的轨迹方程 (A, B 重合于 O 时, 中点为 O).



21. 已知函数 $f(x)=(1+x)\mathrm{e}^{-2x}$, $g(x)=ax+\dfrac{x^3}{2}+1+2x\cos x$, 当 $x\in[0,1]$ 时,
(1) 求证: $1-x\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{1+x}$;
(2) 若 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. 如图, AB 为 $\odot O$ 直径, 直线 CD 与 $\odot O$ 相切于 E, AD 垂直 CD 于 D, BC 垂直 CD 于 C, EF 垂直 AB 于 F, 连接 AE, BE. 证明:
(1) $\angle FEB=\angle CEB$;
(2) $EF^2=AD\cdot BC$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 圆 C_1, 直线 C_2 的极坐标方程分别为 $\rho=4\sin\theta$, $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.
(1) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标;
(2) 设 P 为 C_1 的圆心, Q 为 C_1 与 C_2 交点连线的中点, 已知直线 PQ 的参数方程为 $\begin{cases}x=t^3+a\\ y=\dfrac{b}{2}t^3+1\end{cases}$ ($t\in\mathbf{R}$ 为参数), 求 a, b 的值.

24. 已知函数 $f(x)=|x-a|$, 其中 $a>1$.
(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 4-|x-4|$ 的解集;
(2) 已知关于 x 的不等式 $|f(2x+a)-2f(x)|\leqslant 2$ 的解集为 $\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 2\}$, 求 a 的值.

2013 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$, $B=\{x\,|\,|x|<2\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{0\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{0,2\}$ (D) $\{0,1,2\}$

2. 复数的 $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}-1}$ 模为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

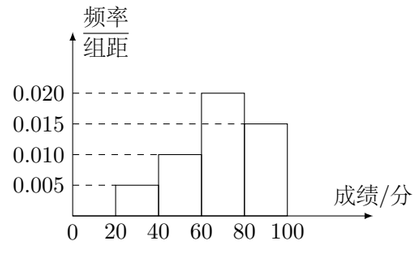
3. 已知点 $A(1,3)$, $B(4,-1)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 （ ）

(A) $\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ (B) $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ (C) $\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$ (D) $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$

4. 下面是关于公差 $d>0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的四个命题:
p_1: 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列;
p_2: 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列;
p_3: 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列;
p_4: 数列 $\{a_n+3nd\}$ 是递增数列.
其中的真命题为 （ ）

(A) p_1, p_2 (B) p_3, p_4 (C) p_2, p_3 (D) p_1, p_4

5. 某班的全体学生参加英语测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为: $[20,40)$, $[40,60)$, $[60,80)$, $[80,100]$. 若低于 60 分的人数是 15, 则该班的学生人数是 （ ）



(A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 60

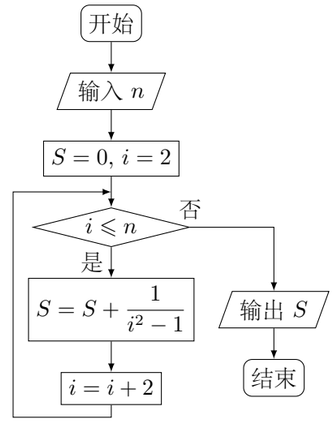
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 若 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\dfrac{1}{2}b$, 且 $a>b$, 则 $\angle B=$ （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{6}$

7. 已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+9x^2}-3x\right)+1$, 则 $f(\lg 2)+f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=$ （ ）

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

8. 执行如图所示的程序框图, 若输入 $n=8$, 则输出 $S=$ （ ）



(A) $\dfrac{4}{9}$ (B) $\dfrac{6}{7}$ (C) $\dfrac{8}{9}$ (D) $\dfrac{10}{11}$

9. 已知点 $O(0,0)$, $A(0,b)$, $B(a,a^3)$. 若 $\triangle OAB$ 为直角三角形, 则必有( )

(A) $b=a^3$ (B) $b=a^3+\dfrac{1}{a}$

(C) $(b-a^3)\left(b-a^3-\dfrac{1}{a}\right)=0$ (D) $|b-a^3|+\left|b-a^3-\dfrac{1}{a}\right|=0$

10. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上. 若 $AB=3$, $AC=4$, $AB\perp AC$, $AA_1=12$, 则球 O 的半径为 （ ）

(A) $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$ (B) $2\sqrt{10}$ (C) $\dfrac{13}{2}$ (D) $3\sqrt{10}$

11. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 F, C 与过原点的直线相交于 A, B 两点, 连接 AF, BF, 若 $|AB|=10$, $|BF|=8$, $\cos\angle ABF=\dfrac{4}{5}$, 则 C 的离心率为 （ ）

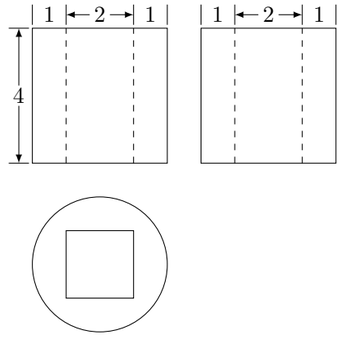
(A) $\dfrac{3}{5}$ (B) $\dfrac{5}{7}$ (C) $\dfrac{4}{5}$ (D) $\dfrac{6}{7}$

12. 已知函数 $f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2$, $g(x)=-x^2+2(a-2)x-a^2+8$, 设 $H_1(x)=\max\{f(x),g(x)\}$, $H_2(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ ($\max\{p,q\}$ 表示 p, q 中的较大值, $\min\{p,q\}$ 表示 p, q 中的较小值). 记 $H_1(x)$ 的最小值为 A, $H_2(x)$ 的最大值为 B, 则 $A-B=$ （ ）

(A) 16 (B) -16 (C) $a^2-2a-16$ (D) $a^2+2a-16$

二、填空题

13. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是_____.



14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 a_1, a_3 是方程 $x^2-5x+4=0$ 的两个根, 则 $S_6=$_____.

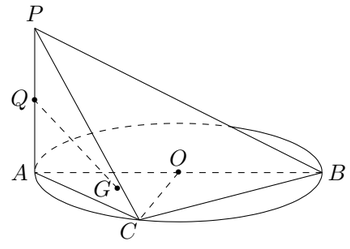
15. 已知 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左焦点, P, Q 为 C 上的点. 若 PQ 的长等于虚轴长的 2 倍, 点 $A(5,0)$ 在线段 PQ 上, 则 $\triangle PQF$ 的周长为_____.

16. 为了考察某校各班参加课外书法小组的人数, 从全校随机抽取 5 个班级, 把每个班级参加该小组的人数作为样本数据. 已知样本平均数为 7, 样本方差为 4, 且样本数据互不相同, 则样本数据中的最大值为_____.

三、解答题

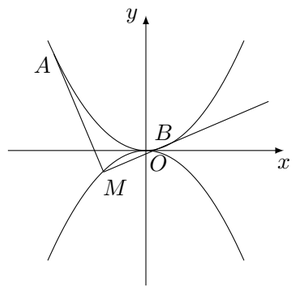
17. 设向量 $\boldsymbol{a}=\left(\sqrt{3}\sin x,\sin x\right)$, $\boldsymbol{b}=(\cos x,\sin x)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
(1) 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, 求 x 的值;
(2) 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值.

18. 如图, AB 是圆的直径, PA 垂直圆所在的平面, C 是圆上的点.
(1) 求证: $BC\perp$ 平面 PAC;
(2) 设 Q 为 PA 的中点, G 为 $\triangle AOC$ 的重心, 求证: $QG\parallel$ 平面 PBC.



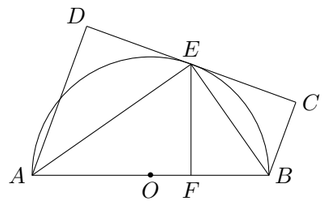
19. 现有 6 道题, 其中 4 道甲类题, 2 道乙类题, 张同学从中任取 2 道题解答. 试求:
(1) 所取的 2 道题都是甲类题的概率;
(2) 所取的 2 道题不是同一类题的概率.

20. 如图, 抛物线 $C_1: x^2=4y$, $C_2: x^2=-2py$ $(p>0)$. 点 $M(x_0,y_0)$ 在抛物线 C_2 上, 过 M 作 C_1 的切线, 切点为 A, B (M 为原点 O 时, A, B 重合于 O). 当 $x_0=1-\sqrt{2}$ 时, 切线 MA 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$.
(1) 求 p 的值;
(2) 当 M 在 C_2 上运动时, 求线段 AB 中点 N 的轨迹方程 (A, B 重合于 O 时, 中点为 O).



21. (1) 证明: 当 $x\in[0,1]$ 时, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\leqslant\sin x\leqslant x$;
(2) 若不等式 $ax+x^2+\dfrac{x^3}{2}+2(x+2)\cos x\leqslant 4$ 对 $x\in[0,1]$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. 如图, AB 为 $\odot O$ 直径, 直线 CD 与 $\odot O$ 相切于 E, AD 垂直 CD 于 D, BC 垂直 CD 于 C, EF 垂直 AB 于 F, 连接 AE, BE. 证明:
(1) $\angle FEB=\angle CEB$;
(2) $EF^2=AD\cdot BC$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 圆 C_1, 直线 C_2 的极坐标方程分别为 $\rho=4\sin\theta$, $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.
(1) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标;
(2) 设 P 为 C_1 的圆心, Q 为 C_1 与 C_2 交点连线的中点, 已知直线 PQ 的参数方程为 $\begin{cases}x=t^3+a\\ y=\dfrac{b}{2}t^3+1\end{cases}$ ($t\in\mathbf{R}$ 为参数), 求 a, b 的值.

24. 已知函数 $f(x)=|x-a|$, 其中 $a>1$.
(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 4-|x-4|$ 的解集;
(2) 已知关于 x 的不等式 $|f(2x+a)-2f(x)|\leqslant 2$ 的解集为 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$, 求 a 的值.

2013 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x>0\}$, $B=\{x\mid -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$, 则 （ ）

(A) $A\cap B=\varnothing$ (B) $A\cup B=\mathbf{R}$ (C) $B\subseteq A$ (D) $A\subseteq B$

2. 若复数 z 满足 $(3-4\mathrm{i})z=|4+3\mathrm{i}|$, 则 z 的虚部为 （ ）

(A) -4 (B) $-\dfrac{4}{5}$ (C) 4 (D) $\dfrac{4}{5}$

3. 为了解某地区的中小学生视力情况, 拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查, 事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异, 而男女生视力情况差异不大, 在下面的抽样方法中, 最合理的抽样方法是 （ ）

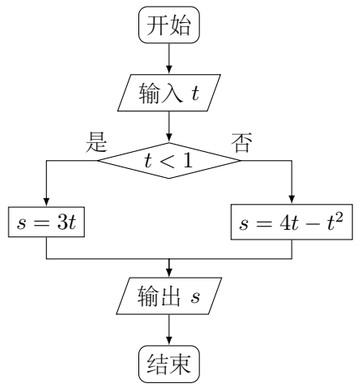
(A) 简单随机抽样 (B) 按性别分层抽样

(C) 按学段分层抽样 (D) 系统抽样

4. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 （ ）

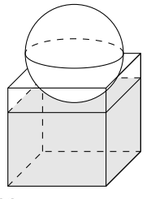
(A) $y=\pm\dfrac{1}{4}x$ (B) $y=\pm\dfrac{1}{3}x$ (C) $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ (D) $y=\pm x$

5. 执行下面的程序框图, 若输入的 $t\in[-1,3]$, 则输出的 s 属于 （ ）



(A) $[-3,4]$ (B) $[-5,2]$ (C) $[-4,3]$ (D) $[-2,5]$

6. 如图, 有一个水平放置的透明无盖的正方体容器, 容器高 8 cm, 将一个球放在容器口, 再向容器内注水, 当球面恰好接触水面时测得水深为 6 cm, 如果不计容器的厚度, 则球的体积为 （ ）

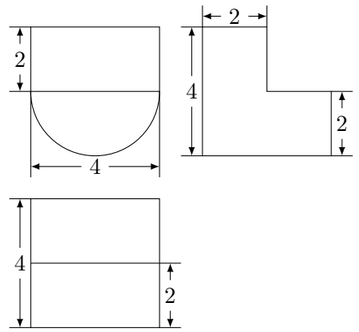


(A) $\dfrac{500\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$ (B) $\dfrac{866\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$ (C) $\dfrac{1372\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$ (D) $\dfrac{2048\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$

7. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $S_{m-1}=-2$, $S_m=0$, $S_{m+1}=3$, 则 $m=$ （ ）

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

8. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何的体积为 （ ）



(A) $16+8\pi$ (B) $8+8\pi$ (C) $16+16\pi$ (D) $8+16\pi$

9. 设 m 为正整数, $(x+y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a, $(x+y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b, 若 $13a=7b$, 则 $m=$ （ ）

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

10. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$, 过点 F 的直线交 E 于 A, B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$, 则 E 的方程为( )

(A) $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{18}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$, 若 $|f(x)|\geqslant ax$, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,0]$ (B) $(-\infty,1]$ (C) $[-2,1]$ (D) $[-2,0]$

12. 设 $\triangle A_nB_nC_n$ 的三边长分别为 a_n, b_n, c_n, $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 S_n, $n=1,2,3,\cdots$, 若 $b_1>c_1$, $b_1+c_1=2a_1$, $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}$, $c_{n+1}=\dfrac{b_n+a_n}{2}$, 则 （ ）

(A) $\{S_n\}$ 为递减数列

(B) $\{S_n\}$ 为递增数列

(C) $\{S_{2n-1}\}$ 为递增数列, $\{S_{2n}\}$ 为递减数列

(D) $\{S_{2n-1}\}$ 为递减数列, $\{S_{2n}\}$ 为递增数列

二、填空题

13. 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$, 若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, 则 $t=$_____.

14. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=$_____.

15. 设当 $x=\theta$ 时, 函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta=$_____.

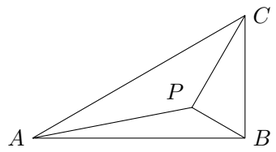
16. 若函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称, 则 $f(x)$ 的最大值是_____.

三、解答题

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=\sqrt{3}$, $BC=1$, P 为 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle BPC=90^\circ$.

(1) 若 $PB=\dfrac{1}{2}$, 求 PA;

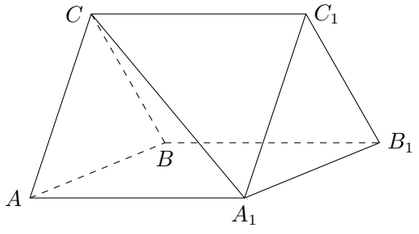
(2) 若 $\angle APB=150^\circ$, 求 $\tan\angle PBA$.



18. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB$, $AB=AA_1$, $\angle BAA_1=60^\circ$.

(1) 证明: $AB\perp A_1C$;

(2) 若平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B, $AB=CB$, 求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值.



19. 一批产品需要进行质量检验, 检验方案是: 先从这批产品中任取 4 件作检验, 这 4 件产品中优质品的件数记为 n. 如果 $n=3$, 再从这批产品中任取 4 件作检验, 若都为优质品, 则这批产品通过检验; 如果 $n=4$, 再从这批产品中任取 1 件作检验, 若为优质品, 则这批产品通过检验; 其他情况下, 这批产品都不能通过检验. 假设这批产品的优质品率为 50%, 即取出的产品是优质品的概率都为 $\dfrac{1}{2}$, 且各件产品是否为优质品相互独立.

(1) 求这批产品通过检验的概率;

(2) 已知每件产品检验费用为 100 元, 凡抽取的每件产品都需要检验, 对这批产品作质量检验所需的费用记为 X (单位: 元), 求 X 的分布列及数学期望.

20. 已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$, 圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$, 动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切, 圆心 P 的轨迹为曲线 C.

(1) 求 C 的方程;

(2) l 是与圆 P, 圆 M 都相切的一条直线, l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 当圆 P 的半径最长时, 求 $|AB|$.

21. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=\mathrm{e}^x(cx+d)$, 若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 $P(0,2)$, 且在点 P 处有相同的切线 $y=4x+2$.

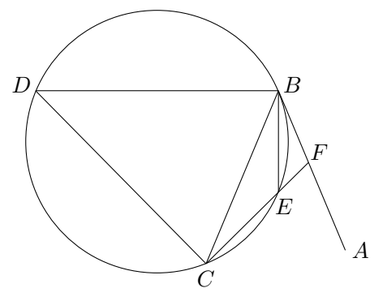
(1) 求 a, b, c, d 的值;

(2) 若 $x\geqslant -2$ 时, $f(x)\leqslant kg(x)$, 求 k 的取值范围.

22. 如图, 直线 AB 为圆的切线, 切点为 B, 点 C 在圆上, $\angle ABC$ 的角平分线 BE 交圆于点 E, DB 垂直 BE 交圆于 D.

(1) 证明: $DB=DC$;

(2) 设圆的半径为 1, $BC=\sqrt{3}$, 延长 CE 交 AB 于点 F, 求 $\triangle BCF$ 外接圆的半径.



23. 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4+5\cos t\\ y=5+5\sin t\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.

(1) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程;

(2) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<2\pi$).

24. 已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$, $g(x)=x+3$.

(1) 当 $a=-2$ 时, 求不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集;

(2) 设 $a>-1$, 且当 $x\in\left[-\dfrac{a}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$, 求 a 的取值范围.

2013 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x\mid x=n^2, n\in A\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{1,4\}$ (B) $\{2,3\}$ (C) $\{9,16\}$ (D) $\{1,2\}$

2. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=$ （ ）

(A) $-1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (B) $-1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (C) $1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (D) $1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 从 1, 2, 3, 4 中任取 2 个不同的数, 则取出的 2 个数之差的绝对值为 2 的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{6}$

4. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 （ ）

(A) $y=\pm\dfrac{1}{4}x$ (B) $y=\pm\dfrac{1}{3}x$ (C) $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ (D) $y=\pm x$

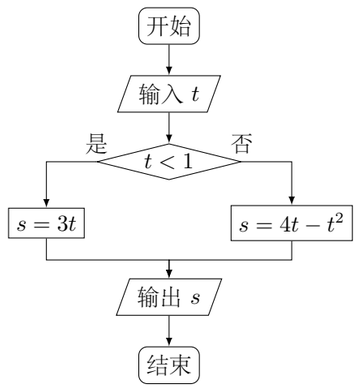
5. 已知命题 p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $2^x<3^x$; 命题 q: $\exists x\in\mathbf{R}$, $x^3=1-x^2$, 则下列命题中为真命题的是 （ ）

(A) $p\wedge q$ (B) $\neg p\wedge q$ (C) $p\wedge\neg q$ (D) $\neg p\wedge\neg q$

6. 设首项为 1, 公比为 $\dfrac{2}{3}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 （ ）

(A) $S_n=2a_n-1$ (B) $S_n=3a_n-2$ (C) $S_n=4-3a_n$ (D) $S_n=3-2a_n$

7. 执行下面的程序框图, 若输入的 $t\in[-1,3]$, 则输出的 s 属于 （ ）

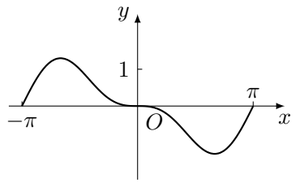


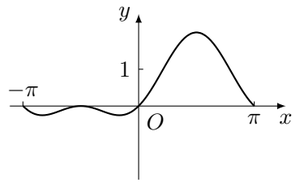
(A) $[-3,4]$ (B) $[-5,2]$ (C) $[-4,3]$ (D) $[-2,5]$

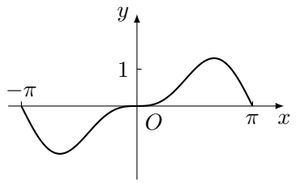
8. O 为坐标原点, F 为抛物线 $C:y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点, P 为 C 上一点, 若 $|PF|=4\sqrt{2}$, 则 $\triangle POF$ 的面积为 （ ）

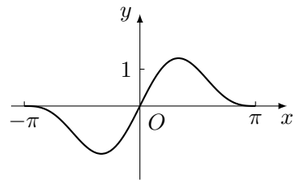
(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4

9. 函数 $f(x)=(1-\cos x)\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为 （ ）

(A)


(B)


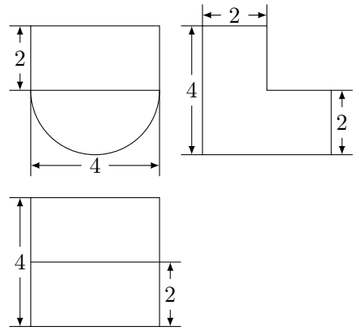
(C)


(D)


10. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $23\cos^2A+\cos 2A=0$, $a=7$, $c=6$, 则 $b=$ （ ）

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 5

11. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何的体积为 （ ）



(A) $16+8\pi$ (B) $8+8\pi$ (C) $16+16\pi$ (D) $8+16\pi$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$, 若 $|f(x)|\geqslant ax$, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,0]$ (B) $(-\infty,1]$ (C) $[-2,1]$ (D) $[-2,0]$

二、填空题

13. 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$, $\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$, 若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, 则 $t=$_____.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3\\ -1\leqslant x-y\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最大值为_____.

15. 已知 H 是球 O 的直径 AB 上一点, $AH:HB=1:2$, $AB\perp$ 平面 α, H 为垂足, 平面 α 截球 O 所得截面的面积为 π, 则球 O 的表面积为_____.

16. 设当 $x=\theta$ 时, 函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta=$_____.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_3=0$, $S_5=-5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 为了比较两种治疗失眠症的药 (分别称为 A 药, B 药) 的疗效, 随机地选取 20 位患者服用 A 药, 20 位患者服用 B 药, 这 40 位患者在服用一段时间后, 记录他们日平均增加的睡眠时间 (单位: h). 试验的观测结果如下:

服用 A 药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间:

0.6 1.2 2.7 1.5 2.8 1.8 2.2 2.3 3.2 3.5
2.5 2.6 1.2 2.7 1.5 2.9 3.0 3.1 2.3 2.4

服用 B 药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间:

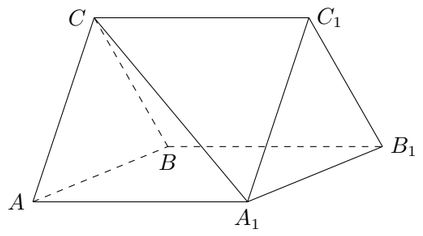
3.2 1.7 1.9 0.8 0.9 2.4 1.2 2.6 1.3 1.4
1.6 0.5 1.8 0.6 2.1 1.1 2.5 1.2 2.7 0.5

(1) 分别计算两组数据的平均数, 从计算结果看, 哪种药的疗效更好?

(2) 根据两组数据完成下面茎叶图, 从茎叶图看, 哪种药的疗效更好?

A 药		B 药
	0.	
	1.	
	2.	
	3.	

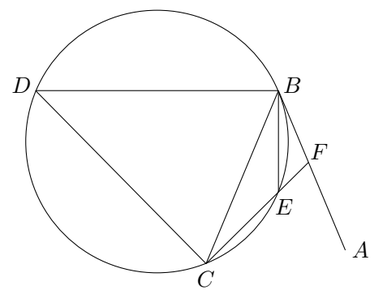
19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB$, $AB=AA_1$, $\angle BAA_1=60^\circ$.
(1) 证明: $AB\perp A_1C$;
(2) 若 $AB=CB=2$, $A_1C=\sqrt{6}$, 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积. .



20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(ax+b)-x^2-4x$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=4x+4$.
(1) 求 a, b 的值;
(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并求 $f(x)$ 的极大值.

21. 已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$, 圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$, 动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切, 圆心 P 的轨迹为曲线 C.
(1) 求 C 的方程;
(2) l 是与圆 P, 圆 M 都相切的一条直线, l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 当圆 P 的半径最长时, 求 $|AB|$.

22. 如图, 直线 AB 为圆的切线, 切点为 B, 点 C 在圆上, $\angle ABC$ 的角平分线 BE 交圆于点 E, DB 垂直 BE 交圆于 D.
(1) 证明: $DB=DC$;
(2) 设圆的半径为 1, $BC=\sqrt{3}$, 延长 CE 交 AB 于点 F, 求 $\triangle BCF$ 外接圆的半径.



23. 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4+5\cos t\\ y=5+5\sin t\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.
(1) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程;
(2) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<2\pi$).

24. 已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$, $g(x)=x+3$.
(1) 当 $a=-2$ 时, 求不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集;
(2) 设 $a>-1$, 且当 $x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$, 求 a 的取值范围.

2013 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\left\{x\,|\,(x-1)^2<4, x\in\mathbf{R}\right\}$, $N=\{-1,0,1,2,3\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $\{0,1,2\}$　(B) $\{-1,0,1,2\}$　(C) $\{-1,0,2,3\}$　(D) $\{0,1,2,3\}$

2. 设复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$, 则 $z=$ （　）

(A) $-1+\mathrm{i}$　(B) $-1-\mathrm{i}$　(C) $1+\mathrm{i}$　(D) $1-\mathrm{i}$

3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_3=a_2+10a_1$, $a_5=9$, 则 $a_1=$（　）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $-\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{9}$　(D) $-\dfrac{1}{9}$

4. 已知 m, n 为异面直线, $m\perp$ 平面 α, $n\perp$ 平面 β. 直线 l 满足 $l\perp m$, $l\perp n$, $l\not\subset\alpha$, $l\not\subset\beta$, 则 （　）

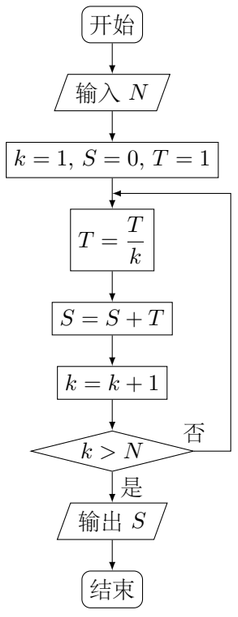
(A) $\alpha\parallel\beta$ 且 $l\parallel\alpha$　(B) $\alpha\perp\beta$ 且 $l\perp\beta$

(C) α 与 β 相交, 且交线垂直于 l　(D) α 与 β 相交, 且交线平行于 l

5. 已知 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 5, 则 $a=$ （　）

(A) -4　(B) -3　(C) -2　(D) -1

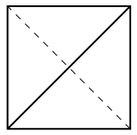
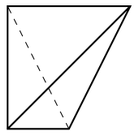
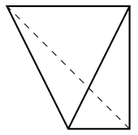
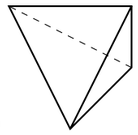
6. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $N=10$, 那么输出的 $S=$ （　）



(A) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{10}$　(B) $1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{10!}$

(C) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{11}$　(D) $1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{11!}$

7. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$, 画该四面体三视图中的正视图时, 以 zOx 平面为投影面, 则得到正视图可以为 （　）

(A)  　(B)  　(C)  　(D) 

8. 设 $a=\log_3 6$, $b=\log_5 10$, $c=\log_7 14$, 则 （　）

(A) $c>b>a$　(B) $b>c>a$　(C) $a>c>b$　(D) $a>b>c$

9. 已知 $a>0$, x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x+y\leqslant 3\\ y\geqslant a(x-3)\end{cases}$, 若 $z=2x+y$ 的最小值为 1, 则 $a=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

10. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 下列结论中错误的是 （　）

(A) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)=0$

(B) 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形

(C) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 单调递减

(D) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0)=0$

11. 设抛物线 $C:y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 点 M 在 C 上, $|MF|=5$. 若以 MF 为直径的圆过点 $(0,2)$, 则 C 的方程为 （　）

(A) $y^2=4x$ 或 $y^2=8x$　(B) $y^2=2x$ 或 $y^2=8x$

(C) $y^2=4x$ 或 $y^2=16x$　(D) $y^2=2x$ 或 $y^2=16x$

12. 已知点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, 直线 $y=ax+b$ $(a>0)$ 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分, 则 b 的取值范围是 （　）

(A) $(0,1)$　(B) $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

(C) $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{3}\right]$　(D) $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

二、填空题

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$_____.

14. 从 n 个正整数 $1,2,\cdots,n$ 中任意取出两个不同的数, 若取出的两数之和等于 5 的概率为 $\dfrac{1}{14}$, 则 $n=$_____.

15. 设 θ 为第二象限角, 若 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$, 则 $\sin\theta+\cos\theta=$_____.

16. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_{10}=0$, $S_{15}=25$, 则 nS_n 的最小值为_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $a=b\cos C+c\sin B$.

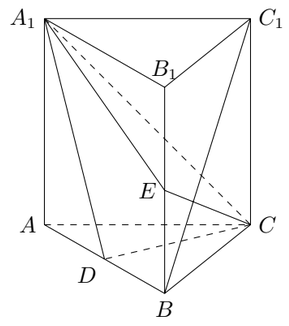
(1) 求 B;

(2) 若 $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

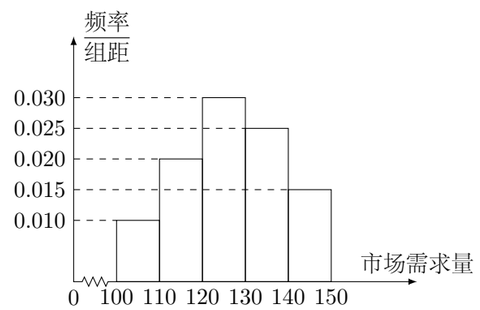
18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点, $AA_1=AC=CB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$.

(1) 证明: $BC_1\parallel$ 平面 A_1CD;

(2) 求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值.



19. 经销商经销某种农产品, 在一个销售季度内, 每售出 1 t 该产品获利润 500 元, 未售出的产品, 每 1 t 亏损 300 元. 根据历史资料, 得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图, 如图所示. 经销商为下一个销售季度购进了 130 t 该农产品. 以 X (单位: t, $100 \leqslant X \leqslant 150$) 表示下一个销售季度内的市场需求量, T (单位: 元) 表示下一个销售季度内经销该农产品的利润.

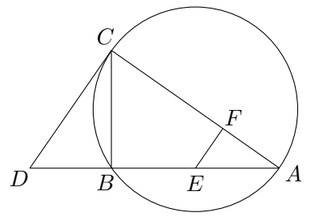


(1) 将 T 表示为 X 的函数;
(2) 根据直方图估计利润 T 不少于 57000 元的概率;
(3) 在直方图的需求量分组中, 以各组的区间中点值代表该组的各个值, 需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率 (例如: 若需求量 $X \in [100, 110)$, 则取 $X = 105$, 且 $X = 105$ 的概率等于需求量落入 $[100, 110)$ 的频率), 求 T 的数学期望.

20. 平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $M: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 右焦点的直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交 M 于 A, B 两点, P 为 AB 的中点, 且 OP 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$.
(1) 求 M 的方程;
(2) C, D 为 M 上两点, 若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

21. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - \ln(x + m)$.
(1) 设 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $m \leqslant 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$.

22. 如图, CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, AB 的延长线交直线 CD 于点 D, E, F 分别为弦 AB 与弦 AC 上的点, 且 $BC \cdot AE = DC \cdot AF$, B, E, F, C 四点共圆.
(1) 证明: CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;
(2) 若 $DB = BE = EA$, 求过 B, E, F, C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值.



23. 已知动点 P, Q 都在曲线 $C: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ (t 为参数) 上, 对应参数分别为 $t = \alpha$ 与 $t = 2\alpha$ $(0 < \alpha < 2\pi)$, M 为 PQ 的中点.
(1) 求 M 的轨迹的参数方程;
(2) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数, 并判断 M 的轨迹是否过坐标原点.

24. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a + b + c = 1$, 证明:
(1) $ab + bc + ca \leqslant \dfrac{1}{3}$;
(2) $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geqslant 1$.

2013 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid -3<x<1\}$, $N=\{-3,-2,-1,0,1\}$, 则 $M\cap N=$（　）

(A) $\{-2,-1,0,1\}$　(B) $\{-3,-2,-1,0\}$

(C) $\{-2,-1,0\}$　(D) $\{-3,-2,-1\}$

2. $\left|\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}\right|=$（　）

(A) $2\sqrt{2}$　(B) 2　(C) $\sqrt{2}$　(D) 1

3. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y-1\geqslant 0\\ x\leqslant 3\end{cases}$, 则 $z=2x-3y$ 的最小值是（　）

(A) -7　(B) -6　(C) -5　(D) -3

4. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $b=2$, $B=\dfrac{\pi}{6}$, $C=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为（　）

(A) $2\sqrt{3}+2$　(B) $\sqrt{3}+1$　(C) $2\sqrt{3}-2$　(D) $\sqrt{3}-1$

5. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, P 是 C 上的点, $PF_2\perp F_1F_2$, $\angle PF_1F_2=30^\circ$, 则 C 的离心率为（　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6. 已知 $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3}$, 则 $\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$（　）

(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

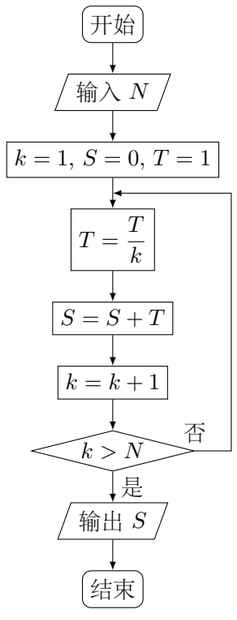
7. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $N=4$, 那么输出的 $S=$（　）

(A) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$

(B) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\times 2}+\dfrac{1}{4\times 3\times 2}$

(C) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$

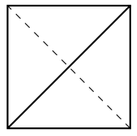
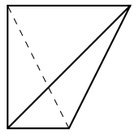
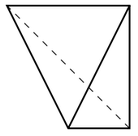
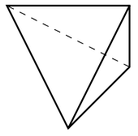
(D) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\times 2}+\dfrac{1}{4\times 3\times 2}+\dfrac{1}{5\times 4\times 3\times 2}$



8. 设 $a=\log_3 2$, $b=\log_5 2$, $c=\log_2 3$, 则（　）

(A) $a>c>b$　(B) $b>c>a$　(C) $c>b>a$　(D) $c>a>b$

9. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$, 画该四面体三视图中的正视图时, 以 zOx 平面为投影面, 则得到正视图可以为（　）

(A)  　(B)  　(C)  　(D) 

10. 设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F, 直线 l 过 F 且与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AF|=3|BF|$, 则 l 的方程为（　）

(A) $y=x-1$ 或 $y=-x+1$

(B) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

(C) $y=\sqrt{3}(x-1)$ 或 $y=-\sqrt{3}(x-1)$

(D) $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

11. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 下列结论中错误的是（　）

(A) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)=0$

(B) 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形

(C) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 单调递减

(D) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0)=0$

12. 若存在正数 x 使 $2^x(x-a)<1$ 成立, 则 a 的取值范围是（　）

(A) $(-\infty,+\infty)$　(B) $(-2,+\infty)$　(C) $(0,+\infty)$　(D) $(-1,+\infty)$

二、填空题

13. 从 1, 2, 3, 4, 5 中任意取出两个不同的数, 其和为 5 的概率是_____.

14. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$_____.

15. 已知正四棱锥 $O-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, 底面边长为 $\sqrt{3}$, 则以 O 为球心, OA 为半径的球的表面积为_____.

16. 函数 $y=\cos(2x+\varphi)\ (-\pi\leqslant\varphi<\pi)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位后, 与函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象重合, 则 $\varphi=$_____.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, $a_1=25$, 且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列.

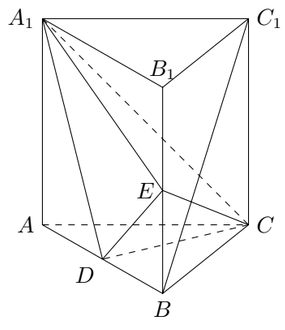
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}$.

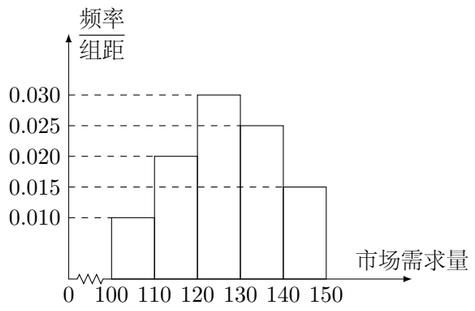
18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点.

(1) 证明: $BC_1\parallel$ 平面 A_1CD;

(2) 设 $AA_1=AC=CB=2$, $AB=2\sqrt{2}$, 求三棱锥 $C-A_1DE$ 的体积.



19. 经销商经销某种农产品, 在一个销售季度内, 每售出 1 t 该产品获利润 500 元, 未售出的产品, 每 1 t 亏损 300 元. 根据历史资料, 得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图, 如图所示. 经销商为下一个销售季度购进了 130 t 该农产品. 以 X (单位: t, $100 \leqslant X \leqslant 150$) 表示下一个销售季度内的市场需求量, T (单位: 元) 表示下一个销售季度内经销该农产品的利润.

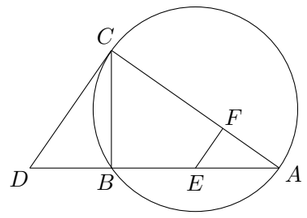


(1) 将 T 表示为 X 的函数;
(2) 根据直方图估计利润 T 不少于 57000 元的概率.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 P 在 x 轴上截得线段长为 $2\sqrt{2}$, 在 y 轴上截得线段长为 $2\sqrt{3}$.
(1) 求圆心 P 的轨迹方程;
(2) 若 P 点到直线 $y=x$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求圆 P 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$.
(1) 求 $f(x)$ 的极小值和极大值;
(2) 当曲线 $y=f(x)$ 的切线 l 的斜率为负数时, 求 l 在 x 轴上截距的取值范围.

22. 如图, CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, AB 的延长线交直线 CD 于点 D, E, F 分别为弦 AB 与弦 AC 上的点, 且 $BC\cdot AE=DC\cdot AF$, B, E, F, C 四点共圆.
(1) 证明: CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;
(2) 若 $DB=BE=EA$, 求过 B, E, F, C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值.



23. 已知动点 P, Q 都在曲线 $C:\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$ (t 为参数) 上, 对应参数分别为 $t=\alpha$ 与 $t=2\alpha$ ($0<\alpha<2\pi$), M 为 PQ 的中点.
(1) 求 M 的轨迹的参数方程;
(2) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数, 并判断 M 的轨迹是否过坐标原点.

24. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a+b+c=1$, 证明:
(1) $ab+bc+ca\leqslant\dfrac{1}{3}$;
(2) $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geqslant 1$.

2013 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 z 满足 $(z-3)(2-\mathrm{i})=5$ (i 为虚数单位), 则 z 的共轭复数 $\overline{z}$ 为(　　)

(A) $2+\mathrm{i}$　　(B) $2-\mathrm{i}$　　(C) $5+\mathrm{i}$　　(D) $5-\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{0,1,2\}$, 则集合 $B=\{x-y\mid x\in A, y\in A\}$ 中元素的个数是　　(　　)

(A) 1　　(B) 3　　(C) 5　　(D) 9

3. 已知函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$, 则 $f(-1)=$(　　)

(A) -2　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

4. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直, 体积为 $\dfrac{9}{4}$, 底面是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 若 P 为底面 $A_1B_1C_1$ 的中心, 则 PA 与平面 ABC 所成角的大小为　　(　　)

(A) $\dfrac{5\pi}{12}$　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

5. 将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位后, 得到一个偶函数的图象, 则 φ 的一个可能取值为　　(　　)

(A) $\dfrac{3\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) 0　　(D) $-\dfrac{\pi}{4}$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, M 为不等式组 $\begin{cases}2x-y-2\geqslant 0\\ x+2y-1\geqslant 0\\ 3x+y-8\leqslant 0\end{cases}$ 所表示的区域上一动点, 则直线 OM 斜率的最小值为　　(　　)

(A) 2　　(B) 1　　(C) $-\dfrac{1}{3}$　　(D) $-\dfrac{1}{2}$

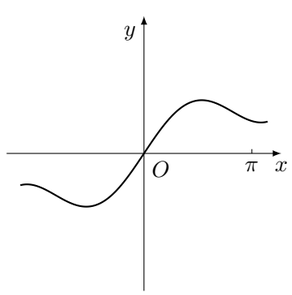
7. 给定两个命题 p、q, 若 $\neg p$ 是 q 的必要而不充分条件, 则 p 是 $\neg q$ 的(　　)

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

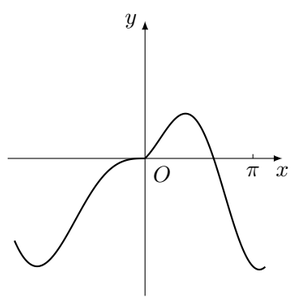
(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

8. 函数 $y=x\cos x+\sin x$ 的图象大致为　　(　　)

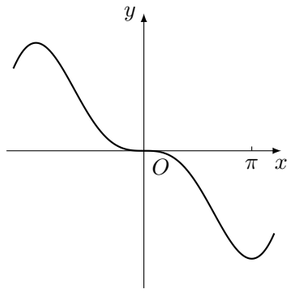
(A)



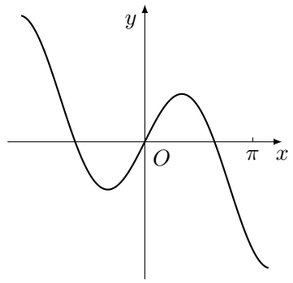
(B)



(C)



(D)



9. 过点 $(3,1)$ 作圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线, 切点分别为 A, B, 则直线 AB 的方程为　　(　　)

(A) $2x+y-3=0$　(B) $2x-y-3=0$　(C) $4x-y-3=0$　(D) $4x+y-3=0$

10. 用 0, 1, $\cdots$, 9 十个数字, 可以组成有重复数字的三位数的个数为　　(　　)

(A) 243　　(B) 252　　(C) 261　　(D) 279

11. 抛物线 $C_1: y=\dfrac{1}{2p}x^2$ $(p>0)$ 的焦点与双曲线 $C_2: \dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点的连线交 C_1 于第一象限的点 M. 若 C_1 在点 M 处的切线平行于 C_2 的一条渐近线, 则 $p=$　　(　　)

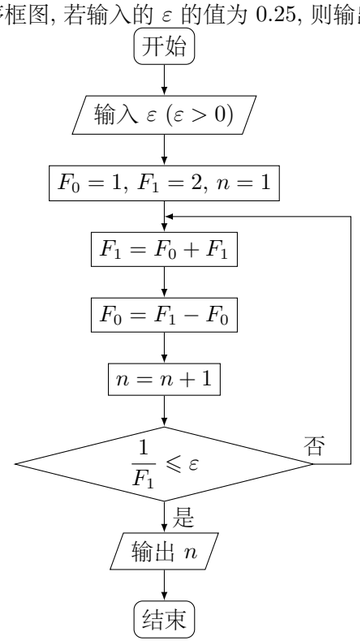
(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$　　(C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 设正实数 x, y, z 满足 $x^2-3xy+4y^2-z=0$, 则当 $\dfrac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}$ 的最大值为　　(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\dfrac{9}{4}$　　(D) 3

二、填空题

13. 执行如下的程序框图, 若输入的 ε 的值为 0.25, 则输出的 n 的值为_____.



14. 在区间 $[-3,3]$ 上随机取一个数 x, 使得 $|x+1|-|x-2|\geqslant 1$ 成立的概率为_____.

15. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 120°, 且 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=2$. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, 且 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$, 则实数 λ 的值为_____.

16. 定义"正对数": $\ln^+x=\begin{cases}0, & 0<x<1\\ \ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$, 现有四个命题:

① 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+(a^b)=b\ln^+a$;

② 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+(ab)=\ln^+a+\ln^+b$;

③ 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+\left(\dfrac{a}{b}\right)\geqslant\ln^+a-\ln^+b$;

④ 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+(a+b)\leqslant\ln^+a+\ln^+b+\ln 2$.

其中真命题有_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且 $a+c=6$, $b=2$, $\cos B=\dfrac{7}{9}$.

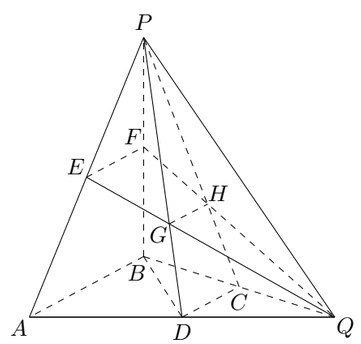
(1) 求 a, c 的值;

(2) 求 $\sin(A-B)$ 的值.

18. 如图所示, 在三棱锥 $P-ABQ$ 中, $PB\perp$ 平面 ABQ, $BA=BP=BQ$, D, C, E, F 分别是 AQ, BQ, AP, BP 的中点, $AQ=2BD$, PD 与 EQ 交于点 G, PC 与 FQ 交于点 H, 连接 GH.

(1) 求证: $AB\parallel GH$;

(2) 求二面角 $D-GH-E$ 的余弦值.



19. 甲、乙两支排球队进行比赛, 约定先胜 3 局者获得比赛的胜利, 比赛随即结束. 除第五局甲队获胜的概率是 $\dfrac{1}{2}$ 外, 其余每局比赛甲队获胜的概率都是 $\dfrac{2}{3}$. 假设每局比赛结果互相独立.
(1) 分别求甲队以 3 : 0, 3 : 1, 3 : 2 胜利的概率;
(2) 若比赛结果为 3 : 0 或 3 : 1, 则胜利方得 3 分, 对方得 0 分; 若比赛结果为 3 : 2, 则胜利方得 2 分、对方得 1 分, 求乙队得分 X 的分布列及数学期望.

20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_4 = 4S_2$, $a_{2n} = 2a_n + 1$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n, 且 $T_n + \dfrac{a_n + 1}{2^n} = \lambda$ (λ 为常数), 令 $c_n = b_{2n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n.

21. 设函数 $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}} + c$ ($\mathrm{e} = 2.71828\cdots$ 是自然对数的底数, $c \in \mathbf{R}$).
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间、最大值;
(2) 讨论关于 x 的方程 $|\ln x| = f(x)$ 根的个数.

22. 椭圆 C : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别是 F_1, F_2, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 过 F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为 1.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 点 P 是椭圆 C 上除长轴端点外的任一点, 连接 PF_1, PF_2. 设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交 C 的长轴于点 $M(m, 0)$, 求 m 的取值范围;
(3) 在 (2) 的条件下, 过点 P 作斜率为 k 的直线 l, 使得 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点. 设直线 PF_1, PF_2 的斜率分别为 k_1, k_2, 若 $k \neq 0$, 试证明 $\dfrac{1}{kk_1} + \dfrac{1}{kk_2}$ 为定值, 并求出这个定值.

2013 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 复数 $z=\dfrac{(2-\mathrm{i})^2}{\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位), 则 $|z|=$ （ ）

(A) 25　　(B) $\sqrt{41}$　　(C) 5　　(D) $\sqrt{5}$

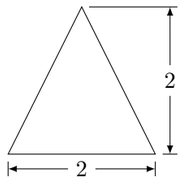
2. 已知集合 A, B 均为全集 $U=\{1,2,3,4\}$ 的子集, 且 $\complement_U(A\cup B)=\{4\}$, $B=\{1,2\}$, 则 $A\cap\complement_U B=$ （ ）

(A) $\{3\}$　　(B) $\{4\}$　　(C) $\{3,4\}$　　(D) $\varnothing$

3. 已知函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$, 则 $f(-1)=$（ ）

(A) 2　　(B) 1　　(C) 0　　(D) -2

4. 一个四棱锥的侧棱长都相等, 底面是正方形, 其正 (主) 视图如图所示, 则该四棱锥侧面积和体积分别是 （ ）



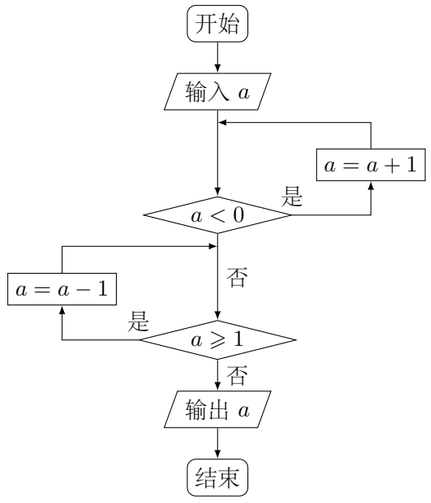
(A) $4\sqrt{5}$, 8　　(B) $4\sqrt{5}$, $\dfrac{8}{3}$　　(C) $4\left(\sqrt{5}+1\right)$, $\dfrac{8}{3}$　　(D) 8, 8

5. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 的定义域为 （ ）

(A) $(-3,0]$　　(B) $(-3,1]$

(C) $(-\infty,-3)\cup(-3,0]$　　(D) $(-\infty,-3)\cup(-3,1]$

6. 执行两次如图所示的程序框图, 若第一次输入的 a 的值为 -1.2, 第二次输入的 a 的值为 1.2, 则第一次, 第二次输出的 a 的值分别为 （ ）



(A) 0.2, 0.2　　(B) 0.2, 0.8　　(C) 0.8, 0.2　　(D) 0.8, 0.8

7. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c, 若 $B=2A$, $a=1$, $b=\sqrt{3}$, 则 $c=$ （ ）

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) 2　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 1

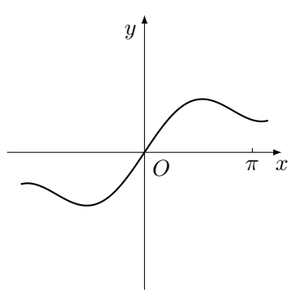
8. 给定两个命题 p、q, 若 $\neg p$ 是 q 的必要而不充分条件, 则 p 是 $\neg q$ 的（ ）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

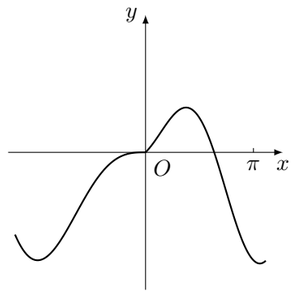
(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

9. 函数 $y=x\cos x+\sin x$ 的图象大致为 （ ）

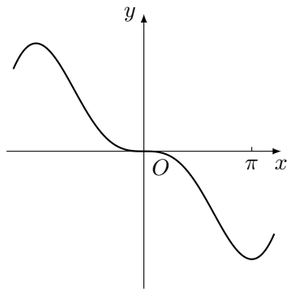
(A)



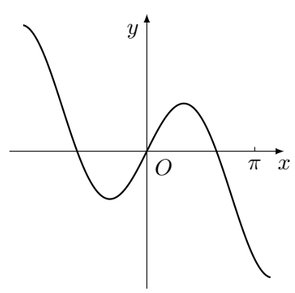
(B)



(C)



(D)



10. 将某选手的 9 个得分去掉 1 个最高分, 去掉 1 个最低分, 7 个剩余分数的平均分为 91, 现场作的 9 个分数的茎叶图后来有 1 个数据模糊, 无法辨认, 在图中以 x 表示:

8	7　7
9	4　0　1　0　x　9　1

则 7 个剩余分数的方差为 （ ）

(A) $\dfrac{116}{9}$　　(B) $\dfrac{36}{7}$　　(C) 36　　(D) $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$

11. 抛物线 $C_1: y=\dfrac{1}{2p}x^2$ $(p>0)$ 的焦点与双曲线 $C_2: \dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点的连线交 C_1 于第一象限的点 M. 若 C_1 在点 M 处的切线平行于 C_2 的一条渐近线, 则 $p=$ （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$　　(C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 设正实数 x, y, z 满足 $x^2-3xy+4y^2-z=0$, 则当 $\dfrac{z}{xy}$ 取得最小值时, $x+2y-z$ 的最大值为 （ ）

(A) 0　　(B) $\dfrac{9}{8}$　　(C) 2　　(D) $\dfrac{9}{4}$

二、填空题

13. 过点 $(3,1)$ 作圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 的弦, 其中最短弦的长为_____.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, M 为不等式组 $\begin{cases}2x+3y-6\leqslant 0\\ x+y-2\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 所表示的区域上一动点, 则 $|OM|$ 的最小值是_____.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $\overrightarrow{OA}=(-1,t)$, $\overrightarrow{OB}=(2,2)$, 若 $\angle ABO=90^\circ$, 则实数 t 的值为_____.

16. 定义“正对数”: $\ln^+x=\begin{cases}0, & 0<x<1\\ \ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$, 现有四个命题:

① 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+(a^b)=b\ln^+a$;

② 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+(ab)=\ln^+a+\ln^+b$;

③ 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+\left(\dfrac{a}{b}\right)\geqslant\ln^+a-\ln^+b$;

④ 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+(a+b)\leqslant\ln^+a+\ln^+b+\ln 2$.

其中真命题有_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 某小组共有 A, B, C, D, E 五位同学, 他们的身高 (单位: 米) 及体重指标 (单位: 千克/米^2) 如下表所示:

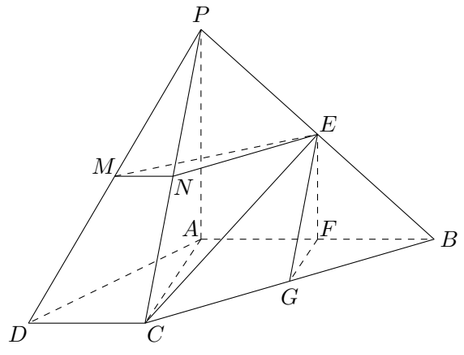
	A	B	C	D	E
身高	1.69	1.73	1.75	1.79	1.82
体重指标	19.2	25.1	18.5	23.3	20.9

(1) 从该小组身高低于 1.80 的同学中任选 2 人, 求选到的 2 人身高都在 1.78 以下的概率;

(2) 从该小组同学中任选 2 人, 求选到的 2 人的身高都在 1.70 以上且体重指标都在 $[18.5,23.9)$ 中的概率.

18. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin^2\omega x-\sin\omega x\cos\omega x$ $(\omega>0)$, 且 $y=f(x)$ 图象的一个对称中心到最近的对称轴的距离为 $\dfrac{\pi}{4}$.
(1) 求 ω 的值;
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB\perp AC$, $AB\perp PA$, $AB/\!/CD$, $AB=2CD$, E, F, G, M, N 分别为 PB, AB, BC, PD, PC 的中点.
(1) 求证: $CE/\!/$ 平面 PAD;
(2) 求证: 平面 $EFG\perp$ 平面 EMN.



20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_4=4S_2$, $a_{2n}=2a_n+1$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{b_n}{a_n}=1-\dfrac{1}{2^n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

21. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx-\ln x$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$.
(1) 设 $a\geqslant 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 设 $a>0$, 且对任意 $x>0$, $f(x)\geqslant f(1)$, 试比较 $\ln a$ 与 $-2b$ 的大小.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 C 的中心在原点 O, 焦点在 x 轴上, 短轴长为 2, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) A, B 为椭圆 C 上满足 $\triangle AOB$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ 的任意两点, E 为线段 AB 的中点, 射线 OE 交椭圆 C 于点 P. 设 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OE}$, 求实数 t 的值.

2013 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

理科数学

一、选择题

1. 设全集为 $\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 M, 则 $\complement_{\mathbf{R}}M$ 为 （ ）

(A) $[-1,1]$　　(B) $(-1,1)$

(C) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2. 根据下列算法语句, 当输入 x 为 60 时, 输出 y 的值为 （ ）

```
输入 x;
If x ⩽ 50 Then
    y = 0.5 * x
Else
    y = 25 + 0.6 * (x − 50)
End If
输出 y.
```

(A) 25　　(B) 30　　(C) 31　　(D) 61

3. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为向量, 则"$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$"是"$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$"的 （ ）

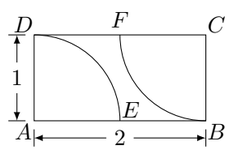
(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

4. 某单位有 840 名职工, 现采用系统抽样方法, 抽取 42 人做问卷调查, 将 840 人按 1, 2, $\cdots$, 840 随机编号, 则抽取的 42 人中, 编号落入区间 $[481,720]$ 的人数为 （ ）

(A) 11　　(B) 12　　(C) 13　　(D) 14

5. 如图, 在矩形区域 $ABCD$ 的 A, C 两点处各有一个通信基站, 假设其信号覆盖范围分别是扇形区域 ADE 和扇形区域 CBF (该矩形区域内无其他信号来源, 基站工作正常). 若在该矩形区域内随机地选一地点, 则该地点无信号的概率是 （ ）



(A) $1-\dfrac{\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}-1$　　(C) $2-\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

6. 设 z_1, z_2 是复数, 则下列命题中的假命题是 （ ）

(A) 若 $|z_1-z_2|=0$, 则 $\overline{z_1}=\overline{z_2}$　　(B) 若 $z_1=\overline{z_2}$, 则 $\overline{z_1}=z_2$

(C) 若 $|z_1|=|z_2|$, 则 $z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}$　　(D) 若 $|z_1|=|z_2|$, 则 ${z_1}^2={z_2}^2$

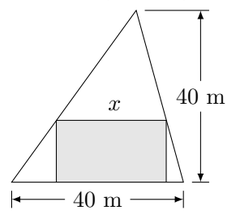
7. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 若 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 （ ）

(A) 锐角三角形　　(B) 直角三角形　　(C) 钝角三角形　　(D) 不确定

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6, & x<0\\ -\sqrt{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$, 则当 $x>0$ 时, $f[f(x)]$ 表达式的展开式中常数项为 （ ）

(A) -20　　(B) 20　　(C) -15　　(D) 15

9. 在如图所示的锐角三角形空地中, 欲建一个面积不小于 300 m^2 的内接矩形花园 (阴影部分), 则其边长 x (单位 m) 的取值范围是 （ ）



(A) $[15,20]$　　(B) $[12,25]$　　(C) $[10,30]$　　(D) $[20,30]$

10. 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 则对任意实数 x, y, 有 （ ）

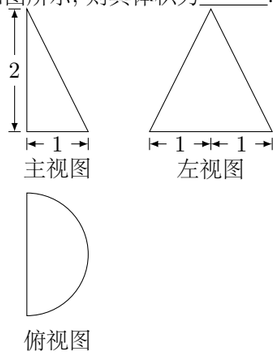
(A) $[-x]=-[x]$　　(B) $[2x]=2[x]$

(C) $[x+y]\leqslant[x]+[y]$　　(D) $[x-y]\leqslant[x]-[y]$

二、填空题

11. 双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 $\dfrac{5}{4}$, 则 m 等于_____.

12. 某几何体的三视图如图所示, 则其体积为_____.



13. 若点 (x,y) 位于曲线 $y=|x-1|$ 与 $y=2$ 所围成的封闭区域, 则 $2x-y$ 的最小值为_____.

14. 观察下列等式:

$1^2=1$

$1^2-2^2=-3$

$1^2-2^2+3^2=6$

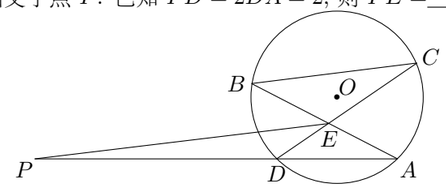
$1^2-2^2+3^2-4^2=-10$

$\cdots\cdots$

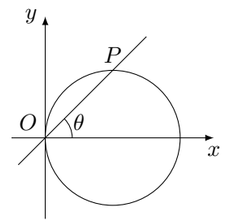
照此规律, 第 n 个等式可为_____.

15. 已知 a, b, m, n 均为正数, 且 $a+b=1$, $mn=2$, 则 $(am+bn)(bm+an)$ 的最小值为_____.

16. 如图, 弦 AB 与 CD 相交于 $\odot O$ 内一点 E, 过 E 作 BC 的平行线与 AD 的延长线相交于点 P. 已知 $PD=2DA=2$, 则 $PE=$_____.



17. 如图, 以过原点的直线的倾斜角 θ 为参数, 则圆 $x^2+y^2-x=0$ 的参数方程为_____.



三、解答题

18. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(\cos x,-\dfrac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{b}=\left(\sqrt{3}\sin x,\cos 2x\right)$, $x\in\mathbf{R}$, 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

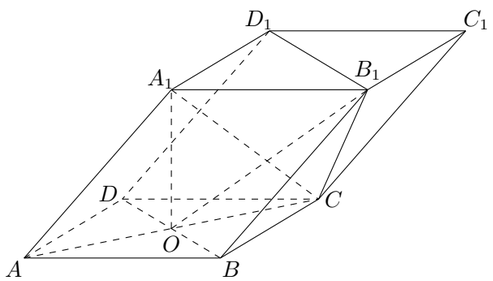
(2) 求 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

19. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

(1) 推导 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式;

(2) 设 $q\neq 1$, 证明数列 $\{a_n+1\}$ 不是等比数列.

20. 如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, O 为底面中心, $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=AA_1=\sqrt{2}$.
(1) 证明: $A_1C\perp$ 平面 BB_1D_1D;
(2) 求平面 OCB_1 与平面 BB_1D_1D 的夹角 θ 的大小.



21. 在一场娱乐晚会上, 有 5 位民间歌手 (1 至 5 号) 登台演唱, 由现场数百名观众投票选出最受欢迎歌手. 各位观众须彼此独立地在选票上选 3 名歌手, 其中观众甲是 1 号歌手的歌迷, 他必选 1 号, 不选 2 号, 另在 3 至 5 号中随机选 2 名. 观众乙和丙对 5 位歌手的演唱没有偏爱, 因此在 1 至 5 号中随机选 3 名歌手.
(1) 求观众甲选中 3 号歌手且观众乙未选中 3 号歌手的概率;
(2) X 表示 3 号歌手得到观众甲、乙、丙的票数之和, 求 X 的分布列和数学期望.

22. 已知动圆过定点 $A(4,0)$, 且在 y 轴上截得的弦 MN 的长为 8.
(1) 求动圆圆心的轨迹 C 的方程;
(2) 已知点 $B(-1,0)$, 设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P, Q, 若 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线, 证明直线 l 过定点.

23. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 若直线 $y=kx+1$ 与 $f(x)$ 的反函数的图象相切, 求实数 k 的值;
(2) 设 $x>0$, 讨论曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=mx^2$ $(m>0)$ 公共点的个数;
(3) 设 $a<b$, 比较 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小, 并说明理由.

2013 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

文科数学

一、选择题

1. 设全集为 $\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\sqrt{1-x}$ 的定义域为 M, 则 $\complement_{\mathbf{R}}M$ 为 （ ）

(A) $(-\infty,1)$　(B) $(1,+\infty)$　(C) $(-\infty,1]$　(D) $[1,+\infty)$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$, $\boldsymbol{b}=(m,2)$, 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则实数 m 等于 （ ）

(A) $-\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{2}$　(C) $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$　(D) 0

3. 设 a, b, c 均为不等于 1 的正实数, 则下列等式中恒成立的是 （ ）

(A) $\log_a b\cdot\log_c b=\log_c a$　(B) $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$

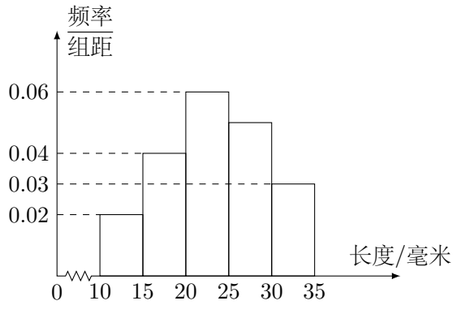
(C) $\log_a(bc)=\log_a b\cdot\log_a c$　(D) $\log_a(b+c)=\log_a b+\log_a c$

4. 根据下列算法语句, 当输入 x 为 60 时, 输出 y 的值为 （ ）

```
输入 x;
If x ⩽ 50 Then
    y = 0.5 * x
Else
    y = 25 + 0.6 * (x − 50)
End If
输出 y.
```

(A) 25　(B) 30　(C) 31　(D) 61

5. 对一批产品的长度 (单位: 毫米) 进行抽样检测, 下图为检测结果的频率分布直方图, 根据标准, 产品长度在区间 $[20,25)$ 上为一等品, 在区间 $[15,20)$ 和 $[25,30)$ 上为二等品, 在区间 $[10,15)$ 和 $[30,35]$ 上为三等品. 用频率估计概率, 现从该批产品中随机抽取 1 件, 则其为二等品的概率是 （ ）



(A) 0.09　(B) 0.20　(C) 0.25　(D) 0.45

6. 设 z 是复数, 则下列命题中的假命题是 （ ）

(A) 若 $z^2\geqslant 0$, 则 z 是实数　(B) 若 $z^2<0$, 则 z 是虚数

(C) 若 z 是虚数, 则 $z^2\geqslant 0$　(D) 若 z 是纯虚数, 则 $z^2<0$

7. 若点 (x,y) 位于曲线 $y=|x|$ 与 $y=2$ 所围成的封闭区域, 则 $2x-y$ 的最小值是 （ ）

(A) -6　(B) -2　(C) 0　(D) 2

8. 已知点 $M(a,b)$ 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 外, 则直线 $ax+by=1$ 与圆 O 的位置关系是 （ ）

(A) 相切　(B) 相交　(C) 相离　(D) 不确定

9. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 若 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 （ ）

(A) 直角三角形　(B) 锐角三角形　(C) 钝角三角形　(D) 不确定

10. 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 则对任意实数 x, 有 （ ）

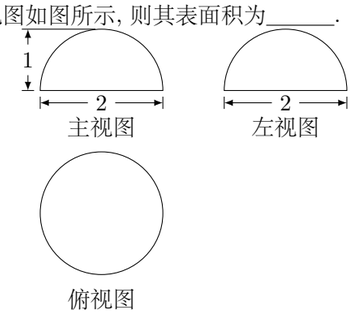
(A) $[-x]=-[x]$　(B) $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]$

(C) $[2x]=2[x]$　(D) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$

二、填空题

11. 双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的离心率为_____.

12. 某几何体的三视图如图所示, 则其表面积为_____.



13. 观察下列等式:

$(1+1)=2\times 1$

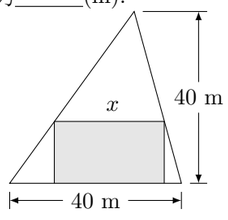
$(2+1)(2+2)=2^2\times 1\times 3$

$(3+1)(3+2)(3+3)=2^3\times 1\times 3\times 5$

……

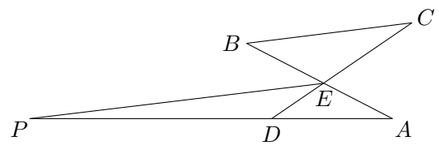
照此规律, 第 n 个等式可为_____.

14. 在如图所示的锐角三角形空地中, 欲建一个面积最大的内接矩形花园 (阴影部分), 则其边长 x 为_____(m).



15. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, $|a-b|>2$, 则关于实数 x 的不等式 $|x-a|+|x-b|>2$ 的解集是_____.

16. 如图, AB 与 CD 相交于点 E, 过 E 作 BC 的平行线与 AD 的延长线交于点 P, 已知 $\angle A=\angle C$, $PD=2DA=2$, 则 $PE=$_____.



17. 圆锥曲线 $\begin{cases}x=t^2\\ y=2t\end{cases}$ (t 为参数) 的焦点坐标是_____.

三、解答题

18. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(\cos x,-\frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{b}=\left(\sqrt{3}\sin x,\cos 2x\right)$, $x\in\mathbf{R}$, 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

19. 设 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

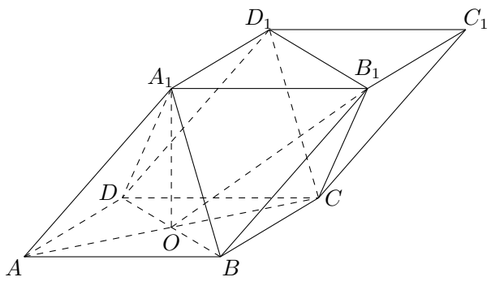
(1) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 推导 S_n 的计算公式;

(2) 若 $a_1=1$, $q\neq 0$, 且对所有正整数 n, 有 $S_n=\frac{1-q^n}{1-q}$, 判断 $\{a_n\}$ 是否为等比数列, 并证明你的结论.

20. 如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, O 为底面中心, $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=AA_1=\sqrt{2}$.

(1) 证明: 平面 $A_1BD\parallel$ 平面 CD_1B_1;

(2) 求三棱柱 $ABD-A_1B_1D_1$ 的体积.



21. 有 7 位歌手 (1 至 7 号) 参加一场歌唱比赛, 由 500 名大众评委现场投票决定歌手名次. 根据年龄将大众评委分为五组, 各组的人数如下:

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50

(1) 为了调查评委对 7 位歌手的支持情况, 现用分层抽样方法从各组中抽取若干评委, 其中从 B 组抽取了 6 人, 请将其余各组抽取的人数填入下表.

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50
抽取人数		6			

(2) 在 (1) 中, 若 A, B 两组被抽到的评委中各有 2 人支持 1 号歌手, 现从这两组被抽到的评委中分别任选 1 人, 求这 2 人都支持 1 号歌手的概率.

22. 已知动点 $M(x,y)$ 到直线 $l:x=4$ 的距离是它到点 $N(1,0)$ 的距离的 2 倍.

(1) 求动点 M 的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 $P(0,3)$ 的直线 m 与轨迹 C 交于 A, B 两点, 若 A 是 PB 的中点, 求直线 m 的斜率.

23. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的反函数的图象上点 $(1,0)$ 处的切线方程;

(2) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2+x+1$ 有唯一公共点;

(3) 设 $a<b$, 比较 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小, 并说明理由.

2013 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+20}{3n+13}=$_____.

2. 设 $m\in\mathbf{R}$, $m^2+m-2+(m^2-1)\mathrm{i}$ 是纯虚数, 其中 i 是虚数单位, 则 $m=$_____.

3. 若 $\begin{vmatrix}x^2 & y^2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & x\\ y & -y\end{vmatrix}$, 则 $x+y=$_____.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若 $3a^2+2ab+3b^2-3c^2=0$, 则角 C 的大小是_____. (结果用反三角函数值表示)

5. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若 $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为 -10, 则 $a=$_____.

6. 方程 $\dfrac{3}{3^x-1}+\dfrac{1}{3}=3^{x-1}$ 的实数解为_____.

7. 在极坐标系中, 曲线 $\rho=\cos\theta+1$ 与 $\rho\cos\theta=1$ 的公共点到极点的距离为_____.

8. 盒子中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的九个球, 从中任意取出两个, 则这两个球的编号之积为偶数的概率是_____. (结果用最简分数表示)

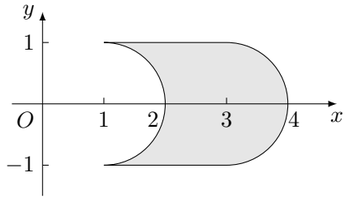
9. 设 AB 是椭圆 Γ 的长轴, 点 C 在 Γ 上, 且 $\angle CBA=\dfrac{\pi}{4}$, 若 $AB=4$, $BC=\sqrt{2}$, 则 Γ 的两个焦点之间的距离为_____.

10. 设非零常数 d 是等差数列 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{19} 的公差, 随机变量 ξ 等可能地取值 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{19}, 则方差 $D\xi=$_____.

11. 若 $\cos x\cos y+\sin x\sin y=\dfrac{1}{2}$, $\sin 2x+\sin 2y=\dfrac{2}{3}$, 则 $\sin(x+y)=$_____.

12. 设 a 为实常数, $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x<0$ 时, $f(x)=9x+\dfrac{a^2}{x}+7$, 若 $f(x)\geqslant a+1$ 对一切 $x\geqslant 0$ 成立, 则 a 的取值范围为_____.

13. 在 xOy 平面上, 将两个半圆弧 $(x-1)^2+y^2=1$ $(x\geqslant 1)$ 和 $(x-3)^2+y^2=1$ $(x\geqslant 3)$、两条直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 围成的封闭图形记为 D, 如图中阴影部分. 记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω, 过 $(0,y)$ $(|y|\leqslant 1)$ 作 Ω 的水平截面, 所得截面面积为 $4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$, 试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体, 得出 Ω 的体积值为_____.



14. 对区间 I 上有定义的函数 $g(x)$, 记 $g(I)=\{y\,|\,y=g(x), x\in I\}$, 已知定义域为 $[0,3]$ 的函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$, 且 $f^{-1}([0,1))=[1,2)$, $f^{-1}((2,4])=[0,1)$, 若方程 $f(x)-x=0$ 有解 x_0, 则 $x_0=$_____.

二、选择题

15. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\,|\,(x-1)(x-a)\geqslant 0\}$, $B=\{x\,|\,x\geqslant a-1\}$. 若 $A\cup B=\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围为 (　　)

(A) $(-\infty,2)$　　(B) $(-\infty,2]$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $[2,+\infty)$

16. 钱大姐常说“便宜没好货”, 她这句话的意思是: “不便宜”是“好货”的 (　　)

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

17. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=2^n-1$, 若一个 7 行 12 列的矩阵的第 i 行第 j 列的元素 $a_{ij}=a_i\cdot a_j+a_i+a_j$ $(i=1,2,\cdots,7;\ j=1,2,\cdots,12)$ 则该矩阵元素能取到的不同数值的个数为 (　　)

(A) 18　　(B) 28　　(C) 48　　(D) 63

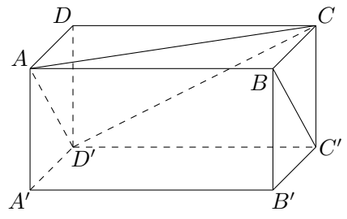
18. 在边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 中, 记以 A 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$, $\vec{a_4}$, $\vec{a_5}$; 以 D 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$, $\vec{d_3}$, $\vec{d_4}$, $\vec{d_5}$. 若 m, M 分别为 $(\vec{a_i}+\vec{a_j}+\vec{a_k})\cdot\left(\vec{d_r}+\vec{d_s}+\vec{d_t}\right)$ 的最小值、最大值, 其中 $\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$, $\{r,s,t\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$, 则 m、M 满足 (　　)

(A) $m=0$, $M>0$　　(B) $m<0$, $M>0$

(C) $m<0$, $M=0$　　(D) $m<0$, $M<0$

三、解答题

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB=2$, $AD=1$, $AA'=1$, 证明直线 BC' 平行于平面 $D'AC$, 并求直线 BC' 到平面 $D'AC$ 的距离.



20. 甲厂以 x 千克/小时的速度运输生产某种产品 (生产条件要求 $1\leqslant x\leqslant 10$), 每一小时可获得利润是 $100\left(5x+1-\dfrac{3}{x}\right)$ 元.

(1) 要使生产该产品 2 小时获得的利润不低于 3000 元, 求 x 的取值范围;

(2) 要使生产 900 千克该产品获得的利润最大, 问: 甲厂应该选取何种生产速度? 并求最大利润.

21. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$, 其中常数 $\omega>0$.

(1) 若 $y=f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 求 ω 的取值范围;

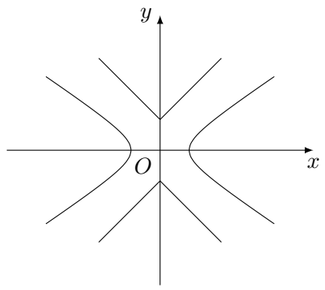
(2) 令 $\omega=2$, 将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象. 区间 $[a,b]$ (a, $b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$) 满足: $y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少含有 30 个零点, 在所有满足上述条件的 $[a,b]$ 中, 求 $b-a$ 的最小值.

22. 如图, 已知双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$, 曲线 $C_2:|y|=|x|+1$. P 是平面内一点, 若存在过点 P 的直线与 C_1、C_2 都有公共点, 则称 P 为"C_1-C_2 型点".

(1) 在正确证明 C_1 的左焦点是"C_1-C_2 型点"时, 要使用一条过该焦点的直线, 试写出一条这样的直线的方程 (不要求验证);

(2) 设直线 $y=kx$ 与 C_2 有公共点, 求证 $|k|>1$, 进而证明原点不是"C_1-C_2 型点";

(3) 求证: 圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ 内的点都不是"C_1-C_2 型点".



23. 给定常数 $c>0$, 定义函数 $f(x)=2|x+c+4|-|x+c|$, 数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $a_1=-c-2$, 求 a_2 及 a_3;

(2) 求证: 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_{n+1}-a_n\geqslant c$;

(3) 是否存在 a_1, 使得 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 成等差数列? 若存在, 求出所有这样的 a_1, 若不存在, 说明理由.

2013 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 不等式 $\dfrac{x}{2x-1}<0$ 的解为_____.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1+a_2+a_3+a_4=30$, 则 $a_2+a_3=$_____.

3. 设 $m\in\mathbf{R}$, $m^2+m-2+(m^2-1)\mathrm{i}$ 是纯虚数, 其中 i 是虚数单位, 则 $m=$_____.

4. 若 $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$, 则 $x+y=$_____.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 所对的边分别是 a、b、c. 若 $a^2+ab+b^2-c^2=0$, 则角 C 的大小是_____.

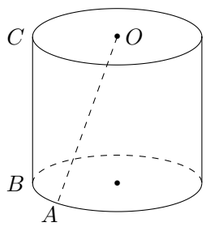
6. 某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的 40%. 在一次考试中, 男、女生平均分数分别为 75、80, 则这次考试该年级学生平均分数为_____.

7. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若 $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为 -10, 则 $a=$_____.

8. 方程 $\dfrac{9}{3^x-1}+1=3^x$ 的实数解为_____.

9. 若 $\cos x\cos y+\sin x\sin y=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos(2x-2y)=$_____.

10. 已知圆柱 Ω 的母线长为 l, 底面半径为 r, O 是上底面圆心, A、B 是下底面圆周上两个不同的点, BC 是母线, 如图. 若直线 OA 与 BC 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$, 则 $\dfrac{l}{r}=$_____.



11. 盒子中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 的七个球, 从中任意取出两个, 则这两个球的编号之积为偶数的概率是_____. (结果用最简分数表示)

12. 设 AB 是椭圆 Γ 的长轴, 点 C 在 Γ 上, 且 $\angle CBA=\dfrac{\pi}{4}$, 若 $AB=4$, $BC=\sqrt{2}$, 则 Γ 的两个焦点之间的距离为_____.

13. 设常数 $a>0$. 若 $9x+\dfrac{a^2}{x}\geqslant a+1$ 对一切正实数 x 成立, 则 a 的取值范围为_____.

14. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1. 记以 A 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 $\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、$\vec{a_3}$; 以 C 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 $\vec{c_1}$、$\vec{c_2}$、$\vec{c_3}$. 若 i, j, k, $l\in\{1,2,3\}$ 且 $i\neq j$, $k\neq l$, 则 $(\vec{a_i}+\vec{a_j})\cdot(\vec{c_k}+\vec{c_l})$ 的最小值是_____.

二、选择题

15. 函数 $f(x)=x^2-1$ $(x\geqslant 1)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(2)$ 的值是 (　)

(A) $\sqrt{3}$　　(B) $-\sqrt{3}$　　(C) $1+\sqrt{2}$　　(D) $1-\sqrt{2}$

16. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\,|\,(x-1)(x-a)\geqslant 0\}$, $B=\{x\,|\,x\geqslant a-1\}$. 若 $A\cup B=\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围为 (　)

(A) $(-\infty,2)$　　(B) $(-\infty,2]$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $[2,+\infty)$

17. 钱大姐常说“便宜没好货”, 她这句话的意思是: “不便宜”是“好货”的 (　)

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

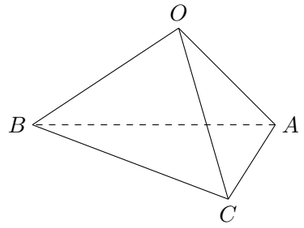
(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

18. 记椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{ny^2}{4n+1}=1$ 围成的区域 (含边界) 为 Ω_n $(n=1,2,\cdots)$, 当点 (x,y) 分别在 Ω_1, Ω_2, $\cdots$ 上时, $x+y$ 的最大值分别是 M_1, M_2, $\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=$ (　)

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) 2　　(D) $2\sqrt{2}$

三、解答题

19. 如图, 正三棱锥 $O-ABC$ 底面边长为 2, 高为 1, 求该三棱锥的体积及表面积.



20. 甲厂以 x 千克/小时的速度运输生产某种产品 (生产条件要求 $1\leqslant x\leqslant 10$), 每一小时可获得利润是 $100\left(5x+1-\dfrac{3}{x}\right)$ 元.

(1) 求证: 生产 a 千克该产品所获得的利润为 $100a\left(5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$ 元;

(2) 要使生产 900 千克该产品获得的利润最大, 问: 甲厂应该选取何种生产速度? 并求最大利润.

21. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$, 其中常数 $\omega>0$.

(1) 令 $\omega=1$, 判断函数 $F(x)=f(x)+f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的奇偶性并说明理由;

(2) 令 $\omega=2$, 将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象. 对任意的 $a\in\mathbf{R}$, 求 $y=g(x)$ 在区间 $[a,a+10\pi]$ 上零点个数的所有可能值.

22. 已知函数 $f(x)=2-|x|$, 无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $a_1=0$, 求 a_2, a_3, a_4;

(2) 若 $a_1>0$, 且 a_1, a_2, a_3 成等比数列, 求 a_1 的值;

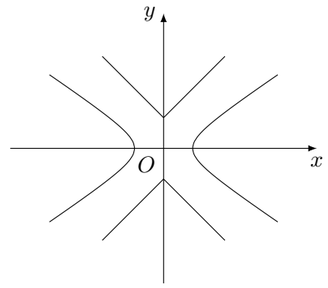
(3) 是否存在 a_1, 使得 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 成等差数列? 若存在, 求出所有这样的 a_1; 若不存在, 说明理由.

23. 如图, 已知双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$, 曲线 $C_2:|y|=|x|+1$. P 是平面内一点, 若存在过点 P 的直线与 C_1、C_2 都有公共点, 则称 P 为“C_1-C_2 型点”.

(1) 在正确证明 C_1 的左焦点是“C_1-C_2 型点”时, 要使用一条过该焦点的直线, 试写出一条这样的直线的方程 (不要求验证);

(2) 设直线 $y=kx$ 与 C_2 有公共点, 求证 $|k|>1$, 进而证明原点不是“C_1-C_2 型点”;

(3) 求证: 圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ 内的点都不是“C_1-C_2 型点”.



2013 年普通高等学校招生考试（四川卷）

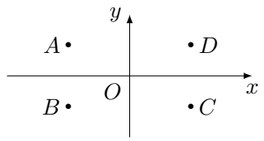
理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid x+2=0\}$, 集合 $B=\{x\mid x^2-4=0\}$, 则 $A\cap B=$(　)

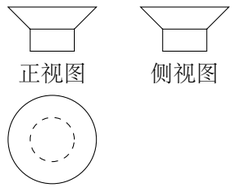
(A) $\{-2\}$　　(B) $\{2\}$　　(C) $\{-2,2\}$　　(D) $\varnothing$

2. 如图, 在复平面内, 点 A 表示复数 z, 则图中表示 z 的共轭复数的点是(　)

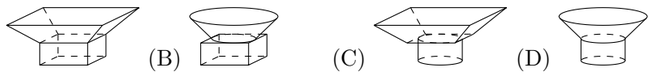


(A) A　　(B) B　　(C) C　　(D) D

3. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的直观图可以是　　(　)



(A)　(B)　(C)　(D)

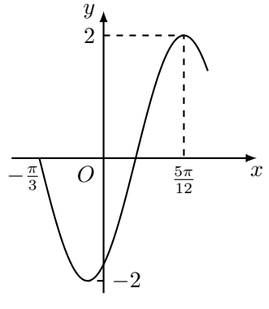


4. 设 $x\in\mathbf{Z}$, 集合 A 是奇数集, 集合 B 是偶数集. 若命题 p: $\forall x\in A$, $2x\in B$, 则　　(　)

(A) $\neg p$: $\forall x\in A$, $2x\notin B$　　(B) $\neg p$: $\forall x\notin A$, $2x\notin B$

(C) $\neg p$: $\exists x\notin A$, $2x\in B$　　(D) $\neg p$: $\exists x\in A$, $2x\notin B$

5. 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示, 则 ω, φ 的值分别是　　(　)



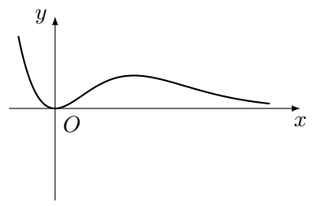
(A) $2,-\dfrac{\pi}{3}$　　(B) $2,-\dfrac{\pi}{6}$　　(C) $4,-\dfrac{\pi}{6}$　　(D) $4,\dfrac{\pi}{3}$

6. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点到双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的渐近线的距离是　　(　)

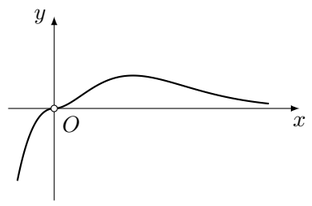
(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(C) 1　　(D) $\sqrt{3}$

7. 函数 $y=\dfrac{x^3}{3^x-1}$ 的图象大致是　　(　)

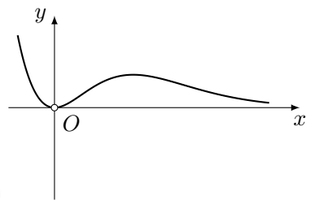
(A)



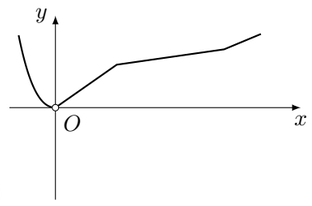
(B)



(C)



(D)



8. 从 1, 3, 5, 7, 9 这五个数中, 每次取出两个不同的数分别为 a, b, 共可得到 $\lg a-\lg b$ 的不同值的个数是　　(　)

(A) 9　　(B) 10　　(C) 18　　(D) 20

9. 节日前夕, 小李在家门前的树上挂了两串彩灯, 这两串彩灯的第一次闪亮相互独立, 且都在通电后的 4 秒内任一时刻等可能发生, 然后每串彩灯以 4 秒为间隔闪亮. 那么这两串彩灯同时通电后, 它们第一次闪亮的时刻相差不超过 2 秒的概率是　　(　)

(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) $\dfrac{7}{8}$

10. 设函数 $f(x)=\sqrt{\mathrm{e}^x+x-a}$ ($a\in\mathbf{R}$, e 为自然对数的底数). 若曲线 $y=\sin x$ 上存在 (x_0,y_0) 使得 $f(f(y_0))=y_0$, 则 a 的取值范围是　　(　)

(A) $[1,\mathrm{e}]$　　(B) $[\mathrm{e}^{-1}-1,1]$

(C) $[1,1+\mathrm{e}]$　　(D) $[\mathrm{e}^{-1}-1,\mathrm{e}+1]$

二、填空题

11. 二项式 $(x+y)^5$ 的展开式中, 含 x^2y^3 的项的系数是_____. (用数字作答)

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}$, 则 $\lambda=$_____.

13. 设 $\sin 2\alpha=-\sin\alpha$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值是_____.

14. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=x^2-4x$, 那么, 不等式 $f(x+2)<5$ 的解集是_____.

15. 设 P_1, P_2, $\cdots$, P_n 为平面 α 内的 n 个点, 在平面 α 内的所有点中, 若点 P 到 P_1, P_2, $\cdots$, P_n 点的距离之和最小, 则称点 P 为 P_1, P_2, $\cdots$, P_n 点的一个“中位点”. 例如, 线段 AB 上的任意点都是端点 A, B 的中位点. 则有下列命题:

① 若三个点 A, B, C 共线, C 在线段 AB 上, 则 C 是 A, B, C 的中位点;

② 直角三角形斜边的中点是该直角三角形三个顶点的中位点;

③ 若四个点 A, B, C, D 共线, 则它们的中位点存在且唯一;

④ 梯形对角线的交点是该梯形四个顶点的唯一中位点.

其中的真命题是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

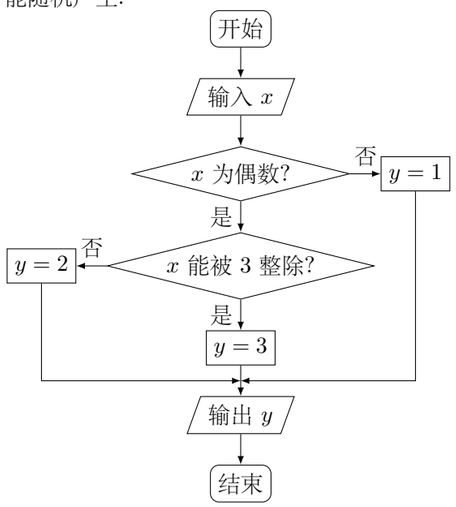
16. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_3=8$, 且 a_4 为 a_2 和 a_9 的等比中项, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项、公差及前 n 项和.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $2\cos^2\dfrac{A-B}{2}\cos B-\sin(A-B)\sin B+\cos(A+C)=-\dfrac{3}{5}$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 若 $a=4\sqrt{2}$, $b=5$, 求向量 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影.

18. 某算法的程序框图如图所示, 其中输入的变量 x 在 1, 2, 3, $\cdots$, 24 这 24 个整数中等可能随机产生.



(1) 分别求出按程序框图正确编程运行时输出 y 的值为 i 的概率 P_i ($i=1$, 2, 3);

(2) 甲、乙两同学依据自己对程序框图的理解, 各自编写程序重复运行 n 次后, 统计记录了输出 y 的值为 i ($i=1$, 2, 3) 的频数. 以下是甲、乙所作频数统计表的部分数据.

甲的频数统计表 (部分)

运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	14	6	10
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2100	1027	376	697

乙的频数统计表 (部分)

运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	12	11	7
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2100	1051	696	353

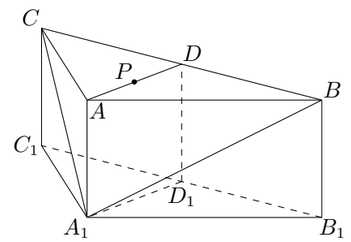
当 $n=2100$ 时, 根据表中的数据, 分别写出甲、乙所编程序各自输出 y 的值为 i ($i=1$, 2, 3) 的频率 (用分数表示), 并判断两位同学中哪一位所编写程序符合算法要求的可能性较大;

(3) 按程序框图正确编写的程序运行 3 次, 求输出 y 的值为 2 的次数 ξ 的分布列及数学期望.

19. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC, $AB=AC=2AA_1$, $\angle BAC=120^\circ$, D, D_1 分别是线段 BC, B_1C_1 的中点, P 是线段 AD 的中点.

(1) 在平面 ABC 内, 试作出过点 P 与平面 A_1BC 平行的直线 l, 说明理由, 并证明直线 $l\perp$ 平面 ADD_1A_1;

(2) 设 (1) 中的直线 l 交 AB 于点 M, 交 AC 于点 N, 求二面角 $A-A_1M-N$ 的余弦值.



20. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 且椭圆 C 经过点 $P\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的离心率;

(2) 设过点 $A(0,2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 点 Q 是线段 MN 上的点, 且 $\dfrac{2}{|AQ|^2}=\dfrac{1}{|AM|^2}+\dfrac{1}{|AN|^2}$, 求点 Q 的轨迹方程.

21. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a, & x<0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$, 其中 a 是实数. 设 $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ 为该函数图象上的两点, 且 $x_1<x_2$.

(1) 指出函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线互相垂直, 且 $x_2<0$, 求 x_2-x_1 的最小值;

(3) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线重合, 求 a 的取值范围.

2013 年普通高等学校招生考试（四川卷）

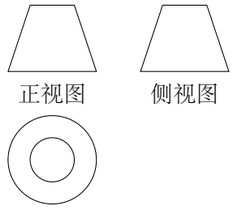
文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$, 集合 $B=\{-2,2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

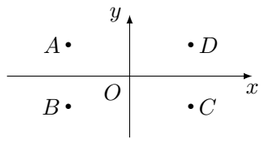
(A) $\varnothing$　　(B) $\{2\}$　　(C) $\{-2,2\}$　　(D) $\{-2,1,2,3\}$

2. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体可以是 （　）



(A) 棱柱　　(B) 棱台　　(C) 圆柱　　(D) 圆台

3. 如图, 在复平面内, 点 A 表示复数 z, 则图中表示 z 的共轭复数的点是(　)



(A) A　　(B) B　　(C) C　　(D) D

4. 设 $x\in\mathbf{Z}$, 集合 A 是奇数集, 集合 B 是偶数集. 若命题 p: $\forall x\in A$, $2x\in B$, 则 （　）

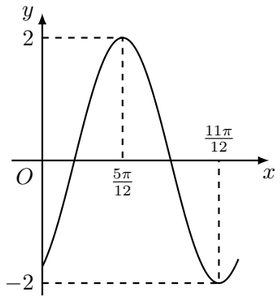
(A) $\neg p$: $\exists x\in A$, $2x\in B$　　(B) $\neg p$: $\exists x\notin A$, $2x\in B$

(C) $\neg p$: $\exists x\in A$, $2x\notin B$　　(D) $\neg p$: $\forall x\notin A$, $2x\notin B$

5. 抛物线 $y^2=8x$ 的焦点到直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 的距离是 （　）

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) 2　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 1

6. 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示, 则 ω, φ 的值分别是 （　）

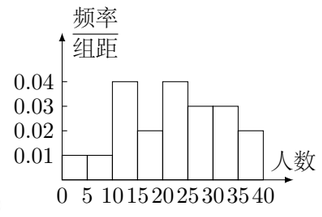


(A) $2,-\dfrac{\pi}{3}$　　(B) $2,-\dfrac{\pi}{6}$　　(C) $4,-\dfrac{\pi}{6}$　　(D) $4,\dfrac{\pi}{3}$

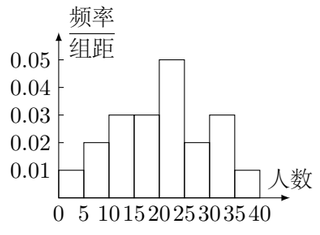
7. 某学校随机抽取 20 个班, 调查各班中有网上购物经历的人数, 所得数据的茎叶图如图所示, 以组距为 5 将数据分组成 $[0,5)$, $[5,10)$, $\cdots$, $[30,35)$, $[35,40]$ 时, 所作的频率分布直方图是 （　）

0	7 3
1	7 6 4 4 3 0
2	7 5 5 4 3 2 0
3	8 5 4 3 0

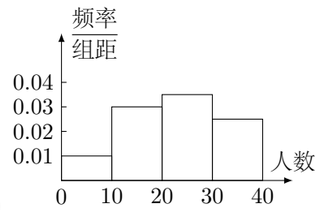
(A)



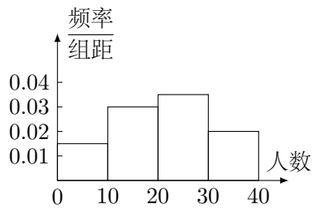
(B)



(C)



(D)



8. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 8\\2y-x\leqslant 4\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$ 且 $z=5y-x$ 的最大值为 a, 最小值为 b, 则 $a-b$ 的值是 （　）

(A) 48　　(B) 30　　(C) 24　　(D) 16

9. 从椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上一点 P 向 x 轴作垂线, 垂足恰为左焦点 F_1, A 是椭圆与 x 轴正半轴的交点, B 是椭圆与 y 轴正半轴的交点, 且 $AB/\!/OP$ (O 是坐标原点), 则该椭圆的离心率是 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

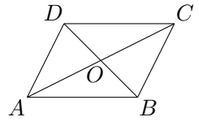
10. 设函数 $f(x)=\sqrt{\mathrm{e}^x+x-a}$ ($a\in\mathbf{R}$, e 为自然对数的底数). 若存在 $b\in[0,1]$ 使 $f(f(b))=b$ 成立, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $[1,\mathrm{e}]$　　(B) $[1,1+\mathrm{e}]$　　(C) $[\mathrm{e},1+\mathrm{e}]$　　(D) $[0,1]$

二、填空题

11. $\lg\sqrt{5}+\lg\sqrt{20}$ 的值是_____.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}$, 则 $\lambda=$_____.



13. 已知函数 $f(x)=4x+\dfrac{a}{x}$ $(x>0,\ a>0)$ 在 $x=3$ 时取得小值, 则 $a=$_____.

14. 设 $\sin 2\alpha=-\sin\alpha$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值是_____.

15. 在平面直角坐标系内, 到点 $A(1,2)$, $B(1,5)$, $C(3,6)$, $D(7,-1)$ 的距离之和最小的点的坐标是_____.

三、解答题

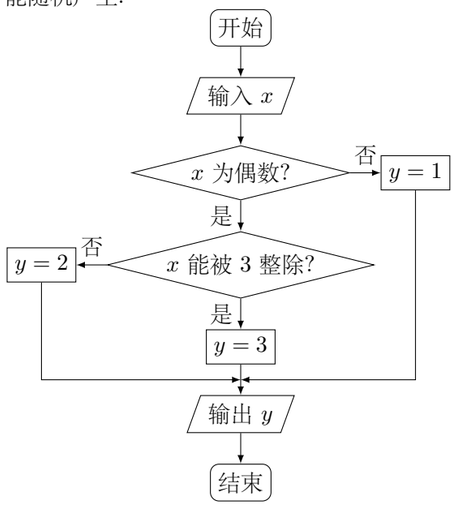
16. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2-a_1=2$, 且 $2a_2$ 为 $3a_1$ 和 a_3 的等差中项, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项、公比及前 n 项和.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin(A+C)=-\dfrac{3}{5}$.

(1) 求 $\sin A$ 的值;

(2) 若 $a=4\sqrt{2}$, $b=5$, 求向量 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影.

18. 某算法的程序框图如图所示, 其中输入的变量 x 在 1, 2, 3, $\cdots$, 24 这 24 个整数中等可能随机产生.



(1) 分别求出按程序框图正确编程运行时输出 y 的值为 i 的概率 P_i ($i=1$, 2, 3);

(2) 甲、乙两同学依据自己对程序框图的理解, 各自编写程序重复运行 n 次后, 统计记录了输出 y 的值为 i ($i=1$, 2, 3) 的频数. 以下是甲、乙所作频数统计表的部分数据.

甲的频数统计表 (部分)

运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	14	6	10
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2100	1027	376	697

乙的频数统计表 (部分)

运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	12	11	7
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2100	1051	696	353

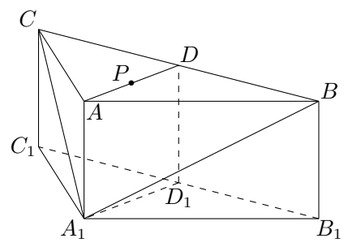
当 $n=2100$ 时, 根据表中的数据, 分别写出甲、乙所编程序各自输出 y 的值为 i ($i=1$, 2, 3) 的频率 (用分数表示), 并判断两位同学中哪一位所编写程序符合算法要求的可能性较大.

19. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC, $AB=AC=2AA_1=2$, $\angle BAC=120^\circ$, D, D_1 分别是线段 BC, B_1C_1 的中点, 点 P 是线段 AD 上异于端点的点.

(1) 在平面 ABC 内, 试作出过点 P 与平面 A_1BC 平行的直线 l, 请说明理由, 并证明直线 $l\perp$ 平面 ADD_1A_1;

(2) 设 (1) 中的直线 l 交 AC 于点 Q, 求三棱锥 A_1-QC_1D 的体积.

(锥体体积公式: $V=\dfrac{1}{3}Sh$, 其中 S 为底面面积, h 为高)



20. 已知圆 C 的方程为 $x^2+(y-4)^2=4$, 点 O 是坐标原点, 直线 $l: y=kx$ 与圆 C 交于 M, N 两点.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 设 $Q(m,n)$ 是线段 MN 上的点, 且 $\dfrac{2}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{|OM|^2}+\dfrac{1}{|ON|^2}$, 请将 n 表示为 m 的函数.

21. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a, & x<0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$, 其中 a 是实数. 设 $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ 为该函数图象上的两点, 且 $x_1<x_2$.

(1) 指出函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线互相垂直, 且 $x_2<0$, 证明: $x_2-x_1\geqslant 1$;

(3) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线重合, 求 a 的取值范围.

2013 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

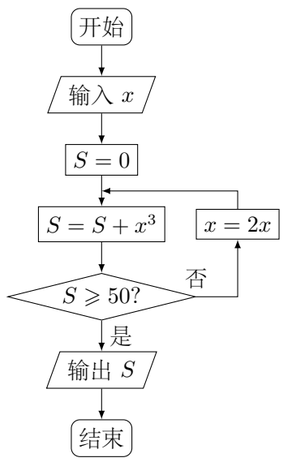
1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x|\leqslant 2\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B=$（　）

(A) $(-\infty,2]$　　(B) $[1,2]$　　(C) $[-2,2]$　　(D) $[-2,1]$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+y-6\geqslant 0\\ x-y-2\leqslant 0\\ y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=y-2x$ 的最小值为（　）

(A) -7　　(B) -4　　(C) 1　　(D) 2

3. 阅读如图的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 x 的值为 1, 则输出 S 的值为（　）



(A) 64　　(B) 73　　(C) 512　　(D) 585

4. 已知下列三个命题:
① 若一个球的半径缩小到原来的 $\frac{1}{2}$, 则其体积缩小到原来的 $\frac{1}{8}$;
② 若两组数据的平均数相等, 则它们的标准差也相等;
③ 直线 $x+y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 相切.
其中真命题的序号是（　）

(A) ①②③　　(B) ①②　　(C) ①③　　(D) ②③

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线与抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线分别交于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若双曲线的离心率为 2, $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $p=$（　）

(A) 1　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) 2　　(D) 3

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=\frac{\pi}{4}$, $AB=\sqrt{2}$, $BC=3$, 则 $\sin\angle BAC=$（　）

(A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　(C) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　(D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. 函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点个数为（　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

8. 已知函数 $f(x)=x(1+a|x|)$. 设关于 x 的不等式 $f(x+a)<f(x)$ 的解集为 A, 若 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是（　）

(A) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$　　(B) $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},0\right)$

(C) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$　　(D) $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

二、填空题

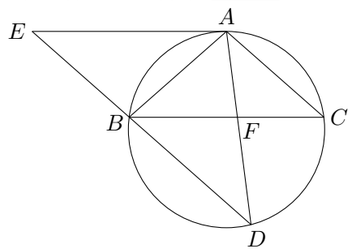
9. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位. 若 $(a+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=b\mathrm{i}$, 则 $a+b\mathrm{i}=$_____.

10. $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为_____.

11. 已知圆的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$, 圆心为 C, 点 P 的极坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$, 则 $|CP|=$_____.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$, E 为 CD 的中点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$, 则 AB 的长为_____.

13. 如图, $\triangle ABC$ 为圆的内接三角形, BD 为圆的弦, 且 $BD/\!/AC$. 过点 A 作圆的切线与 DB 的延长线交于点 E, AD 与 BC 交于点 F. 若 $AB=AC$, $AE=6$, $BD=5$, 则线段 CF 的长为_____.



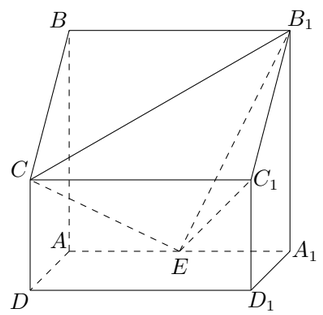
14. 设 $a+b=2$, $b>0$, 则当 $a=$_____时, $\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}$ 取得最小值.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+6\sin x\cos x-2\cos^2x+1$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 一个盒子里装有 7 张卡片, 其中有红色卡片 4 张, 编号分别为 1, 2, 3, 4; 白色卡片 3 张, 编号分别为 2, 3, 4. 从盒子中任取 4 张卡片 (假设取到任何一张卡片的可能性相同).
(1) 求取出的 4 张卡片中, 含有编号为 3 的卡片的概率.
(2) 在取出的 4 张卡片中, 红色卡片编号的最大值设为 X, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17. 如图所示, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$, $AB/\!/DC$, $AB\perp AD$, $AD=CD=1$, $AA_1=AB=2$, E 为棱 AA_1 的中点.
(1) 证明: $B_1C_1\perp CE$;
(2) 求二面角 B_1-CE-C_1 的平面角的正弦值;
(3) 设点 M 在线段 C_1E 上, 且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段 AM 的长.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 F, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左、右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=8$, 求 k 的值.

19. 已知首项为 $\dfrac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列, 其前 n 项和为 $S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 且 S_3+a_3, S_5+a_5, S_4+a_4 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $T_n=S_n-\dfrac{1}{S_n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{T_n\}$ 的最大项的值与最小项的值.

20. 已知函数 $f(x)=x^2\ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 对任意的 $t>0$, 存在唯一的 s, 使 $t=f(s)$;

(3) 设 (2) 中所确定的 s 关于 t 的函数为 $s=g(t)$, 证明: 当 $t>\mathrm{e}^2$ 时, 有 $\dfrac{2}{5}<\dfrac{\ln g(t)}{\ln t}<\dfrac{1}{2}$.

2013 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

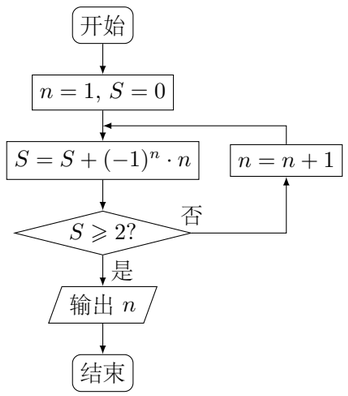
1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x|\leqslant 2\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B=$（　）

(A) $(-\infty,2]$　　(B) $[1,2]$　　(C) $[-2,2]$　　(D) $[-2,1]$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+y-6\geqslant 0\\ x-y-2\leqslant 0\\ y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=y-2x$ 的最小值为（　）

(A) -7　　(B) -4　　(C) 1　　(D) 2

3. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 n 的值为（　）



(A) 7　　(B) 6　　(C) 5　　(D) 4

4. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 则“$(a-b)\cdot a^2<0$”是“$a<b$”的（　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知过点 $P(2,2)$ 的直线与圆 $(x-1)^2+y^2=5$ 相切, 且与直线 $ax-y+1=0$ 垂直, 则 $a=$（　）

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) 2　　(D) $\dfrac{1}{2}$

6. 函数 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为（　）

(A) -1　　(B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) 0

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f(\log_2 a)+f\left(\log_{\frac{1}{2}}a\right)\leqslant 2f(1)$, 则 a 的取值范围是（　）

(A) $[1,2]$　　(B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　(C) $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$　　(D) $(0,2]$

8. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x-2$, $g(x)=\ln x+x^2-3$. 若实数 a, b 满足 $f(a)=0$, $g(b)=0$, 则（　）

(A) $g(a)<0<f(b)$　　(B) $f(b)<0<g(a)$

(C) $0<g(a)<f(b)$　　(D) $f(b)<g(a)<0$

二、填空题

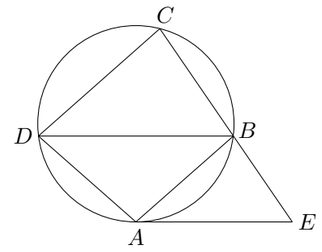
9. i 是虚数单位, 复数 $(3+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=$_____.

10. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若球的体积为 $\dfrac{9\pi}{2}$, 则正方体的棱长为_____.

11. 已知抛物线 $y^2=8x$ 的准线过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一个焦点, 且双曲线的离心率为 2, 则该双曲线的方程为_____.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$, E 为 CD 的中点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$, 则 AB 的长为_____.

13. 如图, 在圆内接梯形 $ABCD$ 中, $AB\parallel DC$, 过点 A 作圆的切线与 CB 的延长线交于点 E. 若 $AB=AD=5$, $BE=4$, 则弦 BD 的长为_____.



14. 设 $a+b=2$, $b>0$, 则 $\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{|a|}{b}$ 的最小值为_____.

三、解答题

15. 某产品的三个质量指标分别为 x, y, z, 用综合指标 $S=x+y+z$ 评价该产品的等级. 若 $S\leqslant 4$, 则该产品为一等品. 现从一批该产品中, 随机抽取 10 件产品作为样本, 其质量指标列表如下:

产品编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
质量指标 (x,y,z)	$(1,1,2)$	$(2,1,1)$	$(2,2,2)$	$(1,1,1)$	$(1,2,1)$
产品编号	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
质量指标 (x,y,z)	$(1,2,2)$	$(2,1,1)$	$(2,2,1)$	$(1,1,1)$	$(2,1,2)$

(1) 利用上表提供的样本数据估计该批产品的一等品率;

(2) 在该样本的一等品中, 随机抽取 2 件产品.

① 用产品编号列出所有可能的结果;

② 设事件 B 为“在取出的 2 件产品中, 每件产品的综合指标 S 都等于 4”, 求事件 B 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c, 已知 $b\sin A=3c\sin B$, $a=3$, $\cos B=\dfrac{2}{3}$.

(1) 求 b 的值;

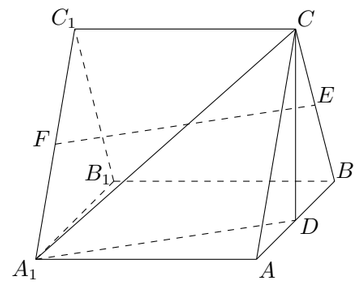
(2) 求 $\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

17. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $A_1A\perp$ 底面 ABC, 且各棱长均相等, D, E, F 分别为棱 AB, BC, A_1C_1 的中点.

(1) 证明 $EF\parallel$ 平面 A_1CD;

(2) 证明平面 $A_1CD\perp$ 平面 A_1ABB_1;

(3) 求直线 BC 与平面 A_1CD 所成角的正弦值.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 F, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左、右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=8$, 求 k 的值.

19. 已知首项为 $\dfrac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 且 $-2S_2$, S_3, $4S_4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明 $S_n+\dfrac{1}{S_n}\leqslant\dfrac{13}{6}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

20. 设 $a\in[-2,0]$, 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-(a+5)x, & x\leqslant 0\\ x^3-\dfrac{a+3}{2}x^2+ax, & x>0\end{cases}$.

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内单调递减, 在区间 $(1,+\infty)$ 内单调递增;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $P_i(x_i,f(x_i))\ (i=1,\ 2,\ 3)$ 处的切线相互平行, 且 $x_1x_2x_3\neq 0$, 证明: $x_1+x_2+x_3>-\dfrac{1}{3}$.

2013 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 i 是虚数单位, 则 $(-1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=$ （　）

(A) $-3+\mathrm{i}$　(B) $-1+3\mathrm{i}$　(C) $-3+3\mathrm{i}$　(D) $-1+\mathrm{i}$

2. 设集合 $S=\{x\mid x>-2\}$, $T=\{x\mid x^2+3x-4\leqslant 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}}S)\cup T=$（　）

(A) $(-2,1]$　(B) $(-\infty,-4]$　(C) $(-\infty,1]$　(D) $[1,+\infty)$

3. 已知 x, y 为正实数, 则 （　）

(A) $2^{\lg x+\lg y}=2^{\lg x}+2^{\lg y}$　(B) $2^{\lg(x+y)}=2^{\lg x}\cdot 2^{\lg y}$

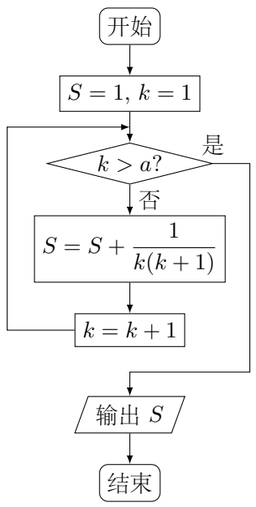
(C) $2^{\lg x\cdot\lg y}=2^{\lg x}+2^{\lg y}$　(D) $2^{\lg(xy)}=2^{\lg x}\cdot 2^{\lg y}$

4. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0,\ \varphi\in\mathbf{R})$, 则"$f(x)$ 是奇函数"是"$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$"的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 某程序框图如图所示, 若该程序运行后输出的值是 $\dfrac{9}{5}$, 则 （　）



(A) $a=4$　(B) $a=5$　(C) $a=6$　(D) $a=7$

6. 已知 $\alpha\in\mathbf{R}$, $\sin\alpha+2\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, 则 $\tan 2\alpha=$ （　）

(A) $\dfrac{4}{3}$　(B) $\dfrac{3}{4}$　(C) $-\dfrac{3}{4}$　(D) $-\dfrac{4}{3}$

7. 设 $\triangle ABC$, P_0 是边 AB 上一定点, 满足 $P_0B=\dfrac{1}{4}AB$, 且对于边 AB 上任一点 P, 恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$. 则 （　）

(A) $\angle ABC=90^\circ$　(B) $\angle BAC=90^\circ$　(C) $AB=AC$　(D) $AC=BC$

8. 已知 e 为自然对数的底数, 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(x-1)^k$ $(k=1,\ 2)$, 则 （　）

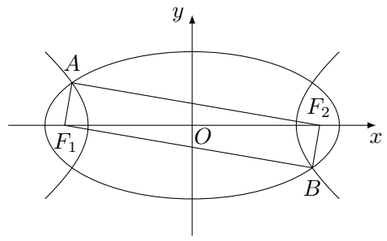
(A) 当 $k=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值

(B) 当 $k=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

(C) 当 $k=2$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值

(D) 当 $k=2$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

9. 如图, F_1, F_2 是椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点, A, B 分别是 C_1, C_2 在第二、四象限的公共点. 若四边形 AF_1BF_2 为矩形, 则 C_2 的离心率是 （　）



(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

10. 在空间中, 过点 A 作平面 π 的垂线, 垂足为 B, 记 $B=f_\pi(A)$. 设 α, β 是两个不同的平面, 对空间任意一点 P, $Q_1=f_\beta(f_\alpha(P))$, $Q_2=f_\alpha(f_\beta(P))$, 恒有 $PQ_1=PQ_2$, 则 （　）

(A) 平面 α 与平面 β 垂直

(B) 平面 α 与平面 β 所成的 (锐) 二面角为 45°

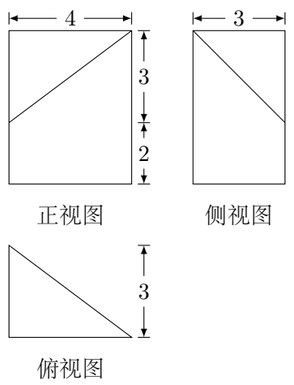
(C) 平面 α 与平面 β 平行

(D) 平面 α 与平面 β 所成的 (锐) 二面角为 60°

二、填空题

11. 设二项式 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中常数项为 A, 则 $A=$_____.

12. 若某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的体积等于_____cm^3.



13. 设 $z=kx+y$, 其中实数 x, y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x-2y+4\geqslant 0\\ 2x-y-4\leqslant 0\end{cases}$, 若 z 的最大值为 12, 则实数 $k=$_____.

14. 将 A, B, C, D, E, F 六个字母排成一排, 且 A, B 均在 C 的同侧, 则不同的排法共有_____种. (用数字作答)

15. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点, 过点 $P(-1,0)$ 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点, 点 Q 为线段 AB 的中点. 若 $|FQ|=2$, 则直线 l 的斜率等于_____.

16. $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, M 是 BC 的中点. 若 $\sin\angle BAM=\dfrac{1}{3}$, 则 $\sin\angle BAC=$_____.

17. 设 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量, 非零向量 $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$, x, $y\in\mathbf{R}$. 若 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$, 则 $\dfrac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值等于_____.

三、解答题

18. 在公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=10$, 且 a_1, $2a_2+2$, $5a_3$ 成等比数列.

(1) 求 d, a_n;

(2) 若 $d<0$, 求 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$.

19. 设袋子中装有 a 个红球, b 个黄球, c 个蓝球, 且规定: 取出一个红球得 1 分, 取出一个黄球 2 分, 取出一个蓝球得 3 分.

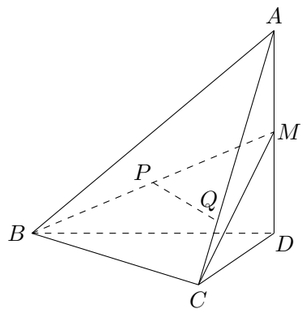
(1) 当 $a=3$, $b=2$, $c=1$ 时, 从该袋子中任取 (有放回, 且每球取到的机会均等) 2 个球, 记随机变量 ξ 为取出此 2 个球所得分数之和, 求 ξ 分布列;

(2) 从该袋子中任取 (且每球取到的机会均等) 1 个球, 记随机变量 η 为取出此球所得分数. 若 $E\eta=\dfrac{5}{3}$, $D\eta=\dfrac{5}{9}$, 求 $a:b:c$.

20. 如图, 在四面体 $A-BCD$ 中, $AD\perp$ 平面 BCD, $BC\perp CD$, $AD=2$, $BD=2\sqrt{2}$. M 是 AD 的中点, P 是 BM 的中点, 点 Q 在线段 AC 上, 且 $AQ=3QC$.

(1) 证明: $PQ\parallel$ 平面 BCD;

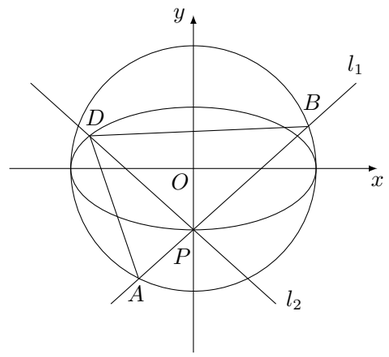
(2) 若二面角 $C-BM-D$ 的大小为 60°, 求 $\angle BDC$ 的大小.



21. 如图, 点 $P(0,-1)$ 是椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的一个顶点, C_1 的长轴是圆 $C_2:x^2+y^2=4$ 的直径. l_1, l_2 是过点 P 且互相垂直的两条直线, 其中 l_1 交圆 C_2 于 A, B 两点, l_2 交椭圆 C_1 于另一点 D.

(1) 求椭圆 C_1 的方程;

(2) 求 $\triangle ABD$ 面积取最大值时直线 l_1 的方程.



22. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax-3a+3$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $x\in[0,2]$ 时, 求 $|f(x)|$ 的最大值.

2013 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $S=\{x\mid x>-2\}$, $T=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 1\}$, 则 $S\cap T=$ （　）

(A) $[-4,+\infty)$　(B) $(-2,+\infty)$　(C) $[-4,1]$　(D) $(-2,1]$

2. 已知 i 是虚数单位, 则 $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=$ （　）

(A) $5-5\mathrm{i}$　(B) $7-5\mathrm{i}$　(C) $5+5\mathrm{i}$　(D) $7+5\mathrm{i}$

3. 若 $\alpha\in\mathbf{R}$, 则"$\alpha=0$"是"$\sin\alpha<\cos\alpha$"的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

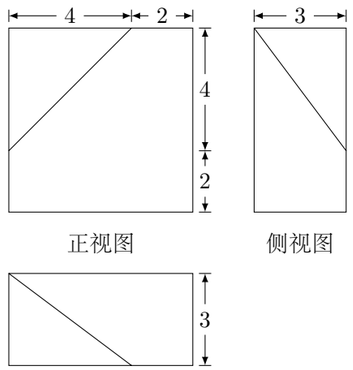
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面 （　）

(A) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$　(B) 若 $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(C) 若 $m\parallel n$, $m\perp\alpha$, 则 $n\perp\alpha$　(D) 若 $m\parallel\alpha$, $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp\beta$

5. 已知某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该几何体的体积是（　）



(A) 108 cm^3　(B) 100 cm^3　(C) 92 cm^3　(D) 84 cm^3

6. 函数 $f(x)=\sin x\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$ 的最小正周期和振幅分别是 （　）

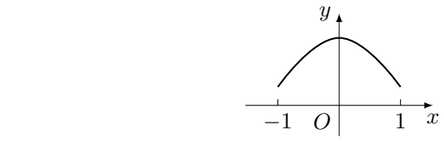
(A) π, 1　(B) π, 2　(C) 2π, 1　(D) 2π, 2

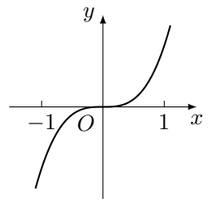
7. 已知 a, b, $c\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 若 $f(0)=f(4)>f(1)$, 则 （　）

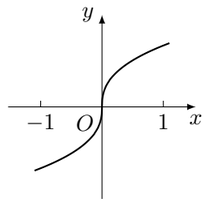
(A) $a>0$, $4a+b=0$　(B) $a<0$, $4a+b=0$

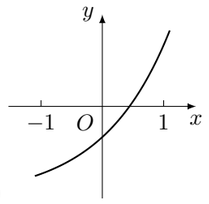
(C) $a>0$, $2a+b=0$　(D) $a<0$, $2a+b=0$

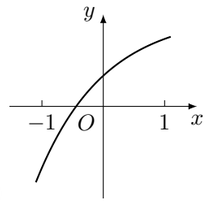
8. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象是下列四个图象之一, 且其导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 则该函数的图象是 （　）



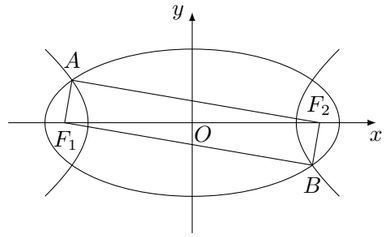
(A)


(B)


(C)


(D)


9. 如图, F_1, F_2 是椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点, A, B 分别是 C_1, C_2 在第二、四象限的公共点. 若四边形 AF_1BF_2 为矩形, 则 C_2 的离心率是 （　）



(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

10. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 定义运算"$\wedge$"和"$\vee$"如下: $a\wedge b=\begin{cases}a, & a\leqslant b\\ b, & a>b\end{cases}$, $a\vee b=\begin{cases}b, & a\leqslant b\\ a, & a>b\end{cases}$. 若正数 a, b, c, d 满足 $ab\geqslant 4$, $c+d\leqslant 4$, 则 （　）

(A) $a\wedge b\geqslant 2$, $c\wedge d\leqslant 2$　(B) $a\wedge b\geqslant 2$, $c\vee d\geqslant 2$

(C) $a\vee b\geqslant 2$, $c\wedge d\leqslant 2$　(D) $a\vee b\geqslant 2$, $c\vee d\geqslant 2$

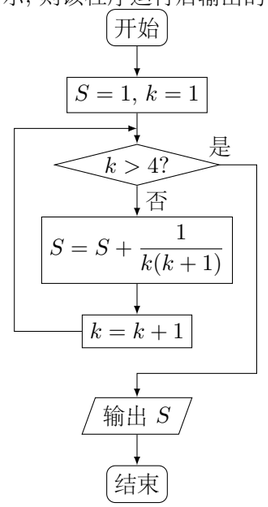
二、填空题

11. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$. 若 $f(a)=3$, 则实数 $a=$_____.

12. 从 3 男 3 女共 6 名同学中任选 2 名 (每名同学被选中的机会均等), 这 2 名都是女同学的概率等于_____.

13. 直线 $y=2x+3$ 被圆 $x^2+y^2-6x-8y=0$ 所截得的弦长等于_____.

14. 若某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的值等于_____.



15. 设 $z=kx+y$, 其中实数 x, y 满足 $\begin{cases}x\geqslant 2\\ x-2y+4\geqslant 0\\ 2x-y-4\leqslant 0\end{cases}$. 若 z 的最大值为 12, 则实数 $k=$_____.

16. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 若 $x\geqslant 0$ 时恒有 $0\leqslant x^4-x^3+ax+b\leqslant(x^2-1)^2$, 则 $ab=$_____.

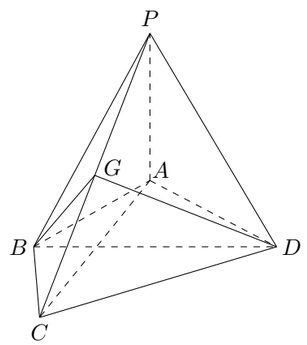
17. 设 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量, 非零向量 $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$, x, $y\in\mathbf{R}$. 若 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$, 则 $\dfrac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值等于_____.

三、解答题

18. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $2a\sin B=\sqrt{3}b$.
(1) 求角 A 的大小;
(2) 若 $a=6$, $b+c=8$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

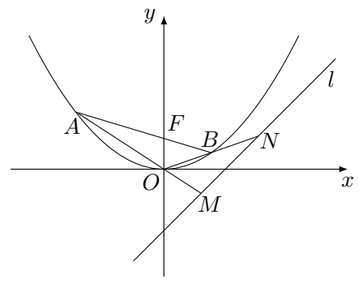
19. 在公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=10$, 且 a_1, $2a_2+2$, $5a_3$ 成等比数列.
(1) 求 d, a_n;
(2) 若 $d<0$, 求 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$.

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=BC=2$, $AD=CD=\sqrt{7}$, $PA=\sqrt{3}$, $\angle ABC=120^\circ$, G 为线段 PC 上的点.
(1) 证明: $BD\perp$ 平面 APC;
(2) 若 G 为 PC 的中点, 求 DG 与平面 APC 所成的角的正切值;
(3) 若 G 满足 $PC\perp$ 平面 BGD, 求 $\dfrac{PG}{GC}$ 的值.



21. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$.
(1) 若 $a=1$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程;
(2) 若 $|a|>1$, 求 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2|a|]$ 上的最小值.

22. 已知抛物线 C 的顶点为 $O(0,0)$, 焦点为 $F(0,1)$.
(1) 求抛物线 C 的方程;
(2) 过点 F 作直线交抛物线 C 于 A, B 两点. 若直线 AO, BO 分别交直线 $l:y=x-2$ 于 M, N 两点, 求 $|MN|$ 的最小值.



2014 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 i 是虚数单位, $\bar{z}$ 表示复数 z 的共轭复数. 若 $z=1+\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{z}{\mathrm{i}}+\mathrm{i}\cdot\bar{z}=$(　　)

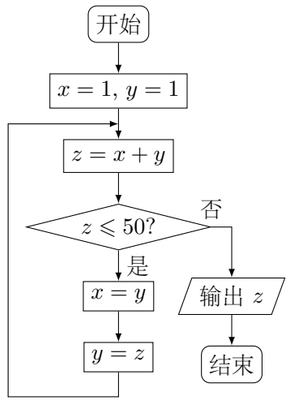
(A) -2　　(B) $-2\mathrm{i}$　　(C) 2　　(D) $2\mathrm{i}$

2. “$x<0$”是“$\ln(x+1)<0$”的　　(　　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

3. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是　　(　　)



(A) 34　　(B) 55　　(C) 78　　(D) 89

4. 以平面直角坐标系的原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 两种坐标系中取相同的长度单位, 已知直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t+1\\y=t-3\end{cases}$ (t 为参数), 圆 C 的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$, 则直线 l 被圆 C 截得的弦长为　　(　　)

(A) $\sqrt{14}$　　(B) $2\sqrt{14}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $2\sqrt{2}$

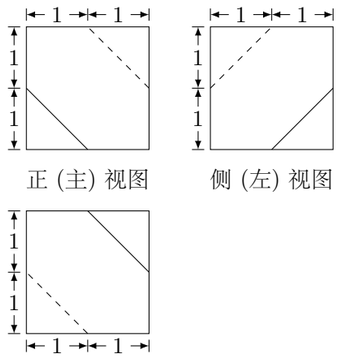
5. x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\x-2y-2\leqslant 0\\2x-y+2\geqslant 0\end{cases}$, 若 $z=y-ax$ 取得最大值的最优解不唯一, 则实数 a 的值为　　(　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$ 或 -1　　(B) 2 或 $\dfrac{1}{2}$　　(C) 2 或 1　　(D) 2 或 -1

6. 设函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$. 当 $0\leqslant x<\pi$ 时, $f(x)=0$, 则 $f\left(\dfrac{23\pi}{6}\right)=$　　(　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(C) 0　　(D) $-\dfrac{1}{2}$

7. 一个多面体的三视图如图所示, 则该多面体的表面积为　　(　　)



(A) $21+\sqrt{3}$　　(B) $18+\sqrt{3}$　　(C) 21　　(D) 18

8. 从正方体六个面的对角线中任取两条作为一对, 其中所成的角为 60° 的共有　　(　　)

(A) 24 对　　(B) 30 对　　(C) 48 对　　(D) 60 对

9. 若函数 $f(x)=|x+1|+|2x+a|$ 的最小值为 3, 则实数 a 的值为　　(　　)

(A) 5 或 8　　(B) -1 或 5　　(C) -1 或 -4　　(D) -4 或 8

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 点 Q 满足 $\overrightarrow{OQ}=\sqrt{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. 曲线 $C=\left\{P\mid \overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}\cos\theta+\boldsymbol{b}\sin\theta, 0\leqslant\theta<2\pi\right\}$, 区域 $\Omega=\left\{P\mid 0<r\leqslant\left|\overrightarrow{PQ}\right|\leqslant R, r<R\right\}$. 若 $C\cap\Omega$ 为两段分离的曲线, 则　　(　　)

(A) $1<r<R<3$　　(B) $1<r<3\leqslant R$

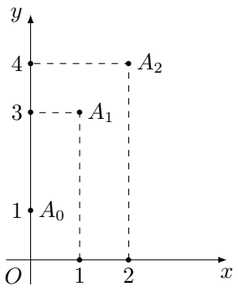
(C) $r\leqslant 1<R<3$　　(D) $1<r<3<R$

二、填空题

11. 若将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 φ 个单位, 所得图象关于 y 轴对称, 则 φ 的最小正值是_____.

12. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 若 a_1+1, a_3+3, a_5+5 构成公比为 q 的等比数列, 则 $q=$_____.

13. 设 $a\neq 0$, n 是大于 1 的自然数, $\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^n$ 的展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. 若点 $A_i(i, a_i)$, $(i=0,\ 1,\ 2)$ 的位置如图所示, 则 $a=$_____.



14. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<1)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A, B 两点, 若 $|AF_1|=3|BF_1|$, $AF_2\perp x$ 轴, 则椭圆 E 的方程为_____.

15. 已知两个不相等的非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 两组向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$, $\boldsymbol{x}_5$ 和 $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{y}_3$, $\boldsymbol{y}_4$, $\boldsymbol{y}_5$ 均由 2 个 $\boldsymbol{a}$ 和 3 个 $\boldsymbol{b}$ 排列而成, 记 $S=\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{y}_2+\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{y}_3+\boldsymbol{x}_4\cdot\boldsymbol{y}_4+\boldsymbol{x}_5\cdot\boldsymbol{y}_5$, $S_{\min}$ 表示 S 所有可能取值中的最小值. 则下列命题正确的是_____. (写出所有正确命题的编号)

① S 有 5 个不同的值;

② 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $S_{\min}$ 与 $|\boldsymbol{a}|$ 无关;

③ 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $S_{\min}$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 无关;

④ 若 $|\boldsymbol{b}|>4|\boldsymbol{a}|$, 则 $S_{\min}>0$;

⑤ 若 $|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$, $S_{\min}=8|\boldsymbol{a}|^2$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

三、解答题

16. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别是 a, b, c, 且 $b=3$, $c=1$, $A=2B$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

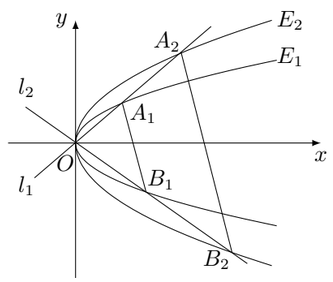
17. 甲乙两人进行围棋比赛, 约定先连胜两局者直接赢得比赛, 若赛完 5 局仍未出现连胜, 则判定获胜局数多者赢得比赛, 假设每局甲获胜的概率为 $\dfrac{2}{3}$, 乙获胜的概率为 $\dfrac{1}{3}$, 各局比赛结果相互独立.

(1) 求甲在 4 局以内 (含 4 局) 赢得比赛的概率;

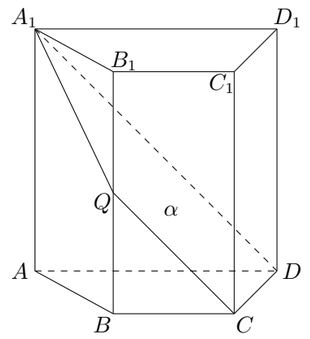
(2) 记 X 为比赛决出胜负时的总局数, 求 X 的分布列和均值 (数学期望).

18. 设函数 $f(x)=1+(1+a)x-x^2-x^3$, 其中 $a>0$.
(1) 讨论 $f(x)$ 在其定义域上的单调性;
(2) 当 $x\in[0,1]$ 时, 求 $f(x)$ 取得最大值和最小值时的 x 的值.

19. 如图, 已知两条抛物线 $E_1: y^2=2p_1x$ $(p_1>0)$ 和 $E_2: y^2=2p_2x$ $(p_2>0)$, 过原点 O 的两条直线 l_1 和 l_2, l_1 与 E_1, E_2 分别交于 A_1, A_2 两点, l_2 与 E_1, E_2 分别交于 B_1, B_2 两点.
(1) 证明: $A_1B_1\parallel A_2B_2$;
(2) 过原点 O 作直线 l (异于 l_1,l_2) 与 E_1, E_2 分别交于 C_1, C_2 两点. 记 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的面积分别为 S_1 与 S_2, 求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的值.



20. 如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$. 四边形 $ABCD$ 为梯形, $AD\parallel BC$, 且 $AD=2BC$. 过 A_1, C, D 三点的平面记为 α, BB_1 与 α 的交点为 Q.
(1) 证明: Q 为 BB_1 的中点;
(2) 求此四棱柱被平面 α 所分成上下两部分的体积之比;
(3) 若 $A_1A=4$, $CD=2$, 梯形 $ABCD$ 的面积为 6, 求平面 α 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小.



21. 设实数 $c>0$, 整数 $p>1$, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 证明: 当 $x>-1$ 且 $x\neq0$ 时, $(1+x)^p>1+px$;
(2) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>c^{\frac{1}{p}}$, $a_{n+1}=\dfrac{p-1}{p}a_n+\dfrac{c}{p}a_n^{1-p}$, 证明: $a_n>a_{n+1}>c^{\frac{1}{p}}$.

2014 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 i 是虚数单位, 复数 $\mathrm{i}^3+\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $-\mathrm{i}$　(B) i　(C) -1　(D) 1

2. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}$, $|x|+x^2\geqslant 0$”的否定是 （ ）

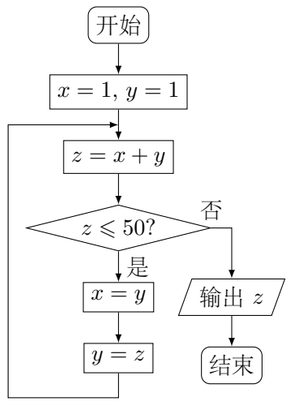
(A) $\forall x\in\mathbf{R}$, $|x|+x^2<0$　(B) $\forall x\in\mathbf{R}$, $|x|+x^2\leqslant 0$

(C) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $|x_0|+x_0^2<0$　(D) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $|x_0|+x_0^2\geqslant 0$

3. 抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 的准线方程是 （ ）

(A) $y=-1$　(B) $y=-2$　(C) $x=-1$　(D) $x=-2$

4. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是 （ ）



(A) 34　(B) 55　(C) 78　(D) 89

5. 设 $a=\log_3 7$, $b=2^{1.1}$, $c=0.8^{3.1}$, 则 （ ）

(A) $b<a<c$　(B) $c<a<b$　(C) $c<b<a$　(D) $a<c<b$

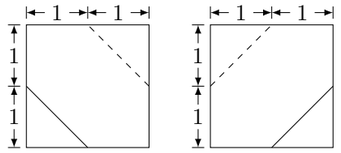
6. 过点 $P\left(-\sqrt{3},-1\right)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 （ ）

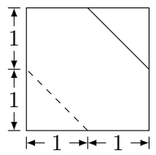
(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$　(B) $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$　(C) $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$　(D) $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$

7. 若将函数 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$ 的图象向右平移 φ 个单位, 所得图象关于 y 轴对称, 则 φ 的最小正值是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{8}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{3\pi}{8}$　(D) $\dfrac{3\pi}{4}$

8. 一个多面体的三视图如图所示, 则该多面体的体积为 （ ）





(A) $\dfrac{23}{3}$　(B) $\dfrac{47}{6}$　(C) 6　(D) 7

9. 若函数 $f(x)=|x+1|+|2x+a|$ 的最小值为 3, 则实数 a 的值为 （ ）

(A) 5 或 8　(B) -1 或 5　(C) -1 或 -4　(D) -4 或 8

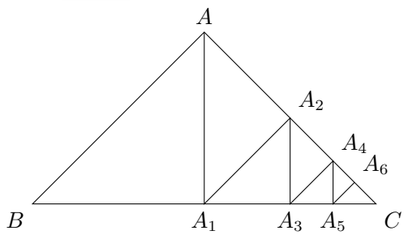
10. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为非零向量, $|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$, 两组向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ 和 $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{y}_3$, $\boldsymbol{y}_4$ 均由 2 个 $\boldsymbol{a}$ 和 2 个 $\boldsymbol{b}$ 排列而成, 若 $\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{y}_2+\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{y}_3+\boldsymbol{x}_4\cdot\boldsymbol{y}_4$ 所有可能取值中的最小值为 $4|\boldsymbol{a}|^2$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}\pi$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{6}$　(D) 0

二、填空题

11. $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}+\log_3\dfrac{5}{4}+\log_3\dfrac{4}{5}=$_____.

12. 如图, 在等腰直角三角形 ABC 中, 斜边 $BC=2\sqrt{2}$, 过点 A 作 BC 的垂线, 垂足为 A_1; 过点 A_1 作 AC 的垂线, 垂足为 A_2; 过点 A_2 作 A_1C 的垂线, 垂足为 A_3; $\cdots$, 依此类推, 设 $BA=a_1$, $AA_1=a_2$, $A_1A_2=a_3$, $\cdots$, $A_5A_6=a_7$, 则 $a_7=$_____.



13. 不等式组 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x+2y-4\leqslant 0\\ x+3y-2\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域的面积为_____.

14. 若函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 是周期为 4 的奇函数, 且在 $[0,2]$ 上的解析式为 $f(x)=\begin{cases}x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \sin\pi x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$, 则 $f\left(\dfrac{29}{4}\right)+f\left(\dfrac{41}{6}\right)=$_____.

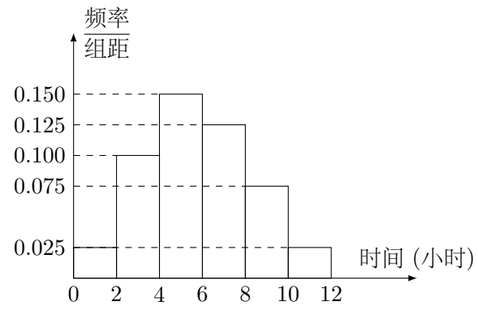
15. 若直线 l 与曲线 C 满足下列两个条件:
(i) 直线 l 在点 $P(x_0,y_0)$ 处与曲线 C 相切; (ii) 曲线 C 在点 P 附近位于直线 l 的两侧, 则称直线 l 在点 P 处“切过”曲线 C.

下列命题正确的是_____. (写出所有正确命题的编号)
① 直线 $l:y=0$ 在点 $P(0,0)$ 处“切过”曲线 $C:y=x^3$;
② 直线 $l:x=-1$ 在点 $P(-1,0)$ 处“切过”曲线 $C:y=(x+1)^2$;
③ 直线 $l:y=x$ 在点 $P(0,0)$ 处“切过”曲线 $C:y=\sin x$;
④ 直线 $l:y=x$ 在点 $P(0,0)$ 处“切过”曲线 $C:y=\tan x$;
⑤ 直线 $l:y=x-1$ 在点 $P(1,0)$ 处“切过”曲线 $C:y=\ln x$.

三、解答题

16. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对边的长分别是 a, b, c, 且 $b=3$, $c=1$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 求 $\cos A$ 与 a 的值.

17. 某高校共有学生 15000 人, 其中男生 10500 人, 女生 4500 人, 为调查该校学生每周平均体育运动时间的情况, 采用分层抽样的方法, 收集 300 位学生每周平均体育运动时间的样本数据 (单位: 小时).



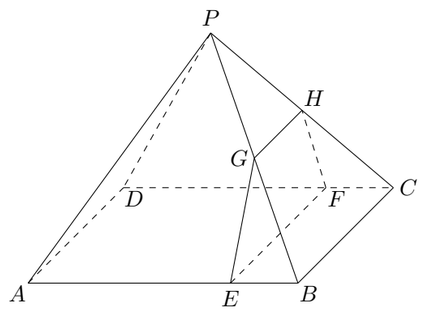
(1) 应收集多少位女生样本数据?
(2) 根据这 300 个样本数据, 得到学生每周平均体育运动时间的频率分布直方图 (如图所示), 其中样本数据分组区间为: $[0,2]$, $(2,4]$, $(4,6]$, $(6,8]$, $(8,10]$, $(10,12]$. 估计该校学生每周平均体育运动时间超过 4 个小时的概率;
(3) 在样本数据中, 有 60 位女生的每周平均体育运动时间超过 4 个小时. 请完成每周平均体育运动时间与性别的列联表, 并判断是否有 95% 的把握认为“该校学生的每周平均体育运动时间与性别有关”.

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

18. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $na_{n+1}=(n+1)\,a_n+n\,(n+1)$, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 证明: 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是等差数列;
(2) 设 $b_n=3^n\cdot\sqrt{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 8 的正方形, 四条侧棱长均为 $2\sqrt{17}$, 点 G, E, F, H 分别是棱 PB, AB, CD, PC 上共面的四点, 平面 $GEFH\perp$ 平面 $ABCD$, $BC\parallel$ 平面 $GEFH$.
(1) 证明: $GH\parallel EF$;
(2) 若 $EB=2$, 求四边形 $GEFH$ 的面积.



20. 设函数 $f\,(x)=1+(1+a)\,x-x^2-x^3$, 其中 $a>0$.
(1) 讨论 $f\,(x)$ 在其定义域上的单调性;
(2) 当 $x\in[0,1]$ 时, 求 $f\,(x)$ 取得最大值和最小值时的 x 的值.

21. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}^2=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A, B 两点, $|AF_1|=3\,|BF_1|$.
(1) 若 $|AB|=4$, $\triangle ABF_2$ 的周长为 16, 求 $|AF_2|$;
(2) 若 $\cos\angle AF_2B=\dfrac{3}{5}$, 求椭圆 E 的离心率.

2014 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x=0\}$, $B=\{0,1,2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{0\}$　　(B) $\{0,1\}$　　(C) $\{0,2\}$　　(D) $\{0,1,2\}$

2. 下列函数中, 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是 （　）

(A) $y=\sqrt{x+1}$　　(B) $y=(x-1)^2$

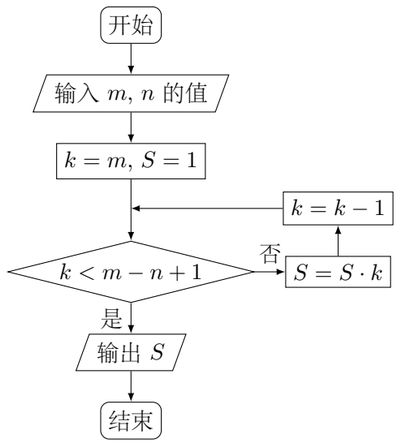
(C) $y=2^{-x}$　　(D) $y=\log_{0.5}(x+1)$

3. 曲线 $\begin{cases}x=-1+\cos\theta\\ y=2+\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 的对称中心 （　）

(A) 在直线 $y=2x$ 上　　(B) 在直线 $y=-2x$ 上

(C) 在直线 $y=x-1$ 上　　(D) 在直线 $y=x+1$ 上

4. 当 $m=7$, $n=3$ 时, 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 （　）



(A) 7　　(B) 42　　(C) 210　　(D) 840

5. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则“$q>1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的 （　）

(A) 充分且不必要条件　　(B) 必要且不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

6. 若 x, y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ kx-y+2\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 且 $z=y-x$ 的最小值为 -4, 则 k 的值为 （　）

(A) 2　　(B) -2　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $-\dfrac{1}{2}$

7. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 已知 $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$, $D\left(1,1,\sqrt{2}\right)$, 若 S_1, S_2, S_3 分别表示三棱锥 $D-ABC$ 在 xOy, yOz, zOx 坐标平面上的正投影图形的面积, 则 （　）

(A) $S_1=S_2=S_3$　　(B) $S_1=S_2$ 且 $S_3\neq S_1$

(C) $S_1=S_3$ 且 $S_3\neq S_2$　　(D) $S_2=S_3$ 且 $S_1\neq S_3$

8. 学生的语文、数学成绩均被评定为三个等级, 依次为“优秀”“合格”“不合格”. 若学生甲的语文、数学成绩都不低于学生乙, 且其中至少有一门成绩高于乙, 则称“学生甲比学生乙成绩好”. 如果一组学生中没有哪位学生比另一位学生成绩好, 并且不存在语文成绩相同、数学成绩也相同的两位学生, 则这一组学生最多有 （　）

(A) 2 人　　(B) 3 人　　(C) 4 人　　(D) 5 人

二、填空题

9. 复数 $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2=$_____.

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $\boldsymbol{b}=(2,1)$, 且 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ ($\lambda\in\mathbf{R}$), 则 $|\lambda|=$_____.

11. 设双曲线 C 经过点 $(2,2)$, 且与 $\dfrac{y^2}{4}-x^2=1$ 具有相同渐近线, 则 C 的方程为_____; 渐近线方程为_____.

12. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7+a_8+a_9>0$, $a_7+a_{10}<0$, 则当 $n=$_____时, $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.

13. 把 5 件不同产品摆成一排, 若产品 A 与产品 B 相邻, 且产品 A 与产品 C 不相邻, 则不同的摆法有_____种.

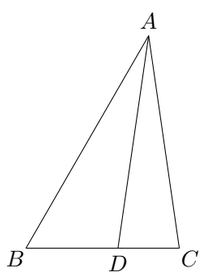
14. 设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A>0$, $\omega>0$). 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____.

三、解答题

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=\dfrac{\pi}{3}$, $AB=8$, 点 D 在 BC 上, 且 $CD=2$, $\cos\angle ADC=\dfrac{1}{7}$.

(1) 求 $\sin\angle BAD$;

(2) 求 BD, AC 的长.



16. 李明在 10 场篮球比赛中的投篮情况 (假设各场比赛相互独立):

场次	投篮次数	命中次数	场次	投篮次数	命中次数
主场 1	22	12	客场 1	18	8
主场 2	15	12	客场 2	13	12
主场 3	12	8	客场 3	21	7
主场 4	23	8	客场 4	18	15
主场 5	24	20	客场 5	25	12

(1) 从上述比赛随机选择一场, 求李明在该场比赛中的投篮命中率超过 0.6 的概率;

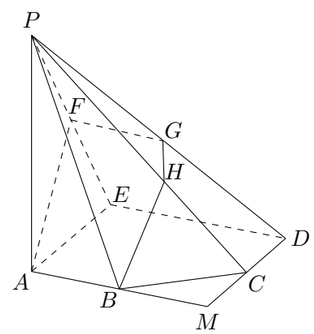
(2) 从上述比赛中随机选择一个主场和客场, 求李明的投篮命中率一场超过 0.6, 一场不超过 0.6 的概率;

(3) 记 $\overline{x}$ 是表中 10 个命中次数的平均数, 从上述比赛中随机选择一场, 记 X 为李明在这场比赛中命中次数, 比较 $E(X)$ 与 $\overline{x}$ 的大小. (只需要写出结论)

17. 如图, 正方形 $AMDE$ 的边长为 2, B, C 分别为 AM, MD 的中点, 在五棱锥 $P-ABCDE$ 中, F 为棱 PE 的中点, 平面 ABF 与棱 PD, PC 分别交于点 G, H.

(1) 求证: $AB\parallel FG$;

(2) 若 $PA\perp$ 平面 $ABCDE$, 且 $PA=AE$, 求直线 BC 与平面 ABF 所成角的大小, 并求线段 PH 的长.



18. 已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
(1) 求证: $f(x)\leqslant 0$;
(2) 若 $a<\dfrac{\sin x}{x}<b$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立, 求 a 的最大值与 b 的最小值.

19. 已知椭圆 $C: x^2+2y^2=4$.
(1) 求椭圆 C 的离心率;
(2) 设 O 为坐标原点, 若点 A 在椭圆 C 上, 点 B 在直线 $y=2$ 上, 且 $OA\perp OB$, 试判断直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系, 并证明你的结论.

20. 对于数对序列 P: (a_1,b_1), (a_2,b_2), $\cdots$, (a_n,b_n), 记 $T_1(P)=a_1+b_1$, $T_k(P)=b_k+\max\{T_{k-1}(P),a_1+a_2+\cdots+a_k\}$ $(2\leqslant k\leqslant n)$, 其中 $\max\{T_{k-1}(P),a_1+a_2+\cdots+a_k\}$ 表示 $T_{k-1}(P)$ 和 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ 两个数中最大的数.
(1) 对于数对序列 $P:(2,5)$, $(4,1)$, 求 $T_1(P)$, $T_2(P)$ 的值;
(2) 记 m 为 a, b, c, d 四个数中最小值, 对于由两个数对 (a,b), (c,d) 组成的数对序列 P: (a,b), (c,d) 和 $P':(c,d)$, (a,b), 试分别对 $m=a$ 和 $m=d$ 时两种情况比较 $T_2(P)$ 和 $T_2(P')$ 的大小;
(3) 在由 5 个数对 $(11,8)$, $(5,2)$, $(16,11)$, $(11,11)$, $(4,6)$ 组成的所有数对序列中, 写出一个数对序列 P 使 $T_5(P)$ 最小, 并写出 $T_5(P)$ 的值. (只需写出结论)

2014 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{0,1,2,4\}$, $B=\{1,2,3\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{0,1,2,3,4\}$　(B) $\{0,4\}$　(C) $\{1,2\}$　(D) $\{3\}$

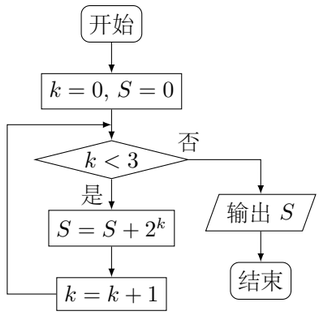
2. 下列函数中, 定义域是 $\mathbf{R}$ 且为增函数的是 （　）

(A) $y=\mathrm{e}^{-x}$　(B) $y=x^3$　(C) $y=\ln x$　(D) $y=|x|$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$, $\boldsymbol{b}=(-1,1)$, 则 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$ （　）

(A) $(5,7)$　(B) $(5,9)$　(C) $(3,7)$　(D) $(3,9)$

4. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 值为 （　）



(A) 1　(B) 3　(C) 7　(D) 15

5. 设 a, b 是实数, 则“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的 （　）

(A) 充分且不必要条件　(B) 必要且不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

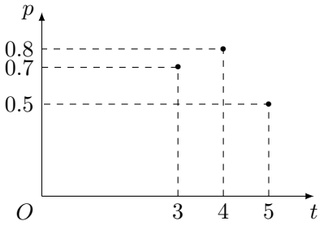
6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{6}{x}-\log_2 x$, 在下列区间中, 包含 $f(x)$ 零点的区间是（　）

(A) $(0,1)$　(B) $(1,2)$　(C) $(2,4)$　(D) $(4,+\infty)$

7. 已知圆 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 和两点 $A(-m,0)$, $B(m,0)$ $(m>0)$, 若圆 C 上存在点 P, 使得 $\angle APB=90^\circ$, 则 m 的最大值为 （　）

(A) 7　(B) 6　(C) 5　(D) 4

8. 加工爆米花时, 爆开且不糊的粒数的百分比称为“可食用率”. 在特定条件下, 可食用率 p 与加工时间 t (单位: 分钟) 满足函数关系 $p=at^2+bt+c$ (a, b, c 是常数), 下图记录了三次实验的数据. 根据上述函数模型和实验数据, 可以得到最佳加工时间为 （　）



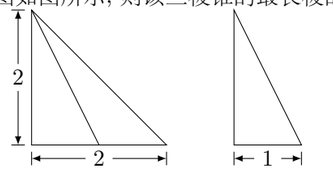
(A) 3.50 分钟　(B) 3.75 分钟　(C) 4.00 分钟　(D) 4.25 分钟

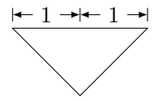
二、填空题

9. 若 $(x+\mathrm{i})\,\mathrm{i}=-1+2\mathrm{i}$ $(x\in\mathbf{R})$, 则 $x=$_____.

10. 设双曲线 C 的两个焦点为 $\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\left(\sqrt{2},0\right)$, 一个顶点是 $(1,0)$, 则 C 的方程为_____.

11. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的最长棱的棱长为_____.





俯视图

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=1$, $b=2$, $\cos C=\dfrac{1}{4}$, 则 $c=$_____; $\sin A=$_____.

13. 若 x, y 满足 $\begin{cases}y\leqslant 1\\ x-y-1\leqslant 0\\ x+y-1\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=\sqrt{3}x+y$ 的最小值为_____.

14. 顾客请一位工艺师把 A, B 两件玉石原料各制成一件工艺品, 工艺师带一位徒弟完成这项任务, 每件原料先由徒弟完成粗加工, 再由工艺师进行精加工完成制作, 两件工艺品都完成后交付顾客, 两件原料每道工序所需时间 (单位: 工作日) 如下:

时间 / 工序 / 原料	粗加工	精加工
原料 A	9	15
原料 B	6	21

则最短交货期为_____个工作日.

三、解答题

15. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 满足 $a_1=3$, $a_4=12$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=4$, $b_4=20$, 且 $\{b_n-a_n\}$ 是等比数列.

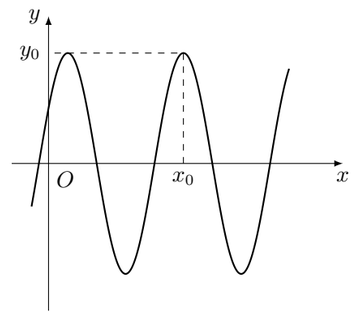
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

16. 函数 $f(x)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的部分图象如图所示.

(1) 写出 $f(x)$ 的最小正周期及图中 x_0, y_0 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{12}\right]$ 上的最大值和最小值.

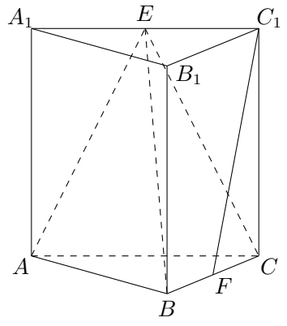


17. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱垂直于底面, $AB\perp BC$, $AA_1=AC=2$, $BC=1$, E, F 分别为 A_1C_1, BC 的中点.

(1) 求证: 平面 $ABE\perp$ 平面 B_1BCC_1;

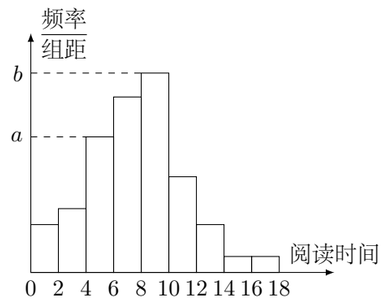
(2) 求证: $C_1F\parallel$ 平面 ABE;

(3) 求三棱锥 $E-ABC$ 的体积.



18. 从某校随机抽取 100 名学生, 获得了他们一周课外阅读时间 (单位: 小时) 的数据, 整理得到数据分组及频数分布表和频率分布直方图:

组号	分组	频数
1	$[0,2)$	6
2	$[2,4)$	8
3	$[4,6)$	17
4	$[6,8)$	22
5	$[8,10)$	25
6	$[10,12)$	12
7	$[12,14)$	6
8	$[14,16)$	2
9	$[16,18)$	2
合计		100



(1) 从该校随机选取一名学生, 试估计这名学生该周课外阅读时间少于 12 小时的概率;
(2) 求频率分布直方图中的 a, b 的值;
(3) 假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替, 试估计样本中的 100 名学生该周课外阅读时间的平均数在第几组. (只需写出结论)

19. 已知椭圆 $C: x^2+2y^2=4$.
(1) 求椭圆 C 的离心率;
(2) 设 O 为原点, 若点 A 在直线 $y=2$ 上, 点 B 在椭圆 C 上, 且 $OA \perp OB$, 求线段 AB 长度的最小值.

20. 已知函数 $f(x)=2x^3-3x$.
(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值;
(2) 若过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切, 求 t 的取值范围;
(3) 问过点 $A(-1,2)$, $B(2,10)$, $C(0,2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切? (只需写出结论)

2014 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 在复平面内表示复数 $\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})$ 的点位于 （　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 对任意等比数列 $\{a_n\}$, 下列说法一定正确的是 （　）

(A) a_1, a_3, a_9 成等比数列　(B) a_2, a_3, a_6 成等比数列

(C) a_2, a_4, a_8 成等比数列　(D) a_3, a_6, a_9 成等比数列

3. 已知变量 x 与 y 正相关, 且由观测数据算得样本平均数 $\bar{x}=3$, $\bar{y}=3.5$, 则由该观测数据算得的线性回归方程可能是 （　）

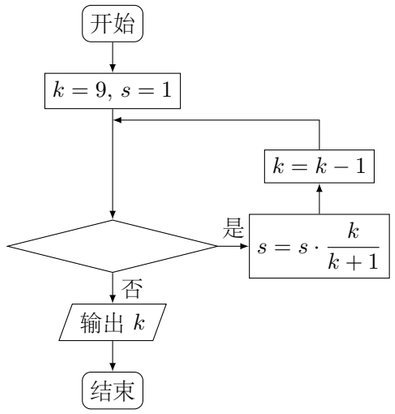
(A) $\hat{y}=0.4x+2.3$　(B) $\hat{y}=2x-2.4$

(C) $\hat{y}=-2x+9.5$　(D) $\hat{y}=-0.3x+4.4$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(k,3)$, $\boldsymbol{b}=(1,4)$, $\boldsymbol{c}=(2,1)$, 且 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$, 则实数 $k=$ （　）

(A) $-\dfrac{9}{2}$　(B) 0　(C) 3　(D) $\dfrac{15}{2}$

5. 执行如图所示的程序框图, 若输出 k 的值为 6, 则判断框内可填入的条件是 （　）

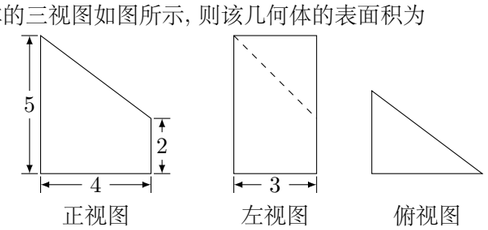


(A) $s>\dfrac{1}{2}$　(B) $s>\dfrac{3}{5}$　(C) $s>\dfrac{7}{10}$　(D) $s>\dfrac{4}{5}$

6. 已知命题 p : 对任意 $x\in\mathbf{R}$, 总有 $2^x>0$; q : “$x>1$”是“$x>2$”的充分不必要条件. 则下列命题为真命题的是 （　）

(A) $p\wedge q$　(B) $\neg p\wedge\neg q$　(C) $\neg p\wedge q$　(D) $p\wedge\neg q$

7. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 （　）



(A) 54　(B) 60　(C) 66　(D) 72

8. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的左、右焦点, 双曲线上存在一点 P 使得 $|PF_1|+|PF_2|=3b$, $|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{9}{4}ab$, 则该双曲线的离心率为 （　）

(A) $\dfrac{4}{3}$　(B) $\dfrac{5}{3}$　(C) $\dfrac{9}{4}$　(D) 3

9. 某次联欢会要安排 3 个歌舞类节目, 2 个小品类节目和 1 个相声类节目的演出顺序, 则同类节目不相邻的排法种数是 （　）

(A) 72　(B) 120　(C) 144　(D) 168

10. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\sin 2A+\sin(A-B+C)=\sin(C-A-B)+\dfrac{1}{2}$, 面积 S 满足 $1\leqslant S\leqslant 2$, 记 a, b, c 分别为 A, B, C 所对的边, 则下列不等式一定成立的是 （　）

(A) $bc(b+c)>8$　(B) $ab(a+b)>16\sqrt{2}$

(C) $6\leqslant abc\leqslant 12$　(D) $12\leqslant abc\leqslant 24$

二、填空题

11. 设全集 $U=\{n\in\mathbf{N}\,|\,1\leqslant n\leqslant 10\}$, $A=\{1,2,3,5,8\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B=$_____.

12. 函数 $f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)$ 的最小值为_____.

13. 已知直线 $ax+y-2=0$ 与圆心为 C 的圆 $(x-1)^2+(y-a)^2=4$ 相交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则实数 $a=$_____.

14. 过圆外一点 P 作圆的切线 PA (A 为切点), 再作割线 PBC 依次交圆于 B,C, 若 $PA=6$, $AC=8$, $BC=9$, 则 $AB=$_____.

15. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\\y=3+t\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$ ($\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<2\pi$), 则直线 l 与曲线 C 的公共点的极径 $\rho=$_____.

16. 若不等式 $|2x-1|+|x+2|\geqslant a^2+\dfrac{1}{2}a+2$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称, 且图象上相邻两个最高点的距离为 π.

(1) 求 ω 和 φ 的值;

(2) 若 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}\right)$, 求 $\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的值.

18. 一盒中装有 9 张各写有一个数字的卡片, 其中 4 张卡片上的数字是 1, 3 张卡片上的数字是 2, 2 张卡片上的数字是 3, 从盒中任取 3 张卡片.

(1) 求所取 3 张卡片上的数字完全相同的概率;

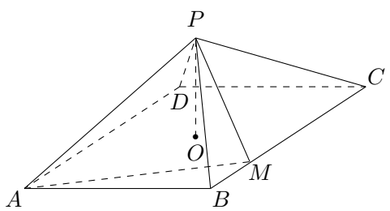
(2) X 表示所取 3 张卡片上的数字的中位数, 求 X 的分布列与数学期望.

(注: 若三个数 a, b, c 满足 $a\leqslant b\leqslant c$, 则称 b 为这三个数的中位数)

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是以 O 为中心的菱形, $PO\perp$ 底面 $ABCD$, $AB=2$, $\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$, M 为 BC 上一点, 且 $BM=\dfrac{1}{2}$, $MP\perp AP$.

(1) 求 PO 的长;

(2) 求二面角 $A-PM-C$ 的正弦值.



20. 已知函数 $f(x)=ae^{2x}-be^{-2x}-cx$ $(a,\ b,\ c\in\mathbf{R})$ 的导函数 $f'(x)$ 为偶函数, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 $4-c$.

(1) 确定 a, b 的值;

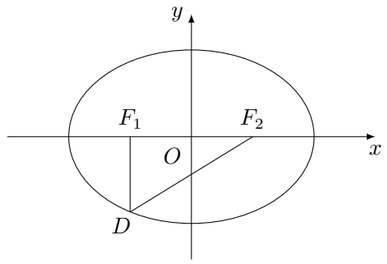
(2) 若 $c=3$, 判断 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若 $f(x)$ 有极值, 求 c 的取值范围.

21. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 点 D 在椭圆上, $DF_1\perp F_1F_2$, $\dfrac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}$, $\triangle DF_1F_2$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 设圆心在 y 轴上的圆与椭圆在 x 轴的上方有两个交点, 且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点, 求圆的半径.



22. 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2-2a_n+2}+b$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 若 $b=1$, 求 a_2, a_3 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b=-1$, 问: 是否存在实数 c, 使得 $a_{2n}<c<a_{2n+1}$ 对所有 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立? 证明你的结论.

2014 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 实部为 -2, 虚部为 1 的复数所对应的点位于复平面的（　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_3+a_5=10$, 则 $a_7=$（　）

(A) 5　(B) 8　(C) 10　(D) 14

3. 某中学有高中生 3500 人, 初中生 1500 人, 为了解学生的学习情况, 用分层抽样的方法从该校学生中抽取一个容量为 n 的样本, 已知从高中生中抽取 70 人, 则 n 为（　）

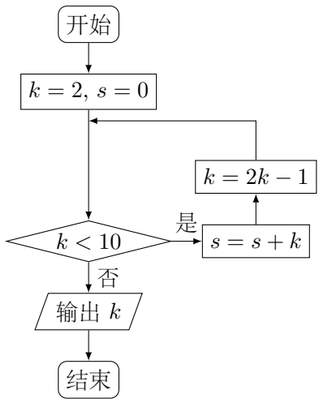
(A) 100　(B) 150　(C) 200　(D) 250

4. 下列函数为偶函数的是（　）

(A) $f(x)=x-1$　(B) $f(x)=x^2+x$

(C) $f(x)=2^x-2^{-x}$　(D) $f(x)=2^x+2^{-x}$

5. 执行如图所示的程序框图, 则输出 s 的值为（　）

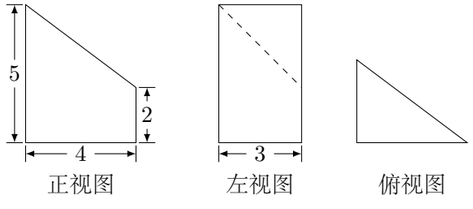


(A) 10　(B) 17　(C) 19　(D) 36

6. 已知命题 p: 对任意 $x\in\mathbf{R}$, 总有 $|x|\geqslant 0$; q: $x=1$ 是方程 $x+2=0$ 的根, 则下列命题为真命题的是（　）

(A) $p\wedge\neg q$　(B) $\neg p\wedge q$　(C) $\neg p\wedge\neg q$　(D) $p\wedge q$

7. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为（　）



(A) 12　(B) 18　(C) 24　(D) 30

8. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点, 双曲线上存在一点 P 使得 $(|PF_1|-|PF_2|)^2=b^2-3ab$, 则该双曲线的离心率为（　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{15}$　(C) 4　(D) $\sqrt{17}$

9. 若 $\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$, 则 $a+b$ 的的最小值是（　）

(A) $6+2\sqrt{3}$　(B) $7+2\sqrt{3}$　(C) $6+4\sqrt{3}$　(D) $7+4\sqrt{3}$

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-3, & x\in(-1,0]\\ x, & x\in(0,1]\end{cases}$, 且 $g(x)=f(x)-mx-m$ 在 $(-1,1]$ 内有且仅有两个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是（　）

(A) $\left(-\dfrac{9}{4},-2\right]\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　(B) $\left(-\dfrac{11}{4},-2\right]\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

(C) $\left(-\dfrac{9}{4},-2\right]\cup\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$　(D) $\left(-\dfrac{11}{4},-2\right]\cup\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$

二、填空题

11. 已知集合 $A=\{3,4,5,12,13\}$, $B=\{2,3,5,8,13\}$, 则 $A\cap B=$_____.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, 且 $\boldsymbol{a}=(-2,-6)$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____.

13. 将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半, 纵坐标不变, 再向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=\sin x$ 的图象, 则 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=$_____.

14. 已知直线 $x-y+a=0$ 与圆心为 C 的圆 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 相交于 A, B 两点, 且 $AC\perp BC$, 则实数 a 的值为_____.

15. 某校早上 8 : 00 上课, 假设该校学生小张与小王在早上 7 : 30 – 7 : 50 之间到校, 且每人在该时间段的任何时刻到校是等可能的, 则小张比小王至少早 5 分钟到校的概率为_____. (用数字作答)

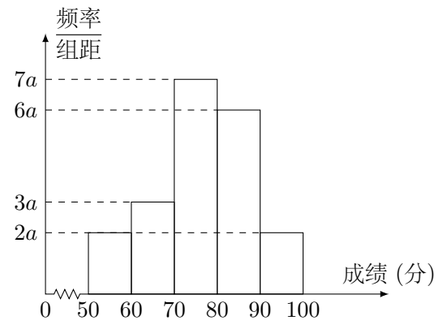
三、解答题

16. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 求 a_n 及 S_n;

(2) 设 $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 公比 q 满足 $q^2-(a_4+1)q+S_4=0$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 T_n.

17. 20 名学生某次数学考试成绩 (单位: 分) 的频率分布直方图如图.



(1) 求频率分布直方图中 a 的值;

(2) 分别求出成绩落在 $[50,60)$ 与 $[60,70)$ 中的学生人数;

(3) 从成绩在 $[50,70)$ 的学生中任选 2 人, 求此 2 人的成绩都在 $[60,70)$ 中的概率.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且 $a+b+c=8$.

(1) 若 $a=2$, $b=\dfrac{5}{2}$, 求 $\cos C$ 的值;

(2) 若 $\sin A\cos^2\dfrac{B}{2}+\sin B\cos^2\dfrac{A}{2}=2\sin C$, 且 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{9}{2}\sin C$, 求 a 和 b 的值.

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{a}{x}-\ln x-\dfrac{3}{2}$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于 $y=\dfrac{1}{2}x$.

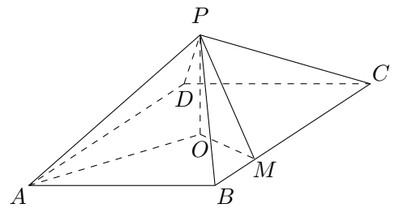
(1) 求 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是以 O 为中心的菱形, $PO\perp$ 底面 $ABCD$, $AB=2$, $\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$, M 为 BC 上一点, 且 $BM=\dfrac{1}{2}$.

(1) 证明: $BC\perp$ 平面 POM;

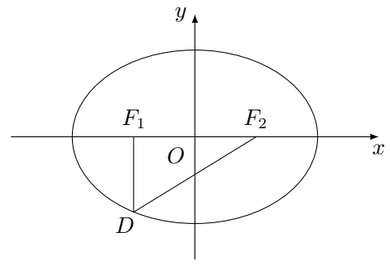
(2) 若 $MP\perp AP$, 求四棱锥 $P-ABMO$ 的体积.



21. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 点 D 在椭圆上, $DF_1\perp F_1F_2$, $\dfrac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}$, $\triangle DF_1F_2$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 是否存在圆心在 y 轴上的圆, 使圆在 x 轴的上方与椭圆有两个交点, 且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点? 若存在, 求出圆的方程; 若不存在, 请说明理由.



2014 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 $z=\dfrac{10\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$, 则 z 的共轭复数为 （ ）

(A) $-1+3\mathrm{i}$ (B) $-1-3\mathrm{i}$ (C) $1+3\mathrm{i}$ (D) $1-3\mathrm{i}$

2. 设集合 $M=\{x\mid x^2-3x-4<0\}$, $N=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$, 则 $M\cap N=$（ ）

(A) $(0,4]$ (B) $[0,4)$ (C) $[-1,0)$ (D) $(-1,0]$

3. 设 $a=\sin 33^\circ$, $b=\cos 55^\circ$, $c=\tan 35^\circ$, 则 （ ）

(A) $a>b>c$ (B) $b>c>a$ (C) $c>b>a$ (D) $c>a>b$

4. 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足: $|\boldsymbol{a}|=1$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$, $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$ （ ）

(A) 2 (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 （ ）

(A) 60 种 (B) 70 种 (C) 75 种 (D) 150 种

6. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A、B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ (C) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

7. 曲线 $y=x\mathrm{e}^{x-1}$ 在点 $(1,1)$ 处切线的斜率等于 （ ）

(A) 2e (B) e (C) 2 (D) 1

8. 正四棱锥的顶点都在同一球面上, 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 （ ）

(A) $\dfrac{81\pi}{4}$ (B) 16π (C) 9π (D) $\dfrac{27\pi}{4}$

9. 已知双曲线 C 的离心率为 2, 焦点为 F_1、F_2, 点 A 在 C 上, 若 $|F_1A|=2|F_2A|$, 则 $\cos\angle AF_2F_1=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

10. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4=2$, $a_5=5$, 则数列 $\{\lg a_n\}$ 的前 8 项和等于 （ ）

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

11. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60°, $AB\subset\alpha$, $AB\perp l$, A 为垂足, $CD\subset\beta$, $C\in l$, $\angle ACD=135^\circ$, 则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

12. 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x+y=0$ 对称, 则 $y=f(x)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=g(x)$ (B) $y=g(-x)$ (C) $y=-g(x)$ (D) $y=-g(-x)$

二、填空题

13. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}-\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为_____. (用数字作答)

14. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+2y\leqslant 3\\ x-2y\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=x+4y$ 的最大值为_____.

15. 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线, 若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1,3)$, 则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于_____.

16. 若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 已知 $3a\cos C=2c\cos A$, $\tan A=\dfrac{1}{3}$, 求 B.

18. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=10$, a_2 为整数, 且 $S_n\leqslant S_4$.

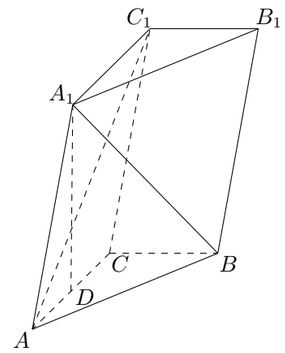
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=1$, $AC=CC_1=2$.

(1) 证明: $AC_1\perp A_1B$;

(2) 设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$, 求二面角 A_1-AB-C 的大小.



20. 设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4, 各人是否需使用设备相互独立.
(1) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;
(2) X 表示同一工作日需使用设备的人数, 求 X 的数学期望.

21. 已知抛物线 $C: y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F, 直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P, 与 C 的交点为 Q, 且 $|QF|=\dfrac{5}{4}|PQ|$.
(1) 求 C 的方程;
(2) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M、N 两点, 且 A、M、B、N 四点在同一圆上, 求 l 的方程.

22. 函数 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+a}\ (a>1)$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\ln(a_n+1)$, 证明: $\dfrac{2}{n+2}<a_n\leqslant\dfrac{3}{n+2}$.

2014 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{1,2,4,6,8\}$, $N=\{1,2,3,5,6,7\}$, 则 $M\cap N$ 中元素的个数为 （　）

(A) 2　　(B) 3　　(C) 5　　(D) 7

2. 已知角 α 的终边经过点 $(-4,3)$, 则 $\cos\alpha=$ （　）

(A) $\dfrac{4}{5}$　　(B) $\dfrac{3}{5}$　　(C) $-\dfrac{3}{5}$　　(D) $-\dfrac{4}{5}$

3. 不等式组 $\begin{cases}x(x+2)>0\\|x|<1\end{cases}$ 的解集为 （　）

(A) $\{x\,|\,-2<x<-1\}$　　(B) $\{x\,|\,-1<x<0\}$

(C) $\{x\,|\,0<x<1\}$　　(D) $\{x\,|\,x>1\}$

4. 已知正四面体 $ABCD$ 中, E 是 AB 的中点, 则异面直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为 （　）

(A) $\dfrac{1}{6}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5. 函数 $y=\ln(\sqrt[3]{x}+1)$ $(x>-1)$ 的反函数是 （　）

(A) $y=(1-\mathrm{e}^x)^3$ $(x>-1)$　　(B) $y=(\mathrm{e}^x-1)^3$ $(x>-1)$

(C) $y=(1-\mathrm{e}^x)^3$ $(x\in\mathbf{R})$　　(D) $y=(\mathrm{e}^x-1)^3$ $(x\in\mathbf{R})$

6. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为单位向量, 其夹角为 $60°$, 则 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=$ （　）

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

7. 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 （　）

(A) 60 种　　(B) 70 种　　(C) 75 种　　(D) 150 种

8. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_2=3$, $S_4=15$, 则 $S_6=$ （　）

(A) 31　　(B) 32　　(C) 63　　(D) 64

9. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A、B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　(C) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

10. 正四棱锥的顶点都在同一球面上, 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 （　）

(A) $\dfrac{81\pi}{4}$　　(B) 16π　　(C) 9π　　(D) $\dfrac{27\pi}{4}$

11. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 2, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 则 C 的焦距等于 （　）

(A) 2　　(B) $2\sqrt{2}$　　(C) 4　　(D) $4\sqrt{2}$

12. 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(1)=1$, 则 $f(8)+f(9)=$ （　）

(A) -2　　(B) -1　　(C) 0　　(D) 1

二、填空题

13. $(x-2)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为_____. (用数字作答)

14. 函数 $y=\cos 2x+2\sin x$ 的最大值为_____.

15. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+2y\leqslant 3\\x-2y\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=x+4y$ 的最大值为_____.

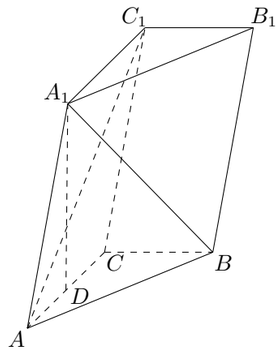
16. 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线, 若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1,3)$, 则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于_____.

三、解答题

17. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.
(1) 设 $b_n=a_{n+1}-a_n$, 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 已知 $3a\cos C=2c\cos A$, $\tan A=\dfrac{1}{3}$, 求 B.

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上, $\angle ACB=90°$, $BC=1$, $AC=CC_1=2$.
(1) 证明: $AC_1\perp A_1B$;
(2) 设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$, 求二面角 A_1-AB-C 的大小.



20. 设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4, 各人是否需使用设备相互独立.
(1) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;
(2) 实验室计划购买 k 台设备供甲、乙、丙、丁使用, 若要求"同一工作日需使用设备的人数大于 k"的概率小于 0.1, 求 k 的最小值.

21. 函数 $f(x)=ax^3+3x^2+3x\ (a\neq 0)$.
(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 是增函数, 求 a 的取值范围.

22. 已知抛物线 $C: y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F, 直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P, 与 C 的交点为 Q, 且 $|QF|=\dfrac{5}{4}|PQ|$.
(1) 求 C 的方程;
(2) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M、N 两点, 且 A、M、B、N 四点在同一圆上, 求 l 的方程.

2014 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $z=(3-2\mathrm{i})\,\mathrm{i}$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 等于 （ ）

(A) $-2-3\mathrm{i}$　(B) $-2+3\mathrm{i}$　(C) $2-3\mathrm{i}$　(D) $2+3\mathrm{i}$

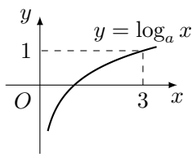
2. 某空间几何体的正视图是三角形, 则该几何体不可能是 （ ）

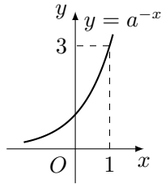
(A) 圆柱　(B) 圆锥　(C) 四面体　(D) 三棱柱

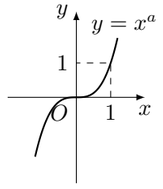
3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_1=2$, $S_3=12$, 则 $a_6=$ （ ）

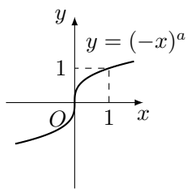
(A) 8　(B) 10　(C) 12　(D) 14

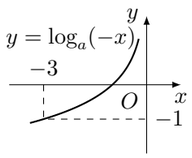
4. 若函数 $y=\log_a x$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的图象如图所示, 则下列函数图象正确的是 （ ）



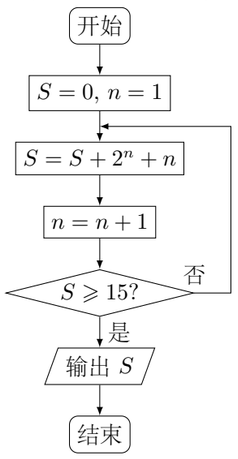
(A)


(B)


(C)


(D)


5. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 S 的值等于 （ ）



(A) 18　(B) 20　(C) 21　(D) 40

6. 直线 $l: y=kx+1$ 与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相交于 A, B 两点, 则“$k=1$”是“$\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分又不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ \cos x, & x\leqslant 0\end{cases}$, 则下列结论正确的是 （ ）

(A) $f(x)$ 是偶函数　(B) $f(x)$ 是增函数

(C) $f(x)$ 是周期函数　(D) $f(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$

8. 在下列向量组中, 可以把向量 $\boldsymbol{a}=(3,2)$ 表示出来的是 （ ）

(A) $\boldsymbol{e}_1=(0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(1,2)$　(B) $\boldsymbol{e}_1=(-1,2)$, $\boldsymbol{e}_2=(5,-2)$

(C) $\boldsymbol{e}_1=(3,5)$, $\boldsymbol{e}_2=(6,10)$　(D) $\boldsymbol{e}_1=(2,-3)$, $\boldsymbol{e}_2=(-2,3)$

9. 设 P, Q 分别为圆 $x^2+(y-6)^2=2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ 上的点, 则 P, Q 两点间的最大距离是 （ ）

(A) $5\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{46}+\sqrt{2}$　(C) $7+\sqrt{2}$　(D) $6\sqrt{2}$

10. 用 a 代表红球, b 代表蓝球, c 代表黑球, 由加法原理及乘法原理, 从 1 个红球和 1 个蓝球中取出若干个球的所有取法可由 $(1+a)(1+b)$ 的展开式 $1+a+b+ab$ 表示出来, 如: “1”表示一个球都不取、“a”表示取出一个红球, 而“ab”则表示把红球和蓝球都取出来. 以此类推, 下列各式中, 其展开式可用来表示从 5 个无区别的红球、5 个无区别的蓝球、5 个有区别的黑球中取出若干个球, 且所有的蓝球都取出或都不取出的所有取法的是 （ ）

(A) $(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)(1+b^5)(1+c)^5$

(B) $(1+a^5)(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)(1+c)^5$

(C) $(1+a)^5(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)(1+c^5)$

(D) $(1+a^5)(1+b)^5(1+c+c^2+c^3+c^4+c^5)$

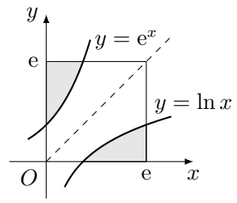
二、填空题

11. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\leqslant 0\\ x+2y-8\leqslant 0\\ x\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+y$ 的最小值为_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $A=60^\circ$, $AC=4$, $BC=2\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于_____.

13. 要制作一个容积为 4 m^3, 高为 1 m 的无盖长方体容器, 已知该容器的底面造价是每平方米 20 元, 侧面造价是每平方米 10 元, 则该容器的最低总造价是_____. (单位: 元)

14. 如图, 在边长为 e (e 为自然对数的底数) 的正方形中随机撒一粒黄豆, 则它落到阴影部分的概率为_____.



15. 若集合 $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$, 且下列四个关系: ① $a=1$; ② $b\neq 1$; ③ $c=2$; ④ $d\neq 4$, 有且只有一个是正确的, 则符合条件的有序数组 (a,b,c,d) 的个数是_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}$.

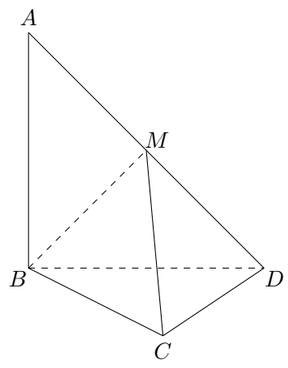
(1) 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $f(\alpha)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

17. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=BD=CD=1$, $AB\perp BD$, $CD\perp BD$. 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使得平面 $ABD\perp$ 平面 BCD, 如图.

(1) 求证: $AB\perp CD$;

(2) 若 M 为 AD 中点, 求直线 AD 与平面 MBC 所成角的正弦值.



18. 为回馈顾客, 某商场拟通过摸球兑奖的方式对 1000 位顾客进行奖励, 规定: 每位顾客从一个装有 4 个标有面值的球的袋中一次性随机摸出 2 个球, 球上所标的面值之和为该顾客所获的奖励额.

(1) 若袋中所装的 4 个球中有 1 个所标的面值为 50 元, 其余 3 个均为 10 元, 求:

① 顾客所获的奖励额为 60 元的概率;

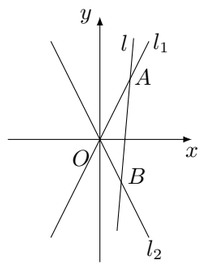
② 顾客所获的奖励额的分布列及数学期望;

(2) 商场对奖励总额的预算是 60000 元, 并规定袋中的 4 个球只能由标有面值 10 元和 50 元的两种球组成, 或标有面值 20 元和 40 元的两种球组成. 为了使顾客得到的奖励总额尽可能符合商场的预算且每位顾客所获的奖励额相对均衡, 请对袋中的 4 个球的面值给出一个合适的设计, 并说明理由.

19. 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别为 $l_1:y=2x,\ l_2:y=-2x$.

(1) 求双曲线 E 的离心率;

(2) 如图, O 为坐标原点, 动直线 l 分别交直线 l_1, l_2 于 A, B 两点 (A, B 分别在第一, 四象限), 且 $\triangle OAB$ 的面积恒为 8, 试探究: 是否存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线 E? 若存在, 求出双曲线 E 的方程; 若不存在, 说明理由.



20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ (a 为常数) 的图象与 y 轴交于点 A, 曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为 -1.

(1) 求 a 的值及函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 证明: 当 $x>0$ 时, $x^2<\mathrm{e}^x$;

(3) 证明: 对任意给定的正数 c, 总存在 x_0, 使得当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时, 恒有 $x^2<c\mathrm{e}^x$.

21. 三选二.

【A】已知矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵 A;

(2) 求矩阵 A^{-1} 的特征值以及属于每个特征值的一个特征向量.

【B】已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a-2t\\y=-4t\end{cases}$ (t 为参数), 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\theta\\y=4\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).

(1) 求直线 l 和圆 C 的普通方程;

(2) 若直线 l 与圆 C 有公共点, 求实数 a 的取值范围.

【C】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=|x+1|+|x-2|$ 的最小值为 a.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 p, q, r 为正实数, 且 $p+q+r=a$, 求证: $p^2+q^2+r^2\geqslant 3$.

2014 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $P=\{x\mid 2\leqslant x<4\}$, $Q=\{x\mid x\geqslant 3\}$, 则 $P\cap Q$ 等于 （ ）

(A) $\{x\mid 3\leqslant x<4\}$ (B) $\{x\mid 3<x<4\}$

(C) $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$ (D) $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$

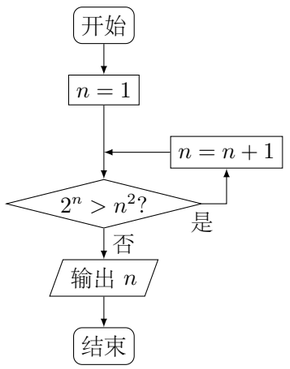
2. 复数 $(3+2\mathrm{i})\,\mathrm{i}$ 等于 （ ）

(A) $-2-3\mathrm{i}$ (B) $-2+3\mathrm{i}$ (C) $2-3\mathrm{i}$ (D) $2+3\mathrm{i}$

3. 以边长为 1 的正方形的一边所在直线为旋转轴, 将该正方形旋转一周所得圆柱的侧面积等于 （ ）

(A) 2π (B) π (C) 2 (D) 1

4. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 n 的值为 （ ）



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 命题“$\forall x\in[0,+\infty),\ x^3+x\geqslant 0$”的否定是 （ ）

(A) $\forall x\in(-\infty,0),\ x^3+x<0$ (B) $\forall x\in(-\infty,0),\ x^3+x\geqslant 0$

(C) $\exists x_0\in[0,+\infty),\ x_0^3+x_0<0$ (D) $\exists x_0\in[0,+\infty),\ x_0^3+x_0\geqslant 0$

6. 已知直线 l 过圆 $x^2+(y-3)^2=4$ 的圆心, 且与直线 $x+y+1=0$ 垂直, 则 l 的方程是 （ ）

(A) $x+y-2=0$ (B) $x-y+2=0$ (C) $x+y-3=0$ (D) $x-y+3=0$

7. 将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位, 得到函数 $y=f(x)$ 的函数图象, 则下列说法正确的是 （ ）

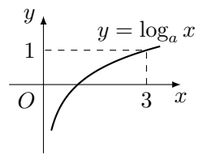
(A) $y=f(x)$ 是奇函数

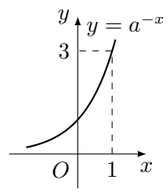
(B) $y=f(x)$ 的周期是 π

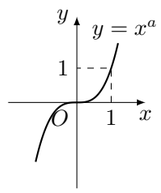
(C) $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

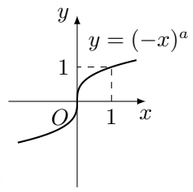
(D) $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 对称

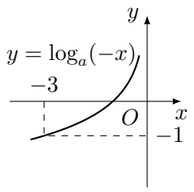
8. 若函数 $y=\log_a x$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的图象如图所示, 则下列函数图象正确的是 （ ）



(A)


(B)


(C)


(D)


9. 要制作一个容积为 4 m^3, 高为 1 m 的无盖长方体容器, 已知该容器的底面造价是每平方米 20 元, 侧面造价是是每平方米 10 元, 则该容器的最低总造价是 （ ）

(A) 80 元 (B) 120 元 (C) 160 元 (D) 240 元

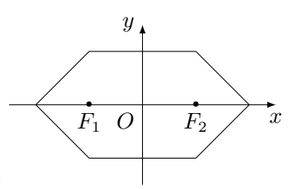
10. 设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点, O 为平行四边形 $ABCD$ 所在平面内任意一点, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ 等于 （ ）

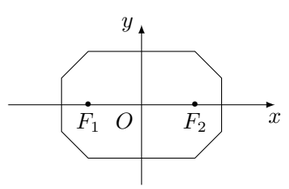
(A) $\overrightarrow{OM}$ (B) $2\overrightarrow{OM}$ (C) $3\overrightarrow{OM}$ (D) $4\overrightarrow{OM}$

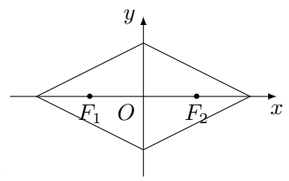
11. 已知圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=1$, 平面区域 $\Omega:\begin{cases}x+y-7\leqslant 0\\ x-y+3\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 若圆心 $C\in\Omega$, 且圆 C 与 x 轴相切, 则 a^2+b^2 的最大值为 （ ）

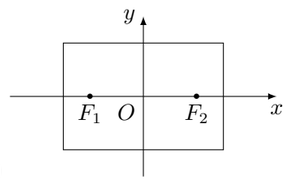
(A) 5 (B) 29 (C) 37 (D) 49

12. 在平面直角坐标系中, 两点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 间的“L− 距离”定义为 $||P_1P_2|=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$, 则平面内与 x 轴上两个不同的定点 F_1, F_2 的“L− 距离”之和等于定值 (大于 $||F_1F_2|$) 的点的轨迹可以是

(A)


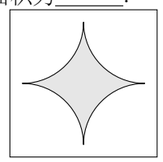
(B)


(C)


(D)


二、填空题

13. 如图, 在边长为 1 的正方形中, 随机撒 1000 粒豆子, 有 180 粒落到阴影部分, 据此估计阴影部分的面积为_____.



14. 在 $\triangle ABC$ 中, $A=60°$, $AC=2$, $BC=\sqrt{3}$, 则 AB 等于_____.

15. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2, & x\leqslant 0\\ 2x-6+\ln x, & x>0\end{cases}$, 的零点个数是_____.

16. 已知集合 $\{a,b,c\}=\{0,1,2\}$, 且下列三个关系: ① $a\neq 2$; ② $b=2$; ③ $c\neq 0$ 有且只有一个正确, 则 $100a+10b+c=$_____.

三、解答题

17. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=3$, $a_5=81$.

(1) 求 a_n;

(2) 设 $b_n=\log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 已知函数 $f(x)=2\cos x(\sin x+\cos x)$.

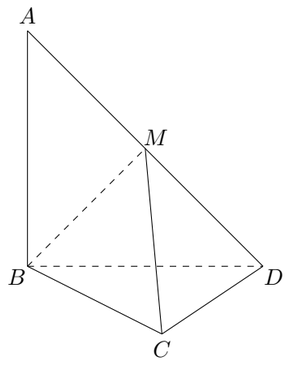
(1) 求 $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

19. 如图, 三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB\perp$ 平面 BCD, $CD\perp BD$.

(1) 求证: $CD\perp$ 平面 ABD;

(2) 若 $AB=BD=CD=1$, M 为 AD 中点, 求三棱锥 $A-MBC$ 的体积.



20. 根据世行 2013 年新标准, 人均 GDP 低于 1035 美元为低收入国家; 人均 GDP 为 1035－4085 美元为中等偏下收入国家; 人均 GDP 为 4085－12616 美元为中等偏上收入国家; 人均 GDP 不低于 12616 美元为高收入国家. 某城市有 5 个行政区, 各区人口占该城市人口比例及人均 GDP 如下表:

行政区	区人口占城市人口比例	区人均 GDP (单位: 美元)
A	25%	8000
B	30%	4000
C	15%	6000
D	10%	3000
E	20%	10000

(1) 判断该城市人均 GDP 是否达到中等偏上收入国家标准;

(2) 现从该城市 5 个行政区中随机抽取 2 个, 求抽到的 2 个行政区人均 GDP 都达到中等偏上收入国家标准的概率.

21. 已知曲线 Γ 上的点到点 $F(0,1)$ 的距离比它到直线 $y=-3$ 的距离小 2.

(1) 求曲线 Γ 的方程;

(2) 曲线 Γ 在点 P 处的切线 l 与 x 轴交于点 A. 直线 $y=3$ 分别与直线 l 及 y 轴交于点 M, N. 以 MN 为直径作圆 C, 过点 A 作圆 C 的切线, 切点为 B, 试探究: 当点 P 在曲线 Γ 上运动 (点 P 与原点不重合) 时, 线段 AB 的长度是否发生变化? 证明你的结论.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ (a 为常数) 的图象与 y 轴交于点 A, 曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为 -1.

(1) 求 a 的值及函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 证明: 当 $x>0$ 时, $x^2<\mathrm{e}^x$;

(3) 证明: 对任意给定的正数 c, 总存在 x_0, 使得当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时, 恒有 $x^2<c\mathrm{e}^x$.

2014 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{-1,0,1\}$, $N=\{0,1,2\}$, 则 $M\cup N=$ （　）

(A) $\{0,1\}$　(B) $\{-1,0,2\}$　(C) $\{-1,0,1,2\}$　(D) $\{-1,0,1\}$

2. 已知复数 z 满足 $(3+4\mathrm{i})z=25$, 则 $z=$ （　）

(A) $-3+4\mathrm{i}$　(B) $-3-4\mathrm{i}$　(C) $3+4\mathrm{i}$　(D) $3-4\mathrm{i}$

3. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant x \\ x+y\leqslant 1 \\ y\geqslant -1 \end{cases}$ 且 $z=2x+y$ 的最大值和最小值分别为 m 和 n, 则 $m-n=$ （　）

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8

4. 若实数 k 满足 $0<k<9$, 则曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9-k}=1$ 与曲线 $\dfrac{x^2}{25-k}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的 （　）

(A) 焦距相等　(B) 实半轴长相等　(C) 虚半轴长相等　(D) 离心率相等

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$, 则下列向量中与 $\boldsymbol{a}$ 成 60° 夹角的是 （　）

(A) $(-1,1,0)$　(B) $(1,-1,0)$　(C) $(0,-1,1)$　(D) $(-1,0,1)$

6. 已知某地区中小学生人数和近视情况如图 1 和图 2 所示, 为了解该地区中小学生的近视形成原因, 用分层抽样的方法抽取 2% 的学生进行调查, 则样本容量和抽取的高中生近视人数分别为 （　）

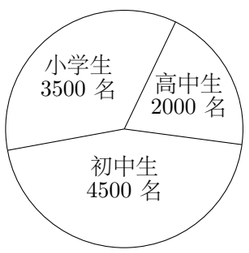


图 1

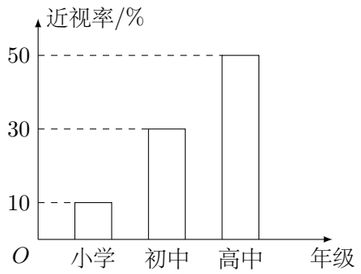


图 2

(A) 200, 20　(B) 100, 20　(C) 200, 10　(D) 100, 10

7. 若空间中四条两两不同的直线 l_1, l_2, l_3, l_4, 满足 $l_1\perp l_2$, $l_2\perp l_3$, $l_3\perp l_4$, 则下列结论一定正确的是 （　）

(A) $l_1\perp l_4$　(B) $l_1\parallel l_4$

(C) l_1, l_4 既不垂直也不平行　(D) l_1, l_4 的位置关系不确定

8. 设集合 $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\,|\,x_i\in\{-1,0,1\},\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, 那么集合 A 中满足条件“$1\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|\leqslant 3$”的元素个数为 （　）

(A) 60　(B) 90　(C) 120　(D) 130

二、填空题

9. 不等式 $|x-1|+|x+2|\geqslant 5$ 的解集为_____.

10. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-5x}+2$ 在点 $(0,3)$ 处的切线方程为_____.

11. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中任取七个不同的数, 则这七个数的中位数是 6 的概率为_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c, 已知 $b\cos C+c\cos B=2b$, 则 $\dfrac{a}{b}=$_____.

13. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2\mathrm{e}^5$, 则 $\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=$_____.

14. 在极坐标系中, 曲线 C_1 和 C_2 的方程分别为 $\rho\sin^2\theta=\cos\theta$ 和 $\rho\sin\theta=1$, 以极点为平面直角坐标系的原点, 极轴为 x 轴的正半轴, 建立平面直角坐标系, 则曲线 C_1 和 C_2 的交点的直角坐标为_____.

15. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在 AB 上, 且 $EB=2AE$, AC 与 DE 交于点 F, 则 $\dfrac{\triangle CDF\text{ 的面积}}{\triangle AEF\text{ 的面积}}=$_____.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=A\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $x\in\mathbf{R}$, 且 $f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{3}{2}$.

(1) 求 A 的值;

(2) 若 $f(\theta)+f(-\theta)=\dfrac{3}{2}$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求 $f\left(\dfrac{3}{4}\pi-\theta\right)$.

17. 随机观测生产某种零件的某工厂 25 名工人的日加工零件数 (单位: 件), 获得数据如下: 30, 42, 41, 36, 44, 40, 37, 37, 25, 45, 29, 43, 31, 36, 49, 34, 33, 43, 38, 42, 32, 34, 46, 39, 36. 根据上述数据得到样本的频率分布表如下:

分组	频数	频率
$[25,30]$	3	0.12
$(30,35]$	5	0.20
$(35,40]$	8	0.32
$(40,45]$	n_1	f_1
$(45,50]$	n_2	f_2

(1) 确定样本频率分布表中 n_1, n_2, f_1 和 f_2 的值;

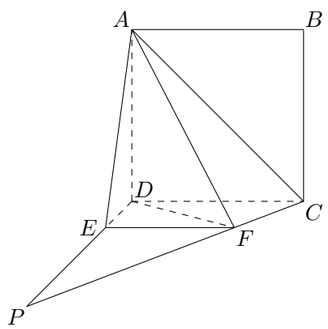
(2) 根据上述频率分布表, 画出样本频率分布直方图;

(3) 根据样本频率分布直方图, 求在该厂任取 4 人, 至少有 1 人的日加工零件数落在区间 $(30,35]$ 的概率.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $\angle DPC=30^\circ$, $AF\perp PC$ 于点 F, $FE\parallel CD$, 交 PD 于点 E.

(1) 证明: $CF\perp$ 平面 ADF;

(2) 求二面角 $D-AF-E$ 的余弦值.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 和为 S_n, 满足 $S_n = 2na_{n+1} - 3n^2 - 4n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $S_3 = 15$.

(1) 求 a_1, a_2, a_3 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的一个焦点为 $\left(\sqrt{5}, 0\right)$, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若动点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 外一点, 且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直, 求点 P 的轨迹方程.

21. 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+2x+k)^2 + 2(x^2+2x+k) - 3}}$, 其中 $k < -2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域 D (用区间表示);

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 D 上的单调性;

(3) 若 $k < -6$, 求 D 上满足条件 $f(x) > f(1)$ 的 x 的集合 (用区间表示).

2014 年普通高等学校招生考试（广东卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{2,3,4\}$, $N=\{0,2,3,5\}$, 则 $M\cap N$ （　）

(A) $\{0,2\}$　(B) $\{2,3\}$　(C) $\{3,4\}$　(D) $\{3,5\}$

2. 已知复数 z 满足 $(3-4\mathrm{i})z=25$, 则 $z=$ （　）

(A) $-3-4\mathrm{i}$　(B) $-3+4\mathrm{i}$　(C) $3-4\mathrm{i}$　(D) $3+4\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(3,1)$, 则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=$ （　）

(A) $(-2,1)$　(B) $(2,-1)$　(C) $(2,0)$　(D) $(4,3)$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\leqslant 8\\0\leqslant x\leqslant 4\\0\leqslant y\leqslant 3\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值等于 （　）

(A) 7　(B) 8　(C) 10　(D) 11

5. 下列函数为奇函数的是 （　）

(A) $2^x-\dfrac{1}{2^x}$　(B) $x^3\sin x$　(C) $2\cos x+1$　(D) x^2+2^x

6. 为了解 1000 名学生的学习情况, 采用系统抽样的方法, 从中抽取容量为 40 的样本, 则分段的间隔为 （　）

(A) 50　(B) 40　(C) 25　(D) 20

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c, 则“$a\leqslant b$”是“$\sin A\leqslant\sin B$”的 （　）

(A) 充分必要条件　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　(D) 非充分非必要条件

8. 若实数 k 满足 $0<k<5$, 则曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{5-k}=1$ 与曲线 $\dfrac{x^2}{16-k}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的 （　）

(A) 实半轴长相等 (B) 虚半轴长相等 (C) 离心率相等　(D) 焦距相等

9. 若空间中四条两两不同的直线 l_1, l_2, l_3, l_4, 满足 $l_1\perp l_2$, $l_2\parallel l_3$, $l_3\perp l_4$, 则下列结论一定正确的是 （　）

(A) $l_1\perp l_4$　(B) $l_1\parallel l_4$

(C) l_1, l_4 既不垂直也不平行　(D) l_1, l_4 的位置关系不确定

10. 对任意复数 w_1, w_2, 定义 $w_1*w_2=w_1\overline{w_2}$, 其中 $\overline{w_2}$ 是 w_2 的共轭复数, 对任意复数 z_1, z_2, z_3 有如下四个命题:
① $(z_1+z_2)*z_3=(z_1*z_3)+(z_2*z_3)$; ② $z_1*(z_2+z_3)=(z_1*z_2)+(z_1*z_3)$;
③ $(z_1*z_2)*z_3=z_1*(z_2*z_3)$; ④ $z_1*z_2=z_2*z_1$.
则真命题的个数是 （　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

二、填空题

11. 曲线 $y=-5\mathrm{e}^x+3$ 在点 $(0,-2)$ 处的切线方程为_____.

12. 从字母 a, b, c, d, e 中任取两个不同字母, 则取到字母 a 的概率为_____.

13. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $a_1a_5=4$, 则 $\log_2a_1+\log_2a_2+\log_2a_3+\log_2a_4+\log_2a_5=$_____.

14. 在极坐标系中, 曲线 C_1 和 C_2 的方程分别为 $2\rho\cos^2\theta=\sin\theta$ 和 $\rho\cos\theta=1$, 以极点为平面直角坐标系的原点, 极轴为 x 轴的正半轴, 建立平面直角坐标系, 则曲线 C_1 和 C_2 的交点的直角坐标为_____.

15. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在 AB 上, 且 $EB=2AE$, AC 与 DE 交于点 F, 则 $\dfrac{\triangle CDF\text{ 的周长}}{\triangle AEF\text{ 的周长}}=$_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=A\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $x\in\mathbf{R}$, 且 $f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
(1) 求 A 的值;
(2) 若 $f(\theta)-f(-\theta)=\sqrt{3}$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)$.

17. 某车间 20 名工人年龄数据如下表:

年龄 (岁)	工人数 (人)
19	1
28	3
29	3
30	5
31	4
32	3
40	1
合计	20

(1) 求这 20 名工人年龄的众数与极差;
(2) 以十位数为茎, 个位数为叶, 作出这 20 名工人年龄的茎叶图;
(3) 求这 20 名工人年龄的方差.

18. 如图 1, 四边形 $ABCD$ 为矩形, $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=1$, $BC=PC=2$, 作如图 2 折叠, 折痕 $EF\parallel DC$. 其中点 E, F 分别在线段 PD, PC 上, 沿 EF 折叠后点 P 叠在线段 AD 上的点记为 M, 并且 $MF\perp CF$.
(1) 证明: $CF\perp$ 平面 MDF;
(2) 求三棱锥 $M-CDE$ 的体积.

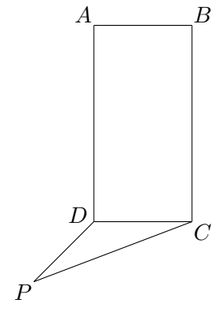


图 1

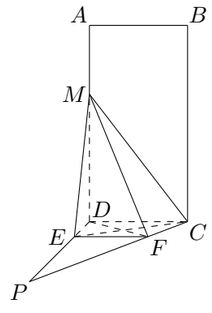


图 2

19. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 S_n 满足 $S_n^2-(n^2+n-3)S_n-3(n^2+n)=0,\ n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_1 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 对一切正整数 n, 有 $\dfrac{1}{a_1(a_1+1)}+\dfrac{1}{a_2(a_2+1)}+\cdots+\dfrac{1}{a_n(a_n+1)}<\dfrac{1}{3}$.

20. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点为 $\left(\sqrt{5},0\right)$, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若动点 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆 C 外一点, 且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直, 求点 P 的轨迹方程.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax+1\ (a\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a<0$ 时, 试讨论是否存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, 使得 $f(x_0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2014 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. i 为虚数单位, 则 $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2=$ （　）

(A) -1　(B) 1　(C) $-\mathrm{i}$　(D) i

2. 若二项式 $\left(2x+\dfrac{a}{x}\right)^7$ 的展开式中 $\dfrac{1}{x^3}$ 的系数是 84, 则实数 $a=$ （　）

(A) 2　(B) $\sqrt[5]{4}$　(C) 1　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

3. 设 U 为全集, A, B 是集合, 则"存在集合 C 使得 $A\subseteq C$, $B\subseteq \complement_U C$"是"$A\cap B=\varnothing$"的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

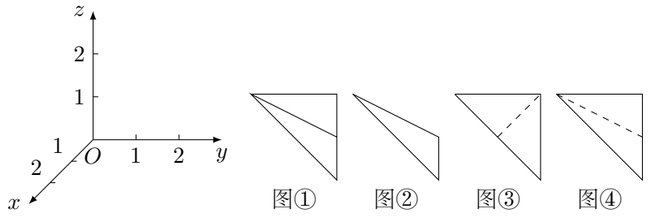
4. 根据如下样本数据

x	3	4	5	6	7	8
y	4.0	2.5	-0.5	0.5	-2.0	-3.0

得到的回归方程为 $\hat{y}=bx+a$, 则 （　）

(A) $a>0$, $b>0$　(B) $a>0$, $b<0$　(C) $a<0$, $b>0$　(D) $a<0$, $b<0$

5. 在如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 一个四面体的顶点坐标分别是 $(0,0,2)$, $(2,2,0)$, $(1,2,1)$, $(2,2,2)$. 给出编号为①②③④的四个图, 则该四面体的正视图和俯视图分别为 （　）



(A) ①和②　(B) ③和①　(C) ④和③　(D) ④和②

6. 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则称 $f(x)$, $g(x)$ 为区间 $[-1,1]$ 上的一组正交函数, 给出三组函数:

① $f(x)=\sin\dfrac{1}{2}x$, $g(x)=\cos\dfrac{1}{2}x$;

② $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$;

③ $f(x)=x$, $g(x)=x^2$.

其中为区间 $[-1,1]$ 上的正交函数的组数是 （　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

7. 由不等式组 $\begin{cases} x\leqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ y-x-2\leqslant 0 \end{cases}$ 确定的平面区域记为 Ω_1, 不等式组 $\begin{cases} x+y\leqslant 1 \\ x+y\geqslant -2 \end{cases}$ 确定的平面区域记为 Ω_2, 在 Ω_1 中随机取一点, 则该点恰好在 Ω_2 内的概率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{8}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{7}{8}$

8. 《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土, 这是我国现存最早的有系统的数学典籍, 其中记载有求"困盖"的术: 置如其周, 令相乘也. 又以高乘之, 三十六成一. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h, 计算其体积 V 的近似公式 $V\approx\dfrac{1}{36}L^2h$. 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为 3. 那么, 近似公式 $V\approx\dfrac{2}{75}L^2h$ 相当于将圆锥体积公式中的 π 近似取为 （　）

(A) $\dfrac{22}{7}$　(B) $\dfrac{25}{8}$　(C) $\dfrac{157}{50}$　(D) $\dfrac{355}{113}$

9. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$, 则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 （　）

(A) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) 3　(D) 2

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(|x-a^2|+|x-2a^2|-3a^2\right)$. 若 $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x-1)\leqslant f(x)$, 则实数 a 的取值范围为 （　）

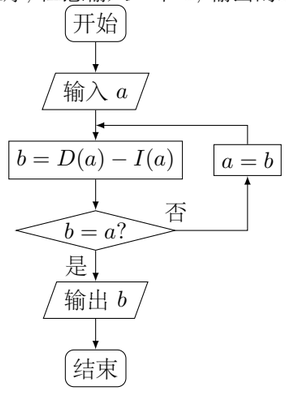
(A) $\left[-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6}\right]$　(B) $\left[-\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right]$　(C) $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$　(D) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

二、填空题

11. 设向量 $\boldsymbol{a}=(3,3)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1)$, 若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$, 则实数 $\lambda=$_____.

12. 直线 $l_1: y=x+a$ 和 $l_2: y=x+b$ 将单位圆 $C: x^2+y^2=1$ 分成长度相等的四段弧, 则 $a^2+b^2=$_____.

13. 设 a 是一个各位数字都不是 0 且没有重复数字的三位数. 将组成 a 的 3 个数字按从小到大排成的三位数记为 $I(a)$, 按从大到小排成的三位数记为 $D(a)$ (例如 $a=815$, 则 $I(a)=158$, $D(a)=851$). 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 任意输入一个 a, 输出的结果 $b=$_____.



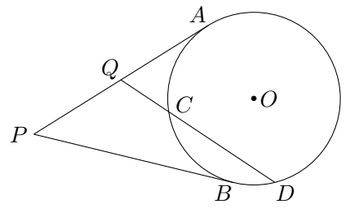
14. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数, 且 $f(x)>0$, 对任意 $a>0$, $b>0$, 若经过点 $(a,f(a))$, $(b,-f(b))$ 的直线与 x 轴的交点为 $(c,0)$, 则称 c 为 a, b 关于函数 $f(x)$ 的平均数, 记为 $M_f(a,b)$, 例如, 当 $f(x)=1$ $(x>0)$ 时, 可得 $M_f(a,b)=c=\dfrac{a+b}{2}$, 即 $M_f(a,b)$ 为 a, b 的算术平均数.

(1) 当 $f(x)=$_____$(x>0)$ 时, $M_f(a,b)$ 为 a, b 的几何平均数;

(2) 当 $f(x)=$_____$(x>0)$ 时, $M_f(a,b)$ 为 a, b 的调和平均数 $\dfrac{2ab}{a+b}$.

(以上两空各只需写出一个符合要求的函数即可)

15. 如图, P 为 $\odot O$ 外一点, 过 P 点作 $\odot O$ 的两条切线, 切点分别为 A, B, 过 PA 的中点 Q 作割线交 $\odot O$ 于 C, D 两点. 若 $QC=1$, $CD=3$, 则 $PB=$_____.



16. 已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\dfrac{\sqrt{3t}}{3} \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho=2$, 则 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为_____.

三、解答题

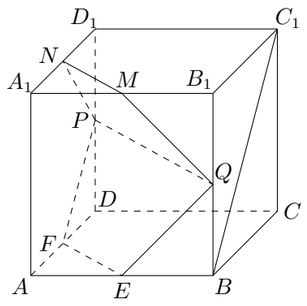
17. 某实验室一天的温度 (单位: °C) 随时间 t (单位: h) 的变化近似满足函数关系: $f(t)=10-\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{12}t-\sin\dfrac{\pi}{12}t$, $t\in[0,24)$.

(1) 求实验室这一天的最大温差;

(2) 若要求实验室温度不高于 11°C, 则在哪段时间实验室需要降温?

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=2$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
(2) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在正整数 n, 使得 $S_n>60n+800$? 若存在, 求出 n 的最小值; 若不存在, 说明理由.

19. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, M, N 分别是棱 AB, AD, A_1B_1, A_1D_1 的中点, 点 P, Q 分别在棱 DD_1, BB_1 上移动, 且 $DP=BQ=\lambda$ $(0<\lambda<2)$.
(1) 当 $\lambda=1$ 时, 证明: 直线 $BC_1\parallel$ 平面 $EFPQ$;
(2) 是否存在 λ, 使平面 $EFPQ$ 与面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.



20. 计划在某水库建一座至多安装 3 台发电机的水电站, 过去 50 年的水文资料显示, 水库年入流量 X (年入流量: 一年内上游来水与库区降水之和. 单位: 亿立方米) 都在 40 以上. 其中, 不足 80 的年份有 10 年, 不低于 80 且不超过 120 的年份有 35 年, 超过 120 的年份有 5 年. 将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率, 并假设各年的年入流量相互独立.
(1) 求未来 4 年中, 至多有 1 年的年入流量超过 120 的概率;
(2) 水电站希望安装的发电机尽可能运行, 但每年发电机最多可运行台数受年入流量 X 限制, 并有如下关系;

年入流量 X	$40<X<80$	$80\leqslant X\leqslant 120$	$X>120$
发电机最多可运行台数	1	2	3

若某台发电机运行, 则该台年利润为 5000 万元; 若某台发电机未运行, 则该台年亏损 800 万元, 欲使水电站年总利润的均值达到最大, 应安装发电机多少台?

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 M 到点 $F(1,0)$ 的距离比它到 y 轴的距离多 1, 记点 M 的轨迹为 C.
(1) 求轨迹为 C 的方程;
(2) 设斜率为 k 的直线 l 过定点 $P(-2,1)$, 求直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点, 两个公共点, 三个公共点时 k 的相应取值范围.

22. π 为圆周率, $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.
(1) 求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调区间;
(2) 求 e^3, 3^{e}, e^{π}, π^{e}, 3^{π}, π^3 这 6 个数中的最大数与最小数;
(3) 将 e^3, 3^{e}, e^{π}, π^{e}, 3^{π}, π^3 这 6 个数按从小到大的顺序排列, 并证明你的结论.

2014 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, 集合 $A=\{1,3,5,6\}$, 则 $\complement_U A=$ （ ）

(A) $\{1,3,5,6\}$ (B) $\{2,3,7\}$ (C) $\{2,4,7\}$ (D) $\{2,5,7\}$

2. i 为虚数单位, 则 $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2=$ （ ）

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-\mathrm{i}$

3. 命题"$\forall x\in\mathbf{R}$, $x^2\neq x$"的否定是 （ ）

(A) $\forall x\notin\mathbf{R}$, $x^2\neq x$ (B) $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^2=x$

(C) $\exists x\notin\mathbf{R}$, $x^2\neq x$ (D) $\exists x\in\mathbf{R}$, $x^2=x$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 4\\ x-y\leqslant 2\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $2x+y$ 的最大值是（ ）

(A) 2 (B) 4 (C) 7 (D) 8

5. 随机掷两枚质地均匀的骰子, 它们向上的点数之和不超过 5 的概率记为 p_1, 点数之和大于 5 的概率记为 p_2, 点数之和为偶数的概率记为 p_3, 则 （ ）

(A) $p_1<p_2<p_3$ (B) $p_2<p_1<p_3$ (C) $p_1<p_3<p_2$ (D) $p_3<p_1<p_2$

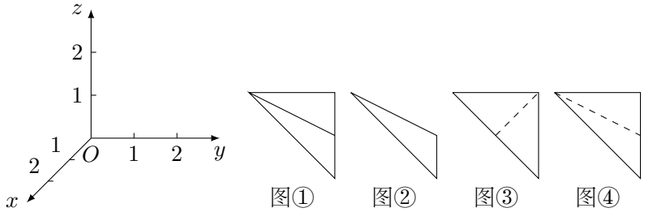
6. 根据如下样本数据

x	3	4	5	6	7	8
y	4.0	2.5	-0.5	0.5	-2.0	-3.0

得到的回归方程为 $\hat{y}=bx+a$, 则 （ ）

(A) $a>0$, $b<0$ (B) $a>0$, $b>0$ (C) $a<0$, $b<0$ (D) $a<0$, $b>0$

7. 在如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 一个四面体的顶点坐标分别是 $(0,0,2)$, $(2,2,0)$, $(1,2,1)$, $(2,2,2)$. 给出编号为①②③④的四个图, 则该四面体的正视图和俯视图分别为 （ ）



(A) ①和② (B) ③和① (C) ④和③ (D) ④和②

8. 设 a, b 是关于 t 的方程 $t^2\cos\theta+t\sin\theta=0$ 的两个不等实根, 则过 $A(a,a^2)$, $B(b,b^2)$ 两点的直线与双曲线 $\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=1$ 的公共点的个数为（ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=x^2-3x$. 则函数 $g(x)=f(x)-x+3$ 的零点的集合为 （ ）

(A) $\{1,3\}$ (B) $\{-3,-1,1,3\}$

(C) $\{2-\sqrt{7},1,3\}$ (D) $\{-2-\sqrt{7},1,3\}$

10. 《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土, 这是我国现存最早的有系统的数学典籍, 其中记载有求"困盖"的术: 置如其周, 令相乘也. 又以高乘之, 三十六成一. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h, 计算其体积 V 的近似公式 $V\approx\dfrac{1}{36}L^2h$. 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为 3. 那么, 近似公式 $V\approx\dfrac{2}{75}L^2h$ 相当于将圆锥体积公式中的 π 近似取为 （ ）

(A) $\dfrac{22}{7}$ (B) $\dfrac{25}{8}$ (C) $\dfrac{157}{50}$ (D) $\dfrac{355}{113}$

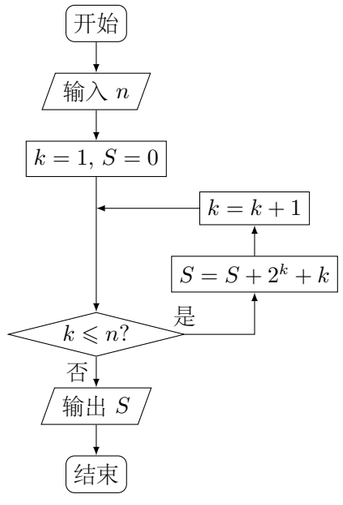
二、填空题

11. 甲、乙两套设备生产的同类型产品共 4800 件, 采用分层抽样的方法从中抽取一个容量为 80 的样本进行质量检测. 若样本中有 50 件产品由甲设备生产, 则乙设备生产的产品总数为_____件.

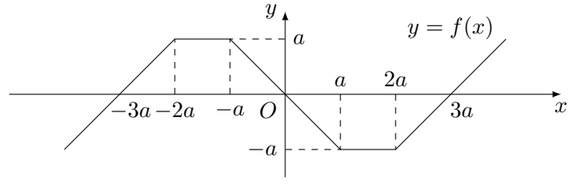
12. 若向量 $\overrightarrow{OA}=(1,-3)$, $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 则 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=$_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 已知 $A=\dfrac{\pi}{6}$, $a=1$, $b=\sqrt{3}$, 则 $B=$_____.

14. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 n 的值为 9, 则输出 S 的值为_____.



15. 如图所示, 函数 $y=f(x)$ 的图象由两条射线和三条线段组成.



若 $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)>f(x-1)$, 则正实数 a 的取值范围为_____.

16. 某项研究表明: 在考虑行车安全的情况下, 某路段车流量 F (单位时间内经过测量点的车辆数, 单位: 辆/小时) 与车流速度 v (假设车辆以相同速度 v 行驶, 单位: 米/秒), 平均车长 l (单位: 米) 的值有关, 其公式为 $F=\dfrac{76000v}{v^2+18v+20l}$.

(1) 如果不限定车型, $l=6.05$, 则最大车流量为_____辆/小时;

(2) 如果限定车型, $l=5$, 则最大车流量比 (1) 中的最大车流量增加_____辆/小时.

17. 已知圆 $O:x^2+y^2=1$ 和点 $A(-2,0)$, 若定点 $B(b,0)$ $(b\neq -2)$ 和常数 λ 满足: 对圆 O 上任意一点 M, 都有 $|MB|=\lambda|MA|$, 则

(1) $b=$_____;

(2) $\lambda=$_____.

三、解答题

18. 某实验室一天的温度 (单位: °C) 随时间 t (单位: h) 的变化近似满足函数关系: $f(t)=10-\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{12}t-\sin\dfrac{\pi}{12}t$, $t\in[0,24)$.

(1) 求实验室这一天上午 8 时的温度;

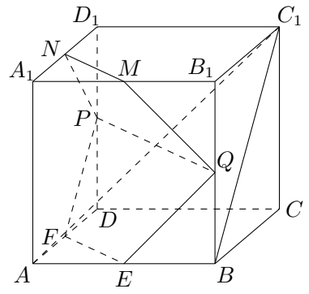
(2) 求实验室这一天的最大温差.

19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=2$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在正整数 n, 使得 $S_n>60n+800$? 若存在, 求出 n 的最小值; 若不存在, 说明理由.

20. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F、P、Q、M、N 分别是棱 AB、AD、DD_1、BB_1、A_1B_1、A_1D_1 的中点. 求证:
(1) 直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$;
(2) 直线 $AC_1 \perp$ 平面 $PQMN$.



21. π 为圆周率, $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.
(1) 求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调区间;
(2) 求 e^3, 3^{e}, e^{π}, π^{e}, 3^{π}, π^3 这 6 个数中的最大数与最小数.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 M 到点 $F(1,0)$ 的距离比它到 y 轴的距离多 1, 记点 M 的轨迹为 C.
(1) 求轨迹为 C 的方程;
(2) 设斜率为 k 的直线 l 过定点 $P(-2,1)$, 求直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点, 两个公共点, 三个公共点时 k 的相应取值范围.

2014 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 满足 $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}$ (i 为虚数单位) 的复数 $z=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(B) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(C) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　(D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 对一个容量为 N 的总体抽取容量为 n 的样本, 当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时, 总体中每个个体被抽中的概率分别为 p_1, p_2, p_3, 则 （　）

(A) $p_1=p_2<p_3$　(B) $p_2=p_3<p_1$　(C) $p_1=p_3<p_2$　(D) $p_1=p_2=p_3$

3. 已知 $f(x)$, $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数, 且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$, 则 $f(1)+g(1)=$ （　）

(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3

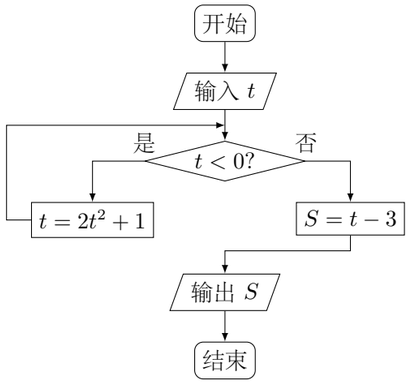
4. $\left(\dfrac{1}{2}x-2y\right)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数是 （　）

(A) -20　(B) -5　(C) 5　(D) 20

5. 已知命题 p: 若 $x>y$, 则 $-x<-y$; 命题 q: 若 $x>y$, 则 $x^2>y^2$, 在命题 ① $p\wedge q$; ② $p\vee q$; ③ $p\wedge(\neg q)$; ④ $(\neg p)\vee q$ 中, 真命题是 （　）

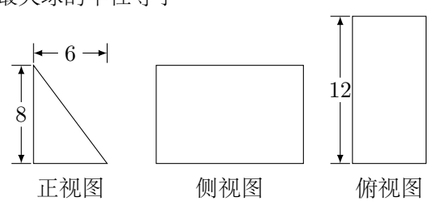
(A) ①③　(B) ①④　(C) ②③　(D) ②④

6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $t\in[-2,2]$, 则输出的 S 属于（　）



(A) $[-6,-2]$　(B) $[-5,-1]$　(C) $[-4,5]$　(D) $[-3,6]$

7. 一块石材表示的几何体的三视图如图所示, 将该石材切削、打磨, 加工成球, 则能得到的最大球的半径等于 （　）



(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

8. 某市生产总值连续两年持续增加. 第一年的增长率为 p, 第二年的增长率为 q, 则该市这两年生产总值的年平均增长率为 （　）

(A) $\dfrac{p+q}{2}$　(B) $\dfrac{(p+1)(q+1)-1}{2}$

(C) $\sqrt{pq}$　(D) $\sqrt{(p+1)(q+1)}-1$

9. 已知函数 $f(x)=\sin(x-\varphi)$, 且 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴是 （　）

(A) $x=\dfrac{5\pi}{6}$　(B) $x=\dfrac{7\pi}{12}$　(C) $x=\dfrac{\pi}{3}$　(D) $x=\dfrac{\pi}{6}$

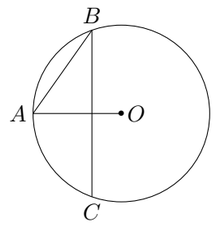
10. 已知函数 $f(x)=x^2+\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}$ $(x<0)$ 与 $g(x)=x^2+\ln(x+a)$ 的图象上存在关于 y 轴对称的点, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $\left(-\infty,\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$　(B) $(-\infty,\sqrt{\mathrm{e}})$　(C) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\sqrt{\mathrm{e}}\right)$　(D) $\left(-\sqrt{\mathrm{e}},\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$

二、填空题

11. 在平面直角坐标系中, 倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线 l 与曲线 $C:\begin{cases}x=2+\cos\alpha\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数) 交于 A, B 两点, 且 $|AB|=2$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 则直线 l 的极坐标方程是_____.

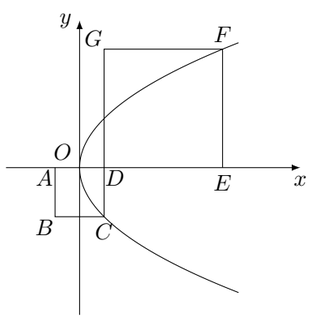
12. 如图, 已知 AB, BC 是 $\odot O$ 的两条弦, $AO\perp BC$, $AB=\sqrt{3}$, $BC=2\sqrt{2}$, 则 $\odot O$ 的半径等于_____.



13. 若关于 x 的不等式 $|ax-2|<3$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$, 则 $a=$_____.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant x\\ x+y\leqslant 4\\ y\geqslant k\end{cases}$ 且 $z=2x+y$ 的最小值为 -6, 则 $k=$_____.

15. 如图, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 的边长分别为 a, b $(a<b)$, 原点 O 为 AD 的中点, 抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 经过 C, F 两点, 则 $\dfrac{b}{a}=$_____.



16. 在平面直角坐标系中, O 为原点, $A(-1,0)$, $B\left(0,\sqrt{3}\right)$, $C(3,0)$, 动点 D 满足 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$, 则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$ 的最大值是_____.

三、解答题

17. 某企业有甲、乙两个研发小组, 他们研发新产品成功的概率分别为 $\dfrac{2}{3}$ 和 $\dfrac{3}{5}$. 现安排甲组研发新产品 A, 乙组研发新产品 B. 设甲、乙两组的研发相互独立.

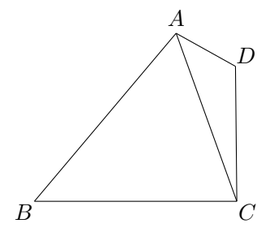
(1) 求至少有一种新产品研发成功的概率;

(2) 若新产品 A 研发成功, 预计企业可获利润 120 万元; 若新产品 B 研发成功, 预计企业可获利润 100 万元. 求该企业可获利润的分布列和数学期望.

18. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AD=1$, $CD=2$, $AC=\sqrt{7}$.

(1) 求 $\cos\angle CAD$ 的值;

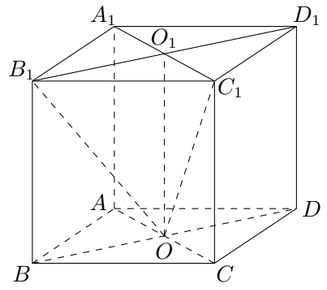
(2) 若 $\cos\angle BAD=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$, $\sin\angle CBA=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$, 求 BC 的长.



19. 如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等, $AC\cap BD=O$, $A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$, 四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 均为矩形.

(1) 证明: $O_1O\perp$ 底面 $ABCD$;

(2) 若 $\angle CBA=60^\circ$, 求二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $|a_{n+1}-a_n|=p^n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

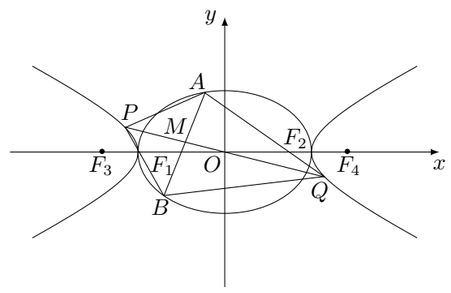
(1) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 a_1, $2a_2$, $3a_3$ 成等差数列, 求 p 的值;

(2) 若 $p=\dfrac{1}{2}$, 且 $\{a_{2n-1}\}$ 是递增数列, $\{a_{2n}\}$ 是递减数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21. 如图, O 为坐标原点, 椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 e_1; 双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_3、F_4, 离心率为 e_2. 已知 $e_1e_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $|F_2F_4|=\sqrt{3}-1$.

(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 过 F_1 作 C_1 的不垂直于 y 轴的弦 AB, M 为弦 AB 的中点. 当直线 OM 与 C_2 交于 P, Q 两点时, 求四边形 $APBQ$ 面积的最小值.



22. 已知常数 $a>0$, 函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\dfrac{2x}{x+2}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2, 且 $f(x_1)+f(x_2)>0$, 求 a 的取值范围.

2014 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 设命题 p: $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2+1>0$, 则 $\neg p$ 为 （ ）

(A) $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0^2+1>0$　　(B) $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0^2+1 \leqslant 0$

(C) $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0^2+1<0$　　(D) $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2+1 \leqslant 0$

2. 已知集合 $A=\{x \mid x>2\}$, $B=\{x \mid 1<x<3\}$, 则 $A \cap B=$ （ ）

(A) $\{x \mid x>2\}$　　(B) $\{x \mid x>1\}$

(C) $\{x \mid 2<x<3\}$　　(D) $\{x \mid 1<x<3\}$

3. 对一个容量为 N 的总体抽取容量为 n 的样本, 当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时, 总体中每个个体被抽中的概率分别为 p_1, p_2, p_3, 则 （ ）

(A) $p_1=p_2<p_3$　(B) $p_2=p_3<p_1$　(C) $p_1=p_3<p_2$　(D) $p_1=p_2=p_3$

4. 下列函数中, 既是偶函数又在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增的是 （ ）

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　(B) $f(x)=x^2+1$ (C) $f(x)=x^3$　(D) $f(x)=2^{-x}$

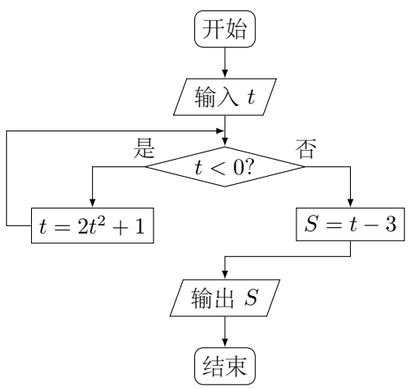
5. 在区间 $[-2,3]$ 上随机选取一个数 X, 则 $X \leqslant 1$ 的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{4}{5}$　　(B) $\dfrac{3}{5}$　　(C) $\dfrac{2}{5}$　　(D) $\dfrac{1}{5}$

6. 若圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 外切, 则 $m=$ （ ）

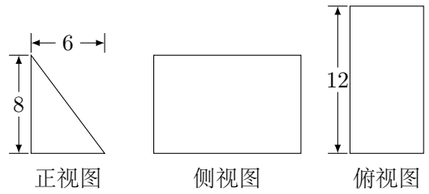
(A) 21　　(B) 19　　(C) 9　　(D) -11

7. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $t \in [-2,2]$, 则输出的 S 属于（ ）



(A) $[-6,-2]$　　(B) $[-5,-1]$　　(C) $[-4,5]$　　(D) $[-3,6]$

8. 一块石材表示的几何体的三视图如图所示, 将该石材切削、打磨, 加工成球, 则能得到的最大球的半径等于 （ ）



(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

9. 若 $0<x_1<x_2<1$, 则 （ ）

(A) $\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}>\ln x_2-\ln x_1$　　(B) $\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}<\ln x_2-\ln x_1$

(C) $x_2\mathrm{e}^{x_1}>x_1\mathrm{e}^{x_2}$　　(D) $x_2\mathrm{e}^{x_1}<x_1\mathrm{e}^{x_2}$

10. 在平面直角坐标系中, O 为原点, $A(-1,0)$, $B\left(0,\sqrt{3}\right)$, $C(3,0)$, 动点 D 满足 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$, 则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$ 的取值范围是 （ ）

(A) $[4,6]$　　(B) $\left[\sqrt{19}-1,\sqrt{19}+1\right]$

(C) $\left[2\sqrt{3},2\sqrt{7}\right]$　　(D) $\left[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1\right]$

二、填空题

11. 复数 $\dfrac{3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}$ (i 为虚数单位) 的实部等于_____.

12. 在平面直角坐标系中, 曲线 C: $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 的普通方程为_____.

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leqslant x \\ x+y \leqslant 4 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值为_____.

14. 平面上一机器人在行进中始终保持与点 $F(1,0)$ 的距离和到直线 $x=-1$ 的距离相等. 若机器人接触不到过点 $P(-1,0)$ 且斜率为 k 的直线, 则 k 的取值范围是_____.

15. 若 $f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)+ax$ 是偶函数, 则 $a=$_____.

三、解答题

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=2^{a_n}+(-1)^n a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

17. 某企业有甲、乙两个研发小组, 为了比较他们的研发水平, 现随机抽取这两个小组往年研发新产品的结果如下: (a,b), $(a,\overline{b})$, (a,b), $(\overline{a},b)$, $(\overline{a},\overline{b})$, (a,b), (a,b), $(a,\overline{b})$, $(\overline{a},b)$, $(a,\overline{b})$, $(\overline{a},\overline{b})$, (a,b), $(a,\overline{b})$, $(\overline{a},b)$, (a,b). 其中 a, $\overline{a}$ 分别表示甲组研发成功和失败; b, $\overline{b}$ 分别表示乙组研发成功和失败.

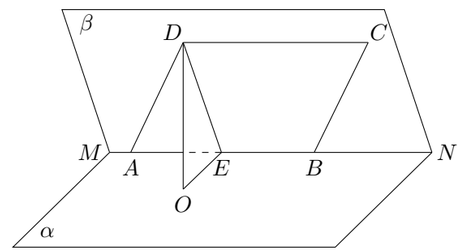
(1) 若某组成功研发一种新产品, 则给该组记 1 分, 否则记 0 分, 试计算甲、乙两组研发新产品的成绩的平均数和方差, 并比较甲、乙两组的研发水平;

(2) 若该企业安排甲、乙两组各自研发一种新产品, 试估计恰有一组研发成功的概率.

18. 如图, 已知二面角 $\alpha-MN-\beta$ 的大小为 $60°$, 菱形 $ABCD$ 在面 β 内, A, B 两点在棱 MN 上, $\angle BAD=60°$, E 是 AB 的中点, $DO \perp$ 面 α, 垂足为 O.

(1) 证明: $AB \perp$ 平面 ODE;

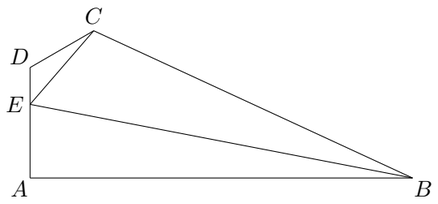
(2) 求异面直线 BC 与 OD 所成角的余弦值.



19. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $DA \perp AB$, $DE=1$, $EC=\sqrt{7}$, $EA=2$, $\angle ADC=\dfrac{2\pi}{3}$, $\angle BEC=\dfrac{\pi}{3}$.

(1) 求 $\sin\angle CED$ 的值;

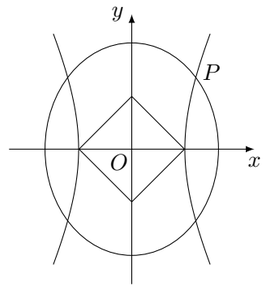
(2) 求 BE 的长.



20. 如图, O 为坐标原点, 双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a_1^2}-\dfrac{y^2}{b_1^2}=1$ $(a_1>0,\ b_1>0)$ 和椭圆 $C_2:\dfrac{y^2}{a_2^2}+\dfrac{x^2}{b_2^2}=1$ $(a_2>b_2>0)$ 均过点 $P\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},1\right)$, 且以 C_1 的两个顶点和 C_2 的两个焦点为顶点的四边形是面积为 2 的正方形.

(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 是否存在直线 l, 使得 l 与 C_1 交于 A, B 两点, 与 C_2 只有一个公共点, 且 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$? 证明你的结论.



21. 已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x+1$ $(x>0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 记 x_i 为 $f(x)$ 的从小到大的第 i $(i\in\mathbf{N}^*)$ 个零点, 证明: 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, 有 $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n^2}<\dfrac{2}{3}$.

2014 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

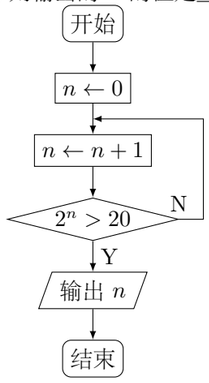
数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,3,4\}$, $B=\{-1,2,3\}$, 则 $A\cap B=$_____.

2. 已知复数 $z=(5+2\mathrm{i})^2$ (i 为虚数单位), 则 z 的实部为_____.

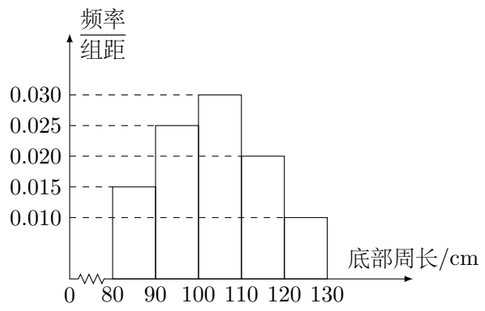
3. 如图是一个算法流程图, 则输出的 n 的值是_____.



4. 从 1, 2, 3, 6 这 4 个数中一次随机地取 2 个数, 则所取 2 个数的乘积为 6 的概率是_____.

5. 已知函数 $y=\cos x$ 与 $y=\sin(2x+\varphi)$ $(0\leqslant\varphi<\pi)$, 它们的图象有一个横坐标为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的交点, 则 φ 的值是_____.

6. 为了了解一片经济林的生长情况, 随机抽测了其中 60 株树木的底部周长 (单位: cm), 所得数据均在区间 $[80,130]$ 上, 其频率分布直方图如图所示, 则在抽测的 60 株树木中, 有_____株树木的底部周长小于 100 cm.



7. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2=1$, $a_8=a_6+2a_4$, 则 a_6 的值是_____.

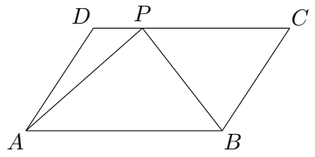
8. 设甲、乙两个圆柱的底面积分别为 S_1、S_2, 体积分别为 V_1、V_2, 若它们的侧面积相等, 且 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{9}{4}$, 则 $\dfrac{V_1}{V_2}$ 的值是_____.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $x+2y-3=0$ 被圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长为_____.

10. 已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$, 若对于任意 $x\in[m,m+1]$, 都有 $f(x)<0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若曲线 $y=ax^2+\dfrac{b}{x}$ (a, b 为常数) 过点 $P(2,-5)$, 且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行, 则 $a+b$ 的值是_____.

12. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=8$, $AD=5$, $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值是_____.



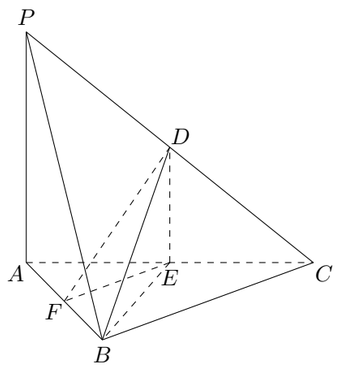
13. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 3 的函数, 当 $x\in[0,3)$ 时, $f(x)=\left|x^2-2x+\dfrac{1}{2}\right|$. 若函数 $y=f(x)-a$ 在区间 $[-3,4]$ 上有 10 个零点 (互不相同), 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$, 则 $\cos C$ 的最小值是_____.

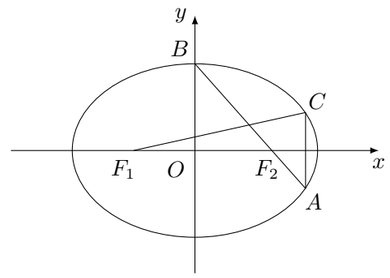
二、解答题

15. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
(1) 求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 的值;
(2) 求 $\cos\left(\dfrac{5}{6}\pi-2\alpha\right)$ 的值.

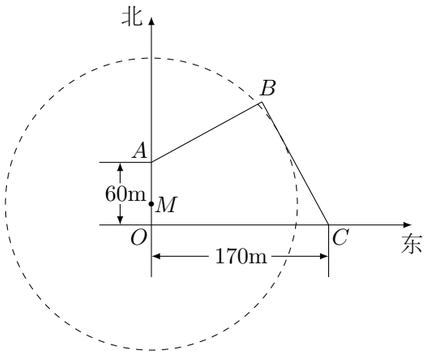
16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, D, E, F 分别为棱 PC, AC, AB 的中点. 已知 $PA\perp AC$, $PA=6$, $BC=8$, $DF=5$.
(1) 求证: 直线 $PA\parallel$ 平面 DEF;
(2) 平面 $BDE\perp$ 平面 ABC.



17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, F_1, F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, 顶点 B 的坐标为 $(0,b)$, 连接 BF_2 并延长交椭圆于点 A, 过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C, 连接 F_1C.
(1) 若点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, 且 $BF_2=\sqrt{2}$, 求椭圆的方程;
(2) 若 $F_1C\perp AB$, 求椭圆离心率 e 的值.



18. 如图, 为了保护河上古桥 OA, 规划建一座新桥 BC, 同时设立一个圆形保护区. 规划要求: 新桥 BC 与河岸 AB 垂直; 保护区的边界为圆心 M 在线段 OA 上并与 BC 相切的圆, 且古桥两端 O 和 A 到该圆上任意一点的距离均不少于 80 m. 经测量, 点 A 位于点 O 正北方向 60 m 处, 点 C 位于点 O 正东方向 170 m 处 (OC 为河岸), $\tan\angle BCO=\dfrac{4}{3}$.
(1) 求新桥 BC 的长;
(2) 当 OM 多长时, 圆形保护区的面积最大?

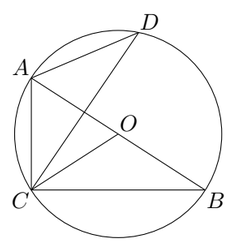


19. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$, 其中 e 是自然对数的底数.
(1) 证明: $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数;
(2) 若关于 x 的不等式 $mf(x)\leqslant \mathrm{e}^{-x}+m-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围;
(3) 已知正数 a 满足: 存在 $x_0\in[1,+\infty)$, 使得 $f(x_0)<a\left(-{x_0}^3+3x_0\right)$ 成立. 试比较 e^{a-1} 与 $a^{\mathrm{e}-1}$ 的大小, 并证明你的结论.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若对任意正整数 n, 总存在正整数 m, 使得 $S_n=a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 是"H 数列".
(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明: $\{a_n\}$ 是"H 数列";
(2) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其首项 $a_1=1$, 公差 $d<0$. 若 $\{a_n\}$ 是"H 数列", 求 d 的值;
(3) 证明: 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个"H 数列"$\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n=b_n+c_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 成立.

21. 四选二.

【A】如图, AB 是圆 O 的直径, C、D 是圆 O 上位于 AB 异侧的两点. 证明: $\angle OCB=\angle D$.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & x\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}$, x, y 为实数, 若 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{B\alpha}$, 求 $x+y$ 的值.

【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.

【D】已知 $x>0$, $y>0$, 证明: $\left(1+x+y^2\right)\left(1+x^2+y\right)\geqslant 9xy$.

22. 盒中共有 9 个球, 其中有 4 个红球, 3 个黄球和 2 个绿球, 这些球除颜色外完全相同.
(1) 从盒中一次随机取出 2 个球, 求取出的 2 个球颜色相同的概率 P;
(2) 从盒中一次随机取出 4 个球, 其中红球、黄球、绿球的个数分别记为 x_1, x_2, x_3, 随机变量 X 表示 x_1, x_2, x_3 中的最大数, 求 X 的概率分布和数学期望 $E(X)$.

23. 已知函数 $f_0(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $(x>0)$, 设 $f_n(x)$ 为 $f_{n-1}(x)$ 的导数, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 求 $2f_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{2}f_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的值;
(2) 证明: 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 等式 $\left|nf_{n-1}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{4}f_n\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 都成立.

2014 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数. 若 $\bar{z}+z=2$, $(z-\bar{z})\,\mathrm{i}=2$ (i 为虚数单位), 则 $z=$(　)

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $-1-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $1-\mathrm{i}$

2. 函数 $f(x)=\ln(x^2-x)$ 的定义域为　(　)

(A) $(0,1)$　(B) $[0,1]$

(C) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　(D) $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

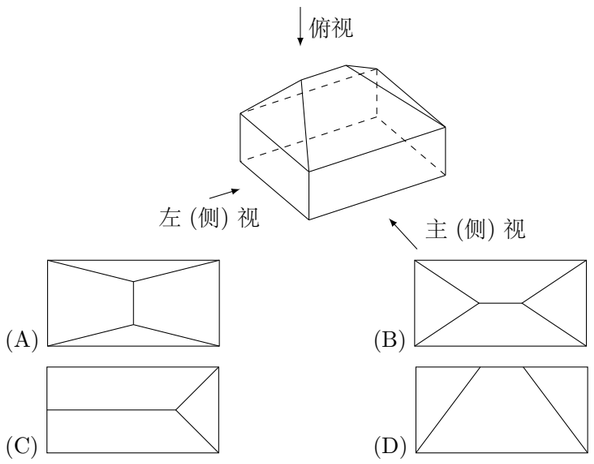
3. 已知函数 $f(x)=5^{|x|}$, $g(x)=ax^2-x$ ($a\in\mathbf{R}$). 若 $f[g(1)]=1$, 则 $a=$(　)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) -1

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c, 若 $c^2=(a-b)^2+6$, $C=\dfrac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是　(　)

(A) 3　(B) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(D) $3\sqrt{3}$

5. 一几何体的直观图如图所示, 下列给出的四个俯视图中正确的是　(　)



6. 某人研究中学生的性别与成绩、视力、智商、阅读量这 4 个变量之间的关系, 随机抽查了 52 名中学生, 得到统计数据如表 1 至表 4, 则与性别有关联的可能性最大的变量是　(　)

表 1

性别 \ 成绩	不及格	及格	总计
男	6	14	20
女	10	22	32
总计	16	36	52

表 2

性别 \ 视力	好	差	总计
男	4	16	20
女	12	20	32
总计	16	36	52

表 3

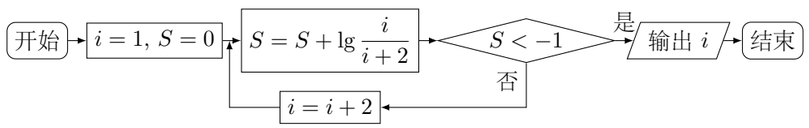
性别 \ 智商	偏高	正常	总计
男	8	12	20
女	8	24	32
总计	16	36	52

表 4

性别 \ 阅读量	丰富	不丰富	总计
男	14	6	20
女	2	30	32
总计	16	36	52

(A) 成绩　(B) 视力　(C) 智商　(D) 阅读量

7. 阅读如下程序框图, 运行相应的程序, 则程序运行后输出的结果为　(　)



(A) 7　(B) 9　(C) 10　(D) 11

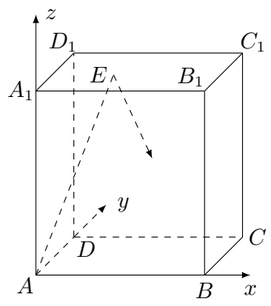
8. 若 $f(x)=x^2+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$

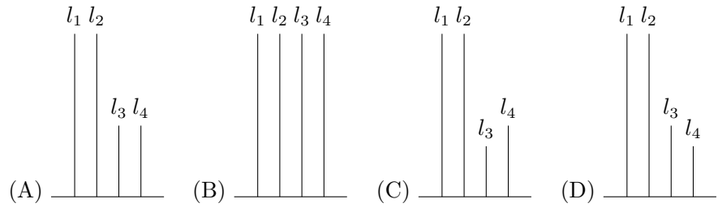
(A) -1　(B) $-\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) 1

9. 在平面直角坐标系中, A, B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点, 若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x+y-4=0$ 相切, 则圆 C 面积的最小值为　(　)

(A) $\dfrac{4}{5}\pi$　(B) $\dfrac{3}{4}\pi$　(C) $(6-2\sqrt{5})\pi$　(D) $\dfrac{5}{4}\pi$

10. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=11$, $AD=7$, $AA_1=12$, 一质点从顶点 A 射向点 $E(4,\,3,\,12)$, 遇长方体的面反射 (反射服从光的反射原理), 将第 $i-1$ 次到第 i 次反射点之间的线段记为 $l_i\,(i=2,\,3,\,4)$, $l_1=AE$, 将线段 l_1, l_2, l_3, l_4 竖直放置在同一水平线上, 则大致的图形是　(　)





11. 对任意 x, $y\in\mathbf{R}$, $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为　(　)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

12. 若以直角坐标系的原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 则线段 $y=1-x$ ($0\leqslant x\leqslant 1$) 的极坐标方程为　(　)

(A) $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$

(C) $\rho=\cos\theta+\sin\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\rho=\cos\theta+\sin\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$

二、填空题

13. 10 件产品中有 7 件正品, 3 件次品, 从中任取 4 件, 则恰好取到 1 件次品的概率是_____.

14. 若曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x+y+1=0$, 则点 P 的坐标是_____.

15. 已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 α, 且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, 向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 β, 则 $\cos\beta=$_____.

16. 过点 $M(1,1)$ 作斜率为 $-\dfrac{1}{2}$ 的直线与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 相交于 A, B 两点, 若 M 是线段 AB 的中点, 则椭圆 C 的离心率等于_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin(x+\theta)+a\cos(x+2\theta)$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, $\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 当 $a=\sqrt{2}$, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的最大值与最小值;

(2) 若 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $f(\pi)=1$, 求 a, θ 的值.

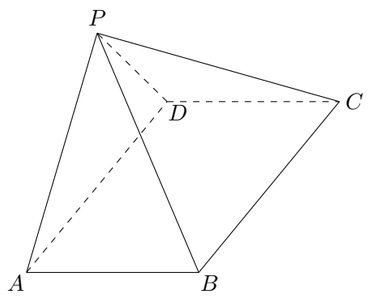
18. 已知首项都是 1 的两个数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ($b_n\neq 0$, $n\in\mathbf{N}^*$) 满足 $a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n+2b_{n+1}b_n=0$.

(1) 令 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式;

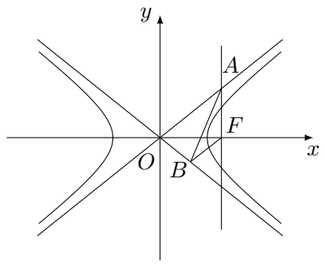
(2) 若 $b_n=3^{n-1}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

19. 已知函数 $f(x)=(x^2+bx+b)\sqrt{1-2x}$ $(b\in\mathbf{R})$.
(1) 当 $b=4$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 上单调递增, 求 b 的取值范围.

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.
(1) 求证: $AB\perp PD$;
(2) 若 $\angle BPC=90^\circ$, $PB=\sqrt{2}$, $PC=2$. 问 AB 为何值时, 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大? 并求此时平面 PBC 与平面 DPC 夹角的余弦值.



21. 如图, 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ $(a>0)$ 的右焦点为 F. 点 A, B 分别在 C 的两条渐近线上, $AF\perp x$ 轴, $AB\perp OB$, $BF/\!/OA$ (O 为坐标原点).
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 过 C 上一点 $P(x_0,y_0)$ $(y_0\neq 0)$ 的直线 $l:\dfrac{x_0x}{a^2}-y_0y=1$, 与直线 AF 相交于点 M, 与直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 相交于点 N. 证明: 当点 P 在 C 上移动时, $\dfrac{|MF|}{|NF|}$ 恒为定值, 并求此定值.



22. 随机将 $1,2,\cdots,2n$ $(n\in\mathbf{N}^*,\ n\geqslant 2)$ 这 $2n$ 个连续正整数分成 A, B 两组, 每组 n 个数, A 组最小数为 a_1, 最大数为 a_2; B 组最小数为 b_1, 最大数为 b_2, 记 $\xi=a_2-a_1$, $\eta=b_2-b_1$.
(1) 当 $n=3$ 时, 求 ξ 的分布列和数学期望;
(2) 令 C 表示事件"ξ 与 η 的取值恰好相等", 求事件 C 发生的概率 $P(C)$;
(3) 对 (2) 中的事件 C, $\overline{C}$ 表示 C 的对立事件, 判断 $P\left(\overline{C}\right)$ 和 $P(C)$ 的大小关系, 并说明理由.

2014 年普通高等学校招生考试（江西卷）

文科数学

一、选择题

1. 若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z|=$ （ ）

(A) 1　(B) 2　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{3}$

2. 设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\,|\,x^2-9<0\}$, $B=\{x\,|\,-1<x\leqslant 5\}$, 则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ （ ）

(A) $(-3,0)$　(B) $(-3,-1)$　(C) $(-3,-1]$　(D) $(-3,3)$

3. 掷两颗均匀的骰子, 则点数之和为 5 的概率等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{18}$　(B) $\dfrac{1}{9}$　(C) $\dfrac{1}{6}$　(D) $\dfrac{1}{12}$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a\cdot 2^x, & x\geqslant 0\\ 2^{-x}, & x<0\end{cases}$ $(a\in\mathbf{R})$, 若 $f[f(-1)]=1$, 则 $a=$（ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 若 $3a=2b$, 则 $\dfrac{2\sin^2B-\sin^2A}{\sin^2A}$ 的值为 （ ）

(A) $-\dfrac{1}{9}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) 1　(D) $\dfrac{7}{2}$

6. 下列叙述中正确的是 （ ）

(A) 若 a, b, $c\in\mathbf{R}$, 则“$ax^2+bx+c\geqslant 0$”的充分条件是“$b^2-4ac\leqslant 0$”

(B) 若 a, b, $c\in\mathbf{R}$, 则“$ab^2>cb^2$”的充要条件是“$a>c$”

(C) 命题“对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $x^2\geqslant 0$”的否定是“存在 $x\in\mathbf{R}$, 有 $x^2\geqslant 0$”

(D) l 是一条直线, α, β 是两个不同的平面, 若 $l\perp\alpha$, $l\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$

7. 某人研究中学生的性别与成绩、视力、智商、阅读量这 4 个变量之间的关系, 随机抽查了 52 名中学生, 得到统计数据如表 1 至表 4, 则与性别有关联的可能性最大的变量是 （ ）

表 1

性别＼成绩	不及格	及格	总计
男	6	14	20
女	10	22	32
总计	16	36	52

表 2

性别＼视力	好	差	总计
男	4	16	20
女	12	20	32
总计	16	36	52

表 3

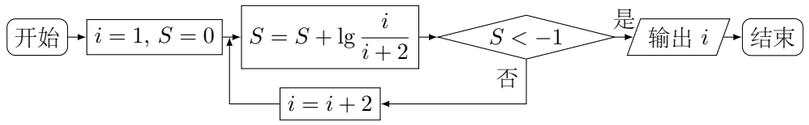
性别＼智商	偏高	正常	总计
男	8	12	20
女	8	24	32
总计	16	36	52

表 4

性别＼阅读量	丰富	不丰富	总计
男	14	6	20
女	2	30	32
总计	16	36	52

(A) 成绩　(B) 视力　(C) 智商　(D) 阅读量

8. 阅读如下程序框图, 运行相应的程序, 则程序运行后输出的结果为 （ ）



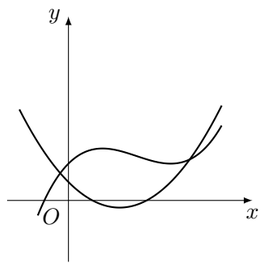
(A) 7　(B) 9　(C) 10　(D) 11

9. 过双曲线 C : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右顶点作 x 轴的垂线与 C 的一条渐近线相交于 A. 若以 C 的右焦点为圆心、半径为 4 的圆经过 A, O 两点 (O 为坐标原点), 则双曲线 C 的方程为 （ ）

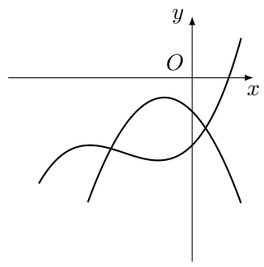
(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$

10. 在同一直角坐标系中, 函数 $y=ax^2-x+\dfrac{a}{2}$ 与 $y=a^2x^3-2ax^2+x+a$ $(a\in\mathbf{R})$ 的图象不可能的是 （ ）

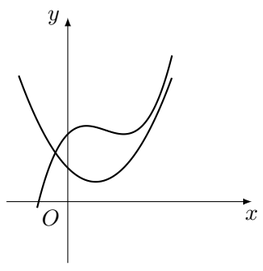
(A)



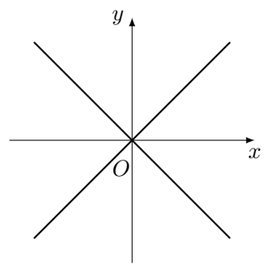
(B)



(C)



(D)



二、填空题

11. 若曲线 $y=x\ln x$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x-y+1=0$, 则点 P 的坐标是_____.

12. 已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 α, 且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, 向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$, 则 $|\boldsymbol{a}|=$_____.

13. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=7$, 公差为 d, 前 n 项和为 S_n, 当且仅当 $n=8$ 时 S_n 取最大值, 则 d 的取值范围为_____.

14. 设椭圆 C : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2, 过 F_2 作 x 轴的垂线与 C 交于 A, B 两点, F_1B 与 y 轴交于点 D, 若 $AD\perp F_1B$, 则椭圆 C 的离心率等于_____.

15. 已知 x, $y\in\mathbf{R}$, 若 $|x|+|y|+|x-1|+|y-1|\leqslant 2$, 则 $x+y$ 的取值范围为_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=(a+2\cos^2x)\cos(2x+\theta)$ 为奇函数, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, $\theta\in(0,\pi)$.

(1) 求 a, θ 的值;

(2) 若 $f\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)=-\dfrac{2}{5}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 求 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

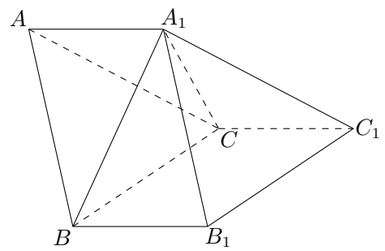
17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{3n^2-n}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

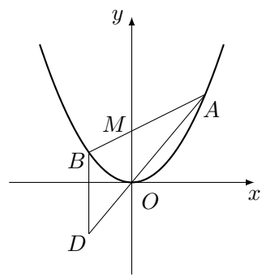
(2) 证明: 对任意 $n>1$, 都有 $m\in\mathbf{N}^*$, 使得 a_1, a_n, a_m 成等比数列.

18. 已知函数 $f(x)=(4x^2+4ax+a^2)\sqrt{x}$, 其中 $a<0$.
(1) 当 $a=-4$ 时, 求 $f(x)$ 的单调递增区间;
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上的最小值为 8, 求 a 的值.

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1\perp BC$, $A_1B\perp BB_1$.
(1) 求证: $A_1C\perp CC_1$;
(2) 若 $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$, $BC=\sqrt{7}$, 问 AA_1 为何值时, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 体积最大, 并求此最大值.



20. 如图, 已知抛物线 $C:x^2=4y$, 过点 $M(0,2)$ 任作一直线与 C 相交于 A, B 两点, 过点 B 作 y 轴的平行线与直线 AO 相交于点 D (O 为坐标原点).
(1) 证明: 动点 D 在定直线上;
(2) 作 C 的任意一条切线 l (不含 x 轴) 与直线 $y=2$ 相交于点 N_1, 与第一问中的定直线相交于点 N_2, 证明: $|MN_2|^2-|MN_1|^2$ 为定值, 并求此定值.



21. 将连续正整数 1, 2, $\cdots$, n ($n\in\mathbf{N}^*$) 从小到大排列构成一个数 $123\cdots n$, $F(n)$ 为这个数的位数 (如 $n=12$ 时, 此数为 123456789101112, 共有 15 个数字, $F(12)=15$), 现从这个数中随机取一个数字, $p(n)$ 为恰好取到 0 的概率.
(1) 求 $p(100)$;
(2) 当 $n\leqslant 2014$ 时, 求 $F(n)$ 的表达式;
(3) 令 $g(n)$ 为这个数中数字 0 的个数, $f(n)$ 为这个数中数字 9 的个数, $h(n)=f(n)-g(n)$, $S=\{n\mid h(n)=1, n\leqslant 100, n\in\mathbf{N}^*\}$, 求当 $n\in S$ 时 $p(n)$ 的最大值.

2014 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x\,|\,x\leqslant 0\}$, $B=\{x\,|\,x\geqslant 1\}$, 则集合 $\complement_U(A\cup B)=$ （ ）

(A) $\{x\,|\,x\geqslant 0\}$　(B) $\{x\,|\,x\leqslant 1\}$

(C) $\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$　(D) $\{x\,|\,0<x<1\}$

2. 设复数 z 满足 $(z-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$, 则 $z=$ （ ）

(A) $2+3\mathrm{i}$　(B) $2-3\mathrm{i}$　(C) $3+2\mathrm{i}$　(D) $3-2\mathrm{i}$

3. 已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$, $b=\log_2\dfrac{1}{3}$, $c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$, 则 （ ）

(A) $a>b>c$　(B) $a>c>b$　(C) $c>a>b$　(D) $c>b>a$

4. 已知 m, n 表示两条不同直线, α 表示平面, 下列说法正确的是 （ ）

(A) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$　(B) 若 $m\perp\alpha$, $n\subset\alpha$, 则 $m\perp n$

(C) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\parallel\alpha$　(D) 若 $m\parallel\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\perp\alpha$

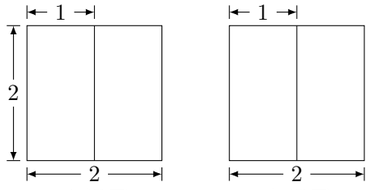
5. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是非零向量, 已知命题 p: 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$; 命题 q: 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$, 则下列命题中的真命题是 （ ）

(A) $p\vee q$　(B) $p\wedge q$　(C) $(\neg p)\wedge(\neg q)$　(D) $p\vee(\neg q)$

6. 6 把椅子摆成一排, 3 人随机就座, 任何两人不相邻的坐法种数为 （ ）

(A) 144　(B) 120　(C) 72　(D) 24

7. 某几何体三视图如图所示, 则该几何体的体积为 （ ）



(A) $8-2\pi$　(B) $8-\pi$　(C) $8-\dfrac{\pi}{2}$　(D) $8-\dfrac{\pi}{4}$

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 若数列 $\{2^{a_1a_n}\}$ 为递减数列, 则 （ ）

(A) $d<0$　(B) $d>0$　(C) $a_1d>0$　(D) $a_1d<0$

9. 将函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 （ ）

(A) 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减　(B) 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增

(C) 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减　(D) 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

10. 已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 的准线上, 过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B, 记 C 的焦点为 F, 则直线 BF 的斜率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{4}{3}$

11. 当 $x\in[-2,1]$ 时, 不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 （ ）

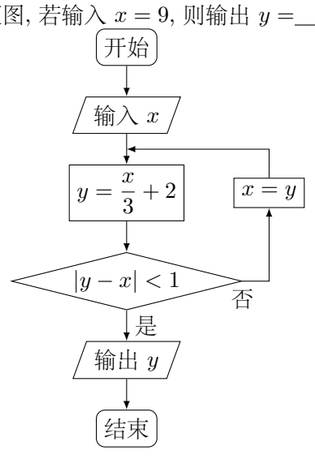
(A) $[-5,-3]$　(B) $\left[-6,-\dfrac{9}{8}\right]$　(C) $[-6,-2]$　(D) $[-4,-3]$

12. 已知定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足: ① $f(0)=f(1)=0$; ② 对所有 x, $y\in[0,1]$, 且 $x\neq y$, 有 $|f(x)-f(y)|<\dfrac{1}{2}|x-y|$. 若对所有 x, $y\in[0,1]$, $|f(x)-f(y)|<k$ 恒成立, 则 k 的最小值为 （ ）

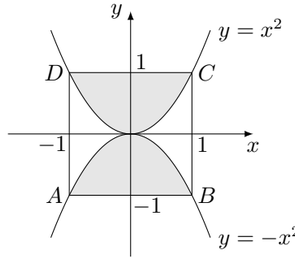
(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{2\pi}$　(D) $\dfrac{1}{8}$

二、填空题

13. 执行如图的程序框图, 若输入 $x=9$, 则输出 $y=$_____.



14. 正方形的四个顶点 $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$ 分别在抛物线 $y=-x^2$ 和 $y=x^2$ 上, 如图所示, 若将一个质点随机投入正方形 $ABCD$ 中, 则质点落在阴影区域的概率是_____.



15. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 点 M 与 C 的焦点不重合, 若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A, B, 线段 MN 的中点在 C 上, 则 $|AN|+|BN|=$_____.

16. 对于 $c>0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$ 且使 $|2a+b|$ 最大时, $\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{c}$ 的最小值为_____.

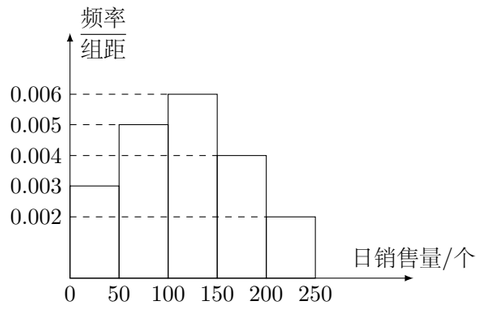
三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $a>c$, 已知 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$, $\cos B=\dfrac{1}{3}$, $b=3$, 求:

(1) a 和 c 的值;

(2) $\cos(B-C)$ 的值.

18. 一家面包房根据以往某种面包的销售记录, 绘制了日销售量的频率分布直方图, 如图所示. 将日销售量落入各组的频率视为概率, 并假设每天的销售量相互独立.



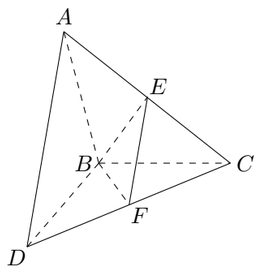
(1) 求在未来连续 3 天里, 有连续 2 天的日销售量都不低于 100 个且另 1 天的日销售量低于 50 个的概率;

(2) 用 X 表示在未来 3 天里日销售量不低于 100 个的天数, 求随机变量 X 的分布列, 期望 $E(X)$ 及方差 $D(X)$.

19. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 所在平面互相垂直, 且 $AB=BC=BD=2$, $\angle ABC=\angle DBC=120^\circ$, E, F 分别为 AC, DC 的中点.

(1) 求证: $EF\perp BC$;

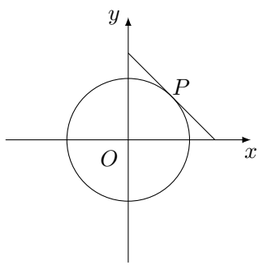
(2) 求二面角 $E-BF-C$ 的正弦值



20. 圆 $x^2+y^2=4$ 的切线与 x 轴正半轴, y 轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为 P (如图). 双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 P 且离心率为 $\sqrt{3}$.

(1) 求 C_1 的方程;

(2) 椭圆 C_2 过点 P 且与 C_1 有相同的焦点, 直线 l 过 C_2 的右焦点且与 C_2 交于 A, B 两点, 若以线段 AB 为直径的圆过点 P, 求 l 的方程.



21. 已知函数 $f(x)=(\cos x-x)(\pi+2x)-\dfrac{8}{3}(\sin x+1)$, $g(x)=3(x-\pi)\cos x-4(1+\sin x)\ln\left(3-\dfrac{2x}{\pi}\right)$.

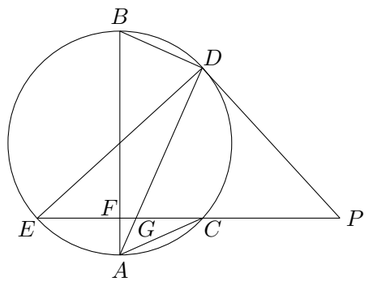
(1) 证明: 存在唯一 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使 $f(x_0)=0$;

(2) 证明: 存在唯一 $x_1\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 使 $g(x_1)=0$, 且对 (1) 中的 x_0, 有 $x_0+x_1<\pi$.

22. 如图, EP 交圆于 E, C 两点, PD 切圆于 D, G 为 CE 上一点且 $PG=PD$, 连接 DG 并延长交圆于点 A, 作弦 AB 垂直 EP, 垂足为 F.

(1) 求证: AB 为圆的直径;

(2) 若 $AC=BD$, 求证: $AB=ED$.



23. 将圆 $x^2+y^2=1$ 上每一点的横坐标保持不变, 纵坐标变为原来的 2 倍, 得曲线 C.

(1) 写出 C 的参数方程;

(2) 设直线 $l:2x+y-2=0$ 与 C 的交点为 P_1, P_2, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求过线段 P_1P_2 的中点且与 l 垂直的直线的极坐标方程.

24. 设函数 $f(x)=2|x-1|+x-1$, $g(x)=16x^2-8x+1$, 记 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 M, $g(x)\leqslant 4$ 的解集为 N.

(1) 求 M;

(2) 当 $x\in M\cap N$ 时, 证明: $x^2f(x)+x[f(x)]^2\leqslant\dfrac{1}{4}$.

2014 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x\mid x\leqslant 0\}$, $B=\{x\mid x\geqslant 1\}$, 则集合 $\complement_U(A\cup B)=$ （ ）

(A) $\{x\mid x\geqslant 0\}$　(B) $\{x\mid x\leqslant 1\}$

(C) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$　(D) $\{x\mid 0<x<1\}$

2. 设复数 z 满足 $(z-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$, 则 $z=$ （ ）

(A) $2+3\mathrm{i}$　(B) $2-3\mathrm{i}$　(C) $3+2\mathrm{i}$　(D) $3-2\mathrm{i}$

3. 已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$, $b=\log_2\dfrac{1}{3}$, $c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$, 则 （ ）

(A) $a>b>c$　(B) $a>c>b$　(C) $c>a>b$　(D) $c>b>a$

4. 已知 m, n 表示两条不同直线, α 表示平面, 下列说法正确的是 （ ）

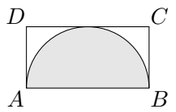
(A) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$　(B) 若 $m\perp\alpha$, $n\subset\alpha$, 则 $m\perp n$

(C) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\parallel\alpha$　(D) 若 $m\parallel\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\perp\alpha$

5. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是非零向量, 已知命题 p: 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$; 命题 q: 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$, 则下列命题中的真命题是 （ ）

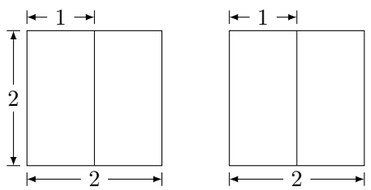
(A) $p\vee q$　(B) $p\wedge q$　(C) $(\neg p)\wedge(\neg q)$　(D) $p\vee(\neg q)$

6. 若将一个质点随机投入如图所示的长方形 $ABCD$ 中, 其中 $AB=2$, $BC=1$, 则质点落在以 AB 为直径的半圆内的概率是 （ ）



(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{6}$　(D) $\dfrac{\pi}{8}$

7. 某几何体三视图如图所示, 则该几何体的体积为 （ ）



(A) $8-\dfrac{\pi}{4}$　(B) $8-\dfrac{\pi}{2}$　(C) $8-\pi$　(D) $8-2\pi$

8. 已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 的准线上, 记 C 的焦点为 F, 则直线 AF 的斜率为 （ ）

(A) $-\dfrac{4}{3}$　(B) -1　(C) $-\dfrac{3}{4}$　(D) $-\dfrac{1}{2}$

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 若数列 $\{2^{a_1a_n}\}$ 为递减数列, 则 （ ）

(A) $d<0$　(B) $d>0$　(C) $a_1d>0$　(D) $a_1d<0$

10. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ 2x-1, & x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\end{cases}$, 则不等式 $f(x-1)\leqslant\dfrac{1}{2}$ 的解集为 （ ）

(A) $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{4}\right]$　(B) $\left[-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3}\right]$

(C) $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{4}\right]\cup\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{4}\right]$　(D) $\left[-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{4}\right]$

11. 将函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 （ ）

(A) 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减　(B) 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增

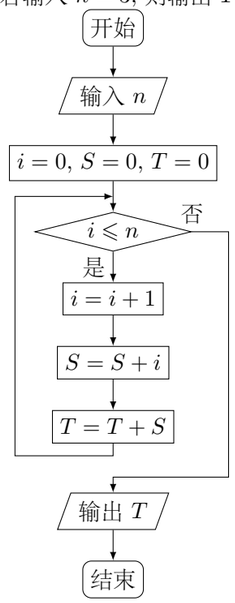
(C) 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减　(D) 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

12. 当 $x\in[-2,1]$ 时, 不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 （ ）

(A) $[-5,-3]$　(B) $\left[-6,-\dfrac{9}{8}\right]$　(C) $[-6,-2]$　(D) $[-4,-3]$

二、填空题

13. 执行如图的程序框图, 若输入 $n=3$, 则输出 $T=$_____.



14. 已知 x, y 满足条件 $\begin{cases}2x+y-2\geqslant 0\\ x-2y+4\geqslant 0\\ 3x-y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=3x+4y$ 的最大值为_____.

15. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 点 M 与 C 的焦点不重合, 若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A, B, 线段 MN 的中点在 C 上, 则 $|AN|+|BN|=$_____.

16. 对于 $c>0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2-2ab+b^2-c=0$ 且使 $|2a+b|$ 最大时, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{4}{c}$ 的最小值为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $a>c$, 已知 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$, $\cos B=\dfrac{1}{3}$, $b=3$, 求:

(1) a 和 c 的值;

(2) $\cos(B-C)$ 的值.

18. 某大学餐饮中心为了了解新生的饮食习惯, 在全校一年级学生中进行了抽样调查, 调查结果如下表所示:

	喜欢甜品	不喜欢甜品	合计
南方学生	60	20	80
北方学生	10	10	20
合计	70	30	100

(1) 根据表中数据, 问是否有 95% 的把握认为“南方学生和北方学生在选用甜品的饮食习惯方面有差异”;

(2) 已知在被调查的北方学生中有 5 名数学系的学生, 其中 2 名喜欢甜品, 现在从这 5 名学生中随机抽取 3 人, 求至多有 1 人喜欢甜品的概率.

附: $\chi^2=\dfrac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$,

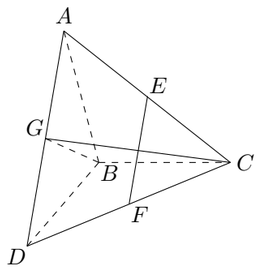
$P(\chi^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

19. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 所在平面互相垂直, 且 $AB=BC=BD=2$, $\angle ABC=\angle DBC=120^\circ$, E, F, G 分别为 AC, DC, AD 的中点.

(1) 求证: $EF\perp$ 平面 BCG;

(2) 求三棱锥 $D-BCG$ 的体积.

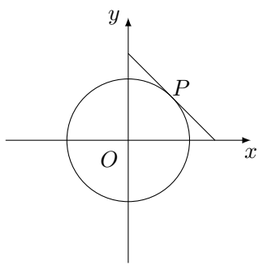
附: 锥体的体积公式 $V=\dfrac{1}{3}Sh$, 其中 S 为底面面积, h 为高.



20. 圆 $x^2+y^2=4$ 的切线与 x 轴正半轴, y 轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为 P (如图).

(1) 求点 P 的坐标;

(2) 焦点在 x 轴上的椭圆 C 过点 P, 且与直线 $l: y=x+\sqrt{3}$ 交于 A, B 两点, 若 $\triangle PAB$ 的面积为 2, 求 C 的标准方程.



21. 已知函数 $f(x)=\pi(x-\cos x)-2\sin x-2$, $g(x)=(x-\pi)\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}+\dfrac{2x}{\pi}-1$.

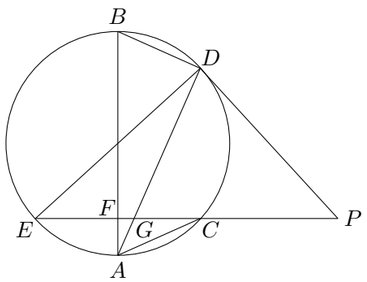
(1) 证明: 存在唯一 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使 $f(x_0)=0$;

(2) 证明: 存在唯一 $x_1\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 使 $g(x_1)=0$, 且对 (1) 中的 x_0, 有 $x_0+x_1>\pi$.

22. 如图, EP 交圆于 E, C 两点, PD 切圆于 D, G 为 CE 上一点且 $PG=PD$, 连接 DG 并延长交圆于点 A, 作弦 AB 垂直 EP, 垂足为 F.

(1) 求证: AB 为圆的直径;

(2) 若 $AC=BD$, 求证: $AB=ED$.



23. 将圆 $x^2+y^2=1$ 上每一点的横坐标保持不变, 纵坐标变为原来的 2 倍, 得曲线 C.

(1) 写出 C 的参数方程;

(2) 设直线 $l: 2x+y-2=0$ 与 C 的交点为 P_1, P_2, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求过线段 P_1P_2 的中点且与 l 垂直的直线的极坐标方程.

24. 设函数 $f(x)=2|x-1|+x-1$, $g(x)=16x^2-8x+1$, 记 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 M, $g(x)\leqslant 4$ 的解集为 N.

(1) 求 M;

(2) 当 $x\in M\cap N$ 时, 证明: $x^2f(x)+x[f(x)]^2\leqslant\dfrac{1}{4}$.

2014 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\geqslant 0\}$, $B=\{x\mid -2\leqslant x<2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $[-2,-1]$　(B) $[-1,2)$　(C) $[-1,1]$　(D) $[1,2)$

2. $\dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2}=$ （　）

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

3. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是 （　）

(A) $f(x)g(x)$ 是偶函数　(B) $|f(x)|g(x)$ 是奇函数

(C) $|g(x)|f(x)$ 是奇函数　(D) $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

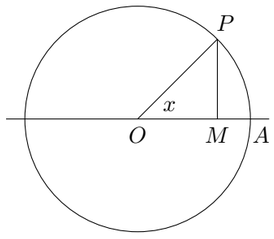
4. 已知 F 是双曲线 $C:x^2-my^2=3m$ $(m>0)$ 的一个焦点, 则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为 （　）

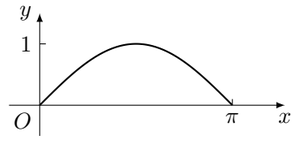
(A) $\sqrt{3}$　(B) 3　(C) $\sqrt{3}m$　(D) $3m$

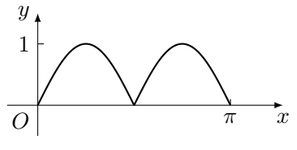
5. 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动, 则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 （　）

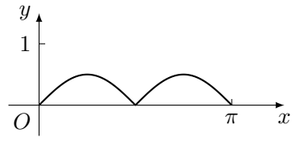
(A) $\dfrac{1}{8}$　(B) $\dfrac{3}{8}$　(C) $\dfrac{5}{8}$　(D) $\dfrac{7}{8}$

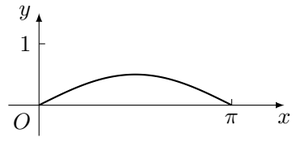
6. 如图, 圆 O 的半径为 1, A 是圆上的定点, P 是圆上的动点, 角 x 的始边为射线 OA, 终边为射线 OP, 过点 P 作直线 OA 的垂线, 垂足为 M, 将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象大致为 （　）



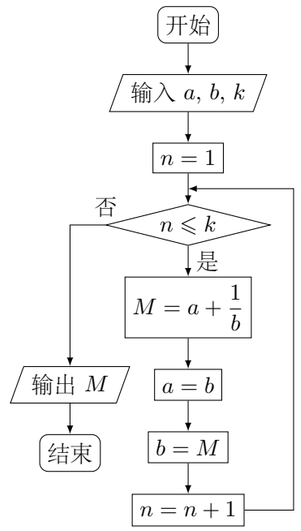
(A)


(B)


(C)


(D)


7. 执行如图的程序框图, 若输入的 a, b, k 分别为 1, 2, 3, 则输出的 $M=$（　）



(A) $\dfrac{20}{3}$　(B) $\dfrac{7}{2}$　(C) $\dfrac{16}{5}$　(D) $\dfrac{15}{8}$

8. 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $\tan\alpha=\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$, 则 （　）

(A) $3\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$　(B) $3\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　(C) $2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$　(D) $2\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

9. 不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-2y\leqslant 4\end{cases}$ 的解集记为 D. 有下面四个命题:

p_1: $\forall(x,y)\in D$, $x+2y\geqslant -2$;　p_2: $\exists(x,y)\in D$, $x+2y\geqslant 2$;

p_3: $\forall(x,y)\in D$, $x+2y\leqslant 3$;　p_4: $\exists(x,y)\in D$, $x+2y\leqslant -1$.

其中真命题是 （　）

(A) p_2, p_3　(B) p_1, p_2　(C) p_1, p_4　(D) p_1, p_3

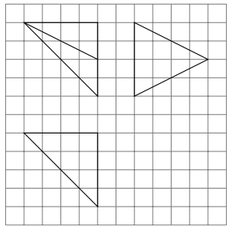
10. 已知抛物线 C: $y^2=8x$ 的焦点为 F, 准线为 l, P 是 l 上一点, Q 是直线 PF 与 C 的一个交点, 若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$, 则 $|QF|=$ （　）

(A) $\dfrac{7}{2}$　(B) 3　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 2

11. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0, 且 $x_0>0$, 则 a 的取值范围为 （　）

(A) $(2,+\infty)$　(B) $(1,+\infty)$　(C) $(-\infty,-2)$　(D) $(-\infty,-1)$

12. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的各条棱中, 最长的棱的长度为 （　）



(A) $6\sqrt{2}$　(B) 6　(C) $4\sqrt{2}$　(D) 4

二、填空题

13. $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为_____. (用数字填写答案)

14. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A, B, C 三个城市时, 甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过 B 城市; 乙说: 我没去过 C 城市; 丙说: 我们三人去过同一个城市. 由此可判断乙去过的城市为_____.

15. 已知 A, B, C 是圆 O 上的三点, 若 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为_____.

16. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, $a=2$, 且 $(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

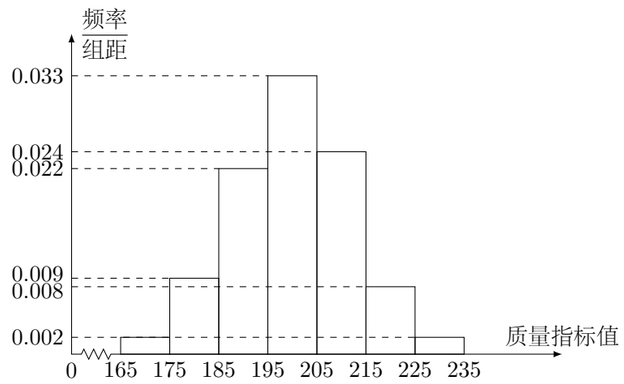
三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1$, $a_n\neq 0$, $a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$, 其中 λ 为常数.

(1) 证明: $a_{n+2}-a_n=\lambda$;

(2) 是否存在 λ, 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列? 并说明理由.

18. 从某企业生产的某种产品中抽取 500 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频率分布直方图:



(1) 求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2 (同一组数据用该区间的中点值作代表);

(2) 由频率分布直方图可以认为, 这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$, σ^2 近似为样本方差 s^2.

① 利用该正态分布, 求 $P(187.8<Z<212.2)$;

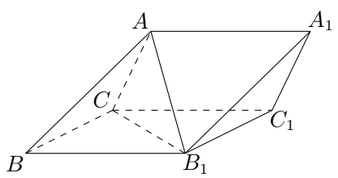
② 某用户从该企业购买了 100 件这种产品, 记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间 $(187.8,212.2)$ 的产品件数, 利用①的结果, 求 EX.

附: $\sqrt{150}\approx 12.2$, 若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$, $P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$.

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, $AB\perp B_1C$.

(1) 证明: $AC=AB_1$;

(2) 若 $AC\perp AB_1$, $\angle CBB_1=60^\circ$, $AB=BC$, 求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值.



20. 已知点 $A(0,-2)$, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, F 是椭圆的右焦点, 直线 AF 的斜率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点, 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求 l 的方程.

21. 设函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x\ln x+\dfrac{b\mathrm{e}^{x-1}}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=\mathrm{e}(x-1)+2$.

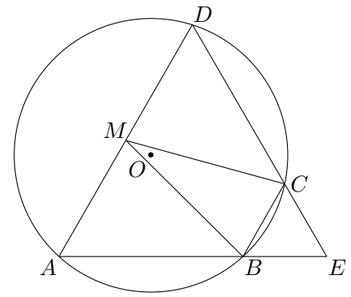
(1) 求 a, b;

(2) 证明: $f(x)>1$.

22. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E, 且 $CB=CE$.

(1) 证明: $\angle D=\angle E$;

(2) 设 AD 不是 $\odot O$ 的直径, AD 的中点为 M, 且 $MB=MC$, 证明: $\triangle ADE$ 为等边三角形.



23. 已知曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 直线 $l:\begin{cases}x=2+t\\ y=2-2t\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 写出曲线 C 的参数方程, 直线 l 的普通方程;

(2) 过曲线 C 上任一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线, 交 l 于点 A, 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

24. 若 $a>0$, $b>0$, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(1) 求 a^3+b^3 的最小值;

(2) 是否存在 a, b, 使得 $2a+3b=6$? 并说明理由.

2014 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid -1<x<3\}$, $N=\{x\mid -2<x<1\}$, 则 $M\cap N=$(　　)

(A) $(-2,1)$　　(B) $(-1,1)$　　(C) $(1,3)$　　(D) $(-2,3)$

2. 若 $\tan\alpha>0$, 则　　(　　)

(A) $\sin 2\alpha>0$　　(B) $\cos\alpha>0$　　(C) $\sin\alpha>0$　　(D) $\cos 2\alpha>0$

3. 设 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}+\mathrm{i}$, 则 $|z|=$　　(　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) 2

4. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1$ $(a>0)$ 的离心率为 2, 则 $a=$　　(　　)

(A) 2　　(B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(D) 1

5. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是　　(　　)

(A) $f(x)|g(x)|$ 是奇函数　　(B) $|f(x)|g(x)$ 是奇函数

(C) $f(x)g(x)$ 是偶函数　　(D) $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

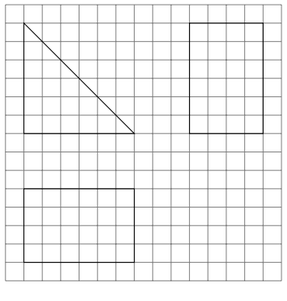
6. 设 D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的中点, 则 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$　　(　　)

(A) $\overrightarrow{BC}$　　(B) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　(C) $\overrightarrow{AD}$　　(D) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

7. 在函数① $y=\cos|2x|$, ② $y=|\cos x|$, ③ $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, ④ $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 中, 最小正周期为 π 的所有函数为　　(　　)

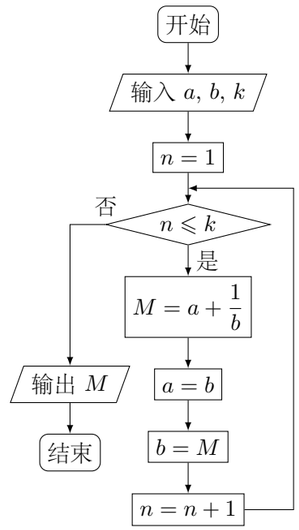
(A) ②④　　(B) ①③④　　(C) ①②③　　(D) ①③

8. 如图, 网格纸的各小格都是正方形, 粗实线画出的是一个几何体的三视图, 则这个几何体是　　(　　)



(A) 三棱锥　　(B) 三棱柱　　(C) 四棱锥　　(D) 四棱柱

9. 执行如图的程序框图, 若输入的 a, b, k 分别为 1, 2, 3, 则输出的 $M=$(　　)



(A) $\dfrac{20}{3}$　　(B) $\dfrac{7}{2}$　　(C) $\dfrac{16}{5}$　　(D) $\dfrac{15}{8}$

10. 已知抛物线 $C:y^2=x$ 的焦点为 F, $A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点, $|AF|=\dfrac{5}{4}x_0$, 则 $x_0=$　　(　　)

(A) 4　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 8

11. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant a\\ x-y\leqslant -1\end{cases}$ 且 $z=x+ay$ 的最小值为 7, 则 $a=$　　(　　)

(A) -5　　(B) 3　　(C) -5 或 3　　(D) 5 或 -3

12. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0, 且 $x_0>0$, 则 a 的取值范围为　　(　　)

(A) $(-\infty,-2)$　　(B) $(1,+\infty)$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-1)$

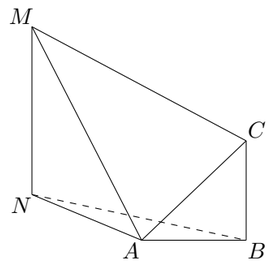
二、填空题

13. 将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行, 则 2 本数学书相邻的概率为_____.

14. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A, B, C 三个城市时, 甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过 B 城市; 乙说: 我没去过 C 城市; 丙说: 我们三人去过同一个城市. 由此可判断乙去过的城市为_____.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-1}, & x<1\\ x^{\frac{1}{3}}, & x\geqslant 1\end{cases}$, 则使得 $f(x)\leqslant 2$ 成立的 x 的取值范围是_____.

16. 如图, 为测量山高 MN, 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN=60°$, C 点的仰角 $\angle CAB=45°$ 以及 $\angle MAC=75°$; 从 C 点测得 $\angle MCA=60°$. 已知山高 $BC=100$ m, 则山高 $MN=$_____m.



三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列, a_2, a_4 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

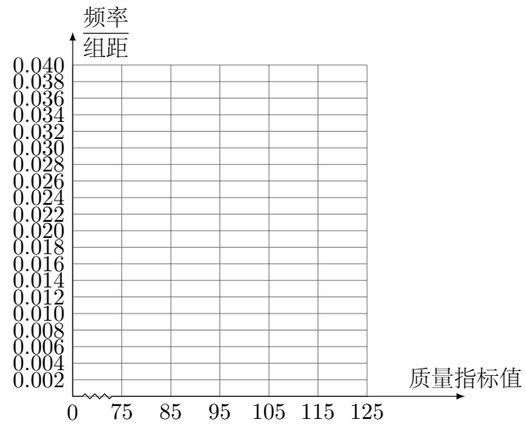
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 从某企业生产的某种产品中抽取 100 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频数分布表:

质量指标值分组	[75, 85)	[85, 95)	[95, 105)	[105, 115)	[115, 125)
频数	6	26	38	22	8

(1) 作出这些数据的频率分布直方图;



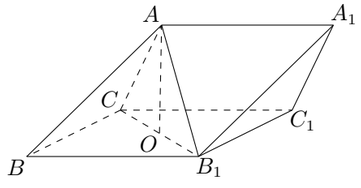
(2) 估计这种产品质量指标值的平均数及方差 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(3) 根据以上抽样调查数据, 能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品的 80%”的规定?

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, B_1C 的中点为 O, 且 $AO\perp$ 平面 BB_1C_1C.

(1) 证明: $B_1C\perp AB$;

(2) 若 $AC\perp AB_1$, $\angle CBB_1=60^\circ$, $BC=1$, 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高.



20. 已知点 $P(2,2)$, 圆 $C:x^2+y^2-8y=0$, 过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M, O 为坐标原点.

(1) 求 M 的轨迹方程;

(2) 当 $|OP|=|OM|$ 时, 求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

21. 设函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-bx\,(a\neq 1)$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 0.

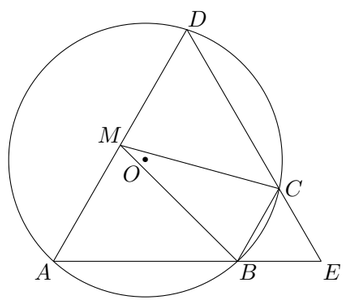
(1) 求 b;

(2) 若存在 $x_0\geqslant 1$ 使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}$, 求 a 的取值范围.

22. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E, 且 $CB=CE$.

(1) 证明: $\angle D=\angle E$;

(2) 设 AD 不是 $\odot O$ 的直径, AD 的中点为 M, 且 $MB=MC$, 证明: $\triangle ADE$ 为等边三角形.



23. 已知曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 直线 $l:\begin{cases}x=2+t\\ y=2-2t\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 写出曲线 C 的参数方程, 直线 l 的普通方程;

(2) 过曲线 C 上任一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线, 交 l 于点 A, 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

24. 若 $a>0$, $b>0$, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(1) 求 a^3+b^3 的最小值;

(2) 是否存在 a, b, 使得 $2a+3b=6$? 并说明理由.

2014 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{0,1,2\}$, $N=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{1\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\{0,1\}$ (D) $\{1,2\}$

2. 设复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称, $z_1=2+\mathrm{i}$, 则 $z_1z_2=$（ ）

(A) -5 (B) 5 (C) $-4+\mathrm{i}$ (D) $-4-\mathrm{i}$

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

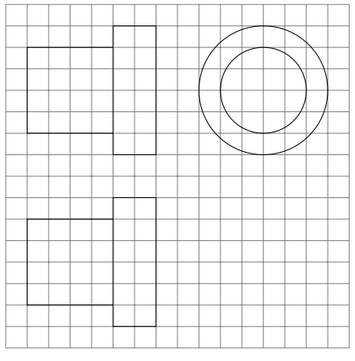
4. 钝角三角形 ABC 的面积是 $\dfrac{1}{2}$, $AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, 则 $AC=$ （ ）

(A) 5 (B) $\sqrt{5}$ (C) 2 (D) 1

5. 某地区空气质量监测资料表明, 一天的空气质量为优良的概率是 0.75, 连续两天为优良的概率是 0.6, 已知某天的空气质量为优良, 则随后一天的空气质量为优良的概率是 （ ）

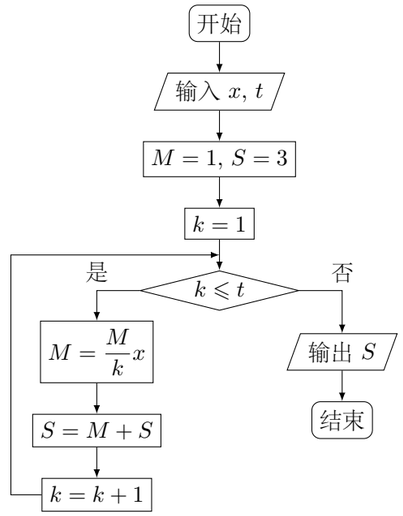
(A) 0.8 (B) 0.75 (C) 0.6 (D) 0.45

6. 如图, 网格纸上正方形小格的边长为 1 (表示 1 cm), 图中粗线画出的是某零件的三视图, 该零件由一个底面半径为 3 cm, 高为 6 cm 的圆柱体毛坯切削得到, 则切削掉的部分的体积与原来毛坯体积的比值为 （ ）



(A) $\dfrac{17}{27}$ (B) $\dfrac{5}{9}$ (C) $\dfrac{10}{27}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

7. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 x, t 均为 2, 则输出的 $S=$ （ ）



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

8. 设曲线 $y=ax-\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=2x$, 则 $a=$（ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

9. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-7\leqslant 0\\ x-3y+1\leqslant 0\\ 3x-y-5\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最大值为（ ）

(A) 10 (B) 8 (C) 3 (D) 2

10. 设 F 为抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$ (C) $\dfrac{63}{32}$ (D) $\dfrac{9}{4}$

11. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BCA=90^\circ$, M, N 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, $BC=CA=CC_1$, 则 BM 与 AN 所成角的余弦值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{10}$ (B) $\dfrac{2}{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. 设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi x}{m}$, 若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0^2+[f(x_0)]^2<m^2$, 则 m 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$ (B) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

二、填空题

13. $(x+a)^{10}$ 的展开式中, x^7 的系数为 15, 则 $a=$_____. (用数字填写答案)

14. 函数 $f(x)=\sin(x+2\varphi)-2\sin\varphi\cos(x+\varphi)$ 的最大值为_____.

15. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减, $f(2)=0$, 若 $f(x-1)>0$, 则 x 的取值范围是_____.

16. 设点 $M(x_0,1)$, 若在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上存在点 N, 使得 $\angle OMN=45^\circ$, 则 x_0 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+1$.

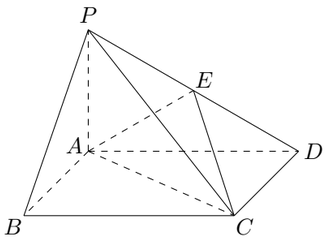
(1) 证明 $\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, E 为 PD 的中点.

(1) 证明: $PB\parallel$ 平面 AEC;

(2) 设二面角 $D-AE-C$ 为 60°, $AP=1$, $AD=\sqrt{3}$, 求三棱锥 $E-ACD$ 的体积.



19. 某地区 2007 年至 2013 年农村居民家庭人均纯收入 y (单位: 千元) 的数据如下表:

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
年份代号 t	1	2	3	4	5	6	7
人均纯收入 y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

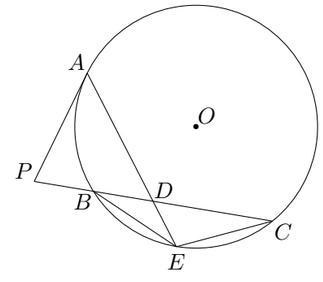
(1) 求 y 关于 t 的线性回归方程;
(2) 利用 (1) 中的回归方程, 分析 2007 年至 2013 年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况, 并预测该地区 2015 年农村居民家庭人均纯收入.
附: 回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\widehat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2},\ \widehat{a}=\overline{y}-\widehat{b}\overline{t}.$$

20. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点, M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直, 直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N.
(1) 若直线 MN 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$, 求 C 的离心率;
(2) 若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2, 且 $|MN|=5|F_1N|$, 求 a, b.

21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$, 当 $x>0$ 时, $g(x)>0$, 求 b 的最大值;
(3) 已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$, 估计 $\ln 2$ 的近似值 (精确到 0.001).

22. 如图, P 是 $\odot O$ 外一点, PA 是切线, A 为切点, 割线 PBC 与 $\odot O$ 相交于点 B, C, $PC=2PA$, D 为 PC 的中点, AD 的延长线交 $\odot O$ 于点 E. 证明:
(1) $BE=EC$;
(2) $AD\cdot DE=2PB^2$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 半圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$, $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
(1) 求 C 的参数方程;
(2) 设点 D 在 C 上, C 在 D 处的切线与直线 $l:y=\sqrt{3}x+2$ 垂直, 根据 (1) 中你得到的参数方程, 确定点 D 的坐标.

24. 设函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{a}\right|+|x-a|\ \ (a>0)$.
(1) 证明: $f(x)\geqslant 2$;
(2) 若 $f(3)<5$, 求 a 的取值范围.

2014 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{-2,0,2\}$, $B=\{x\mid x^2-x-2=0\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\varnothing$ (B) $\{2\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{-2\}$

2. $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $-1+2\mathrm{i}$ (C) $1-2\mathrm{i}$ (D) $-1-2\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数存在, 若 p: $f'(x_0)=0$; q: $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 则 （ ）

(A) p 是 q 的充分必要条件

(B) p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件

(C) p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件

(D) p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件

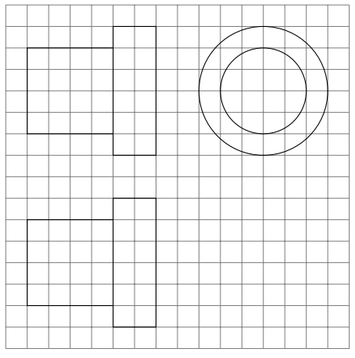
4. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是 2, 若 a_2, a_4, a_8 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$ （ ）

(A) $n(n+1)$ (B) $n(n-1)$ (C) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (D) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

6. 如图, 网格纸上正方形小格的边长为 1 (表示 1 cm), 图中粗线画出的是某零件的三视图, 该零件由一个底面半径为 3 cm, 高为 6 cm 的圆柱体毛坯切削得到, 则切削掉的部分的体积与原来毛坯体积的比值为 （ ）

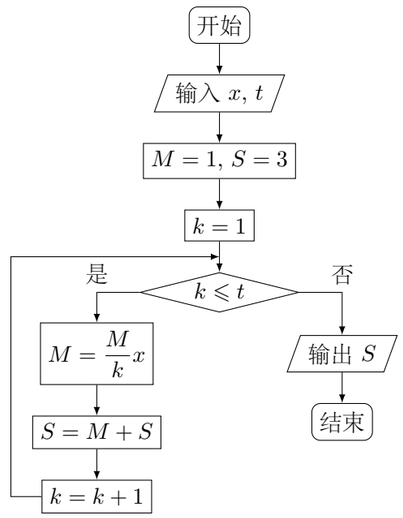


(A) $\dfrac{17}{27}$ (B) $\dfrac{5}{9}$ (C) $\dfrac{10}{27}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2, 侧棱长为 $\sqrt{3}$, D 为 BC 中点, 则三棱锥 $A-B_1DC_1$ 的体积为 （ ）

(A) 3 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 x, t 均为 2, 则输出的 $S=$ （ ）



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

9. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-1\geqslant 0\\ x-y-1\leqslant 0\\ x-3y+3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最大值为( )

(A) 8 (B) 7 (C) 2 (D) 1

10. 设 F 为抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, 则 $|AB|=$ （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$ (B) 6 (C) 12 (D) $7\sqrt{3}$

11. 若函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增, 则 k 的取值范围是( )

(A) $(-\infty,-2]$ (B) $(-\infty,-1]$ (C) $[2,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

12. 设点 $M(x_0,1)$, 若在圆 $O: x^2+y^2=1$ 上存在点 N, 使得 $\angle OMN=45°$, 则 x_0 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,1]$ (B) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ (C) $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ (D) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

二、填空题

13. 甲、乙两名运动员各自等可能地从红、白、蓝 3 种颜色的运动服中选择 1 种, 则他们选择相同颜色运动服的概率为_____.

14. 函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)-2\sin\varphi\cos x$ 的最大值为_____.

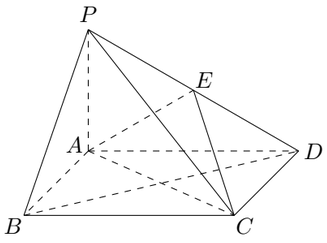
15. 偶函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, $f(3)=3$, 则 $f(-1)=$_____.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$, $a_8=2$, 则 $a_1=$_____.

三、解答题

17. 四边形 $ABCD$ 的内角 A 与 C 互补, $AB=1$, $BC=3$, $CD=DA=2$.
(1) 求 C 和 BD;
(2) 求四边形 $ABCD$ 的面积.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, E 为 PD 的中点.
(1) 证明: $PB\parallel$ 平面 AEC;
(2) 设 $AP=1$, $AD=\sqrt{3}$, 三棱锥 $P-ABD$ 的体积 $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 求 A 到平面 PBC 的距离.



19. 某市为了考核甲、乙两部门的工作情况, 随机访问了 50 位市民, 根据这 50 位市民对这两部门的评分 (评分越高表明市民的评价越高), 绘制茎叶图如下:

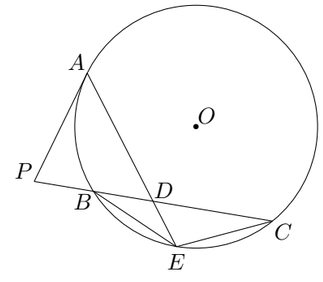
甲部门		乙部门
	3	5 9
4	4	0 4 4 8
9 7	5	1 2 2 4 5 6 6 7 7 7 8 9
9 7 6 6 5 3 3 2 1 1 0	6	0 1 1 2 3 4 6 8 8
9 8 8 7 7 7 6 6 5 5 5 5 5 4 4 4 3 3 3 2 1 0 0	7	0 0 1 1 3 4 4 9
6 6 5 5 2 0 0	8	1 2 3 3 4 5
6 3 2 2 2 0	9	0 1 1 4 5 6
	10	0 0 0

(1) 分别估计该市的市民对甲、乙两部门评分的中位数;
(2) 分别估计该市的市民对甲、乙两部门的评分高于 90 的概率;
(3) 根据茎叶图分析该市的市民对甲、乙两部门的评价.

20. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点, M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直, 直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N.
(1) 若直线 MN 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$, 求 C 的离心率;
(2) 若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2, 且 $|MN|=5|F_1N|$, 求 a, b.

21. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+2$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 -2.
(1) 求 a;
(2) 证明: 当 $k<1$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点.

22. 如图, P 是 $\odot O$ 外一点, PA 是切线, A 为切点, 割线 PBC 与 $\odot O$ 相交于点 B, C, $PC=2PA$, D 为 PC 的中点, AD 的延长线交 $\odot O$ 于点 E. 证明:
(1) $BE=EC$;
(2) $AD\cdot DE=2PB^2$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 半圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$, $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
(1) 求 C 的参数方程;
(2) 设点 D 在 C 上, C 在 D 处的切线与直线 $l:y=\sqrt{3}x+2$ 垂直, 根据 (1) 中你得到的参数方程, 确定点 D 的坐标.

24. 设函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{a}\right|+|x-a|\ \ (a>0)$.
(1) 证明: $f(x)\geqslant 2$;
(2) 若 $f(3)<5$, 求 a 的取值范围.

2014 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $a,\ b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $a-\mathrm{i}$ 与 $2+b\mathrm{i}$ 互为共轭复数, 则 $(a+b\mathrm{i})^2=$ （　）

(A) $5-4\mathrm{i}$　(B) $5+4\mathrm{i}$　(C) $3-4\mathrm{i}$　(D) $3+4\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x\,|\,|x-1|<2\}$, $B=\{y\,|\,y=2^x, x\in[0,2]\}$, 则 $A\cap B=$（　）

(A) $[0,2]$　(B) $(1,3)$　(C) $[1,3)$　(D) $(1,4)$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2-1}}$ 的定义域为 （　）

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　(B) $(2,+\infty)$

(C) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$　(D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$

4. 用反证法证明命题“设 $a,\ b$ 为实数, 则方程 $x^3+ax+b=0$ 至少有一个实根”时, 要做的假设是 （　）

(A) 方程 $x^3+ax+b=0$ 没有实根

(B) 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有一个实根

(C) 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有两个实根

(D) 方程 $x^3+ax+b=0$ 恰好有两个实根

5. 已知实数 $x,\ y$ 满足 $a^x<a^y$ $(0<a<1)$, 则下列关系式恒成立的是（　）

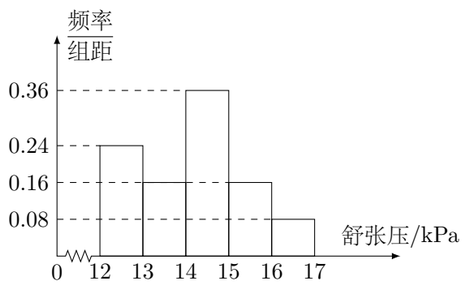
(A) $\dfrac{1}{x^2+1}>\dfrac{1}{y^2+1}$　(B) $\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$

(C) $\sin x>\sin y$　(D) $x^3>y^3$

6. 直线 $y=4x$ 与曲线 $y=x^3$ 在第一象限内围成的封闭图形的面积为（　）

(A) $2\sqrt{2}$　(B) $4\sqrt{2}$　(C) 2　(D) 4

7. 为了研究某种药品的疗效, 选取若干名志愿者进行临床试验. 所有志愿者的舒张压数据 (单位: kPa) 的分组区间为 $[12,13)$, $[13,14)$, $[14,15)$, $[15,16)$, $[16,17]$, 将其按从左到右的顺序分别编号为第一组, 第二组, $\cdots$, 第五组. 如图所示是根据试验数据制成的频率分布直方图. 已知第一组与第二组共有 20 人, 第三组中没有疗效的人数为 （　）



(A) 6　(B) 8　(C) 12　(D) 18

8. 已知函数 $f(x)=|x-2|+1$, $g(x)=kx$, 若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 （　）

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　(B) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　(C) $(1,2)$　(D) $(2,+\infty)$

9. 已知 $x,\ y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leqslant 0\\ 2x-y-3\geqslant 0\end{cases}$, 当目标函数 $z=ax+by$ $(a>0,\ b>0)$ 在该约束条件下取到最小值 $2\sqrt{5}$ 时, a^2+b^2 的最小值为（　）

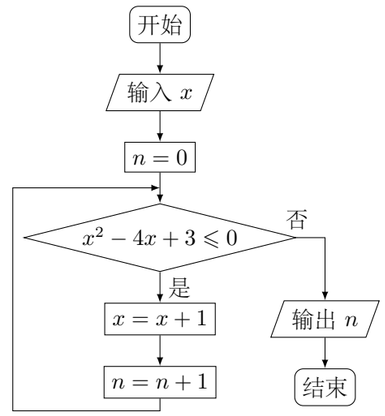
(A) 5　(B) 4　(C) $\sqrt{5}$　(D) 2

10. 已知 $a>b>0$, 椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 双曲线 C_2 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, C_1 与 C_2 的离心率之积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 则 C_2 的渐近线方程为（　）

(A) $x\pm\sqrt{2}y=0$　(B) $\sqrt{2}x\pm y=0$　(C) $x\pm 2y=0$　(D) $2x\pm y=0$

二、填空题

11. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 x 的值为 1, 则输出的 n 的值为_____.



12. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\tan A$, 当 $A=\dfrac{\pi}{6}$ 时, $\triangle ABC$ 的面积为_____.

13. 三棱锥 $P-ABC$ 中, $D,\ E$ 分别为 $PB,\ PC$ 的中点, 记三棱锥 $D-ABE$ 的体积为 V_1, $P-ABC$ 的体积为 V_2, 则 $\dfrac{V_1}{V_2}=$_____.

14. 若 $\left(ax^2+\dfrac{b}{x}\right)^6$ 的展开式中 x^3 项的系数为 20, 则 a^2+b^2 的最小值为_____.

15. 已知函数 $y=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$. 对函数 $y=g(x)$ $(x\in I)$, 定义 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 的“对称函数”为函数 $y=h(x)$ $(x\in I)$, $y=h(x)$ 满足: 对任意 $x\in I$, 两个点 $(x,h(x))$, $(x,g(x))$ 关于点 $(x,f(x))$ 对称. 若 $h(x)$ 是 $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ 关于 $f(x)=3x+b$ 的“对称函数”, 且 $h(x)>g(x)$ 恒成立, 则实数 b 的取值范围是_____.

三、解答题

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,\cos 2x)$, $\boldsymbol{b}=(\sin 2x,n)$, 函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 且 $y=f(x)$ 的图象过点 $\left(\dfrac{\pi}{12},\sqrt{3}\right)$ 和点 $\left(\dfrac{2\pi}{3},-2\right)$.

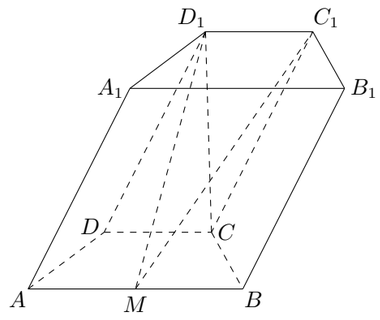
(1) 求 $m,\ n$ 的值;

(2) 将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 φ $(0<\varphi<\pi)$ 个单位后得到函数 $y=g(x)$ 的图象. 若 $y=g(x)$ 的图象上各最高点到点 $(0,3)$ 的距离的最小值为 1, 求 $y=g(x)$ 的单调增区间.

17. 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $\angle DAB=60^\circ$, $AB=2CD=2$, M 是线段 AB 的中点.

(1) 求证: $C_1M\ /\!/$ 平面 A_1ADD_1;

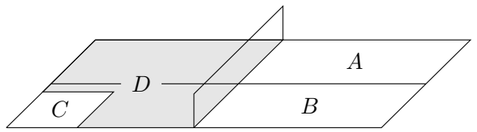
(2) 若 CD_1 垂直于平面 $ABCD$ 且 $CD_1=\sqrt{3}$, 求平面 C_1D_1M 和平面 $ABCD$ 所成的角 (锐角) 的余弦值.



18. 乒乓球台面被球网分隔成甲、乙两部分, 如图, 甲上有两个不相交的区域 A, B, 乙被划分为两个不相交的区域 C, D. 某次测试要求队员接到落点在甲上的来球后向乙回球. 规定: 回球一次, 落点在 C 上记 3 分, 在 D 上记 1 分, 其他情况记 0 分. 对落点在 A 上的来球, 队员小明回球的落点在 C 上的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 在 D 上的概率为 $\dfrac{1}{3}$; 对落点在 B 上的来球, 小明回球的落点在 C 上的概率为 $\dfrac{1}{5}$, 在 D 上的概率为 $\dfrac{3}{5}$. 假设共有两次来球且落在 A, B 上各一次, 小明的两次回球互不影响. 求:

(1) 小明两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上的概率;

(2) 两次回球结束后, 小明得分之和 ξ 的分布列与数学期望.



19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 前 n 项和为 S_n, 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4n}{a_na_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}-k\left(\dfrac{2}{x}+\ln x\right)$ (k 为常数, $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数).

(1) 当 $k\leqslant 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在两个极值点, 求 k 的取值范围.

21. 已知抛物线 $C:y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, A 为 C 上异于原点的任意一点, 过点 A 的直线 l 交 C 于另一点 B, 交 x 轴的正半轴于点 D, 且有 $|FA|=|FD|$. 当点 A 的横坐标为 3 时, $\triangle ADF$ 为正三角形.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若直线 $l_1\parallel l$, 且 l_1 和 C 有且只有一个公共点 E,

① 证明直线 AE 过定点, 并求出定点坐标;

② $\triangle ABE$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 请求出最小值; 若不存在, 请说明理由.

2014 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $a+\mathrm{i}=2-b\mathrm{i}$, 则 $(a+b\mathrm{i})^2=$ （ ）

(A) $3-4\mathrm{i}$ (B) $3+4\mathrm{i}$ (C) $4-3\mathrm{i}$ (D) $4+3\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x \mid x^2-2x<0\}$, $B=\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$, 则 $A \cap B=$ （ ）

(A) $(0,2]$ (B) $(1,2)$ (C) $[1,2)$ (D) $(1,4)$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 x-1}}$ 的定义域为 （ ）

(A) $(0,2)$ (B) $(0,2]$ (C) $(2,+\infty)$ (D) $[2,+\infty)$

4. 用反证法证明命题“设 a, b 为实数, 则方程 $x^3+ax+b=0$ 至少有一个实根”时, 要做的假设是 （ ）

(A) 方程 $x^3+ax+b=0$ 没有实根

(B) 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有一个实根

(C) 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有两个实根

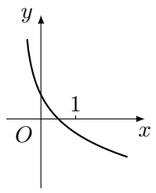
(D) 方程 $x^3+ax+b=0$ 恰好有两个实根

5. 已知实数 x, y 满足 $a^x<a^y$ $(0<a<1)$, 则下列关系式恒成立的是（ ）

(A) $x^3>y^3$ (B) $\sin x>\sin y$

(C) $\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$ (D) $\dfrac{1}{x^2+1}>\dfrac{1}{y^2+1}$

6. 已知函数 $y=\log_a(x+c)$ (a, c 为常数, 其中 $a>0, a \neq 1$) 的图象如图, 则下列结论成立的是 （ ）



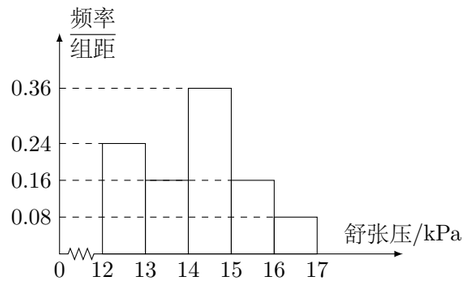
(A) $a>1, c>1$ (B) $a>1, 0<c<1$

(C) $0<a<1, c>1$ (D) $0<a<1, 0<c<1$

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{b}=(3,m)$. 若向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$, 则实数 $m=$ （ ）

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 0 (D) $-\sqrt{3}$

8. 为了研究某种药品的疗效, 选取若干名志愿者进行临床试验. 所有志愿者的舒张压数据 (单位: kPa) 的分组区间为 $[12,13)$, $[13,14)$, $[14,15)$, $[15,16)$, $[16,17]$, 将其按从左到右的顺序分别编号为第一组, 第二组, $\cdots$, 第五组. 如图所示是根据试验数据制成的频率分布直方图. 已知第一组与第二组共有 20 人, 第三组中没有疗效的有 6 人, 则第三组中有疗效的人数为 （ ）



(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 18

9. 对于函数 $f(x)$, 若存在常数 $a \neq 0$, 使得 x 取定义域内的每一个值, 都有 $f(x)=f(2a-x)$, 则称 $f(x)$ 为准偶函数, 下列函数中是准偶函数的是 （ ）

(A) $f(x)=\sqrt{x}$ (B) $f(x)=x^3$

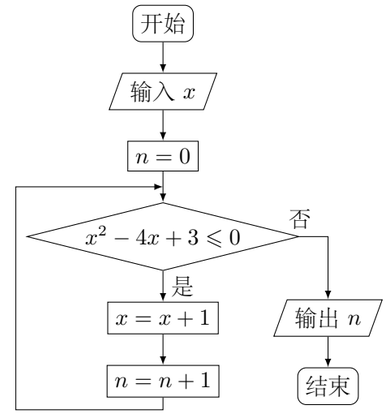
(C) $f(x)=\tan x$ (D) $f(x)=\cos(x+1)$

10. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y-1 \leqslant 0 \\ 2x-y-3 \geqslant 0 \end{cases}$, 当目标函数 $z=ax+by$ $(a>0,\ b>0)$ 在该约束条件下取到最小值 $2\sqrt{5}$ 时, a^2+b^2 的最小值为( )

(A) 5 (B) 4 (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

二、填空题

11. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 x 的值为 1, 则输出的 n 的值为_____.



12. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos^2 x$ 最小正周期为_____.

13. 一个六棱锥的体积为 $2\sqrt{3}$, 其底面是边长为 2 的正六边形, 侧棱长都相等, 则该六棱锥的侧面积为_____.

14. 圆心在直线 $x-2y=0$ 上的圆 C 与 y 轴的正半轴相切, 圆 C 截 x 轴所得弦的长为 $2\sqrt{3}$, 则圆 C 的标准方程为_____.

15. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的焦距为 $2c$, 右顶点为 A, 抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点为 F. 若双曲线截抛物线的准线所得线段长为 $2c$, 且 $FA=c$, 则双曲线的渐近线方程为_____.

三、解答题

16. 海关对同时从 A, B, C 三个不同地区进口的某种商品进行抽样检测, 从各地区进口此商品的数量 (单位: 件) 如下表所示. 工作人员用分层抽样的方法从这些商品中共抽取 6 件样品进行检测.

地区	A	B	C
数量	50	150	100

(1) 求这 6 件样品中来自 A, B, C 各地区商品的数量;

(2) 若在这 6 件样品中随机抽取 2 件送往甲机构进行进一步检测, 求这 2 件商品来自相同地区的概率.

17. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a=3$, $\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $B=A+\dfrac{\pi}{2}$.

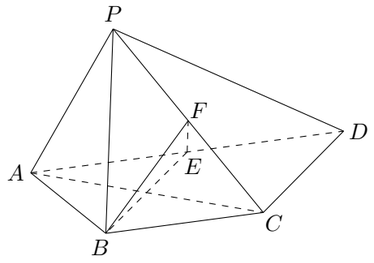
(1) 求 b 的值;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP\perp$ 平面 PCD, $AD/\!/BC$, $AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$, E, F 分别为线段 AD, PC 的中点.

(1) 求证: $AP/\!/$ 平面 BEF;

(2) 求证: $BE\perp$ 平面 PAC.



19. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知公差 $d=2$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}$, 记 $T_n=-b_1+b_2-b_3+b_4-\cdots+(-1)^n b_n$, 求 T_n.

20. 设函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{x-1}{x+1}$, 其中 a 为常数.

(1) 若 $a=0$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $y=x$ 被椭圆 C 截得的线段长为 $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过原点的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点 (A, B 不是椭圆 C 的顶点). 点 D 在椭圆 C 上, 且 $AD\perp AB$, 直线 BD 与 x 轴、y 轴分别交于 M, N 两点.

① 设直线 BD, AM 的斜率分别为 k_1, k_2, 证明存在常数 λ 使得 $k_1=\lambda k_2$, 并求出 λ 的值;

② 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值.

2014 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid x\geqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{x\mid x^2<1, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $[0,1]$　(B) $[0,1)$　(C) $(0,1]$　(D) $(0,1)$

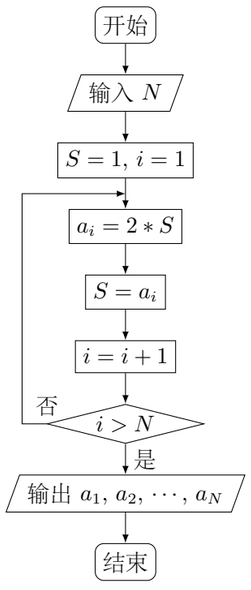
2. 函数 $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) π　(C) 2π　(D) 4π

3. 定积分 $\int_0^1(2x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$ 的值为 （　）

(A) $\mathrm{e}+2$　(B) $\mathrm{e}+1$　(C) e　(D) $\mathrm{e}-1$

4. 根据如图所示的框图, 对大于 2 的整数 N, 输出的数列的通项公式是（　）



(A) $a_n=2n$　(B) $a_n=2(n-1)$ (C) $a_n=2^n$　(D) $a_n=2^{n-1}$

5. 已知底面边长为 1, 侧棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四棱柱的各顶点均在同一个球面上, 则该球的体积为 （　）

(A) $\dfrac{32\pi}{3}$　(B) 4π　(C) 2π　(D) $\dfrac{4\pi}{3}$

6. 从正方形四个顶点及其中心这 5 个点中, 任取 2 个点, 则这 2 个点的距离不小于该正方形边长的概率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

7. 下列函数中, 满足“$f(x+y)=f(x)f(y)$”的单调递增函数是 （　）

(A) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$　(B) $f(x)=x^3$　(C) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　(D) $f(x)=3^x$

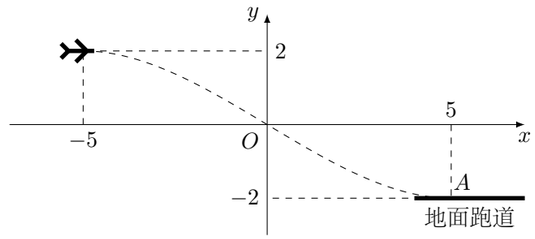
8. 原命题为“若 z_1, z_2 互为共轭复数, 则 $|z_1|=|z_2|$”, 关于其逆命题, 否命题, 逆否命题真假性的判断依次如下, 正确的是 （　）

(A) 真, 假, 真　(B) 假, 假, 真　(C) 真, 真, 假　(D) 假, 假, 假

9. 设样本数据 x_1, x_2, $\cdots$, x_{10} 的均值和方差分别为 1 和 4, 若 $y_i=x_i+a$ (a 为非零常数, $i=1, 2, \cdots, 10$), 则 y_1, y_2, $\cdots$, y_{10} 的均值和方差分别为 （　）

(A) $1+a$, 4　(B) $1+a$, $4+a$　(C) 1, 4　(D) 1, $4+a$

10. 如图, 某飞行器在 4 千米高空水平飞行, 从距着陆点 A 的水平距离 10 千米处下降, 已知下降飞行轨迹为某三次函数图象的一部分, 则函数的解析式为 （　）



(A) $y=\dfrac{1}{125}x^3-\dfrac{3}{5}x$　(B) $y=\dfrac{2}{125}x^3-\dfrac{4}{5}x$

(C) $y=\dfrac{3}{125}x^3-x$　(D) $y=-\dfrac{3}{125}x^3+\dfrac{1}{5}x$

二、填空题

11. 已知 $4^a=2$, $\lg x=a$, 则 $x=$_____.

12. 若圆 C 的半径为 1, 其圆心与点 $(1,0)$ 关于直线 $y=x$ 对称, 则圆 C 的标准方程为_____.

13. 设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, 向量 $\boldsymbol{a}=(\sin 2\theta,\cos\theta)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\theta,1)$, 若 $\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}$, 则 $\tan\theta=$_____.

14. 观察分析下表中的数据:

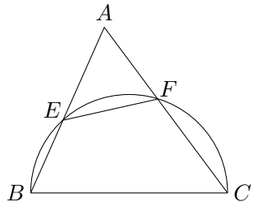
多面体	面数 (F)	顶点数 (V)	棱数 (E)
三棱锥	5	6	9
五棱锥	6	6	10
立方体	6	8	12

猜想一般凸多面体中, F, V, E 所满足的等式是_____.

15. 三选一.

【A】设 $a, b, m, n\in\mathbf{R}$, 且 $a^2+b^2=5$, $ma+nb=5$, 则 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最小值为_____.

【B】如图, $\triangle ABC$ 中, $BC=6$, 以 BC 为直径的半圆分别交 AB, AC 于点 E, F, 若 $AC=2AE$, 则 $EF=$_____.



【C】在极坐标系中, 点 $\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 到直线 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ 的距离是_____.

三、解答题

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c.

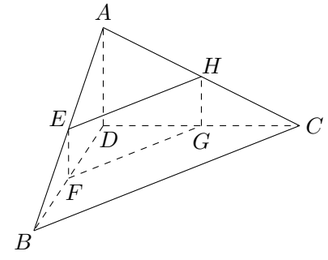
(1) 若 a, b, c 成等差数列, 证明: $\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$;

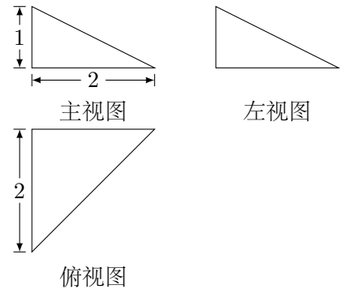
(2) 若 a, b, c 成等比数列, 求 $\cos B$ 的最小值.

17. 四面体 $ABCD$ 及其三视图如图所示, 过棱 AB 的中点 E 作平行于 AD, BC 的平面分别交四面体的棱 BD, DC, CA 于点 F, G, H.

(1) 证明: 四边形 $EFGH$ 是矩形;

(2) 求直线 AB 与平面 $EFGH$ 夹角 θ 的正弦值.





18. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(3,2)$, 点 $P(x,y)$ 在 $\triangle ABC$ 三边围成的区域 (含边界) 上.
(1) 若 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$, 求 $|\overrightarrow{OP}|$;
(2) 设 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ $(m,\ n\in\mathbf{R})$, 用 x, y 表示 $m-n$, 并求 $m-n$ 的最大值.

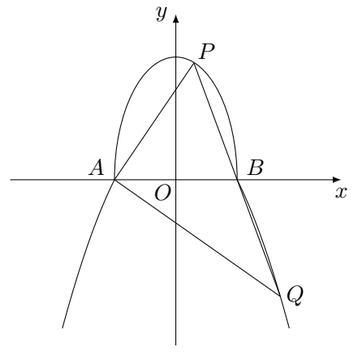
19. 在一块耕地上种植一种作物, 每季种植成本为 1000 元, 此作物的市场价格和这块地上的产量均具有随机性, 且互不影响, 其具体情况如下表:

作物产量 (kg)	300	500
概率	0.5	0.5

作物市场价格 (元/kg)	6	10
概率	0.4	0.6

(1) 设 X 表示在这块地上种植 1 季此作物的利润, 求 X 的分布列;
(2) 若在这块地上连续 3 季种植此作物, 求这 3 季中至少有 2 季的利润不少于 2000 元的概率.

20. 如图, 曲线 C 由上半椭圆 $C_1:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b>0,\ y\geqslant 0)$ 和部分抛物线 $C_2:y=-x^2+1$ $(y\leqslant 0)$ 连接而成, C_1, C_2 的公共点为 A, B, 其中 C_1 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
(1) 求 a, b 的值;
(2) 过点 B 的直线 l 与 C_1, C_2 分别交于点 P, Q (均异于点 A, B), 若 $AP\perp AQ$, 求直线 l 的方程.



21. 设函数 $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=xf'(x)$, $x\geqslant 0$, 其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.
(1) 令 $g_1(x)=g(x)$, $g_{n+1}(x)=g(g_n(x))$, $n\in\mathbf{N}_+$, 求 $g_n(x)$ 的表达式;
(2) 若 $f(x)\geqslant ag(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
(3) 设 $n\in\mathbf{N}_+$, 比较 $g(1)+g(2)+\cdots+g(n)$ 与 $n-f(n)$ 的大小, 并加以证明.

2014 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid x\geqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{x\mid x^2<1, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $[0,1]$　(B) $(0,1)$　(C) $(0,1]$　(D) $[0,1)$

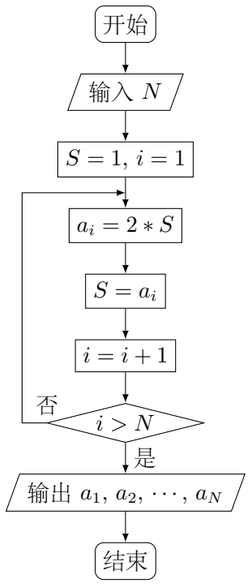
2. 函数 $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) π　(C) 2π　(D) 4π

3. 已知复数 $z=2-\mathrm{i}$, 则 $z\cdot\overline{z}$ 的值为 （　）

(A) 5　(B) $\sqrt{5}$　(C) 3　(D) $\sqrt{3}$

4. 根据如图所示的框图, 对大于 2 的整数 N, 输出的数列的通项公式是（　）



(A) $a_n=2n$　(B) $a_n=2(n-1)$ (C) $a_n=2^n$　(D) $a_n=2^{n-1}$

5. 将边长为 1 的正方形以其一边所在直线为旋转轴旋转一周, 所得几何体的侧面积为 （　）

(A) 4π　(B) 3π　(C) 2π　(D) π

6. 从正方形四个顶点及其中心这 5 个点中, 任取 2 个点, 则这 2 个点的距离不小于该正方形边长的概率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{3}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

7. 下列函数中, 满足“$f(x+y)=f(x)f(y)$”的单调递增函数是 （　）

(A) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$　(B) $f(x)=x^3$　(C) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　(D) $f(x)=3^x$

8. 原命题为“若 $\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}<a_n$, $n\in\mathbf{N}_+$, 则 $\{a_n\}$ 为递减数列”, 关于逆命题, 否命题, 逆否命题真假性的判断依次如下, 正确的是 （　）

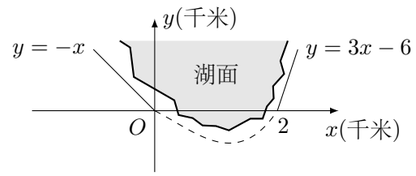
(A) 真, 真, 真　(B) 假, 假, 真　(C) 真, 真, 假　(D) 假, 假, 假

9. 某公司 10 位员工的月工资 (单位: 元) 为 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$, 其均值和方差分别为 $\overline{x}$ 和 s^2, 若从下月起每位员工的月工资增加 100 元, 则这 10 位员工下月工资的均值和方差分别为 （　）

(A) $\overline{x}$, s^2+100^2　(B) $\overline{x}+100$, s^2+100^2

(C) $\overline{x}$, s^2　(D) $\overline{x}+100$, s^2

10. 如图, 修建一条公路需要一段环湖弯曲路段与两条直道平滑连接 (相切), 已知环湖弯曲路段为某三次函数图象的一部分, 则该函数的解析式为（　）



(A) $y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-x$　(B) $y=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-3x$

(C) $y=\dfrac{1}{4}x^3-x$　(D) $y=\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x$

二、填空题

11. 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为_____.

12. 已知 $4^a=2$, $\lg x=a$, 则 $x=$_____.

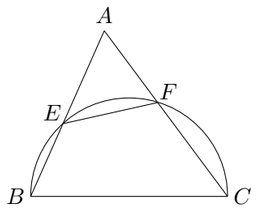
13. 设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, 向量 $\boldsymbol{a}=(\sin 2\theta,\cos\theta)$, $\boldsymbol{b}=(1,-\cos\theta)$, 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\tan\theta=$_____.

14. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$, $x\geqslant 0$, 若 $f_1(x)=f(x)$, $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$, $n\in\mathbf{N}_+$, 则 $f_{2014}(x)$ 的表达式为_____.

15. 三选一.

【A】设 $a, b, m, n\in\mathbf{R}$, 且 $a^2+b^2=5$, $ma+nb=5$, 则 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最小值为_____.

【B】如图, $\triangle ABC$ 中, $BC=6$, 以 BC 为直径的半圆分别交 AB, AC 于点 E, F, 若 $AC=2AE$, 则 $EF=$_____.



【C】在极坐标系中, 点 $\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 到直线 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ 的距离是_____.

三、解答题

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c.

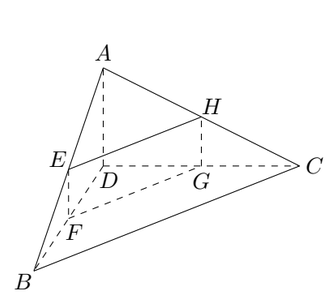
(1) 若 a, b, c 成等差数列, 证明: $\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$;

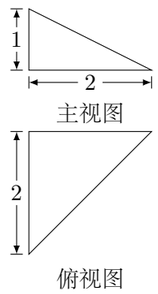
(2) 若 a, b, c 成等比数列, 且 $c=2a$, 求 $\cos B$ 的值.

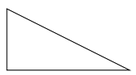
17. 四面体 $ABCD$ 及其三视图如图所示, 过棱 AB 的中点 E 作平行于 AD, BC 的平面分别交四面体的棱 BD, DC, CA 于点 F, G, H.

(1) 求四面体 $ABCD$ 的体积;

(2) 证明: 四边形 $EFGH$ 是矩形.







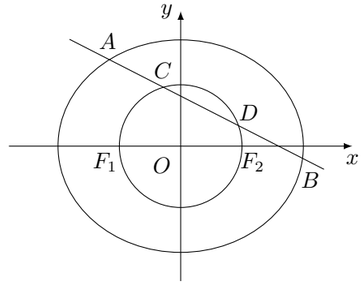
18. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(3,2)$, 点 $P(x,y)$ 在 $\triangle ABC$ 三边围成的区域 (含边界) 上, 且 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ $(m,\ n\in\mathbf{R})$.
(1) 若 $m=n=\dfrac{2}{3}$, 求 $\left|\overrightarrow{OP}\right|$;
(2) 用 x, y 表示 $m-n$, 并求 $m-n$ 的最大值.

19. 某保险公司利用简单随机抽样方法, 对投保车辆进行抽样, 样本车辆中每辆车的赔付结果统计如下:

赔付金额 (元)	0	1000	2000	3000	4000
车辆数 (辆)	500	130	100	150	120

(1) 若每辆车的投保金额均为 2800 元, 估计赔付金额大于投保金额的概率;
(2) 在样本车辆中, 车主是新司机的占 10%, 在赔付金额为 4000 元的样本车辆中, 车主是新司机的占 20%, 估计在已投保车辆中, 新司机获赔金额为 4000 元的概率.

20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 经过点 $\left(0,\sqrt{3}\right)$, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 左右焦点分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 若直线 $l:y=-\dfrac{1}{2}x+m$ 与椭圆交于 A, B 两点, 与以 F_1F_2 为直径的圆交于 C, D 两点, 且满足 $\dfrac{|AB|}{|CD|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$, 求直线 l 的方程.



21. 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{m}{x}$, $m\in\mathbf{R}$.
(1) 当 $m=\mathrm{e}$ (e 为自然对数的底数) 时, 求 $f(x)$ 的极小值;
(2) 讨论函数 $g(x)=f'(x)-\dfrac{x}{3}$ 零点的个数;
(3) 若对任意 $b>a>0$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

2014 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 函数 $y=1-2\cos^2(2x)$ 的最小正周期是_____.

2. 若复数 $z=1+2\mathrm{i}$, 其中 i 是虚数单位, 则 $\left(z+\dfrac{1}{\overline{z}}\right)\cdot\overline{z}=$_____.

3. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点重合, 则该抛物线的准线方程为_____.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,a)\\ x^2, & x\in[a,+\infty)\end{cases}$, 若 $f(2)=4$, 则 a 的取值范围为_____.

5. 若实数 x,y 满足 $xy=1$, 则 x^2+2y^2 的最小值为_____.

6. 若圆锥的侧面积是底面积的 3 倍, 则其母线与底面夹角的大小为_____. (结果用反三角函数值表示)

7. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(3\cos\theta-4\sin\theta)=1$, 则 C 与极轴的交点到极点的距离是_____.

8. 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 若 $a_1=\lim\limits_{n\to\infty}(a_3+a_4+\cdots+a_n)$, 则 $q=$_____.

9. 若 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}$, 则满足 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是_____.

10. 为强化安全意识, 某商场拟在未来的连续 10 天中随机选择 3 天进行紧急疏散演练, 则选择的 3 天恰好为连续 3 天的概率是_____. (结果用最简分数表示)

11. 已知互异的复数 a,b 满足 $ab\neq0$, 集合 $\{a,b\}=\{a^2,b^2\}$, 则 $a+b=$_____.

12. 设常数 a 使方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=a$ 在闭区间 $[0,2\pi]$ 上恰有三个解 x_1, x_2, x_3, 则 $x_1+x_2+x_3=$_____.

13. 某游戏的得分为 1, 2, 3, 4, 5, 随机变量 ξ 表示小白玩该游戏的得分. 若 $E(\xi)=4.2$, 则小白得 5 分的概率至少为_____.

14. 已知曲线 $C:x=-\sqrt{4-y^2}$, 直线 $l:x=6$. 若对于点 $A(m,0)$, 存在 C 上的点 P 和 l 上的 Q 使得 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$, 则 m 的取值范围为_____.

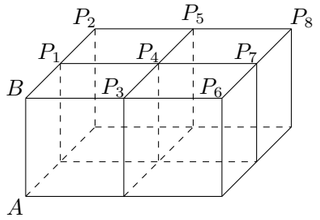
二、选择题

15. 设 $a,b\in\mathbf{R}$, 则"$a+b>4$"是"$a>2$ 且 $b>2$"的 (　　)

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

16. 如图, 四个棱长为 1 的正方体排成一个正四棱柱, AB 是一条侧棱, P_i $(i=1,2,\cdots,8)$ 是上底面上其余的八个点, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}$ $(i=1,2,\cdots,8)$ 的不同值的个数为 (　　)



(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8

17. 已知 $P_1(a_1,b_1)$ 与 $P_2(a_2,b_2)$ 是直线 $y=kx+1$ (k 为常数) 上两个不同的点, 则关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1\\ a_2x+b_2y=1\end{cases}$ 的解的情况是 (　　)

(A) 无论 k, P_1, P_2 如何, 总是无解　(B) 无论 k, P_1, P_2 如何, 总有唯一解

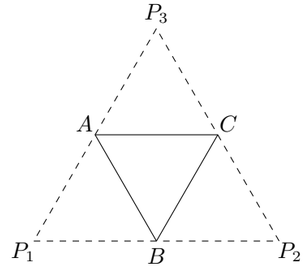
(C) 存在 k, P_1, P_2, 使之恰有两解　(D) 存在 k, P_1, P_2, 使之有无穷多解

18. 设 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, & x\leqslant0\\ x+\dfrac{1}{x}+a, & x>0\end{cases}$, 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围为 (　　)

(A) $[-1,2]$　(B) $[-1,0]$　(C) $[1,2]$　(D) $[0,2]$

三、解答题

19. 底面边长为 2 的正三棱锥 $P-ABC$, 其表面展开图是三角形 $P_1P_2P_3$, 如图, 求 $\triangle P_1P_2P_3$ 的各边长及此三棱锥的体积 V.



20. 设常数 $a\geqslant0$, 函数 $f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$.

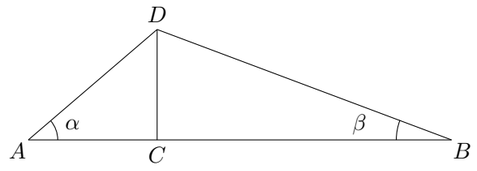
(1) 若 $a=4$, 求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$;

(2) 根据 a 的不同取值, 讨论函数 $y=f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

21. 如图, 某公司要在 A、B 两地连线上的定点 C 处建造广告牌 CD, 其中 D 为顶端, AC 长 35 米, CB 长 80 米. 设点 A、B 在同一水平面上, 从 A 和 B 看 D 的仰角分别为 α 和 β.

(1) 设计中 CD 是铅垂方向. 若要求 $\alpha \geqslant 2\beta$, 问 CD 的长至多为多少 (结果精确到 0.01 米)?

(2) 施工完成后, CD 与铅垂方向有偏差. 现在实测得 $\alpha = 38.12°$, $\beta = 18.45°$, 求 CD 的长 (结果精确到 0.01 米).



22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于直线 $l : ax + by + c = 0$ 和点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 记 $\eta = (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c)$. 若 $\eta < 0$, 则称点 P_1, P_2 被直线 l 分隔. 若曲线 C 与直线 l 没有公共点, 且曲线 C 上存在点 P_1, P_2 被直线 l 分隔, 则称直线 l 为曲线 C 的一条分隔线.

(1) 求证: 点 $A(1, 2)$, $B(-1, 0)$ 被直线 $x + y - 1 = 0$ 分隔;

(2) 若直线 $y = kx$ 是曲线 $x^2 - 4y^2 = 1$ 的分隔线, 求实数 k 的取值范围;

(3) 动点 M 到点 $Q(0, 2)$ 的距离与到 y 轴的距离之积为 1, 设点 M 的轨迹为 E, 求证: 通过原点的直线中, 有且仅有一条直线是 E 的分割线.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{3}a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 3a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$.

(1) 若 $a_2 = 2$, $a_3 = x$, $a_4 = 9$, 求 x 的取值范围;

(2) 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 若 $\frac{1}{3}S_n \leqslant S_{n+1} \leqslant 3S_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求 q 的取值范围;

(3) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 成等差数列, 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1000$, 求正整数 k 的最大值, 以及 k 取最大值时相应数列 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的公差.

2014 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 函数 $y=1-2\cos^2(2x)$ 的最小正周期是_____.

2. 若复数 $z=1+2\mathrm{i}$, 其中 i 是虚数单位, 则 $\left(z+\dfrac{1}{\overline{z}}\right)\cdot\overline{z}=$_____.

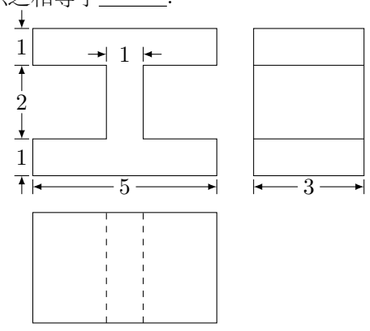
3. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=|x-1|+|x^2-a|$, 若 $f(2)=1$, 则 $f(1)=$_____.

4. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点重合, 则该抛物线的准线方程为_____.

5. 某校高一、高二、高三分别有学生 1600 名、1200 名、800 名. 为了解该校高中学生的牙齿健康状况, 按各年级的学生数进行分层抽样. 若高三抽出 20 名学生, 则高一、高二共抽取的学生数为_____.

6. 若实数 x, y 满足 $xy=1$, 则 x^2+2y^2 的最小值为_____.

7. 在长方体中割去两个小长方体后的几何体的三视图如图, 则切割掉的两个小长方体的体积之和等于_____.



8. 若圆锥的侧面积是底面积的 3 倍, 则其母线与轴所成角的大小为_____. (结果用反三角函数值表示)

9. 设 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, & x\leqslant 0\\ x+\dfrac{1}{x}+a, & x>0\end{cases}$, 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围为_____.

10. 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 若 $a_1=\lim\limits_{n\to\infty}(a_3+a_4+\cdots+a_n)$, 则 $q=$_____.

11. 若 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}$, 则满足 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是_____.

12. 方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的所有解的和等于_____.

13. 为强化安全意识, 某商场拟在未来的连续 10 天中随机选择 3 天进行紧急疏散演练, 则选择的 3 天恰好为连续 3 天的概率是_____. (结果用最简分数表示)

14. 已知曲线 $C:x=-\sqrt{4-y^2}$, 直线 $l:x=6$. 若对于点 $A(m,0)$, 存在 C 上的点 P 和 l 上的 Q 使得 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$, 则 m 的取值范围为_____.

二、选择题

15. 设 $a, b\in\mathbf{R}$, 则"$a+b>4$"是"$a>2$ 且 $b>2$"的 (　　)

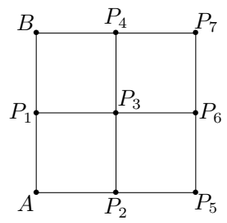
(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

16. 已知互异的复数 a, b 满足 $ab\neq 0$, 集合 $\{a,b\}=\{a^2,b^2\}$, 则 $a+b=$(　　)

(A) 2　(B) 1　(C) 0　(D) -1

17. 如图, 四个边长为 1 的小正方形排成一个大正方形, AB 是大正方形的一边, P_i $(i=1,2,\cdots,7)$ 是小正方形的其余顶点, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}$ $(i=1,2,\cdots,7)$ 的不同值的个数为 (　　)



(A) 7　(B) 5　(C) 3　(D) 1

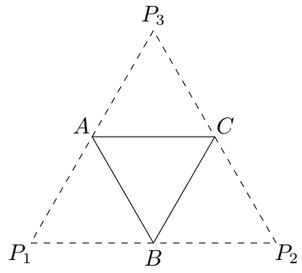
18. 已知 $P_1(a_1,b_1)$ 与 $P_2(a_2,b_2)$ 是直线 $y=kx+1$ (k 为常数) 上两个不同的点, 则关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1\\ a_2x+b_2y=1\end{cases}$ 的解的情况是 (　　)

(A) 无论 k, P_1, P_2 如何, 总是无解　(B) 无论 k, P_1, P_2 如何, 总有唯一解

(C) 存在 k, P_1, P_2, 使之恰有两解　(D) 存在 k, P_1, P_2, 使之有无穷多解

三、解答题

19. 底面边长为 2 的正三棱锥 $P-ABC$, 其表面展开图是三角形 $P_1P_2P_3$, 如图, 求 $\triangle P_1P_2P_3$ 的各边长及此三棱锥的体积 V.



20. 设常数 $a\geqslant 0$, 函数 $f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$.

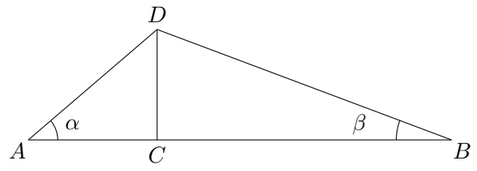
(1) 若 $a=4$, 求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$;

(2) 根据 a 的不同取值, 讨论函数 $y=f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

21. 如图, 某公司要在 A、B 两地连线上的定点 C 处建造广告牌 CD, 其中 D 为顶端, AC 长 35 米, CB 长 80 米. 设点 A、B 在同一水平面上, 从 A 和 B 看 D 的仰角分别为 α 和 β.

(1) 设计中 CD 是铅垂方向. 若要求 $\alpha \geqslant 2\beta$, 问 CD 的长至多为多少 (结果精确到 0.01 米)?

(2) 施工完成后, CD 与铅垂方向有偏差. 现在实测得 $\alpha = 38.12°$, $\beta = 18.45°$, 求 CD 的长 (结果精确到 0.01 米).



22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于直线 $l: ax+by+c=0$ 和点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, 记 $\eta = (ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)$. 若 $\eta < 0$, 则称点 P_1, P_2 被直线 l 分隔. 若曲线 C 与直线 l 没有公共点, 且曲线 C 上存在点 P_1, P_2 被直线 l 分隔, 则称直线 l 为曲线 C 的一条分隔线.

(1) 求证: 点 $A(1,2)$, $B(-1,0)$ 被直线 $x+y-1=0$ 分隔;

(2) 若直线 $y=kx$ 是曲线 $x^2-4y^2=1$ 的分隔线, 求实数 k 的取值范围;

(3) 动点 M 到点 $Q(0,2)$ 的距离与到 y 轴的距离之积为 1, 设点 M 的轨迹为 E. 求 E 的方程, 并证明 y 轴为曲线 E 的分隔线.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{3}a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 3a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$.

(1) 若 $a_2 = 2$, $a_3 = x$, $a_4 = 9$, 求 x 的取值范围;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_m = \frac{1}{1000}$, 求正整数 m 的最小值, 以及 m 取最小值时相应 $\{a_n\}$ 的公比;

(3) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 成等差数列, 求 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 的公差的取值范围.

2014 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0\}$, 集合 B 为整数集, 则 $A\cap B=$（　）

(A) $\{-1,0,1,2\}$　(B) $\{-2,-1,0,1\}$　(C) $\{0,1\}$　(D) $\{-1,0\}$

2. 在 $x(1+x)^6$ 的展开式中, 含 x^3 项的系数为（　）

(A) 30　(B) 20　(C) 15　(D) 10

3. 为了得到函数 $y=\sin(2x+1)$ 的图象, 只需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上所有的点（　）

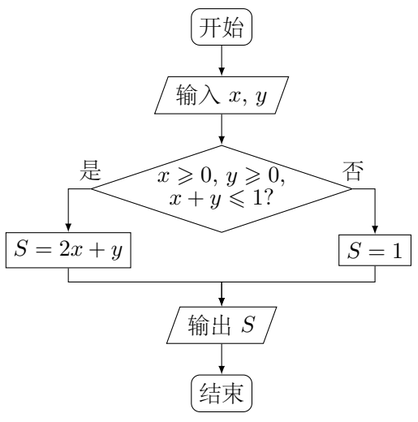
(A) 向左平行移动 $\dfrac{1}{2}$ 个单位长度　(B) 向右平行移动 $\dfrac{1}{2}$ 个单位长度

(C) 向左平行移动 1 个单位长度　(D) 向右平行移动 1 个单位长度

4. 若 $a>b>0$, $c<d<0$, 则一定有（　）

(A) $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$　(B) $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$　(C) $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$　(D) $\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$

5. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 x, $y\in\mathbf{R}$, 则输出的 S 的最大值为（　）



(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

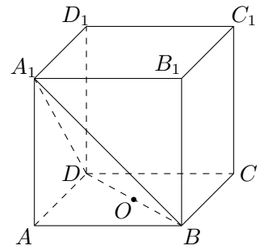
6. 六个人从左至右排成一行, 最左端只能排甲或乙, 最右端不能排甲, 则不同的排法共有（　）

(A) 192 种　(B) 216 种　(C) 240 种　(D) 288 种

7. 平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(4,2)$, $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ $(m\in\mathbf{R})$, 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角等于 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 则 $m=$（　）

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2

8. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 O 为线段 BD 的中点. 设点 P 在线段 CC_1 上, 直线 OP 与平面 A_1BD 所成的角为 α, 则 $\sin\alpha$ 的取值范围是（　）



(A) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right]$　(B) $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3},1\right]$　(C) $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right]$　(D) $\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{3},1\right]$

9. 已知 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$, $x\in(-1,1)$. 现有下列命题:

① $f(-x)=-f(x)$; ② $f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)=2f(x)$; ③ $|f(x)|\geqslant 2|x|$.

其中所有正确命题的序号是（　）

(A) ①②③　(B) ②③　(C) ①③　(D) ①②

10. 已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点, 点 A, B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ (其中 O 为坐标原点), 则 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值是（　）

(A) 2　(B) 3　(C) $\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$　(D) $\sqrt{10}$

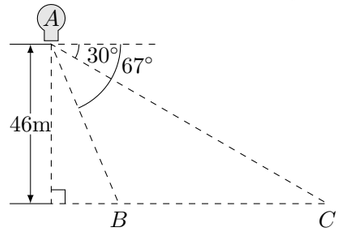
二、填空题

11. 复数 $\dfrac{2-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$_____.

12. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的函数, 当 $x\in[-1,1)$ 时, $f(x)=\begin{cases}-4x^2+2, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\end{cases}$, 则 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=$_____.

13. 如图, 从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B, C 的俯角分别为 67°, 30°, 此时气球的高是 46m, 则河流的宽度 BC 约等于_____m.

(用四舍五入法将结果精确到个位. 参考数据: $\sin 67^\circ\approx 0.92$, $\cos 67^\circ\approx 0.39$, $\sin 37^\circ\approx 0.60$, $\cos 37^\circ\approx 0.80$, $\sqrt{3}\approx 1.73$)



14. 设 $m\in\mathbf{R}$, 过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$, 则 $|PA|\cdot|PB|$ 的最大值是_____.

15. 以 A 表示值域为 $\mathbf{R}$ 的函数组成的集合, B 表示具有如下性质的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合: 对于函数 $\varphi(x)$, 存在一个正数 M, 使得函数 $\varphi(x)$ 的值域包含于区间 $[-M,M]$. 例如, 当 $\varphi_1(x)=x^3$, $\varphi_2(x)=\sin x$ 时, $\varphi_1(x)\in A$, $\varphi_2(x)\in B$. 现有如下命题:

① 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 则"$f(x)\in A$"的充要条件是"$\forall b\in\mathbf{R}$, $\exists a\in D$, $f(a)=b$";

② 函数 $f(x)\in B$ 的充要条件是 $f(x)$ 有最大值和最小值;

③ 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域相同, 且 $f(x)\in A$, $g(x)\in B$, 则 $f(x)+g(x)\notin B$;

④ 若函数 $f(x)=a\ln(x+2)+\dfrac{x}{x^2+1}$ $(x>-2,\ a\in\mathbf{R})$ 有最大值, 则 $f(x)\in B$.

其中的真命题有_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 α 是第二象限角, $f\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)=\dfrac{4}{5}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos 2\alpha$, 求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

17. 一款击鼓小游戏的规则如下: 每盘游戏都需要击鼓三次, 每次击鼓要么出现一次音乐, 要么不出现音乐; 每盘游戏击鼓三次后, 出现一次音乐获得 10 分, 出现两次音乐获得 20 分, 出现三次音乐获得 100 分, 没有出现音乐则扣除 200 分 (即获得 -200 分). 设每次击鼓出现音乐的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 且各次击鼓出现音乐相互独立.

(1) 设每盘游戏获得的分数为 X, 求 X 的分布列;

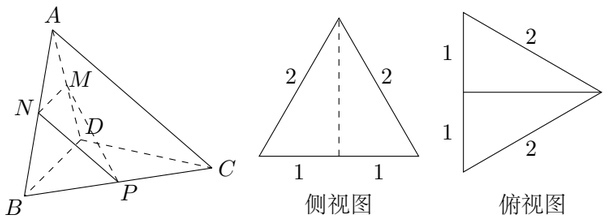
(2) 玩三盘游戏, 至少有一盘出现音乐的概率是多少?

(3) 玩过这款游戏的许多人都发现, 若干盘游戏后, 与最初的分数相比, 分数没有增加反而减少了. 请运用概率统计的相关知识分析分数减少的原因.

18. 三棱锥 $A-BCD$ 及其侧视图、俯视图如图所示. 设 M, N 分别为线段 AD, AB 的中点, P 为线段 BC 上的点, 且 $MN \perp NP$.

(1) 证明: P 为线段 BC 的中点;

(2) 求二面角 $A-NP-M$ 的余弦值.



侧视图

俯视图

19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 点 (a_n, b_n) 在函数 $f(x)=2^x$ 的图象上 $(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 若 $a_1=-2$, 点 $(a_8, 4b_7)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

(2) 若 $a_1=1$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 (a_2, b_2) 处的切线在 x 轴上的截距为 $2-\dfrac{1}{\ln 2}$, 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦距为 4, 其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 F 为椭圆 C 的左焦点, T 为直线 $x=-3$ 上任意一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P, Q.

① 证明: OT 平分线段 PQ (其中 O 为坐标原点);

② 当 $\dfrac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时, 求点 T 的坐标.

21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2-bx-1$, 其中 a, $b \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值;

(2) 若 $f(1)=0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点, 求 a 的取值范围.

2014 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid (x+1)(x-2)\leqslant 0\}$, 集合 B 为整数集, 则 $A\cap B=$(　　)

(A) $\{-1,0\}$　　(B) $\{0,1\}$　　(C) $\{-2,-1,0,1\}$　　(D) $\{-1,0,1,2\}$

2. 在“世界读书日”前夕, 为了了解某地 5000 名居民某天的阅读时间, 从中抽取了 200 名居民的阅读时间进行统计分析. 在这个问题中, 5000 名居民的阅读时间的全体是　　(　　)

(A) 总体　　(B) 个体

(C) 样本的容量　　(D) 从总体中抽取的一个样本

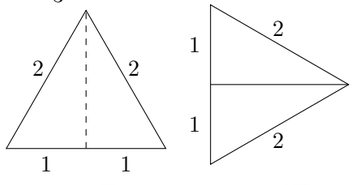
3. 为了得到函数 $y=\sin(x+1)$ 的图象, 只需把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点　　(　　)

(A) 向左平行移动 1 个单位长度　　(B) 向右平行移动 1 个单位长度

(C) 向左平行移动 π 个单位长度　　(D) 向右平行移动 π 个单位长度

4. 某三棱锥的侧视图、俯视图如图所示, 则该三棱锥的体积是　　(　　)

(锥体体积公式: $V=\dfrac{1}{3}Sh$, 其中 S 为底面面积, h 为高)



侧视图

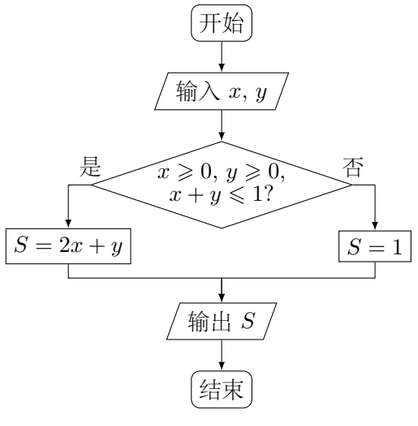
俯视图

(A) 3　　(B) 2　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 1

5. 若 $a>b>0$, $c<d<0$, 则一定有　　(　　)

(A) $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$　　(B) $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$　　(C) $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$　　(D) $\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$

6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 x, $y\in\mathbf{R}$, 则输出的 S 的最大值为　　(　　)

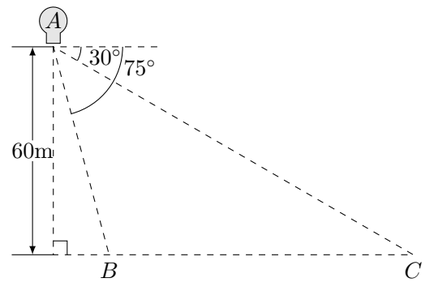


(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

7. 已知 $b>0$, $\log_5 b=a$, $\lg b=c$, $5^d=10$, 则下列等式一定成立的是　　(　　)

(A) $d=ac$　　(B) $a=cd$　　(C) $c=ad$　　(D) $d=a+c$

8. 如图, 从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B, C 的俯角分别为 75°, 30°, 此时气球的高是 60 m, 则河流的宽度 BC 等于　　(　　)



(A) $240\left(\sqrt{3}-1\right)$ m　　(B) $180\left(\sqrt{2}-1\right)$ m

(C) $120\left(\sqrt{3}-1\right)$ m　　(D) $30\left(\sqrt{3}+1\right)$ m

9. 设 $m\in\mathbf{R}$, 过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$, 则 $|PA|+|PB|$ 的取值范围是(　　)

(A) $\left[\sqrt{5},2\sqrt{5}\right]$　　(B) $\left[\sqrt{10},2\sqrt{5}\right]$　　(C) $\left[\sqrt{10},4\sqrt{5}\right]$　　(D) $\left[2\sqrt{5},4\sqrt{5}\right]$

10. 已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点, 点 A, B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ (其中 O 为坐标原点), 则 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值是　　(　　)

(A) 2　　(B) 3　　(C) $\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$　　(D) $\sqrt{10}$

二、填空题

11. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的离心率等于_____.

12. 复数 $\dfrac{2-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$_____.

13. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的函数, 当 $x\in[-1,1)$ 时, $f(x)=\begin{cases}-4x^2+2, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\end{cases}$, 则 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=$_____.

14. 平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(4,2)$, $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ($m\in\mathbf{R}$), 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角等于 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 则 $m=$_____.

15. 以 A 表示值域为 $\mathbf{R}$ 的函数组成的集合, B 表示具有如下性质的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合: 对于函数 $\varphi(x)$, 存在一个正数 M, 使得函数 $\varphi(x)$ 的值域包含于区间 $[-M,M]$. 例如, 当 $\varphi_1(x)=x^3$, $\varphi_2(x)=\sin x$ 时, $\varphi_1(x)\in A$, $\varphi_2(x)\in B$. 现有如下命题:

① 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 则“$f(x)\in A$”的充要条件是“$\forall b\in\mathbf{R}$, $\exists a\in D$, $f(a)=b$”;

② 函数 $f(x)\in B$ 的充要条件是 $f(x)$ 有最大值和最小值;

③ 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域相同, 且 $f(x)\in A$, $g(x)\in B$, 则 $f(x)+g(x)\notin B$;

④ 若函数 $f(x)=a\ln(x+2)+\dfrac{x}{x^2+1}$ ($x>-2$, $a\in\mathbf{R}$) 有最大值, 则 $f(x)\in B$.

其中的真命题有_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

16. 一个盒子里装有三张卡片, 分别标记有数字 1, 2, 3, 这三张卡片除标记的数字外完全相同. 随机有放回地抽取 3 次, 每次抽取 1 张, 将抽取的卡片上的数字依次记为 a, b, c.

(1) 求“抽取的卡片上的数字满足 $a+b=c$”的概率;

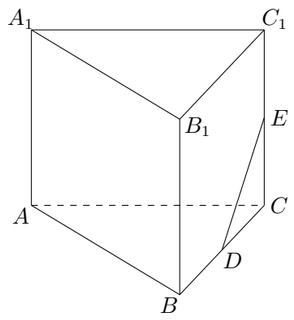
(2) 求“抽取的卡片上的数字 a, b, c 不完全相同”的概率.

17. 已知函数 $f(x)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 α 是第二象限角, $f\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)=\dfrac{4}{5}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos 2\alpha$, 求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

18. 在如图所示的多面体中, 四边形 ABB_1A_1 和 ACC_1A_1 都为矩形.
(1) 若 $AC \perp BC$, 证明: 直线 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1;
(2) 设 D, E 分别是线段 BC, CC_1 的中点, 在线段 AB 上是否存在一点 M, 使直线 $DE \parallel$ 平面 A_1MC? 请证明你的结论.



19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 点 (a_n, b_n) 在函数 $f(x) = 2^x$ 的图象上 $(n \in \mathbf{N}^*)$.
(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列;
(2) 若 $a_1 = 1$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 (a_2, b_2) 处的切线在 x 轴上的截距为 $2 - \dfrac{1}{\ln 2}$, 求数列 $\{a_n b_n^2\}$ 的前 n 项和 S_n.

20. 已知椭圆 C : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-2, 0)$, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
(1) 求椭圆 C 的标准方程;
(2) 设 O 为坐标原点, T 为直线 $x = -3$ 上一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆于 P, Q. 当四边形 $OPTQ$ 是平行四边形时, 求四边形 $OPTQ$ 的面积.

21. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - ax^2 - bx - 1$, 其中 a, $b \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e} = 2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.
(1) 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值;
(2) 若 $f(1) = 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内有零点, 证明: $\mathrm{e} - 2 < a < 1$.

2014 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

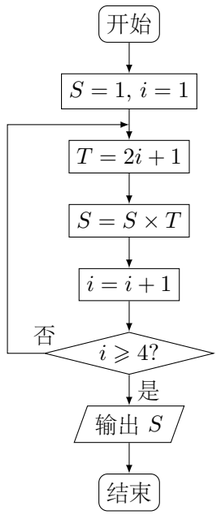
1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{7+\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $1-\mathrm{i}$　　(B) $-1+\mathrm{i}$　　(C) $\dfrac{17}{25}+\dfrac{31}{25}\mathrm{i}$　　(D) $-\dfrac{17}{7}+\dfrac{25}{7}\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x-y-2\leqslant 0\\ y\geqslant 1\end{cases}$, 则目标函数 $z=x+2y$ 的最小值为 （　）

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

3. 阅读下面的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 S 的值为 （　）



(A) 15　　(B) 105　　(C) 245　　(D) 945

4. 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$ 的单调递增区间是 （　）

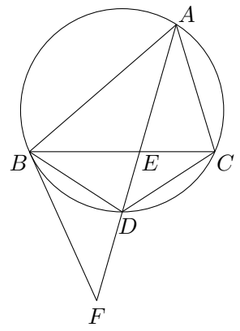
(A) $(0,+\infty)$　　(B) $(-\infty,0)$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-2)$

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l:y=2x+10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$　　(B) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$

(C) $\dfrac{3x^2}{25}-\dfrac{3y^2}{100}=1$　　(D) $\dfrac{3x^2}{100}-\dfrac{3y^2}{25}=1$

6. 如图, $\triangle ABC$ 是圆的内接三角形, $\angle BAC$ 的平分线交圆于点 D, 交 BC 于 E, 过点 B 的圆的切线与 AD 的延长线交于点 F, 在上述条件下, 给出下列四个结论: ① BD 平分 $\angle CBF$; ② $FB^2=FD\cdot FA$; ③ $AE\cdot CE=BE\cdot DE$; ④ $AF\cdot BD=AB\cdot BF$. 则所有正确结论的序号是 （　）



(A) ①②　　(B) ③④　　(C) ①②③　　(D) ①②④

7. 设 $a,\ b\in\mathbf{R}$, 则“$a>b$”是“$a|a|>b|b|$”的 （　）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

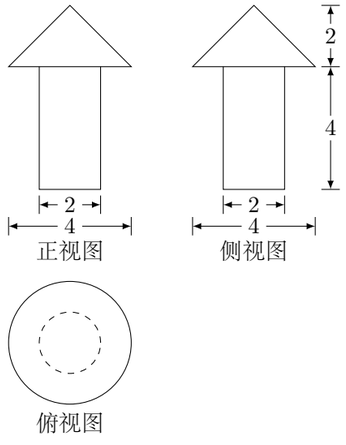
8. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD=120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BE=\lambda BC$, $DF=\mu DC$, 若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$, $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-\dfrac{2}{3}$, 则 $\lambda+\mu=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{5}{6}$　　(D) $\dfrac{7}{12}$

二、填空题

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向, 拟采用分层抽样的方法, 从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为 300 的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为 4 : 5 : 5 : 6, 则应从一年级本科生中抽取_____名学生.

10. 已知一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____m^3.



11. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1, 公差为 -1 的等差数列, S_n 为其前 n 项和. 若 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 则 a_1 的值为_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c, 已知 $b-c=\dfrac{1}{4}a$, $2\sin B=3\sin C$, 则 $\cos A$ 的值为_____.

13. 在以 O 为极点的极坐标系中, 圆 $\rho=4\sin\theta$ 和直线 $\rho\sin\theta=a$ 相交于 A, B 两点. 若 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 则 a 的值为_____.

14. 已知函数 $f(x)=|x^2+3x|$, $x\in\mathbf{R}$. 若方程 $f(x)-a|x-1|=0$ 恰有 4 个互异的实数根, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\cos x\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos^2 x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 求 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

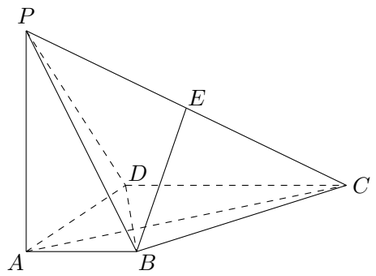
16. 某大学志愿者协会有 6 名男同学, 4 名女同学. 在这 10 名同学中, 3 名同学来自数学学院, 其余 7 名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这 10 名同学中随机选取 3 名同学, 到希望小学进行支教活动 (每位同学被选到的可能性相同).
(1) 求选出的 3 名同学是来自互不相同学院的概率;
(2) 设 X 为选出的 3 名同学中女同学的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \perp AB$, $AB \parallel DC$, $AD=DC=AP=2$, $AB=1$, 点 E 为棱 PC 的中点.

(1) 证明: $BE \perp DC$;

(2) 求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值;

(3) 若 F 为棱 PC 上一点, 满足 $BF \perp AC$, 求二面角 $F-AB-P$ 的余弦值.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 右顶点为 A, 上顶点为 B, 已知 $|AB|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1, 经过原点 O 的直线 l 与该圆相切. 求直线 l 的斜率.

19. 已知 q 和 n 均为给定的大于 1 的自然数. 设集合 $M=\{0,1,2,\cdots,q-1\}$, 集合 $A=\{x \mid x=x_1+x_2q+\cdots+x_nq^{n-1}, x_i \in M, i=1,2,\cdots,n\}$.

(1) 当 $q=2$, $n=3$ 时, 用列举法表示集合 A;

(2) 设 s, $t \in A$, $s=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$, $t=b_1+b_2q+\cdots+b_nq^{n-1}$, 其中 a_i, $b_i \in M$, $i=1, 2, \cdots, n$. 证明: 若 $a_n<b_n$, 则 $s<t$.

20. 已知函数 $f(x)=x-ae^x$ $(a \in \mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}$, 已知函数 $y=f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2, 且 $x_1<x_2$.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 证明 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大;

(3) 证明 x_1+x_2 随着 a 的减小而增大.

2014 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{7+\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $1-\mathrm{i}$　(B) $-1+\mathrm{i}$　(C) $\dfrac{17}{25}+\dfrac{31}{25}\mathrm{i}$　(D) $-\dfrac{17}{7}+\dfrac{25}{7}\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x-y-2\leqslant 0\\ y\geqslant 1\end{cases}$, 则目标函数 $z=x+2y$ 的最小值为 （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

3. 已知命题 p: $\forall x>0$, 总有 $(x+1)\mathrm{e}^x>1$, 则 $\neg p$ 为 （　）

(A) $\exists x_0\leqslant 0$, 使得 $(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}\leqslant 1$　(B) $\exists x_0>0$, 使得 $(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}\leqslant 1$

(C) $\forall x>0$, 总有 $(x+1)\mathrm{e}^x\leqslant 1$　(D) $\forall x\leqslant 0$, 总有 $(x+1)\mathrm{e}^x\leqslant 1$

4. 设 $a=\log_2\pi$, $b=\log_{\frac{1}{2}}\pi$, $c=\pi^{-2}$, 则 （　）

(A) $a>b>c$　(B) $b>a>c$　(C) $a>c>b$　(D) $c>b>a$

5. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1, 公差为 -1 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 则 $a_1=$ （　）

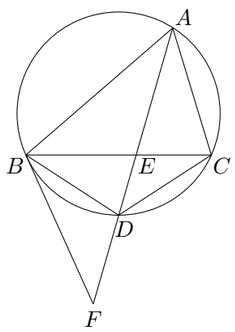
(A) 2　(B) -2　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $-\dfrac{1}{2}$

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: y=2x+10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$

(C) $\dfrac{3x^2}{25}-\dfrac{3y^2}{100}=1$　(D) $\dfrac{3x^2}{100}-\dfrac{3y^2}{25}=1$

7. 如图, $\triangle ABC$ 是圆的内接三角形, $\angle BAC$ 的平分线交圆于点 D, 交 BC 于 E, 过点 B 的圆的切线与 AD 的延长线交于点 F, 在上述条件下, 给出下列四个结论: ① BD 平分 $\angle CBF$; ② $FB^2=FD\cdot FA$; ③ $AE\cdot CE=BE\cdot DE$; ④ $AF\cdot BD=AB\cdot BF$. 则所有正确结论的序号是 （　）



(A) ①②　(B) ③④　(C) ①②③　(D) ①②④

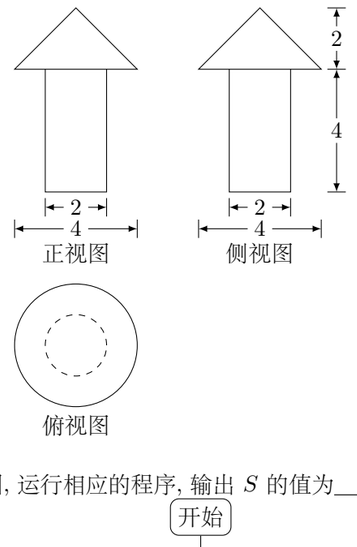
8. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x$ $(\omega>0)$, $x\in\mathbf{R}$. 在曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 的交点中, 若相邻交点距离的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{2\pi}{3}$　(C) π　(D) 2π

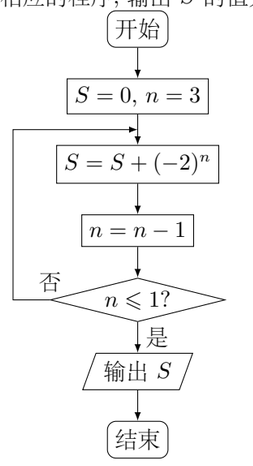
二、填空题

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向, 拟采用分层抽样的方法, 从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为 300 的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为 4 : 5 : 5 : 6, 则应从一年级本科生中抽取_____名学生.

10. 已知一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____m^3.



11. 阅读如图的框图, 运行相应的程序, 输出 S 的值为_____.



12. 函数 $f(x)=\lg x^2$ 的单调递减区间是_____.

13. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD=120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BC=3BE$, $DC=\lambda DF$. 若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$, 则 λ 的值为_____.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x^2+5x+4|, & x\leqslant 0\\ 2|x-2|, & x>0\end{cases}$, 若函数 $y=f(x)-a|x|$ 恰有 4 个零点, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题

15. 某校夏令营有 3 名男同学 A, B, C 和 3 名女同学 X, Y, Z, 其年级情况如下表:

	一年级	二年级	三年级
男同学	A	B	C
女同学	X	Y	Z

现从这 6 名同学中随机选出 2 人参加知识竞赛 (每人被选到的可能性相同).

(1) 用表中字母列举出所有可能的结果;

(2) 设 M 为事件“选出的 2 人来自不同年级且恰有 1 名男同学和 1 名女同学”, 求事件 M 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 已知 $a-c=\dfrac{\sqrt{6}}{6}b$, $\sin B=\sqrt{6}\sin C$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 求 $\cos\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

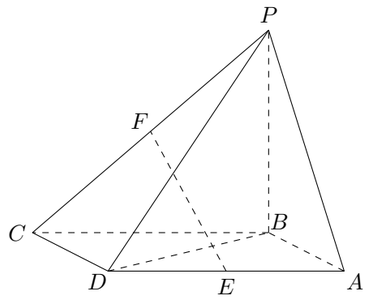
17. 如图, 四棱锥 $P\,ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, $BA=BD=\sqrt{2}$, $AD=2$, $PA=PD=\sqrt{5}$, E, F 分别是棱 AD, PC 的中点.

(1) 证明: $EF\,/\!/$ 平面 PAB;

(2) 若二面角 $P-AD-B$ 为 $60°$,

① 证明: 平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$;

② 求直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 右顶点为 A, 上顶点为 B, 已知 $|AB|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1, 经过点 F_2 的直线 l 与该圆相切与点 M, $|MF_2|=2\sqrt{2}$. 求椭圆的方程.

19. 已知函数 $f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}ax^3\ (a>0)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 若对于任意的 $x_1\in(2,+\infty)$, 都存在 $x_2\in(1,+\infty)$, 使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)=1$, 求 a 的取值范围.

20. 已知 q 和 n 均为给定的大于 1 的自然数. 设集合 $M=\{0,1,2,\cdots,q-1\}$, 集合 $A=\{x\,|\,x=x_1+x_2q+\cdots+x_nq^{n-1},x_i\in M,i=1,2,\cdots,n\}$.

(1) 当 $q=2$, $n=3$ 时, 用列举法表示集合 A;

(2) 设 s, $t\in A$, $s=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$, $t=b_1+b_2q+\cdots+b_nq^{n-1}$, 其中 a_i, $b_i\in M$, $i=1$, 2, $\cdots$, n. 证明: 若 $a_n<b_n$, 则 $s<t$.

2014 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

1. 设全集 $U=\{x\in\mathbf{N}\mid x\geqslant 2\}$, 集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x^2\geqslant 5\}$, 则 $\complement_U A=$（　）

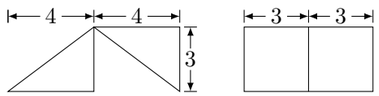
(A) $\varnothing$　　(B) $\{2\}$　　(C) $\{5\}$　　(D) $\{2,5\}$

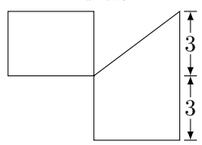
2. 已知 i 是虚数单位, $a,b\in\mathbf{R}$, 则“$a=b=1$”是“$(a+b\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$”的　（　）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

3. 某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的表面积是　（　）





(A) 90 cm^2　　(B) 129 cm^2　　(C) 132 cm^2　　(D) 138 cm^2

4. 为了得到函数 $y=\sin 3x+\cos 3x$ 的图象, 可以将函数 $y=\sqrt{2}\cos 3x$ 的图象　（　）

(A) 向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位　　(B) 向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位

(C) 向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位　　(D) 向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位

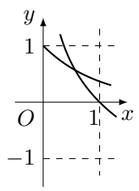
5. 在 $(1+x)^6(1+y)^4$ 的展开式中, 记 $x^m y^n$ 项的系数为 $f(m,n)$, 则 $f(3,0)+f(2,1)+f(1,2)+f(0,3)=$　（　）

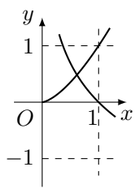
(A) 45　　(B) 60　　(C) 120　　(D) 210

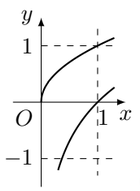
6. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 且 $0<f(-1)=f(-2)=f(-3)\leqslant 3$, 则　（　）

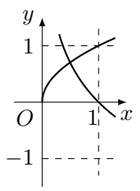
(A) $c\leqslant 3$　　(B) $3<c\leqslant 6$　　(C) $6<c\leqslant 9$　　(D) $c>9$

7. 在同一直角坐标系中, 函数 $f(x)=x^a$ $(x\geqslant 0)$, $g(x)=\log_a x$ 的图象可能是　（　）

(A)


(B)


(C)


(D)


8. 记 $\max\{x,y\}=\begin{cases}x, & x\geqslant y\\ y, & x<y\end{cases}$, $\min\{x,y\}=\begin{cases}y, & x\geqslant y\\ x, & x<y\end{cases}$, 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为平面向量, 则　（　）

(A) $\min\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\}\leqslant\min\{|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|\}$

(B) $\min\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\}\geqslant\min\{|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|\}$

(C) $\max\left\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\right\}\leqslant|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$

(D) $\max\left\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\right\}\geqslant|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$

9. 已知甲盒中仅有 1 个球且为红球, 乙盒中有 m 个红球和 n 个蓝球 $(m\geqslant 3,\ n\geqslant 3)$, 从乙盒中随机抽取 i $(i=1,\ 2)$ 个球放入甲盒中.
(a) 放入 i 个球后, 甲盒中含有红球的个数记为 ξ_i $(i=1,\ 2)$;
(b) 放入 i 个球后, 从甲盒中取 1 个球是红球的概率记为 p_i $(i=1,\ 2)$.
则　（　）

(A) $p_1>p_2$, $E(\xi_1)<E(\xi_2)$　　(B) $p_1<p_2$, $E(\xi_1)>E(\xi_2)$

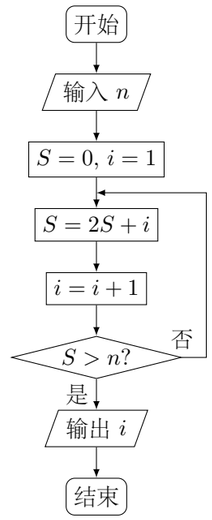
(C) $p_1>p_2$, $E(\xi_1)>E(\xi_2)$　　(D) $p_1<p_2$, $E(\xi_1)<E(\xi_2)$

10. 设函数 $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=2(x-x^2)$, $f_3(x)=\dfrac{1}{3}|\sin 2\pi x|$, $a_i=\dfrac{i}{99}$, $i=0,1,2,\cdots,99$. 记 $I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|+\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|$, $k=1,2,3$, 则　（　）

(A) $I_1<I_2<I_3$　(B) $I_2<I_1<I_3$　(C) $I_1<I_3<I_2$　(D) $I_3<I_2<I_1$

二、填空题

11. 若某程序框图如图所示, 当输入 50 时, 则该程序运行后输出的结果是_____.



12. 随机变量 ξ 的取值为 0, 1, 2, 若 $P(\xi=0)=\dfrac{1}{5}$, $E(\xi)=1$, 则 $D(\xi)=$_____.

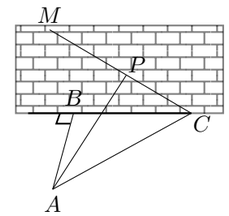
13. 当实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+2y-4\leqslant 0\\ x-y-1\leqslant 0\\ x\geqslant 1\end{cases}$ 时, $1\leqslant ax+y\leqslant 4$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 在 8 张奖券中有一、二、三等奖各 1 张, 其余 5 张无奖. 将这 8 张奖券分配给 4 个人, 每人 2 张, 不同的获奖情况有_____种 (用数字作答).

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<0\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$. 若 $f(f(a))\leqslant 2$, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 设直线 $x-3y+m=0$ $(m\neq 0)$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A,B. 若点 $P(m,0)$ 满足 $|PA|=|PB|$, 则该双曲线的离心率是_____.

17. 如图, 某人在垂直于水平地面 ABC 的墙面前的点 A 处进行射击训练. 已知点 A 到墙面的距离为 AB, 某目标点 P 沿墙面上的射线 CM 移动, 此人为了准确瞄准目标点 P, 需计算由点 A 观察点 P 的仰角 θ 的大小. 若 $AB=15$ m, $AC=25$ m, $\angle BCM=30^\circ$, 则 $\tan\theta$ 的最大值是_____. (仰角 θ 为直线 AP 与平面 ABC 所成角)



三、解答题

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 已知 $a\neq b$, $c=\sqrt{3}$, $\cos^2 A-\cos^2 B=\sqrt{3}\sin A\cos A-\sqrt{3}\sin B\cos B$.
(1) 求角 C 的大小;
(2) 若 $\sin A=\dfrac{4}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1a_2a_3\cdots a_n=\left(\sqrt{2}\right)^{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1=2$, $b_3=6+b_2$.

(1) 求 a_n 与 b_n;

(2) 设 $c_n=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

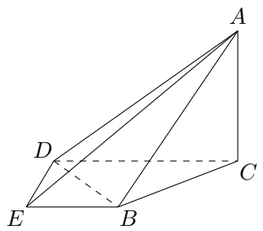
① 求 S_n;

② 求正整数 k, 使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 均有 $S_k\geqslant S_n$.

20. 如图, 在四棱锥 $A-BCDE$ 中, 平面 $ABC\perp$ 平面 $BCDE$, $\angle CDE=\angle BED=90^\circ$, $AB=CD=2$, $DE=BE=1$, $AC=\sqrt{2}$.

(1) 证明: $DE\perp$ 平面 ACD;

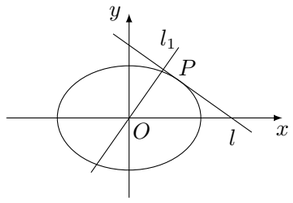
(2) 求二面角 $B-AD-E$ 的大小.



21. 如图, 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 动直线 l 与椭圆 C 只有一个公共点 P, 且点 P 在第一象限.

(1) 已知直线 l 的斜率为 k, 用 a, b, k 表示点 P 的坐标;

(2) 若过原点 O 的直线 l_1 与 l 垂直, 证明: 点 P 到直线 l_1 的距离的最大值为 $a-b$.



22. 已知函数 $f(x)=x^3+3|x-a|$ $(a\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值分别记为 $M(a)$, $m(a)$, 求 $M(a)-m(a)$;

(2) 设 $b\in\mathbf{R}$, 若 $[f(x)+b]^2\leqslant 4$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立, 求 $3a+b$ 的取值范围.

2014 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $S=\{x\mid x\geqslant 2\}$, $T=\{x\mid x\leqslant 5\}$, 则 $S\cap T=$ （　）

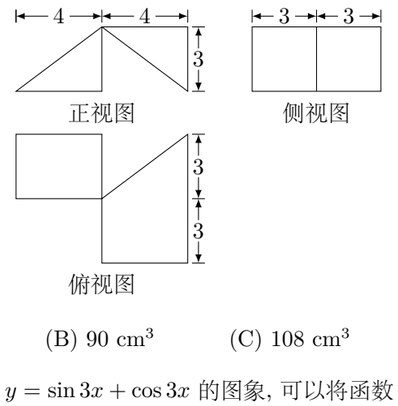
(A) $(-\infty,5]$　(B) $[2,+\infty)$　(C) $(2,5)$　(D) $[2,5]$

2. 设四边形 $ABCD$ 的两条对角线为 AC, BD, 则“四边形 $ABCD$ 为菱形”是“$AC\perp BD$”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该几何体的体积是 （　）



(A) 72 cm^3　(B) 90 cm^3　(C) 108 cm^3　(D) 138 cm^3

4. 为了得到函数 $y=\sin 3x+\cos 3x$ 的图象, 可以将函数 $y=\sqrt{2}\cos 3x$ 的图象 （　）

(A) 向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位　(B) 向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位

(C) 向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位　(D) 向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位

5. 已知圆 $x^2+y^2+2x-2y+a=0$ 截直线 $x+y+2=0$ 所得弦的长度为 4, 则实数 a 的值为 （　）

(A) -2　(B) -4　(C) -6　(D) -8

6. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面 （　）

(A) 若 $m\perp n$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\perp\alpha$

(B) 若 $m\parallel\beta$, $\beta\perp\alpha$, 则 $m\perp\alpha$

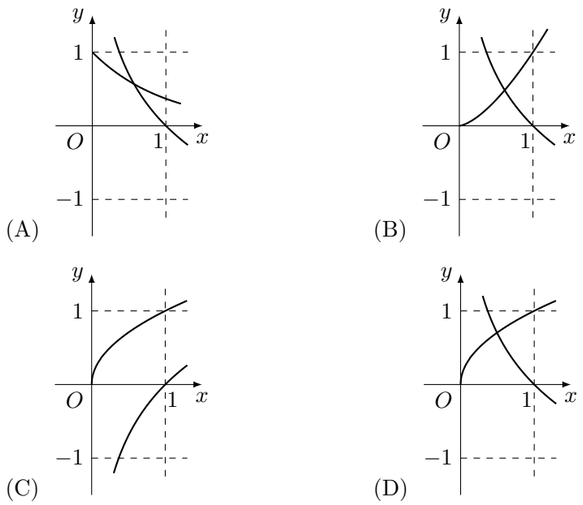
(C) 若 $m\perp\beta$, $n\perp\beta$, $n\perp\alpha$, 则 $m\perp\alpha$

(D) 若 $m\perp n$, $n\perp\beta$, $\beta\perp\alpha$, 则 $m\perp\alpha$

7. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 且 $0<f(-1)=f(-2)=f(-3)\leqslant 3$, 则 （　）

(A) $c\leqslant 3$　(B) $3<c\leqslant 6$　(C) $6<c\leqslant 9$　(D) $c>9$

8. 在同一直角坐标系中, 函数 $f(x)=x^a$ $(x\geqslant 0)$, $g(x)=\log_a x$ 的图象可能是 （　）



9. 设 θ 为两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 已知对任意实数 t, $|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}|$ 的最小值为 1. 则 （　）

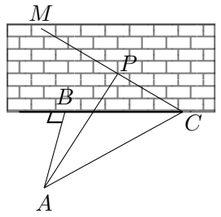
(A) 若 θ 确定, 则 $|\boldsymbol{a}|$ 唯一确定

(B) 若 θ 确定, 则 $|\boldsymbol{b}|$ 唯一确定

(C) 若 $|\boldsymbol{a}|$ 确定, 则 θ 唯一确定

(D) 若 $|\boldsymbol{b}|$ 确定, 则 θ 唯一确定

10. 如图, 某人在垂直于水平地面 ABC 的墙面前的点 A 处进行射击训练, 已知点 A 到墙面的距离为 AB, 某目标点 P 沿墙面上的射线 CM 移动, 此人为了准确瞄准目标点 P, 需计算由点 A 观察点 P 的仰角 θ 的大小 (仰角 θ 为直线 AP 与平面 ABC 所成的角), 若 $AB=15$ m, $AC=25$ m, $\angle BCM=30^\circ$, 则 $\tan\theta$ 的最大值是 （　）



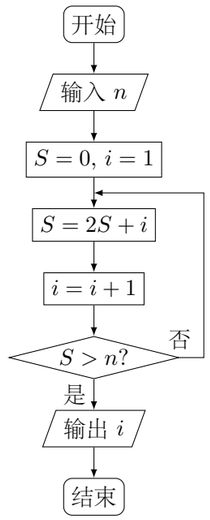
(A) $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$　(B) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　(C) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　(D) $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

二、填空题

11. 已知 i 是虚数单位, 计算 $\dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}=$_____.

12. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases}x+2y-4\leqslant 0\\ x-y-1\leqslant 0\\ x\geqslant 1\end{cases}$, 则 $x+y$ 的取值范围是_____.

13. 若某程序框图如图所示, 当输入 50 时, 则该程序运行后输出的结果是_____.



14. 在 3 张奖券中有一、二等奖各一张, 另 1 张无奖. 甲、乙两人各抽取一张, 两人都中奖的概率为_____.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2, & x\leqslant 0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$, 若 $f(f(a))=2$, 则 $a=$_____.

16. 已知实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$, 则 a 的最大值是_____.

17. 设直线 $x-3y+m=0$ $(m\neq 0)$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A, B. 若点 $P(m,0)$ 满足 $|PA|=|PB|$, 则该双曲线的离心率是_____.

三、解答题

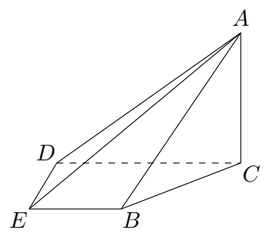
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 已知 $4\sin^2\dfrac{A-B}{2}+4\sin A\sin B=2+\sqrt{2}$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 已知 $b=4$, $\triangle ABC$ 的面积为 6, 求边长 c 的值.

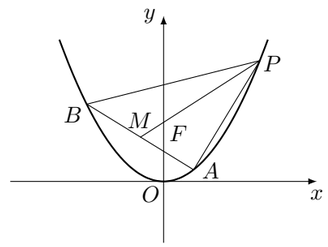
19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$, 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1$, $S_2\cdot S_3=36$.
(1) 求 d 及 S_n;
(2) 求 m, k ($m,\ k\in\mathbf{N}^*$) 的值, 使得 $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=65$.

20. 如图, 在四棱锥 $A-BCDE$ 中, 平面 $ABC\perp$ 平面 $BCDE$, $\angle CDE=\angle BED=90^\circ$, $AB=CD=2$, $DE=BE=1$, $AC=\sqrt{2}$.
(1) 证明: $AC\perp$ 平面 $BCDE$;
(2) 求直线 AE 与平面 ABC 所成的角的正切值.



21. 已知函数 $f(x)=x^3+3|x-a|$ $(a>0)$, 若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值记为 $g(a)$.
(1) 求 $g(a)$;
(2) 证明: 当 $x\in[-1,1]$ 时, 恒有 $f(x)\leqslant g(a)+4$.

22. 已知 $\triangle ABP$ 的三个顶点都在抛物线 $C:x^2=4y$ 上, F 为抛物线 C 的焦点, 点 M 为 AB 的中点, $\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FM}$.
(1) 若 $|PF|=3$, 求点 M 的坐标;
(2) 求 $\triangle ABP$ 面积的最大值.



2015 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 i 是虚数单位, 则复数 $\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 在复平面内所对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 下列函数中, 既是偶函数又存在零点的是 （ ）

(A) $y=\cos x$　(B) $y=\sin x$　(C) $y=\ln x$　(D) $y=x^2+1$

3. 设 p: $1<x<2$, q: $2^x>1$, 则 p 是 q 成立的 （ ）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 下列双曲线中, 焦点在 y 轴上且渐近线方程为 $y=\pm 2x$ 的是 （ ）

(A) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

(C) $\dfrac{y^2}{4}-x^2=1$　(D) $y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$

5. 已知 m, n 是两条不同直线, α, β 是两个不同平面, 则下列命题正确的是 （ ）

(A) 若 α, β 垂直于同一平面, 则 α 与 β 平行

(B) 若 m, n 平行于同一平面, 则 m 与 n 平行

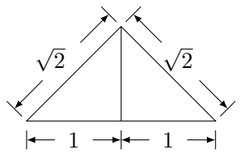
(C) 若 α, β 不平行, 则在 α 内不存在与 β 平行的直线

(D) 若 m, n 不平行, 则 m 与 n 不可能垂直于同一平面

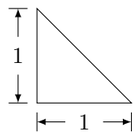
6. 若样本数据 x_1, x_2, $\cdots$, x_{10} 的标准差为 8, 则数据 $2x_1-1$, $2x_2-1$, $\cdots$, $2x_{10}-1$ 的标准差为 （ ）

(A) 8　(B) 15　(C) 16　(D) 32

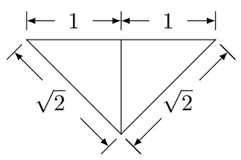
7. 一个四面体的三视图如图所示, 则该四面体的表面积是 （ ）



正 (主) 视图



侧 (左) 视图



俯视图

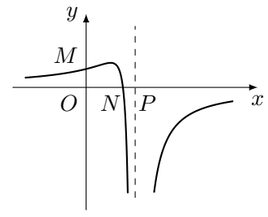
(A) $1+\sqrt{3}$　(B) $2+\sqrt{3}$　(C) $1+2\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{2}$

8. $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足, $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 则下列结论正确的是 （ ）

(A) $|\boldsymbol{b}|=1$　(B) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$　(D) $(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\overrightarrow{BC}$

9. 函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象如图所示, 则下列结论成立的是 （ ）



(A) $a>0$, $b>0$, $c<0$　(B) $a<0$, $b>0$, $c>0$

(C) $a<0$, $b>0$, $c<0$　(D) $a<0$, $b<0$, $c<0$

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ (A, ω, φ 均为正的常数) 的最小正周期为 π, 当 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值, 则下列结论正确的是 （ ）

(A) $f(2)<f(-2)<f(0)$　(B) $f(0)<f(2)<f(-2)$

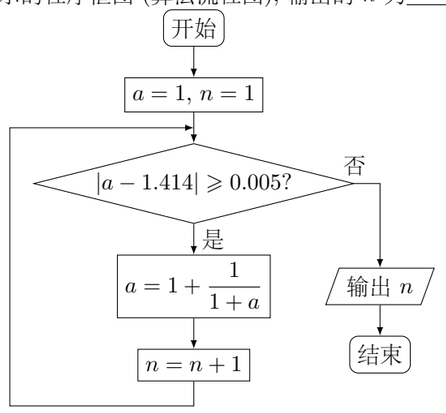
(C) $f(-2)<f(0)<f(2)$　(D) $f(2)<f(0)<f(-2)$

二、填空题

11. $\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中 x^5 的系数是_____. (用数字填写答案)

12. 在极坐标系中, 圆 $\rho=8\sin\theta$ 上的点到直线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ ($\rho\in\mathbf{R}$) 距离的最大值是_____.

13. 执行如图所示的程序框图 (算法流程图), 输出的 n 为_____.



14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1+a_4=9$, $a_2a_3=8$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和等于_____.

15. 设 $x^3+ax+b=0$, 其中 a, b 均为实数, 下列条件中, 使得该三次方程仅有一个实根的是_____. (写出所有正确条件的编号)

① $a=-3$, $b=-3$;　② $a=-3$, $b=2$;　③ $a=-3$, $b>2$;

④ $a=0$, $b=2$;　⑤ $a=1$, $b=2$.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $A=\dfrac{3\pi}{4}$, $AB=6$, $AC=3\sqrt{2}$, 点 D 在 BC 边上, $AD=BD$, 求 AD 的长.

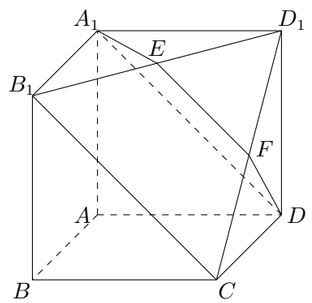
17. 已知 2 件次品和 3 件正品混放在一起, 现需要通过检测将其区分, 每次随机检测一件产品, 检测后不放回, 直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束.

(1) 求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率;

(2) 已知每检测一件产品需要费用 100 元, 设 X 表示直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时所需要的检测费用 (单位: 元), 求 X 的分布列和均值 (数学期望).

18. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, x_n 是曲线 $y = x^{2n+2} + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标.
(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 $T_n = x_1^2 x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2$, 证明: $T_n \geqslant \dfrac{1}{4n}$.

19. 如图所示, 在多面体 $A_1B_1D_1DCBA$, 四边形 AA_1B_1B, ADD_1A_1, $ABCD$ 均为正方形, E 为 B_1D_1 的中点, 过 A_1, D, E 的平面交 CD_1 于 F.
(1) 证明: $EF \parallel B_1C$;
(2) 求二面角 $E - A_1D - B_1$ 的余弦值.



20. 设椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, 点 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 B 的坐标为 $(0, b)$, 点 M 在线段 AB 上, 满足 $|BM| = 2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.
(1) 求 E 的离心率 e;
(2) 设点 C 的坐标为 $(0, -b)$, N 为线段 AC 的中点, 点 N 关于直线 AB 的对称点的纵坐标为 $\dfrac{7}{2}$, 求 E 的方程.

21. 设函数 $f(x) = x^2 - ax + b$.
(1) 讨论函数 $f(\sin x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的单调性并判断有无极值, 有极值时求出极值;
(2) 记 $f_0(x) = x^2 - a_0x + b_0$, 求函数 $|f(\sin x) - f_0(\sin x)|$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值 D;
(3) 在 (2) 中, 取 $a_0 = b_0 = 0$, 求 $z = b - \dfrac{a^2}{4}$ 满足 $D \leqslant 1$ 时的最大值.

2015 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 i 是虚数单位, 则复数 $(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=$ （ ）

(A) $3+3\mathrm{i}$　(B) $-1+3\mathrm{i}$　(C) $3+\mathrm{i}$　(D) $-1+\mathrm{i}$

2. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $A\cap(\complement_U B)=$（ ）

(A) $\{1,2,5,6\}$　(B) $\{1\}$　(C) $\{2\}$　(D) $\{1,2,3,4\}$

3. 设 p: $x<3$, q: $-1<x<3$, 则 p 是 q 成立的 （ ）

(A) 充分必要条件　(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 下列函数中, 既是偶函数又存在零点的是 （ ）

(A) $y=\cos x$　(B) $y=\sin x$　(C) $y=\ln x$　(D) $y=x^2+1$

5. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\\ y\geqslant 1\end{cases}$, 则 $z=-2x+y$ 的最大值是 （ ）

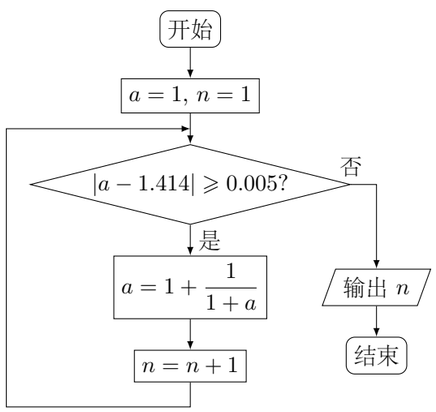
(A) -1　(B) -2　(C) -5　(D) 1

6. 下列双曲线中, 渐近线方程为 $y=\pm 2x$ 的是 （ ）

(A) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

(C) $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$

7. 执行如图所示的程序框图 (算法流程图), 输出的 n 为 （ ）

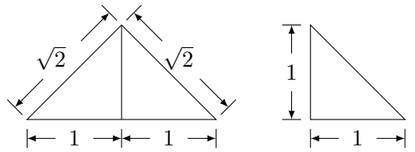


(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

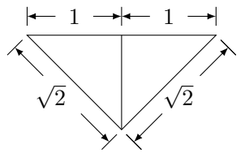
8. 直线 $3x+4y=b$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 相切, 则 b 的值是（ ）

(A) -2 或 12　(B) 2 或 -12　(C) -2 或 -12　(D) 2 或 12

9. 一个四面体的三视图如图所示, 则该四面体的表面积是 （ ）



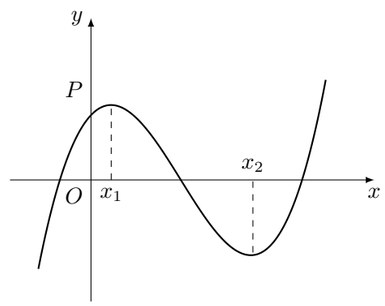
正 (主) 视图　侧 (左) 视图



俯视图

(A) $1+\sqrt{3}$　(B) $2+\sqrt{3}$　(C) $1+2\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{2}$

10. 函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图所示, 则下列结论成立的是（ ）



(A) $a>0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$　(B) $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$

(C) $a<0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$　(D) $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d<0$

二、填空题

11. 计算: $\lg\dfrac{5}{2}+2\lg 2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=$_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{6}$, $\angle A=75^\circ$, $\angle B=45^\circ$, 则 $AC=$_____.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{2}$ $(n\geqslant 2)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和等于_____.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $y=2a$ 与函数 $y=|x-a|-1$ 的图象只有一个交点, 则 a 的值为_____.

15. $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 则下列结论中正确的是_____. (写出所有正确结论的序号)

① $\boldsymbol{a}$ 为单位向量;　② $\boldsymbol{b}$ 为单位向量;　③ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

④ $\boldsymbol{b}\parallel\overrightarrow{BC}$;　⑤ $(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\overrightarrow{BC}$.

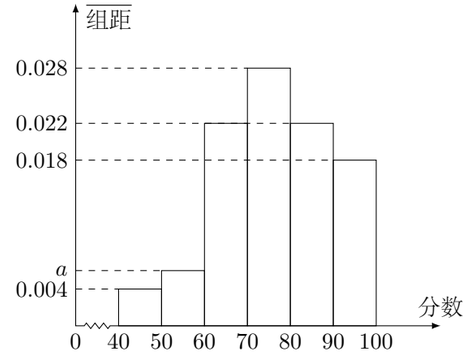
三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=(\sin x+\cos x)^2+\cos 2x$.

(1) 求 $f(x)$ 最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

17. 某企业为了解下属某部门对本企业职工的服务情况, 随机访问 50 名职工, 根据这 50 名职工对该部门的评分, 绘制频率分布直方图 (如图所示), 其中样本数据分组区间为: $[40,50)$, $[50,60)$, $\cdots$, $[80,90)$, $[90,100]$.



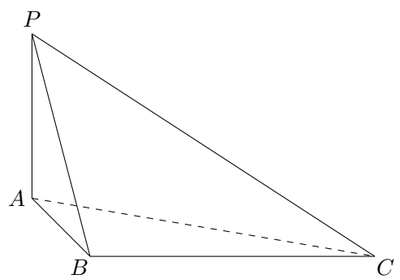
(1) 求频率分布直方图中 a 的值;

(2) 估计该企业的职工对该部门评分不低于 80 的概率;

(3) 从评分在 $[40,60)$ 的受访职工中, 随机抽取 2 人, 求此 2 人评分都在 $[40,50)$ 的概率.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 且 $a_1+a_4=9$, $a_2a_3=8$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 平面 ABC, $PA=1$, $AB=1$, $AC=2$, $\angle BAC=60^\circ$,
(1) 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积;
(2) 证明: 在线段 PC 上存在点 M, 使得 $AC\perp BM$, 并求 $\dfrac{PM}{MC}$ 的值.



20. 设椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 点 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(a,0)$, 点 B 的坐标为 $(0,b)$, 点 M 在线段 AB 上, 满足 $|BM|=2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.
(1) 求 E 的离心率 e;
(2) 设点 C 的坐标为 $(0,-b)$, N 为线段 AC 的中点, 证明: $MN\perp AB$.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{(x+r)^2}$ $(a>0,\ r>0)$.
(1) 求 $f(x)$ 的定义域, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $\dfrac{a}{r}=400$, 求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的极值.

2015 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

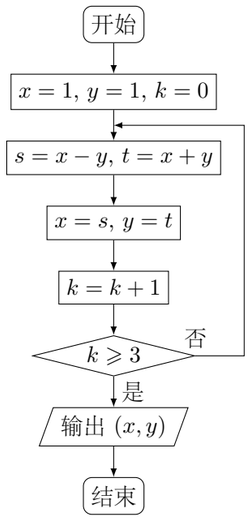
1. 复数 $\mathrm{i}(2-\mathrm{i})=$ （　）

(A) $1+2\mathrm{i}$　　(B) $1-2\mathrm{i}$　　(C) $-1+2\mathrm{i}$　　(D) $-1-2\mathrm{i}$

2. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x-y\leqslant 0 \\ x+y\leqslant 1 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$，则 $z=x+2y$ 最大值为 （　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\dfrac{3}{2}$　　(D) 2

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的结果为 （　）



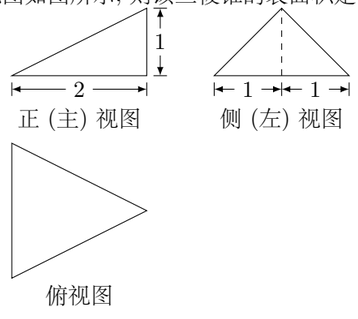
(A) $(-2,2)$　　(B) $(-4,0)$　　(C) $(-4,-4)$　　(D) $(0,8)$

4. 设 α, β 是两个不同的平面, m 是直线且 $m\subset\alpha$, “$m\parallel\beta$”是“$\alpha\parallel\beta$”的（　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

5. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的表面积是 （　）



(A) $2+\sqrt{5}$　　(B) $4+\sqrt{5}$　　(C) $2+2\sqrt{5}$　　(D) 5

6. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 下列结论中正确的是 （　）

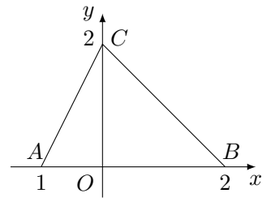
(A) 若 $a_1+a_2>0$, 则 $a_2+a_3>0$

(B) 若 $a_1+a_3<0$, 则 $a_1+a_2<0$

(C) 若 $0<a_1<a_2$, 则 $a_2>\sqrt{a_1a_3}$

(D) 若 $a_1<0$, 则 $(a_2-a_1)(a_2-a_3)>0$

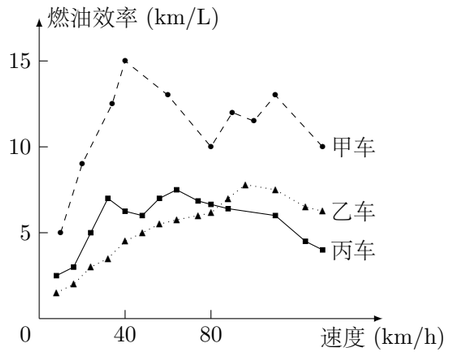
7. 如图, 函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB, 则不等式 $f(x)\geqslant\log_2(x+1)$ 的解集是 （　）



(A) $\{x\mid -1<x\leqslant 0\}$　　(B) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$

(C) $\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$　　(D) $\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$

8. 汽车的“燃油效率”, 是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程, 下图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况. 下列叙述中正确的是（　）



(A) 消耗 1 升汽油, 乙车最多可行驶 5 千米

(B) 以相同速度行驶相同路程, 三辆车中, 甲车消耗汽油最多

(C) 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时, 消耗 10 升汽油

(D) 某城市机动车最高限速 80 千米/小时. 相同条件下, 在该市用丙车比用乙车更省油

二、填空题

9. 在 $(2+x)^5$ 的展开式中, x^3 的系数为_____. (用数字作答)

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ $(a>0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x+y=0$, 则 $a=$_____.

11. 在极坐标系中, 点 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 到直线 $\rho\left(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)=6$ 的距离为_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=4$, $b=5$, $c=6$, 则 $\dfrac{\sin 2A}{\sin C}=$_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$. 若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, 则 $x=$_____; $y=$_____.

14. 函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x-a, & x<1 \\ 4(x-a)(x-2a), & x\geqslant 1 \end{cases}$.

① 若 $a=1$, 则 $f(x)$ 的最小值为_____;

② 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sqrt{2}\sin^2\dfrac{x}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,0]$ 上的最小值.

16. A, B 两组各有 7 位病人, 他们服用某种药物后的康复时间 (单位: 天) 记录如下:

A 组: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16;

B 组: 12, 13, 15, 16, 17, 14, a.

假设所有病人的康复时间相互独立, 从 A, B 两组随机各选 1 人, A 组选出的人记为甲, B 组选出的人记为乙.

(1) 求甲的康复时间不少于 14 天的概率;

(2) 如果 $a=25$, 求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率;

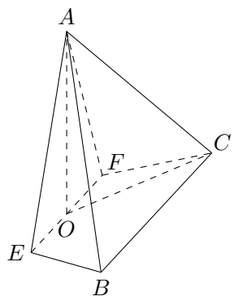
(3) 当 a 为何值时, A, B 两组病人康复时间的方差相等? (结论不要求证明)

17. 如图, 在四棱锥 $A-EFCB$ 中, $\triangle AEF$ 为等边三角形, 平面 $AEF\perp$ 平面 $EFCB$, $EF\parallel BC$, $BC=4$, $EF=2a$, $\angle EBC=\angle FCB=60^\circ$, O 为 EF 的中点.

(1) 求证: $AO\perp BE$;

(2) 求二面角 $F-AE-B$ 的余弦值;

(3) 若 $BE\perp$ 平面 AOC, 求 a 的值.



18. 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求证: 当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)>2\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$;

(3) 设实数 k 使得 $f(x)>k\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0,1)$ 和点 $A(m,n)$ $(m\neq0)$ 都在椭圆 C 上, 直线 PA 交 x 轴于点 M.

(1) 求椭圆 C 的方程, 并求点 M 的坐标; (用 m, n 表示)

(2) 设 O 为原点, 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 PB 交 x 轴于点 N, 问: y 轴上是否存在点 Q, 使得 $\angle OQM=\angle ONQ$? 若存在, 求点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1\in\mathbf{N}^*$, $a_1\leqslant36$, 且 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 记集合 $M=\{a_n\mid n\in\mathbf{N}^*\}$.

(1) 若 $a_1=6$, 写出集合 M 的所有元素;

(2) 若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数, 证明: M 的所有元素都是 3 的倍数;

(3) 求集合 M 的元素个数的最大值.

2015 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x\,|\,-5<x<2\}$, $B=\{x\,|\,-3<x<3\}$, 则 $A\cap B=$（　）

(A) $\{x\,|\,-3<x<2\}$　　(B) $\{x\,|\,-5<x<2\}$

(C) $\{x\,|\,-3<x<3\}$　　(D) $\{x\,|\,-5<x<3\}$

2. 圆心为 $(1,1)$ 且过原点的圆的方程是（　）

(A) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$　　(B) $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

(C) $(x+1)^2+(y+1)^2=2$　　(D) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

3. 下列函数中为偶函数的是（　）

(A) $y=x^2\sin x$　　(B) $y=x^2\cos x$

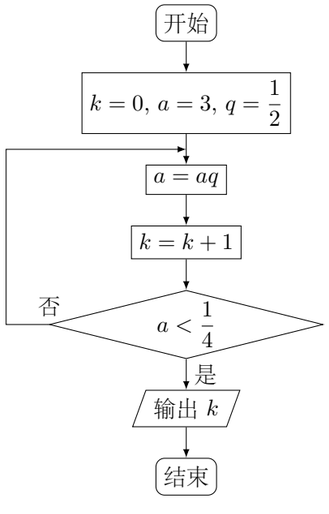
(C) $y=|\ln x|$　　(D) $y=2^{-x}$

4. 某校老年、中年和青年教师的人数见下表, 采用分层抽样的方法调查教师的身体状况, 在抽取的样本中, 青年教师有 320 人, 则该样本中的老年教师人数为（　）

类别	人数
老年教师	900
中年教师	1800
青年教师	1600
合计	4300

(A) 90　　(B) 100　　(C) 180　　(D) 300

5. 执行如图所示的程序框图, 输出 k 的值为（　）



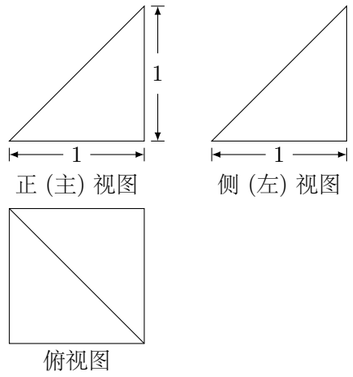
(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

6. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是非零向量, “$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$”的（　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 某四棱锥的三视图如图所示, 该四棱锥最长棱的棱长为（　）



(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 2

8. 某辆汽车每次加油都把油箱加满, 下表记录了该车相邻两次加油时的情况

加油时间	加油量 (升)	加油时的累计里程 (千米)
2015 年 5 月 1 日	12	35000
2015 年 5 月 15 日	48	35600

注: “累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程.

在这段时间内, 该车每 100 千米平均耗油量为（　）

(A) 6 升　　(B) 8 升　　(C) 10 升　　(D) 12 升

二、填空题

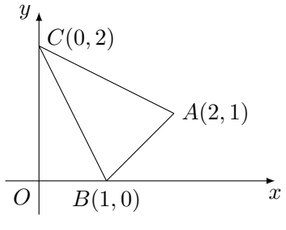
9. 复数 $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$ 的实部为_____.

10. 2^{-3}, $3^{\frac{1}{2}}$, $\log_2 5$ 三个数中最大的数是_____.

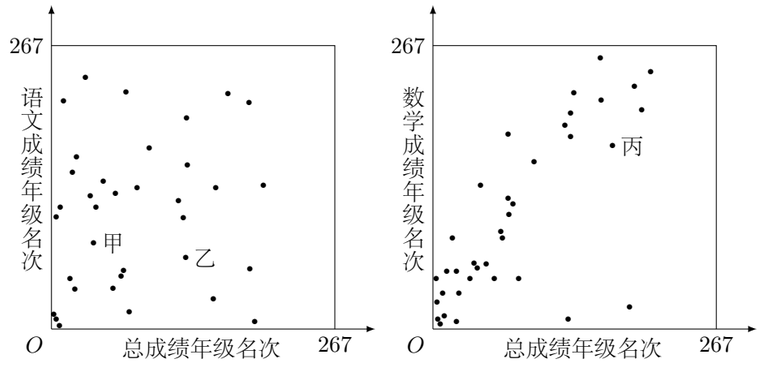
11. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b=\sqrt{6}$, $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$, 则 $\angle B=$_____.

12. 已知 $(2,0)$ 是双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 的一个焦点, 则 $b=$_____.

13. 如图, $\triangle ABC$ 及其内部的点组成的集合记为 D, $P(x,y)$ 为 D 中任意一点, 则 $z=2x+3y$ 的最大值为_____.



14. 高三年级 267 位学生参加期末考试, 某班 37 位学生的语文成绩、数学成绩与总成绩在全年级中的排名情况如图所示, 甲、乙、丙为该班三位学生.



从这次考试成绩看,

① 在甲、乙两人中, 其语文成绩名次比其总成绩名次靠前的学生是_____;

② 在语文和数学两个科目中, 丙同学的成绩名次更靠前的科目是_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin x-2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{x}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值.

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=10$, $a_4-a_3=2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

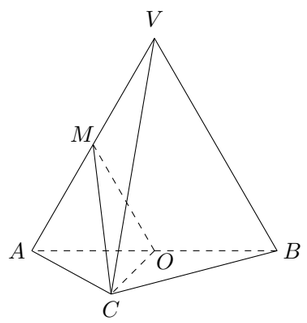
(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_3$, $b_3=a_7$, 问: b_6 与数列 $\{a_n\}$ 的第几项相等?

17. 某超市随机选取 1000 位顾客, 记录了他们购买甲、乙、丙、丁四种商品的情况, 整理成如下统计表, 其中“√”表示购买, “×”表示未购买.

顾客人数 \ 商品	甲	乙	丙	丁
100	√	×	√	√
217	×	√	×	√
200	√	√	√	×
300	√	×	√	×
85	√	×	×	×
98	×	√	×	×

(1) 估计顾客同时购买乙和丙的概率;
(2) 估计顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的概率;
(3) 如果顾客购买了甲, 则该顾客同时购买乙、丙、丁中哪种商品的可能性最大?

18. 如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, 平面 $VAB\perp$ 平面 ABC, $\triangle VAB$ 为等边三角形, $AC\perp BC$ 且 $AC=BC=\sqrt{2}$, O, M 分别为 AB, VA 的中点.
(1) 求证: $VB\parallel$ 平面 MOC;
(2) 求证: 平面 $MOC\perp$ 平面 VAB;
(3) 求三棱锥 $V-ABC$ 的体积.



19. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-k\ln x$, $k>0$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;
(2) 证明: 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

20. 已知椭圆 C: $x^2+3y^2=3$, 过点 $D(1,0)$ 且不过点 $E(2,1)$ 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, 直线 AE 与直线 $x=3$ 交于点 M.
(1) 求椭圆 C 的离心率;
(2) 若直线 AB 垂直于 x 轴, 求直线 BM 的斜率;
(3) 试判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系, 并说明理由.

2015 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3\}$, 则

(A) $A=B$　(B) $A\cap B=\varnothing$　(C) $A\subsetneqq B$　(D) $B\subsetneqq A$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2=4$, $a_4=2$, 则 $a_6=$　(　)

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 6

3. 重庆市 2013 年各月的平均气温 (°C) 数据的茎叶图如下:

0	8 9
1	2 5 8
2	0 0 3 3 8
3	1 2

则这组数据的中位数是　(　)

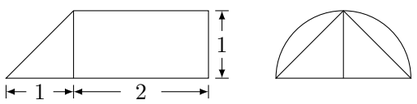
(A) 19　(B) 20　(C) 21.5　(D) 23

4. “$x>1$”是“$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)<0$”的　(　)

(A) 充要条件　(B) 充分不必要条件

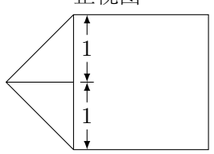
(C) 必要而不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积　(　)



正视图

左视图



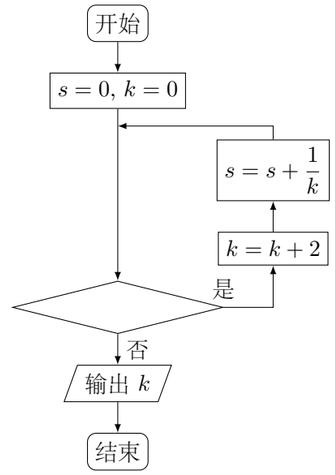
俯视图

(A) $\frac{1}{3}+\pi$　(B) $\frac{2}{3}+\pi$　(C) $\frac{1}{3}+2\pi$　(D) $\frac{2}{3}+2\pi$

6. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}|\boldsymbol{b}|$, 且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　(　)

(A) $\frac{\pi}{4}$　(B) $\frac{\pi}{2}$　(C) $\frac{3\pi}{4}$　(D) π

7. 执行如图所示的程序框图, 若输出 k 的值为 8, 则判断框内可填入的条件是　(　)



(A) $s\leqslant\frac{3}{4}$　(B) $s\leqslant\frac{5}{6}$　(C) $s\leqslant\frac{11}{12}$　(D) $s\leqslant\frac{25}{24}$

8. 已知直线 l: $x+ay-1=0$ ($a\in\mathbf{R}$) 是圆 C: $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 的对称轴. 过点 $A(-4,a)$ 作圆 C 的一条切线, 切点为 B, 则 $|AB|=$　(　)

(A) 2　(B) $4\sqrt{2}$　(C) 6　(D) $2\sqrt{10}$

9. 若 $\tan\alpha=2\tan\frac{\pi}{5}$, 则 $\dfrac{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}=$　(　)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

10. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的右焦点为 F, 右顶点为 A, 过 F 作 AF 的垂线与双曲线交于 B, C 两点, 过 B, C 分别作 AC, AB 的垂线, 两垂线交于点 D. 若 D 到直线 BC 的距离小于 $a+\sqrt{a^2+b^2}$, 则该双曲线的渐近线斜率的取值范围是　(　)

(A) $(-1,0)\cup(0,1)$　(B) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(C) $\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$　(D) $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

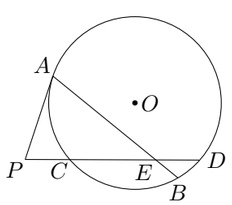
二、填空题

11. 设复数 $a+b\mathrm{i}$ (a, $b\in\mathbf{R}$) 的模为 $\sqrt{3}$, 则 $(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=$_____.

12. $\left(x^3+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中 x^8 的系数是_____. (用数字作答)

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=120°$, $AB=\sqrt{2}$, A 的角平分线 $AD=\sqrt{3}$, 则 $AC=$_____.

14. 如图, 圆 O 的弦 AB, CD 相交于点 E, 过点 A 作圆 O 的切线与 DC 的延长线交于点 P, 若 $PA=6$, $AE=9$, $PC=3$, $CE:ED=2:1$, 则 $BE=$_____.



15. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\\y=1+t\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta=4$ $\left(\rho>0,\ \frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}\right)$, 则直线 l 与曲线 C 的交点的极坐标为_____.

16. 若函数 $f(x)=|x+1|+2|x-a|$ 的最小值为 5, 则实数 $a=$_____.

三、解答题

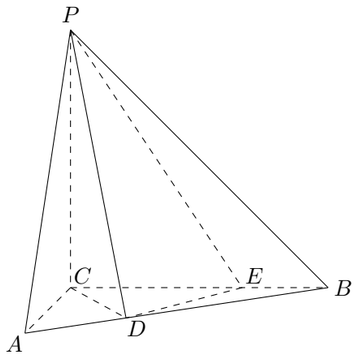
17. 端午节吃粽子是我国的传统习俗. 设一盘中装有 10 个粽子, 其中豆沙粽 2 个, 肉粽 3 个, 白粽 5 个, 这三种粽子的外观完全相同从中任意选取 3 个.
(1) 求三种粽子各取到 1 个的概率;
(2) 设 X 表示取到的豆沙粽个数, 求 X 的分布列与数学期望.

18. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x-\sqrt{3}\cos^2 x$.
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;
(2) 讨论 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的单调性.

19. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PC\perp$ 平面 ABC, $PC=3$, $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$. D, E 分别为线段 AB, BC 上的点, 且 $CD=DE=\sqrt{2}$, $CE=2EB=2$.

(1) 证明: $DE\perp$ 平面 PCD;

(2) 求二面角 $A-PD-C$ 的余弦值.



20. 设函数 $f(x)=\dfrac{3x^2+ax}{\mathrm{e}^x}$ $(a\in\mathbf{R})$.

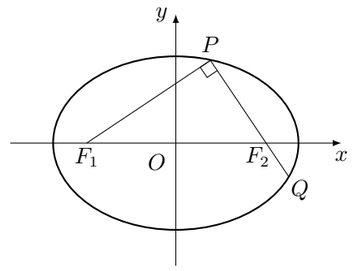
(1) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值, 确定 a 的值, 并求此时曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上为减函数, 求 a 的取值范围.

21. 如图, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过 F_2 的直线交椭圆于 P, Q 两点, 且 $PQ\perp PF_1$.

(1) 若 $|PF_1|=2+\sqrt{2}$, $|PF_2|=2-\sqrt{2}$, 求椭圆标准方程;

(2) 若 $|PF_1|=|PQ|$, 求椭圆的离心率 e.



22. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, $a_{n+1}a_n+\lambda a_{n+1}+\mu a_n^2=0$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1) 若 $\lambda=0$, $\mu=-2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\lambda=\dfrac{1}{k_0}$ $(k_0\in\mathbf{N}_+,\ k_0\geqslant 2)$, $\mu=-1$, 证明: $2+\dfrac{1}{3k_0+1}<a_{k_0+1}<2+\dfrac{1}{2k_0+1}$.

2015 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{2\}$　(B) $\{1,2\}$　(C) $\{1,3\}$　(D) $\{1,2,3\}$

2. “$x=1$”是“$x^2-2x+1=0$”的 （ ）

(A) 充要条件　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 函数 $f(x)=\log_2(x^2+2x-3)$ 的定义域是 （ ）

(A) $[-3,1]$　(B) $(-3,1)$

(C) $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$　(D) $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

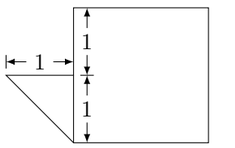
4. 重庆市 2013 年各月的平均气温 (°C) 数据的茎叶图如下:

0	8　9
1	2　5　8
2	0　0　3　3　8
3	1　2

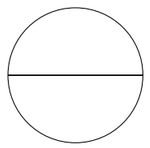
则这组数据的中位数是 （ ）

(A) 19　(B) 20　(C) 21.5　(D) 23

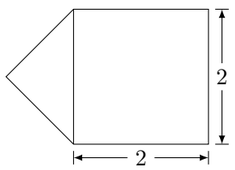
5. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积 （ ）



正视图



左视图



俯视图

(A) $\frac{1}{3}+2\pi$　(B) $\frac{13\pi}{6}$　(C) $\frac{7\pi}{3}$　(D) $\frac{5\pi}{2}$

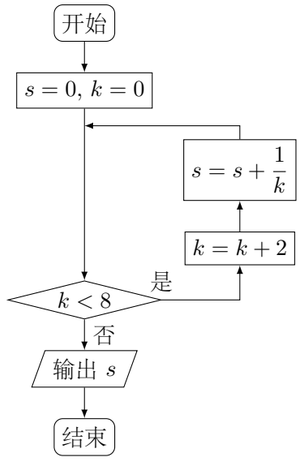
6. 若 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$, 则 $\tan\beta=$ （ ）

(A) $\frac{1}{7}$　(B) $\frac{1}{6}$　(C) $\frac{5}{7}$　(D) $\frac{5}{6}$

7. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{b}|=4|\boldsymbol{a}|$, 且 $\boldsymbol{a}\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 （ ）

(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) $\frac{\pi}{2}$　(C) $\frac{2\pi}{3}$　(D) $\frac{5\pi}{6}$

8. 执行如图所示的程序框图, 则输出 s 的值为 （ ）



(A) $\frac{3}{4}$　(B) $\frac{5}{6}$　(C) $\frac{11}{12}$　(D) $\frac{25}{24}$

9. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点是 F, 左、右顶点分别是 A_1, A_2, 过 F 作 A_1A_2 的垂线与双曲线交于 B, C 两点. 若 $A_1B\perp A_2C$, 则该双曲线的渐近线的斜率为 （ ）

(A) $\pm\frac{1}{2}$　(B) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) ±1　(D) $\pm\sqrt{2}$

10. 若不等式组 $\begin{cases}x+y-2\leqslant0\\x+2y-2\geqslant0\\x-y+2m\geqslant0\end{cases}$ 表示的平面区域为三角形, 且其面积等于 $\frac{4}{3}$, 则 m 的值为 （ ）

(A) -3　(B) 1　(C) $\frac{4}{3}$　(D) 3

二、填空题

11. 复数 $(1+2\mathrm{i})\,\mathrm{i}$ 的实部为_____.

12. 若点 $P(1,2)$ 在以坐标原点为圆心的圆上, 则该圆在点 P 处的切线方程为_____.

13. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $a=2$, $\cos C=-\frac{1}{4}$, $3\sin A=2\sin B$, 则 $c=$_____.

14. 设 a, $b>0$, $a+b=5$, 则 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}$ 的最大值为_____.

15. 在区间 $[0,5]$ 上随机地选择一个数 p, 则方程 $x^2+2px+3p-2=0$ 有两个负根的概率为_____.

三、解答题

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3=2$, 前 3 项和 $S_3=\frac{9}{2}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_1$, $b_4=a_{15}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

17. 随着我国经济的发展, 居民的储蓄存款逐年增长. 设某地区城乡居民人民币储蓄存款 (年底余额) 如下表:

年份	2010	2011	2012	2013	2014
时间代号 t	1	2	3	4	5
储蓄存款 y (千亿元)	5	6	7	8	10

(1) 求 y 关于 t 的回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$;

(2) 用所求回归方程预测该地区 2015 年 $(t=6)$ 的人民币储蓄存款.

附: 回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$ 中, $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2}$, $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$.

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\cos^2 x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和最小值;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象上每一点的横坐标伸长到原来的两倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时, 求 $g(x)$ 的值域.

19. 已知函数 $f(x)=ax^3+x^2$ $(a\in\mathbf{R})$ 在 $x=-\dfrac{4}{3}$ 处取得极值.

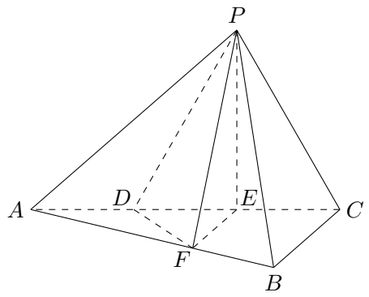
(1) 确定 a 的值;

(2) 若 $g(x)=f(x)\mathrm{e}^x$, 讨论 $g(x)$ 的单调性.

20. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC, $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$, 点 D, E 在线段 AC 上, 且 $AD=DE=EC=2$, $PD=PC=4$, 点 F 在线段 AB 上, 且 $EF/\!/BC$.

(1) 证明: $AB\perp$ 平面 PFE;

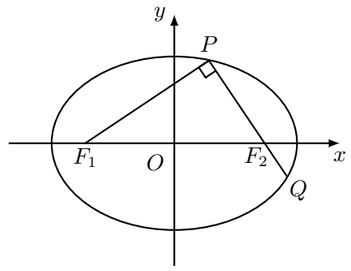
(2) 若四棱锥 $P-DFBC$ 的体积为 7, 求线段 BC 的长.



21. 如图, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过 F_2 的直线交椭圆于 P, Q 两点, 且 $PQ\perp PF_1$.

(1) 若 $|PF_1|=2+\sqrt{2}$, $|PF_2|=2-\sqrt{2}$, 求椭圆标准方程;

(2) 若 $|PQ|=\lambda|PF_1|$, 且 $\dfrac{3}{4}\leqslant\lambda<\dfrac{4}{3}$, 试确定椭圆离心率 e 的取值范围.



2015 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{\mathrm{i},\mathrm{i}^2,\mathrm{i}^3,\mathrm{i}^4\}$ (i 是虚数单位), $B=\{1,-1\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{-1\}$　　(B) $\{1\}$　　(C) $\{1,-1\}$　　(D) $\varnothing$

2. 下列函数为奇函数的是 （　）

(A) $y=\sqrt{x}$　　(B) $y=|\sin x|$　　(C) $y=\cos x$　　(D) $y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$

3. 若双曲线 $E:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线 E 上, 且 $|PF_1|=3$, 则 $|PF_2|$ 等于 （　）

(A) 11　　(B) 9　　(C) 5　　(D) 3

4. 为了解某社区居民的家庭年收入与年支出的关系, 随机调查了该社区 5 户家庭, 得到如下统计数据表:

收入 x (万元)	8.2	8.6	10.0	11.3	11.9
支出 y (万元)	6.2	7.5	8.0	8.5	9.8

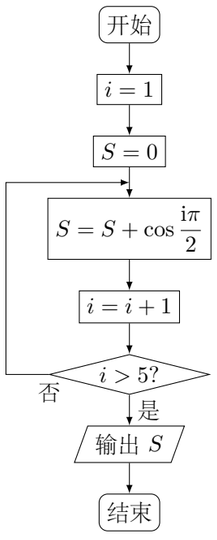
根据上表可得回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$, 其中 $\hat{b}=0.76$, $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$. 据此估计, 该社区一户年收入为 15 万元家庭的年支出为 （　）

(A) 11.4 万元　　(B) 11.8 万元　　(C) 12.0 万元　　(D) 12.2 万元

5. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\geqslant 0\\ x-y\leqslant 0\\ x-2y+2\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最小值等于 （　）

(A) $-\dfrac{5}{2}$　　(B) -2　　(C) $-\dfrac{3}{2}$　　(D) 2

6. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出的结果为 （　）



(A) 2　　(B) 1　　(C) 0　　(D) -1

7. 若 l, m 是两条不同的直线, m 垂直于平面 α, 则"$l\perp m$"是"$l\parallel\alpha$"的 （　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

8. 若 a, b 是函数 $f(x)=x^2-px+q$ ($p>0$, $q>0$) 的两个不同的零点, 且 a, b, -2 这三个数可适当排序后成等差数列, 也可适当排序后成等比数列, 则 $p+q$ 的值等于 （　）

(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

9. 已知 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\dfrac{1}{t}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=t$. 若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, 且 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{4\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$, 则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值等于 （　）

(A) 13　　(B) 15　　(C) 19　　(D) 21

10. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=-1$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)>k>1$, 则下列结论中一定错误的是 （　）

(A) $f\left(\dfrac{1}{k}\right)<\dfrac{1}{k}$　　(B) $f\left(\dfrac{1}{k}\right)>\dfrac{1}{k-1}$

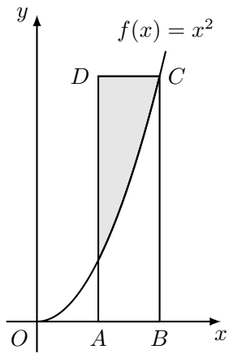
(C) $f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)<\dfrac{1}{k-1}$　　(D) $f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)>\dfrac{k}{k-1}$

二、填空题

11. $(x+2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数等于_____. (用数字作答)

12. 若锐角 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$, 且 $AB=5$, $AC=8$, 则 BC 等于_____.

13. 如图, 点 A 的坐标为 $(1,0)$, 点 C 的坐标为 $(2,4)$, 函数 $f(x)=x^2$. 若在矩形 $ABCD$ 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率等于_____.



14. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-x+6, & x\leqslant 2\\ 3+\log_a x, & x>2\end{cases}$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的值域是 $[4,+\infty)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 一个二元码是由 0 和 1 组成的数字串 $x_1x_2\cdots x_n$ ($n\in\mathbf{N}^*$), 其中 x_k ($k=1,2,\cdots,n$) 称为第 k 位码元. 二元码是通信中常用的码, 但在通信过程中有时会发生码元错误 (即码元由 0 变为 1, 或者由 1 变为 0). 已知某种二元码 $x_1x_2\cdots x_7$ 的码元满足如下校验方程组: $\begin{cases}x_4\oplus x_5\oplus x_6\oplus x_7=0\\ x_2\oplus x_3\oplus x_6\oplus x_7=0\\ x_1\oplus x_3\oplus x_5\oplus x_7=0\end{cases}$, 其中运算 $\oplus$ 定义为: $0\oplus 0=0$, $0\oplus 1=1$, $1\oplus 0=1$, $1\oplus 1=0$. 现已知一个这种二元码在通信过程中仅在第 k 位发生码元错误后变成了 1101101, 那么利用上述校验方程组可判定 k 等于_____.

三、解答题

16. 某银行规定, 一张银行卡若在一天内出现 3 次密码尝试错误, 该银行卡将被锁定. 小王到该银行取钱时, 发现自己忘记了银行卡的密码, 但可以确认该银行卡的正确密码是他常用的 6 个密码之一, 小王决定从中不重复地随机选择 1 个进行尝试. 若密码正确, 则结束尝试; 否则继续尝试, 直至该银行卡被锁定.

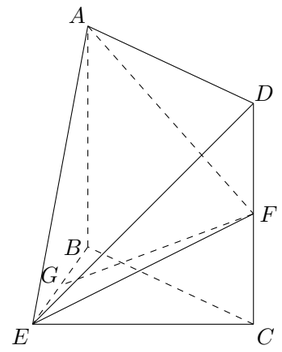
(1) 求当天小王的该银行卡被锁定的概率;

(2) 设当天小王用该银行卡尝试密码的次数为 X, 求 X 的分布列和数学期望.

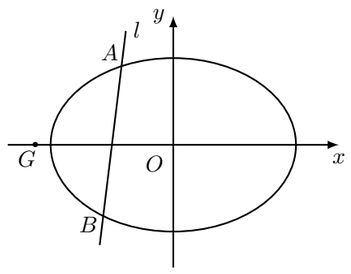
17. 如图, 在几何体 $ABCDE$ 中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB\perp$ 平面 BEC, $BE\perp EC$, $AB=BE=EC=2$, G, F 分别是线段 BE, DC 的中点.

(1) 求证: $GF\parallel$ 平面 ADE;

(2) 求平面 AEF 与平面 BEC 所成锐二面角的余弦值.



18. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $\left(0,\sqrt{2}\right)$, 且离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(1) 求椭圆 E 的方程;
(2) 设直线 $l:x=my-1\ (m\in\mathbf{R})$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, 判断点 $G\left(-\dfrac{9}{4},0\right)$ 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系, 并说明理由.



19. 已知函数 $f(x)$ 的图象是由函数 $g(x)=\cos x$ 的图象经如下变换得到: 先将 $g(x)$ 图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变), 再将所得到的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度.
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式, 并求其图象的对称轴方程;
(2) 已知关于 x 的方程 $f(x)+g(x)=m$ 在 $[0,2\pi)$ 内有两个不同的解 α, β.
① 求实数 m 的取值范围;
② 证明: $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{2m^2}{5}-1$.

20. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=kx\ (k\in\mathbf{R})$.
(1) 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)<x$;
(2) 证明: 当 $k<1$ 时, 存在 $x_0>0$, 使得对任意的 $x\in(0,x_0)$, 恒有 $f(x)>g(x)$;
(3) 确定 k 的所有可能取值, 使得存在 $t>0$, 对任意的 $x\in(0,t)$, 恒有 $|f(x)-g(x)|<x^2$.

21. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$.
(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$;
(2) 求矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+3\cos t\\y=-2+3\sin t\end{cases}$ (t 为参数). 在极坐标系 (与平面直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴非负半轴为极轴) 中, 直线 l 的方程为 $\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=m\ (m\in\mathbf{R})$.
(1) 求圆 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程;
(2) 设圆心 C 到直线 l 的距离等于 2, 求 m 的值.

23. 已知 $a>0$, $b>0$, $c>0$, 函数 $f(x)=|x+a|+|x-b|+c$ 的最小值为 4.
(1) 求 $a+b+c$ 的值;
(2) 求 $\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{9}b^2+c^2$ 的最小值.

2015 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 若 $(1+\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}$ (a, $b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位), 则 a, b 的值分别等于 （ ）

(A) 3, -2　　(B) 3, 2　　(C) 3, -3　　(D) -1, 4

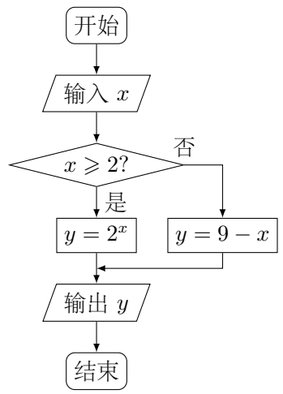
2. 若集合 $M=\{x\mid -2\leqslant x<2\}$, $N=\{0,1,2\}$, 则 $M\cap N$ 等于 （ ）

(A) $\{0\}$　　(B) $\{1\}$　　(C) $\{0,1,2\}$　　(D) $\{0,1\}$

3. 下列函数为奇函数的是 （ ）

(A) $y=\sqrt{x}$　　(B) $y=\mathrm{e}^x$　　(C) $y=\cos x$　　(D) $y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$

4. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 x 的值为 1, 则输出 y 的值为 （ ）



(A) 2　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 128

5. 若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ($a>0$, $b>0$) 过点 $(1,1)$, 则 $a+b$ 的最小值等于（ ）

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

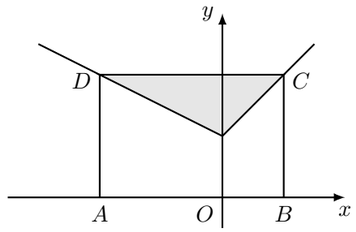
6. 若 $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$, 且 α 为第四象限角, 则 $\tan\alpha$ 的值等于 （ ）

(A) $\dfrac{12}{5}$　　(B) $-\dfrac{12}{5}$　　(C) $\dfrac{5}{12}$　　(D) $-\dfrac{5}{12}$

7. 设 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(1,1)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$, 则实数 k 的值等于 （ ）

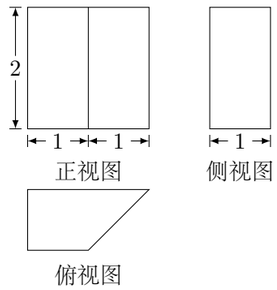
(A) $-\dfrac{3}{2}$　　(B) $-\dfrac{5}{3}$　　(C) $\dfrac{5}{3}$　　(D) $\dfrac{3}{2}$

8. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 点 A 在 x 轴上, 点 B 的坐标为 $(1,0)$, 且点 C 与点 D 在函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ -\dfrac{1}{2}x+1, & x<0\end{cases}$ 的图象上. 若在矩形 $ABCD$ 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率等于 （ ）



(A) $\dfrac{1}{6}$　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{3}{8}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

9. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积等于 （ ）



(A) $8+2\sqrt{2}$　　(B) $11+2\sqrt{2}$　　(C) $14+2\sqrt{2}$　　(D) 15

10. 变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 0\\ x-2y+2\geqslant 0\\ mx-y\leqslant 0\end{cases}$, 若 $z=2x-y$ 的最大值为 2, 则实数 m 等于 （ ）

(A) -2　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

11. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的右焦点为 F, 短轴的一个端点为 M, 直线 $l:3x-4y=0$ 交椭圆 E 于 A, B 两点. 若 $|AF|+|BF|=4$, 点 M 到直线 l 的距离不小于 $\dfrac{4}{5}$, 则椭圆 E 的离心率的取值范围是 （ ）

(A) $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　(B) $\left(0,\dfrac{3}{4}\right]$　　(C) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$　　(D) $\left[\dfrac{3}{4},1\right)$

12. “对任意 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $k\sin x\cos x<x$”是“$k<1$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

二、填空题

13. 某校高一年级有 900 名学生, 其中女生 400 名, 按男女比例用分层抽样的方法, 从该年级学生中抽取一个容量为 45 的样本, 则应抽取的男生人数为_____.

14. 若 $\triangle ABC$ 中, $AC=\sqrt{3}$, $A=45^\circ$, $C=75^\circ$, 则 $BC=$_____.

15. 若函数 $f(x)=2^{|x-a|}$ ($a\in\mathbf{R}$) 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, 且 $f(x)$ 在 $[m,+\infty)$ 上单调递增, 则实数 m 的最小值等于_____.

16. 若 a, b 是函数 $f(x)=x^2-px+q$ ($p>0$, $q>0$) 的两个不同的零点, 且 a, b, -2 这三个数可适当排序后成等差数列, 也可适当排序后成等比数列, 则 $p+q$ 的值等于_____.

三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=4$, $a_4+a_7=15$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=2^{a_n-2}+n$, 求 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}$ 的值.

18. 全网传播的融合指数是衡量电视媒体在中国网民中影响力的综合指标. 根据相关报道提供的全网传播 2015 年某全国性大型活动的“省级卫视新闻台”融合指数的数据, 对名列前 20 名的“省级卫视新闻台”的融合指数进行分组统计, 结果如表所示.

组号	分组	频数
1	$[4,5)$	2
2	$[5,6)$	8
3	$[6,7)$	7
4	$[7,8]$	3

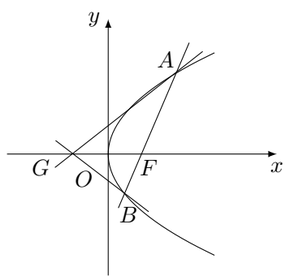
(1) 现从融合指数在 $[4,5)$ 和 $[7,8]$ 内的“省级卫视新闻台”中随机抽取 2 家进行调研, 求至少有 1 家的融合指数在 $[7,8]$ 内的概率;

(2) 根据分组统计表求这 20 家“省级卫视新闻台”的融合指数的平均数.

19. 已知点 F 为抛物线 $E: y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点, 点 $A(2,m)$ 在抛物线 E 上, 且 $|AF|=3$.

(1) 求抛物线 E 的方程;

(2) 已知点 $G(-1,0)$, 延长 AF 交抛物线 E 于点 B, 证明: 以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆, 必与直线 GB 相切.

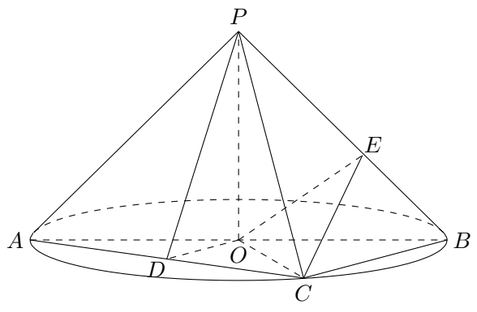


20. 如图, AB 是圆 O 的直径, 点 C 是圆 O 上异于 A, B 的点, PO 垂直于圆 O 所在的平面, 且 $PO=OB=1$.

(1) 若 D 为线段 AC 的中点, 求证: $AC\perp$ 平面 PDO;

(2) 求三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值;

(3) 若 $BC=\sqrt{2}$, 点 E 在线段 PB 上, 求 $CE+OE$ 的最小值.



21. 已知函数 $f(x)=10\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+10\cos^2\dfrac{x}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再向下平移 $a\ (a>0)$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 且函数 $g(x)$ 的最大值为 2.

① 求函数 $g(x)$ 的解析式;

② 证明: 存在无穷多个互不相同的正整数 x_0, 使得 $g(x_0)>0$.

22. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{(x-1)^2}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 证明: 当 $x>1$ 时, $f(x)<x-1$;

(3) 确定实数 k 的所有可能取值, 使得存在 $x_0>1$, 当 $x\in(1,x_0)$, 恒有 $f(x)>k(x-1)$.

2015 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 若集合 $M=\{x\,|\,(x+4)(x+1)=0\}$, $N=\{x\,|\,(x-4)(x-1)=0\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $\{1,4\}$　(B) $\{-1,-4\}$　(C) $\{0\}$　(D) $\varnothing$

2. 若复数 $z=\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})$ (i 是虚数单位), 则 $\overline{z}=$ （　）

(A) $2-3\mathrm{i}$　(B) $2+3\mathrm{i}$　(C) $3+2\mathrm{i}$　(D) $3-2\mathrm{i}$

3. 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是 （　）

(A) $y=\sqrt{1+x^2}$　(B) $y=x+\dfrac{1}{x}$　(C) $y=2^x+\dfrac{1}{2^x}$　(D) $y=x+\mathrm{e}^x$

4. 袋中共有 15 个除了颜色外完全相同的球, 其中有 10 个白球, 5 个红球. 从袋中任取 2 个球, 所取的 2 个球中恰有 1 个白球, 1 个红球的概率为（　）

(A) $\dfrac{5}{21}$　(B) $\dfrac{10}{21}$　(C) $\dfrac{11}{21}$　(D) 1

5. 平行于直线 $2x+y+1=0$ 且与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线的方程是（　）

(A) $2x+y+5=0$ 或 $2x+y-5=0$

(B) $2x+y+\sqrt{5}=0$ 或 $2x+y-\sqrt{5}=0$

(C) $2x-y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$

(D) $2x-y+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-\sqrt{5}=0$

6. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}4x+5y\geqslant 8\\ 1\leqslant x\leqslant 3\\ 0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最小值为 （　）

(A) 4　(B) $\dfrac{23}{5}$　(C) 6　(D) $\dfrac{31}{5}$

7. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率 $e=\dfrac{5}{4}$, 且其右焦点为 $F_2(5,0)$, 则双曲线 C 的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$

8. 若空间中 n 个不同的点两两距离都相等, 则正整数 n 的取值 （　）

(A) 至多等于 3　(B) 至多等于 4　(C) 等于 5　(D) 大于 5

二、填空题

9. 在 $(\sqrt{x}-1)^4$ 的展开式中, x 的系数为_____.

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=25$, 则 $a_2+a_8=$_____.

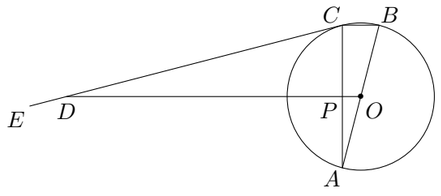
11. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 若 $a=\sqrt{3}$, $\sin B=\dfrac{1}{2}$, $C=\dfrac{\pi}{6}$, 则 $b=$_____.

12. 某高三毕业班有 40 人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了_____条毕业留言. (用数字作答)

13. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$, 若 $E(X)=30$, $D(X)=20$, 则 $p=$_____.

14. 已知直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, 点 A 的极坐标为 $A\left(2\sqrt{2},\dfrac{7\pi}{4}\right)$, 则点 A 到直线 l 的距离为_____.

15. 如图, 已知 AB 是圆 O 的直径, $AB=4$, EC 是圆 O 的切线, 切点为 C, $BC=1$. 过圆心 O 作 BC 的平行线, 分别交 EC 和 AC 于点 D 和点 P, 则 $OD=$_____.



三、解答题

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知向量 $\boldsymbol{m}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\boldsymbol{n}=(\sin x,\cos x)$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$, 求 $\tan x$ 的值;

(2) 若 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 求 x 的值.

17. 某工厂 36 名工人的年龄数据如下表.

工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄
1	40	10	36	19	27	28	34
2	44	11	31	20	43	29	39
3	40	12	38	21	41	30	43
4	41	13	39	22	37	31	38
5	33	14	43	23	34	32	42
6	40	15	45	24	42	33	53
7	45	16	39	25	37	34	37
8	42	17	38	26	44	35	49
9	43	18	36	27	42	36	39

(1) 用系统抽样法从 36 名工人中抽取容量为 9 的样本, 且在第一分段里用随机抽样法抽到的年龄数据为 44, 列出样本的年龄数据;

(2) 计算 (1) 中样本的均值 $\overline{x}$ 和方差 s^2;

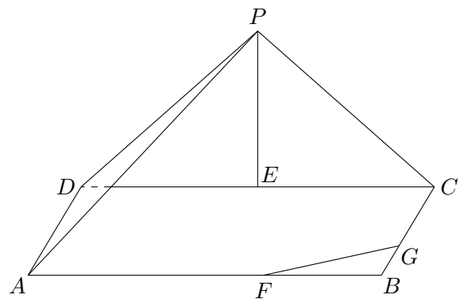
(3) 36 名工人中年龄在 $\overline{x}-s$ 与 $\overline{x}+s$ 之间有多少人? 所占的百分比是多少 (精确到 0.01%)?

18. 如图, 三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直, $PD=PC=4$, $AB=6$, $BC=3$. 点 E 是 CD 边的中点, 点 F, G 分别在线段 AB, BC 上, 且 $AF=2FB$, $CG=2GB$.

(1) 证明: $PE\perp FG$;

(2) 求二面角 $P-AD-C$ 的正切值;

(3) 求直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值.



19. 设 $a>1$, 函数 $f(x)=(1+x^2)\mathrm{e}^x-a$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅有一个零点;

(3) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线与 x 轴平行, 且在点 $M(m,n)$ 处的切线与直线 OP 平行 (O 是坐标原点), 证明: $m\leqslant\sqrt[3]{a-\dfrac{2}{\mathrm{e}}}-1$.

20. 已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1:x^2+y^2-6x+5=0$ 相交于不同的两点 A, B.

(1) 求圆 C_1 的圆心坐标;

(2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;

(3) 是否存在实数 k, 使得直线 $L:y=k(x-4)$ 与曲线 C 只有一个交点? 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+\cdots+na_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_3 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n;

(3) 令 $b_1=a_1$, $b_n=\dfrac{T_{n-1}}{n}+\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ $(n\geqslant 2)$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n<2+2\ln n$.

2015 年普通高等学校招生考试（广东卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $M=\{-1,1\}$, $N=\{-2,1,0\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $\{0,-1\}$　(B) $\{1\}$　(C) $\{0\}$　(D) $\{-1,1\}$

2. 已知 i 是虚数单位, 则复数 $(1+\mathrm{i})^2=$ （　）

(A) $2\mathrm{i}$　(B) $-2\mathrm{i}$　(C) 2　(D) -2

3. 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是 （　）

(A) $y=x+\sin 2x$　(B) $y=x^2-\cos x$

(C) $y=2^x+\dfrac{1}{2^x}$　(D) $y=x^2+\sin x$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\leqslant 2\\ x+y\geqslant 0\\ x\leqslant 4\end{cases}$, 则 $z=2x+3y$ 的最大值为（　）

(A) 2　(B) 5　(C) 8　(D) 10

5. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 若 $a=2$, $c=2\sqrt{3}$, $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $b<c$, 则 $b=$ （　）

(A) 3　(B) $2\sqrt{2}$　(C) 2　(D) $\sqrt{3}$

6. 若直线 l_1 和 l_2 是异面直线, l_1 在平面 α 内, l_2 在平面 β 内, l 是平面 α 与平面 β 的交线, 则下列命题正确的是 （　）

(A) l 与 l_1, l_2 都不相交　(B) l 与 l_1, l_2 都相交

(C) l 至多与 l_1, l_2 中的一条相交　(D) l 至少与 l_1, l_2 中的一条相交

7. 已知 5 件产品中有 2 件次品, 其余为合格品, 现从 5 件产品中任取 2 件, 恰有一件次品的概率为 （　）

(A) 0.4　(B) 0.6　(C) 0.8　(D) 1

8. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1$ $(m>0)$ 的左焦点为 $F_1(-4,0)$, 则 $m=$ （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 9

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\overrightarrow{AB}=(1,-2)$, $\overrightarrow{AD}=(2,1)$, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$ （　）

(A) 5　(B) 4　(C) 3　(D) 2

10. 若集合 $E=\{(p,q,r,s)\mid 0\leqslant p<s\leqslant 4,\ 0\leqslant q<s\leqslant 4,\ 0\leqslant r<s\leqslant 4$ 且 $p,\ q,\ r,\ s\in\mathbf{N}\}$, $F=\{(t,u,v,w)\mid 0\leqslant t<u\leqslant 4,\ 0\leqslant v<w\leqslant 4$ 且 $t,\ u,\ v,\ w\in\mathbf{N}\}$, 用 $\operatorname{card}(X)$ 表示集合 X 中元素个数, 则 $\operatorname{card}(E)+\operatorname{card}(F)=$（　）

(A) 200　(B) 150　(C) 100　(D) 50

二、填空题

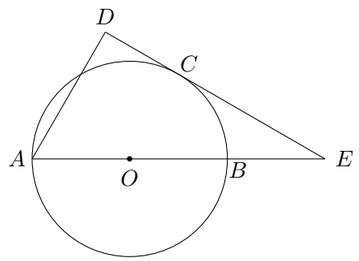
11. 不等式 $-x^2-3x+4>0$ 的解集为_____. (用区间表示)

12. 已知样本数据 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的均值 $\overline{x}=5$, 则样本数据 $2x_1+1$, $2x_2+1$, $\cdots$, $2x_n+1$ 的均值为_____.

13. 若三个正数 a, b, c 成等比数列, 其中 $a=5+2\sqrt{6}$, $c=5-2\sqrt{6}$, 则 $b=$_____.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=-2$, 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=t^2\\ y=2\sqrt{2}t\end{cases}$ (t 为参数), 则 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为_____.

15. 如图, AB 为圆 O 的直径, E 为 AB 延长线上一点, 过 E 作圆 O 的切线, 切点为 C, 过 A 作直线 EC 的垂线, 垂足为 D. 若 $AB=4$, $CE=2\sqrt{3}$, 则 $AD=$_____.



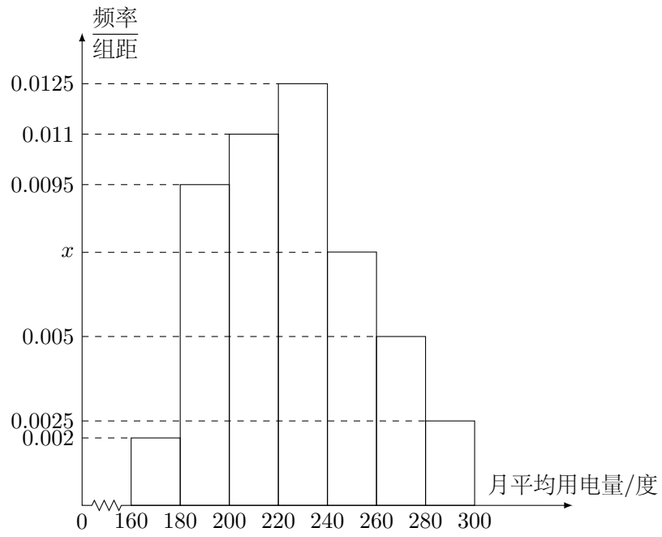
三、解答题

16. 已知 $\tan\alpha=2$.

(1) 求 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值;

(2) 求 $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}$ 的值.

17. 某城市 100 户居民的月平均用电量 (单位: 度), 以 $[160,180)$, $[180,200)$, $[200,220)$, $[220,240)$, $[240,260)$, $[260,280)$, $[280,300)$ 分组的频率分布直方图如图.



(1) 求直方图中 x 的值;

(2) 求月平均用电量的众数和中位数;

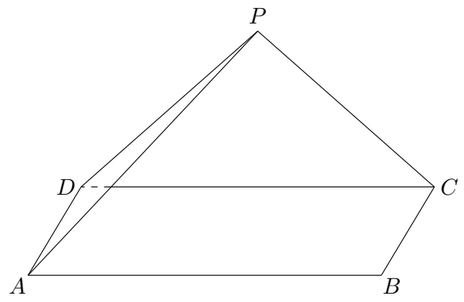
(3) 在月平均用电量为, $[220,240)$, $[240,260)$, $[260,280)$, $[280,300)$ 的四组用户中, 用分层抽样的方法抽取 11 户居民, 则月平均用电量在 $[220,240)$ 的用户中应抽取多少户?

18. 如图, 三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直, $PD=PC=4$, $AB=6$, $BC=3$.

(1) 证明: $BC\parallel$ 平面 PDA;

(2) 证明: $BC\perp PD$;

(3) 求点 C 到平面 PDA 的距离.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $n\in\mathbf{N}^*$, 已知 $a_1=1$, $a_2=\dfrac{3}{2}$, $a_3=\dfrac{5}{4}$, 且当 $n\geqslant 2$ 时, $4S_{n+2}+5S_n=8S_{n+1}+S_{n-1}$.

(1) 求 a_4 的值;

(2) 证明: $\left\{a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n\right\}$ 为等比数列;

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1:x^2+y^2-6x+5=0$ 相交于不同的两点 A, B.

(1) 求圆 C_1 的圆心坐标;

(2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;

(3) 是否存在实数 k, 使得直线 $L:y=k(x-4)$ 与曲线 C 只有一个交点? 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. 设 a 为实数, 函数 $f(x)=(x-a)^2+|x-a|-a(a-1)$.

(1) 若 $f(0)\leqslant 1$, 求 a 的取值范围;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 当 $a\geqslant 2$ 时, 讨论 $f(x)+\dfrac{4}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的零点个数.

2015 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. i 为虚数单位, i^{607} 的共轭复数为 （ ）

(A) i (B) $-\mathrm{i}$ (C) 1 (D) -1

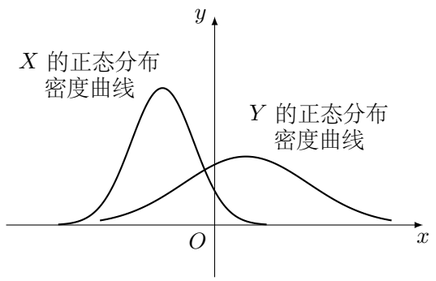
2. 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题: 粮仓开仓收粮, 有人送来米 1534 石, 验得米内夹谷, 抽样取米一把, 数得 254 粒内夹谷 28 粒, 则这批米内夹谷约为 （ ）

(A) 134 石 (B) 169 石 (C) 338 石 (D) 1365 石

3. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等, 则奇数项的二项式系数和为 （ ）

(A) 2^{12} (B) 2^{11} (C) 2^{10} (D) 2^9

4. 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 这两个正态分布密度曲线如图所示, 下列结论中正确的是 （ ）



(A) $P(Y \geqslant \mu_2) \geqslant P(Y \geqslant \mu_1)$

(B) $P(X \leqslant \sigma_2) \leqslant P(X \leqslant \sigma_1)$

(C) 对任意正数 t, $P(X \leqslant t) \geqslant P(Y \leqslant t)$

(D) 对任意正数 t, $P(X \geqslant t) \geqslant P(Y \geqslant t)$

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 3$. 若 p: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成等比数列; q: $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2) = (a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)^2$, 则 （ ）

(A) p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件

(B) p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件

(C) p 是 q 的充分必要条件

(D) p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件

6. 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$, $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $g(x) = f(x) - f(ax)$ $(a>1)$, 则 （ ）

(A) $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$ (B) $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$

(C) $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}[f(x)]$ (D) $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn}[f(x)]$

7. 在区间 $[0,1]$ 上随机取两个数 x, y, 记 p_1 为事件“$x+y \geqslant \frac{1}{2}$”的概率, p_2 为事件“$|x-y| \leqslant \frac{1}{2}$”的概率, p_3 为事件“$xy \leqslant \frac{1}{2}$”的概率, 则 （ ）

(A) $p_1 < p_2 < p_3$ (B) $p_2 < p_3 < p_1$ (C) $p_3 < p_1 < p_2$ (D) $p_3 < p_2 < p_1$

8. 将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b $(a \neq b)$ 同时增加 m $(m>0)$ 个单位长度, 得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2, 则 （ ）

(A) 对任意的 a, b, $e_1 > e_2$

(B) 当 $a>b$ 时, $e_1 > e_2$; 当 $a<b$ 时, $e_1 < e_2$

(C) 对任意的 a, b, $e_1 < e_2$

(D) 当 $a>b$ 时, $e_1 < e_2$; 当 $a<b$ 时, $e_1 > e_2$

9. 已知集合 $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ x,\ y \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x,y) \mid |x| \leqslant 2,\ |y| \leqslant 2,\ x,\ y \in \mathbf{Z}\}$, 定义集合 $A \oplus B = \{(x_1+x_2, y_1+y_2) \mid (x_1,y_1) \in A,\ (x_2,y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为 （ ）

(A) 77 (B) 49 (C) 45 (D) 30

10. 设 $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 若存在实数 t, 使得 $[t]=1$, $[t^2]=2$, $\cdots$, $[t^n]=n$ 同时成立, 则正整数 n 的最大值是 （ ）

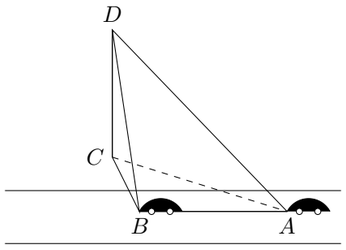
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

二、填空题

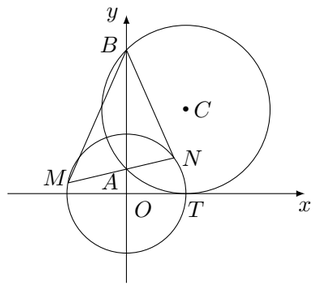
11. 已知向量 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$_____.

12. 函数 $f(x) = 4\cos^2\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - 2\sin x - |\ln(x+1)|$ 的零点个数为_____.

13. 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600 m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上, 仰角为 30°, 则此山的高度 $CD =$_____m.



14. 如图, 圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1,0)$, 与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方), 且 $|AB| = 2$.



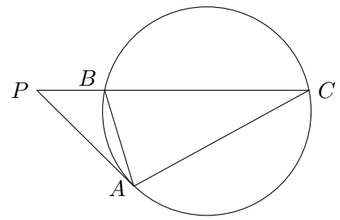
(1) 圆 C 的标准方程为_____;

(2) 过点 A 任作一条直线与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相交于 M, N 两点, 下列三个结论:

① $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|MA|}{|MB|}$; ② $\frac{|NB|}{|NA|} - \frac{|MA|}{|MB|} = 2$; ③ $\frac{|NB|}{|NA|} + \frac{|MA|}{|MB|} = 2\sqrt{2}$.

其中正确结论的序号是_____. (写出所有正确结论的序号)

15. 如图, PA 是圆的切线, A 为切点, PBC 是圆的割线, 且 $BC = 3PB$, 则 $\frac{AB}{AC} =$_____.



16. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\sin\theta - 3\cos\theta) = 0$, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = t - \frac{1}{t} \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases}$ (t 为参数), l 与 C 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$_____.

三、解答题

17. 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

(1) 请将上表数据补充完整, 填写在答题卡上相应位置, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 将 $y=f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 θ $(\theta>0)$ 个单位长度, 得到 $y=g(x)$ 的图象. 若 $y=g(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$, 求 θ 的最小值.

18. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 前 n 项和为 S_n, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q. 已知 $b_1=a_1$, $b_2=2$, $q=d$, $S_{10}=100$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

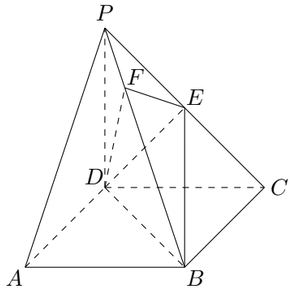
(2) 当 $d>1$ 时, 记 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.

19. 《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

如图, 在阳马 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD=CD$, 过棱 PC 的中点 E, 作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F, 连接 DE, DF, BD, BE.

(1) 证明: $PB\perp$ 平面 DEF. 试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑, 若是, 写出其每个面的直角 (只需写出结论); 若不是, 说明理由.

(2) 若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$, 求 $\dfrac{DC}{BC}$ 的值.



20. 某厂用鲜牛奶在某台设备上生产 A, B 两种奶制品. 生产 1 吨 A 产品需鲜牛奶 2 吨, 使用设备 1 小时, 获利 1000 元; 生产 1 吨 B 产品需鲜牛奶 1.5 吨, 使用设备 1.5 小时, 获利 1200 元. 要求每天 B 产品的产量不超过 A 产品产量的 2 倍, 设备每天生产 A, B 两种产品时间之和不超过 12 小时. 假定每天可获取的鲜牛奶数量 W (单位: 吨) 是一个随机变量, 其分布列为

W	12	15	18
P	0.3	0.5	0.2

该厂每天根据获取的鲜牛奶数量安排生产, 使其获利最大, 因此每天的最大获利 Z (单位: 元) 是一个随机变量.

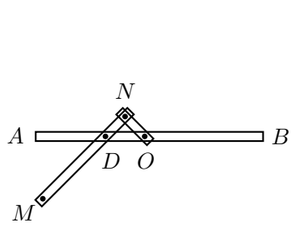
(1) 求 Z 的分布列和均值;

(2) 若每天可获取的鲜牛奶数量相互独立, 求 3 天中至少有 1 天的最大获利超过 10000 元的概率.

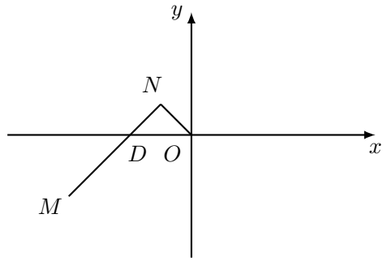
21. 一种作图工具如图①所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN=ON=1$, $MN=3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C. 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图②所示的平面直角坐标系.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 设动直线 l 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 P, Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.



①



②

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $b_n=n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n a_n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$, e 为自然对数的底数.

(1) 求函数 $f(x)=1+x-\mathrm{e}^x$ 的单调区间, 并比较 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 与 e 的大小;

(2) 计算 $\dfrac{b_1}{a_1}$, $\dfrac{b_1b_2}{a_1a_2}$, $\dfrac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}$, 由此推测计算 $\dfrac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}$ 的公式, 并给出证明;

(3) 令 $c_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$, 数列 $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ 的前 n 项和分别记为 S_n, T_n, 证明: $T_n<\mathrm{e}S_n$.

2015 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

文科数学

一、选择题

1. i 为虚数单位, $\mathrm{i}^{607}=$ （　）

(A) i　(B) $-\mathrm{i}$　(C) 1　(D) -1

2. 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题: 粮仓开仓收粮, 有人送来米 1534 石, 验得米内夹谷, 抽样取米一把, 数得 254 粒内夹谷 28 粒, 则这批米内夹谷约为 （　）

(A) 134 石　(B) 169 石　(C) 338 石　(D) 1365 石

3. 命题“$\exists x_0\in(0,+\infty),\ \ln x_0=x_0-1$”的否定是 （　）

(A) $\exists x_0\in(0,+\infty),\ \ln x_0\neq x_0-1$　(B) $\exists x_0\notin(0,+\infty),\ \ln x_0=x_0-1$

(C) $\forall x\in(0,+\infty),\ \ln x\neq x-1$　(D) $\forall x\notin(0,+\infty),\ \ln x=x-1$

4. 已知变量 x 和 y 满足关系 $y=-0.1x+1$, 变量 y 与 z 正相关. 下列结论中正确的是 （　）

(A) x 与 y 正相关, x 与 z 负相关　(B) x 与 y 正相关, x 与 z 正相关

(C) x 与 y 负相关, x 与 z 负相关　(D) x 与 y 负相关, x 与 z 正相关

5. l_1, l_2 表示空间中的两条直线, 若 p: l_1, l_2 是异面直线; q: l_1, l_2 不相交, 则 （　）

(A) p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件

(B) p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件

(C) p 是 q 的充分必要条件

(D) p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件

6. 函数 $f(x)=\sqrt{4-|x|}+\lg\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ 的定义域为 （　）

(A) $(2,3)$　(B) $(2,4]$

(C) $(2,3)\cup(3,4]$　(D) $(-1,3)\cup(3,6]$

7. 已知符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$, 则 （　）

(A) $|x|=x|\operatorname{sgn}x|$　(B) $|x|=x\operatorname{sgn}|x|$

(C) $|x|=|x|\operatorname{sgn}x$　(D) $|x|=x\operatorname{sgn}x$

8. 在区间 $[0,1]$ 上随机取两个数 x, y, 记 p_1 为事件“$x+y\leqslant\dfrac{1}{2}$”的概率, p_2 为事件“$xy\leqslant\dfrac{1}{2}$”的概率, 则

(A) $p_1<p_2<\dfrac{1}{2}$　(B) $p_2<\dfrac{1}{2}<p_1$　(C) $\dfrac{1}{2}<p_2<p_1$　(D) $p_1<\dfrac{1}{2}<p_2$

9. 将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b $(a\neq b)$ 同时增加 m $(m>0)$ 个单位长度, 得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2, 则 （　）

(A) 对任意的 a, b, $e_1>e_2$

(B) 当 $a>b$ 时, $e_1>e_2$; 当 $a<b$ 时, $e_1<e_2$

(C) 对任意的 a, b, $e_1<e_2$

(D) 当 $a>b$ 时, $e_1<e_2$; 当 $a<b$ 时, $e_1>e_2$

10. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant1,\ x,\ y\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant2,\ |y|\leqslant2,\ x,\ y\in\mathbf{Z}\}$, 定义集合 $A\oplus B=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)\,|\,(x_1,y_1)\in A,\ (x_2,y_2)\in B\}$, 则 $A\oplus B$ 中元素的个数为 （　）

(A) 77　(B) 49　(C) 45　(D) 30

二、填空题

11. 已知向量 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right|=3$, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$_____.

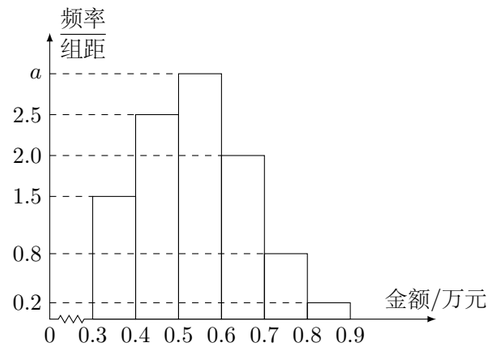
12. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant4\\ x-y\leqslant2\\ 3x-y\geqslant0\end{cases}$, 则 $3x+y$ 的最大值是_____.

13. 函数 $f(x)=2\sin x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-x^2$ 的零点个数为_____.

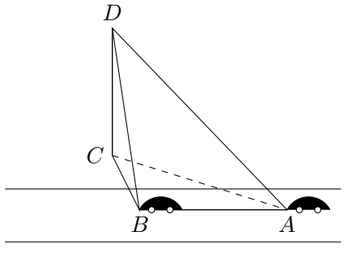
14. 某电子商务公司对 10000 名网络购物者 2014 年度的消费情况进行统计, 发现消费金额 (单位: 万元) 都在区间 $[0.3,0.9]$ 内, 其频率分布直方图如图所示.

(1) 直方图中的 $a=$_____.

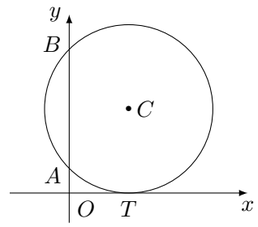
(2) 在这些购物者中, 消费金额在区间 $[0.5,0.9]$ 内的购物者的人数为_____.



15. 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600 m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上, 仰角为 30°, 则此山的高度 $CD=$_____m.



16. 如图, 圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1,0)$, 与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方), 且 $|AB|=2$.



(1) 圆 C 的标准方程为_____;

(2) 圆 C 在点 B 处的切线在 x 轴上的截距为_____.

17. a 为实数, 函数 $f(x)=|x^2-ax|$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值记为 $g(a)$. 当 $a=$_____时, $g(a)$ 的值最小.

三、解答题

18. 某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

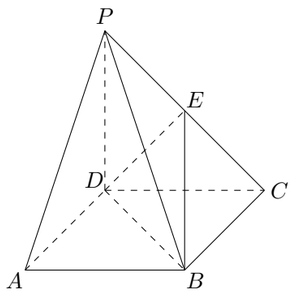
$\omega x+\varphi$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
x		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

(1) 请将上表数据补充完整, 填写在答题卡上相应位置, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 将 $y=f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y=g(x)$ 的图象. 求 $y=g(x)$ 的图象离原点 O 最近的对称中心.

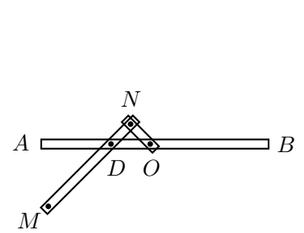
19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 前 n 项和为 S_n, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q. 已知 $b_1=a_1$, $b_2=2$, $q=d$, $S_{10}=100$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 当 $d>1$ 时, 记 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.

20. 《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.
如图, 在阳马 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD=CD$, 点 E 是 PC 的中点, 连接 DE, BD, BE.
(1) 证明: $DE\perp$ 平面 PBC. 试判断四面体 $EBCD$ 是否为鳖臑, 若是, 写出其每个面的直角 (只需写出结论); 若不是, 请说明理由;
(2) 记阳马 $P-ABCD$ 的体积为 V_1, 四面体 $EBCD$ 的体积为 V_2, 求 $\dfrac{V_1}{V_2}$ 的值.

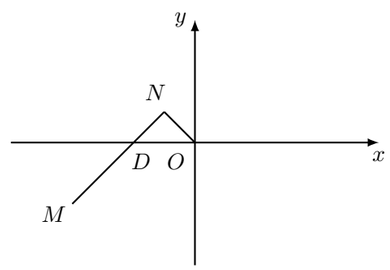


21. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, $f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x$, 其中 e 为自然对数的底数.
(1) 求 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式, 并证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$, $g(x)>1$;
(2) 设 $a\leqslant 0$, $b\geqslant 1$, 证明: 当 $x>0$ 时, $ag(x)+(1-a)<\dfrac{f(x)}{x}<bg(x)+(1-b)$.

22. 一种作图工具如图①所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN=ON=1$, $MN=3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C. 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图②所示的平面直角坐标系.
(1) 求曲线 C 的方程;
(2) 设动直线 l 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 P, Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.



①



②

2015 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{z}=1+\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则复数 $z=$ （ ）

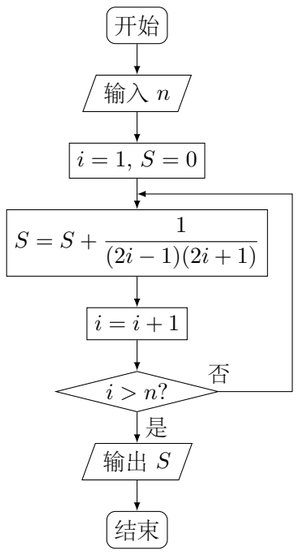
(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

2. 设 A, B 是两个集合, 则"$A\cap B=A$"是"$A\subseteq B$"的 （ ）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $n=3$, 则输出的 $S=$ （ ）



(A) $\dfrac{6}{7}$　(B) $\dfrac{3}{7}$　(C) $\dfrac{8}{9}$　(D) $\dfrac{4}{9}$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant -1\\ 2x-y\leqslant 1\\ y\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=3x-y$ 的最小值为（ ）

(A) -7　(B) -1　(C) 1　(D) 2

5. 设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$, 则 $f(x)$ 是 （ ）

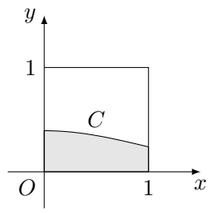
(A) 奇函数, 且在 $(0,1)$ 是增函数　(B) 奇函数, 且在 $(0,1)$ 是减函数

(C) 偶函数, 且在 $(0,1)$ 是增函数　(D) 偶函数, 且在 $(0,1)$ 是减函数

6. 已知 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项的系数为 30, 则 $a=$ （ ）

(A) $\sqrt{3}$　(B) $-\sqrt{3}$　(C) 6　(D) -6

7. 在如图所示的正方形中随机投掷 10000 个点, 则落入阴影部分 (曲线 C 为正态分布 $N(0,1)$ 的密度曲线) 的点的个数的估计值为 （ ）



附: 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$, $P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$.

(A) 2386　(B) 2718　(C) 3413　(D) 4772

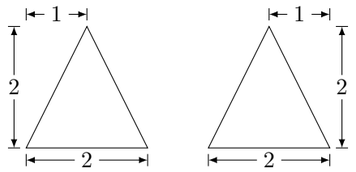
8. 已知点 A, B, C 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动, 且 $AB\perp BC$. 若点 P 的坐标为 $(2,0)$, 则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ 的最大值为 （ ）

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9

9. 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\varphi\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对满足 $|f(x_1)-g(x_2)|=2$ 的 x_1, x_2, 有 $|x_1-x_2|_{\min}=\dfrac{\pi}{3}$, 则 $\varphi=$ （ ）

(A) $\dfrac{5\pi}{12}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

10. 某工件的三视图如图所示, 现将该工件通过切削, 加工成一个体积尽可能大的长方体新工件, 并使新工件的一个面落在原工件的一个面内, 则原工件材料的利用率为 (材料的利用率 $=\dfrac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$) （ ）



(A) $\dfrac{8}{9\pi}$　(B) $\dfrac{16}{9\pi}$　(C) $\dfrac{4\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{\pi}$　(D) $\dfrac{12\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{\pi}$

二、填空题

11. $\int_0^2(x-1)\,\mathrm{d}x=$_____.

12. 在一次马拉松比赛中, 35 名运动员的成绩 (单位: 分钟) 茎叶图如图所示.

13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9						
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	8
15	0	1	2	2	3	3	3										

若将运动员按成绩由好到差编为 $1\sim 35$ 号, 再用系统抽样的方法从中抽取 7 人, 则其中成绩在区间 $[139,151]$ 上的运动员的人数是_____.

13. 设 F 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点, 若 C 上存在点 P, 使线段 PF 的中点恰为其虚轴的一个端点, 则 C 的离心率为_____.

14. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1=1$, 且 $3S_1$, $2S_2$, S_3 成等差数列, 则 $a_n=$_____.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant a\\ x^2, & x>a\end{cases}$, 若存在实数 b, 使函数 $g(x)=f(x)-b$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是_____.

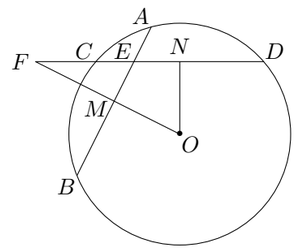
三、解答题

16. 三选二.

【A】如图, 在 $\odot O$ 中, 相交于点 E 的两弦 AB, CD 的中点分别是 M, N, 直线 MO 与直线 CD 相交于点 F. 证明:

(1) $\angle MEN+\angle NOM=180^\circ$;

(2) $FE\cdot FN=FM\cdot FO$.



【B】已知直线 $l:\begin{cases}x=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

(1) 将曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 设点 M 的直角坐标为 $(5,\sqrt{3})$, 直线 l 与曲线 C 的交点为 A, B, 求 $|MA|\cdot|MB|$ 的值.

【C】设 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, 证明:

(1) $a+b\geqslant 2$;

(2) $a^2+a<2$ 与 $b^2+b<2$ 不可能同时成立.

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $a=b\tan A$, 且 B 为钝角.

(1) 证明: $B-A=\dfrac{\pi}{2}$;

(2) 求 $\sin A+\sin C$ 的取值范围.

18. 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额的商品后即可抽奖, 每次抽奖都是从装有 4 个红球、6 个白球的甲箱和装有 5 个红球、5 个白球的乙箱中, 各随机摸出 1 个球. 在摸出的 2 个球中, 若都是红球, 则获一等奖; 若只有 1 个红球, 则获二等奖; 若没有红球, 则不获奖.

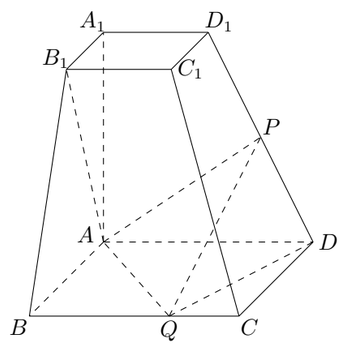
(1) 求顾客抽奖 1 次能获奖的概率;

(2) 若某顾客有 3 次抽奖的机会, 记该顾客在 3 次抽奖中获一等奖的次数为 X, 求 X 的分布列和数学期望.

19. 如图, 已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面分别是边长为 3 和 6 的正方形, $AA_1=6$, 且 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$, 点 P, Q 分别在棱 DD_1, BC 上.

(1) 若点 P 是 DD_1 的中点, 证明: $AB_1\perp PQ$;

(2) 若 $PQ\parallel$ 平面 ABB_1A_1, 二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{3}{7}$, 求四面体 $ADPQ$ 的体积.



20. 已知抛物线 $C_1: x^2=4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的一个焦点, C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$.

(1) 求 C_2 的方程;

(2) 过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A, B 两点, 与 C_2 相交于 C, D 两点, 且 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 同向.

① 若 $|AC|=|BD|$, 求直线 l 的斜率;

② 设 C_1 在点 A 处的切线与 x 轴的交点为 M, 证明: 直线 l 绕点 F 旋转时, $\triangle MFD$ 总是钝角三角形.

21. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\sin x$ $(x\in[0,+\infty))$, 记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 n $(n\in\mathbf{N}^*)$ 个极值点. 证明:

(1) 数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列;

(2) 若 $a\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}$, 则对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $x_n<|f(x_n)|$ 恒成立.

2015 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知 $\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{z}=1+\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则复数 $z=$ （　）

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

2. 在一次马拉松比赛中, 35 名运动员的成绩 (单位: 分钟) 茎叶图如图所示.

13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9						
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	8
15	0	1	2	2	3	3	3										

若将运动员按成绩由好到差编为 $1\sim35$ 号, 再用系统抽样的方法从中抽取 7 人, 则其中成绩在区间 $[139,151]$ 上的运动员的人数是 （　）

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

3. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$x>1$”是“$x^3>1$”的 （　）

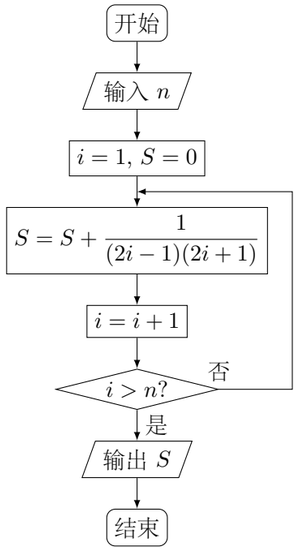
(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ y-x\leqslant 1\\ x\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最小值为（　）

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

5. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $n=3$, 则输出的 $S=$ （　）



(A) $\dfrac{6}{7}$　(B) $\dfrac{3}{7}$　(C) $\dfrac{8}{9}$　(D) $\dfrac{4}{9}$

6. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线经过点 $(3,-4)$, 则此双曲线的离心率为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　(B) $\dfrac{5}{4}$　(C) $\dfrac{4}{3}$　(D) $\dfrac{5}{3}$

7. 若实数 a, b 满足 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\sqrt{ab}$, 则 ab 的最小值为 （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) 2　(C) $2\sqrt{2}$　(D) 4

8. 设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$, 则 $f(x)$ 是 （　）

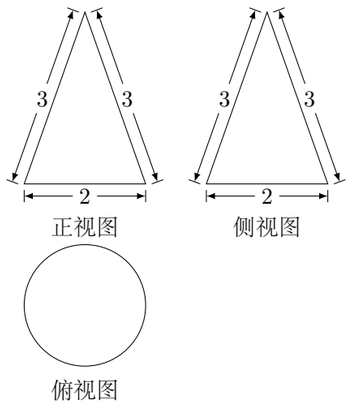
(A) 奇函数, 且在 $(0,1)$ 是增函数　(B) 奇函数, 且在 $(0,1)$ 是减函数

(C) 偶函数, 且在 $(0,1)$ 是增函数　(D) 偶函数, 且在 $(0,1)$ 是减函数

9. 已知点 A, B, C 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动, 且 $AB\perp BC$. 若点 P 的坐标为 $(2,0)$, 则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ 的最大值为 （　）

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9

10. 某工件的三视图如图所示, 现将该工件通过切削, 加工成一个体积尽可能大的正方体新工件, 并使新工件的一个面落在原工件的一个面内, 则原工件材料的利用率为 (材料的利用率 $=\dfrac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$) （　）



(A) $\dfrac{8}{9\pi}$　(B) $\dfrac{8}{27\pi}$　(C) $\dfrac{24\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{\pi}$　(D) $\dfrac{8\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{\pi}$

二、填空题

11. 已知集合 $U=\{1,2,3,4\}$, $A=\{1,3\}$, $B=\{1,3,4\}$, 则 $A\cup\left(\complement_U B\right)=$_____.

12. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 若曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$, 则曲线 C 的直角坐标方程为_____.

13. 若直线 $3x-4y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相交于 A, B 两点, 且 $\angle AOB=120^\circ$ (O 为坐标原点), 则 $r=$_____.

14. 若函数 $f(x)=|2^x-2|-b$ 有两个零点, 则实数 b 的取值范围是_____.

15. 已知 $\omega>0$, 在函数 $y=2\sin\omega x$ 与 $y=2\cos\omega x$ 的图象的交点中, 距离最短的两个交点的距离为 $2\sqrt{3}$, 则 $\omega=$_____.

三、解答题

16. 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额的商品后即可抽奖, 抽奖方法是: 从装有 2 个红球 A_1, A_2 和 1 个白球 B 的甲箱与装有 2 个红球 a_1, a_2 和 2 个白球 b_1, b_2 的乙箱中, 各随机摸出 1 个球, 若摸出的 2 个球都是红球则中奖, 否则不中奖.

(1) 用球的标号列出所有可能的摸出结果;

(2) 有人认为: 两个箱子中的红球比白球多, 所以中奖的概率大于不中奖的概率, 你认为正确吗? 请说明理由.

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $a=b\tan A$.

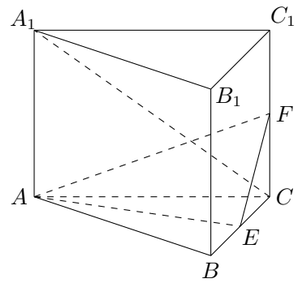
(1) 证明: $\sin B=\cos A$;

(2) 若 $\sin C-\sin A\cos B=\dfrac{3}{4}$, 且 B 为钝角, 求 A, B, C.

18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 BC, CC_1 的中点.

(1) 证明: 平面 $AEF\perp$ 平面 B_1BCC_1;

(2) 若直线 A_1C 与平面 A_1ABB_1 所成的角为 45°, 求三棱锥 $F-AEC$ 的体积.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 证明: $a_{n+2}=3a_n$;

(2) 求 S_n.

20. 已知抛物线 $C_1:x^2=4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的一个焦点, C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$. 过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A, B 两点, 与 C_2 相交于 C, D 两点, 且 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 同向.

(1) 求 C_2 的方程;

(2) 若 $|AC|=|BD|$, 求直线 l 的斜率.

21. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=ae^x\cos x$ $(x\in[0,+\infty))$. 记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 n $(n\in\mathbf{N}^*)$ 个极值点.

(1) 证明: 数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列;

(2) 若对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $x_n\leqslant|f(x_n)|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

2015 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4,5\}$, 则集合 $A\cup B$ 中元素的个数为_____.

2. 已知一组数据 4, 6, 5, 8, 7, 6, 那么这组数据的平均数为_____.

3. 设复数 z 满足 $z^2=3+4\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 z 的模为_____.

4. 根据如图所示的伪代码, 可知输出的结果 S 为_____.

```
S ← 1
I ← 1
While I < 8
    S ← S + 2
    I ← I + 3
End While
Print S
```

5. 袋中有形状、大小都相同的 4 只球, 其中 1 只白球、1 只红球、2 只黄球, 从中一次随机摸出 2 只球, 则这 2 只球颜色不同的概率为_____.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2)$, 若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(9,-8)$ $(m,\ n\in\mathbf{R})$, 则 $m-n$ 的值为_____.

7. 不等式 $2^{x^2-x}<4$ 的解集为_____.

8. 已知 $\tan\alpha=-2$, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{7}$, 则 $\tan\beta$ 的值为_____.

9. 现有橡皮泥制作的底面半径为 5, 高为 4 的圆锥和底面半径为 2, 高为 8 的圆柱各一个. 若将它们重新制作成总体积与高均保持不变, 但底面半径相同的新的圆锥和圆柱各一个, 则新的底面半径为_____.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 以点 $(1,0)$ 为圆心且与直线 $mx-y-2m-1=0$ $(m\in\mathbf{R})$ 相切的所有圆中, 半径最大的圆的标准方程为_____.

11. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 且 $a_{n+1}-a_n=n+1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 前 10 项的和为_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, P 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 右支上的一个动点, 若点 P 到直线 $x-y+1=0$ 的距离大于 c 恒成立, 则实数 c 的最大值为_____.

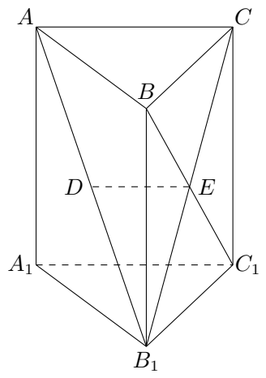
13. 已知函数 $f(x)=|\ln x|$, $g(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 1\\ |x^2-4|-2, & x>1\end{cases}$, 则方程 $|f(x)+g(x)|=1$ 实根的个数为_____.

14. 设向量 $\boldsymbol{a}_k=\left(\cos\dfrac{k\pi}{6},\sin\dfrac{k\pi}{6}+\cos\dfrac{k\pi}{6}\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$, 则 $\sum\limits_{k=0}^{11}(\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_{k+1})$ 的值为_____.

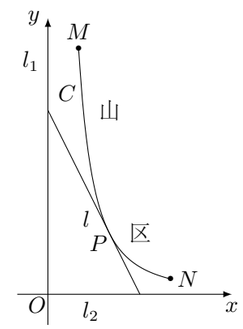
二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2$, $AC=3$, $A=60^\circ$.
(1) 求 BC 的长;
(2) 求 $\sin 2C$ 的值.

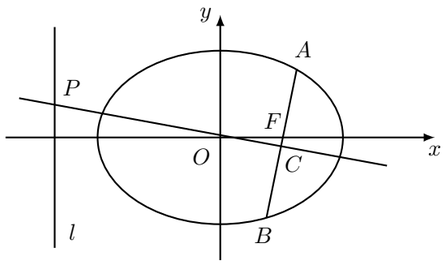
16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AC\perp BC$, $BC=CC_1$, 设 AB_1 的中点为 D, $B_1C\cap BC_1=E$. 求证:
(1) $DE\ /\!/$ 平面 AA_1C_1C;
(2) $BC_1\perp AB_1$.



17. 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路, 为进一步改善山区的交通现状, 计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路. 记两条相互垂直的公路为 l_1, l_2, 山区边界曲线为 C, 计划修建的公路为 l. 如图所示, M, N 为 C 的两个端点, 测得点 M 到 l_1, l_2 的距离分别为 5 千米和 40 千米, 点 N 到 l_1, l_2 的距离分别为 20 千米和 2.5 千米. 以 l_2, l_1 所在的直线分别为 x, y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy. 假设曲线 C 符合函数 $y=\dfrac{a}{x^2+b}$ (其中 a, b 为常数) 模型.
(1) 求 a, b 的值;
(2) 设公路 l 与曲线 C 相切于 P 点, P 的横坐标为 t.
① 请写出公路 l 长度的函数解析式 $f(t)$, 并写出其定义域;
② 当 t 为何值时, 公路 l 的长度最短? 求出最短长度.



18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且右焦点 F 到左准线 l 的距离为 3.
(1) 求椭圆的标准方程;
(2) 过 F 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线分别交直线 l 和 AB 于点 P, C, 若 $PC=2AB$, 求直线 AB 的方程.

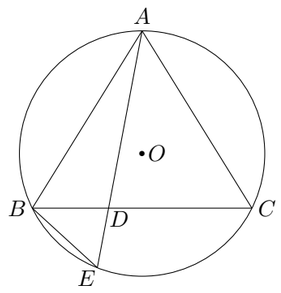


19. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$.
(1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $b=c-a$ (实数 c 是与 a 无关的常数), 当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a 的取值范围恰好是 $(-\infty,-3)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, 求 c 的值.

20. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是各项为正数且公差为 d $(d\neq 0)$ 的等差数列.
(1) 证明: 2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4} 依次构成等比数列;
(2) 是否存在 a_1, d, 使得 a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列? 并说明理由;
(3) 是否存在 a_1, d 及正整数 n, k, 使得 a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k} 依次构成等比数列? 并说明理由.

21. 四选二.

【A】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的弦 AE 交 BC 于点 D. 求证: $\triangle ABD\backsim\triangle AEB$.

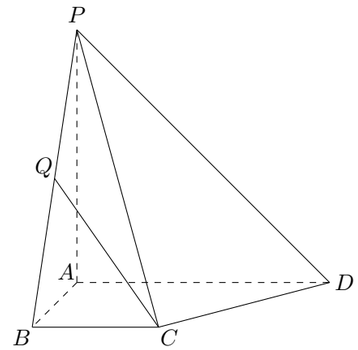


【B】已知 x, $y\in\mathbf{R}$, 向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x&1\\y&0\end{bmatrix}$ 的属于特征值 -2 的一个特征向量, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及它的另一个特征值.

【C】已知圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+2\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)-4=0$, 求圆 C 的半径.

【D】解不等式 $x+|2x+3|\geqslant 2$.

22. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle ABC=\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$, $PA=AD=2$, $AB=BC=1$.
(1) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的余弦值;
(2) 点 Q 是线段 BP 上的动点, 当直线 CQ 与 DP 所成的角最小时, 求线段 BQ 的长.



23. 已知集合 $X=\{1,2,3\}$, $Y_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 设 $S_n=\{(a,b)\,|\,a$ 整除 b 或 b 整除 a, $a\in X$, $b\in Y_n\}$, 令 $f(n)$ 表示集合 S_n 所含元素的个数.
(1) 写出 $f(6)$ 的值;
(2) 当 $n\geqslant 6$ 时, 写出 $f(n)$ 的表达式, 并用数学归纳法证明.

2015 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 设复数 z 满足 $\dfrac{1+z}{1-z}=\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ （　）

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

2. $\sin 20^\circ\cos 10^\circ-\cos 160^\circ\sin 10^\circ=$ （　）

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

3. 设命题 p: $\exists n\in\mathbf{N}$, $n^2>2^n$, 则 $\neg p$ 为 （　）

(A) $\forall n\in\mathbf{N}$, $n^2>2^n$　(B) $\exists n\in\mathbf{N}$, $n^2\leqslant 2^n$

(C) $\forall n\in\mathbf{N}$, $n^2\leqslant 2^n$　(D) $\exists n\in\mathbf{N}$, $n^2=2^n$

4. 投篮测试中, 每人投 3 次, 至少投中 2 次才能通过测试. 已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6, 且各次投篮是否投中相互独立, 则该同学通过测试的概率为 （　）

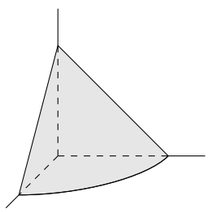
(A) 0.648　(B) 0.432　(C) 0.36　(D) 0.312

5. 已知 $M(x_0,y_0)$ 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上的一点, F_1, F_2 是 C 的两个焦点. 若 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$, 则 y_0 的取值范围是 （　）

(A) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　(B) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$

(C) $\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　(D) $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

6. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何? ”其意思为: “在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少? ”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有 （　）



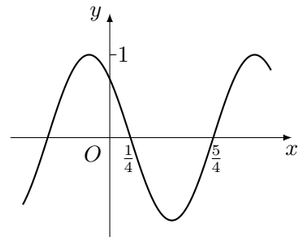
(A) 14 斛　(B) 22 斛　(C) 36 斛　(D) 66 斛

7. 设 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$, 则 （　）

(A) $\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　(B) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　(D) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

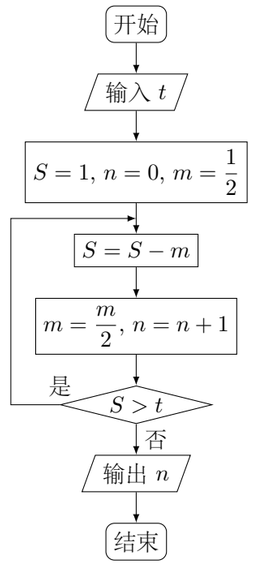
8. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 （　）



(A) $\left(k\pi-\dfrac{1}{4},k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$　(B) $\left(2k\pi-\dfrac{1}{4},2k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left(k-\dfrac{1}{4},k+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$　(D) $\left(2k-\dfrac{1}{4},2k+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $t=0.01$, 则输出的 $n=$ （　）

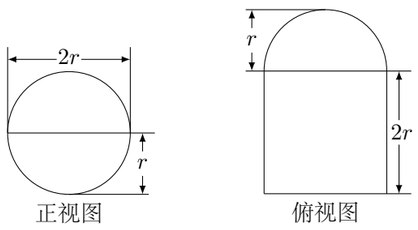


(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8

10. $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中, x^5y^2 的系数为 （　）

(A) 10　(B) 20　(C) 30　(D) 60

11. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球 (半径为 r) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16+20\pi$, 则 $r=$ （　）



(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8

12. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(2x-1)-ax+a$, 其中 $a<1$, 若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $\left[-\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$　(B) $\left[-\dfrac{3}{2\mathrm{e}},\dfrac{3}{4}\right)$　(C) $\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},\dfrac{3}{4}\right)$　(D) $\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$

二、填空题

13. 若函数 $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 为偶函数, 则 $a=$_____.

14. 一个圆经过椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的三个顶点, 且圆心在 x 轴的正半轴上, 则该圆的标准方程为_____.

15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-y\leqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\end{cases}$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为_____.

16. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$, $BC=2$, 则 AB 的取值范围是_____.

三、解答题

17. S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n>0$, $a_n^2+2a_n=4S_n+3$.

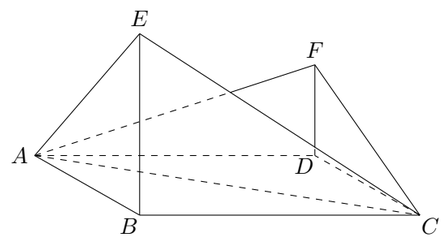
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

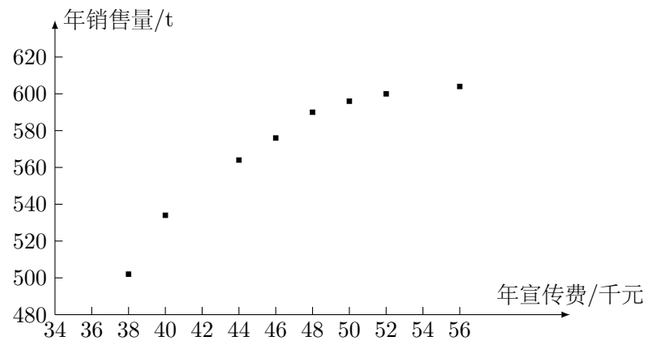
18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC=120^\circ$, E, F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点, $BE\perp$ 平面 $ABCD$, $DF\perp$ 平面 $ABCD$, $BE=2DF$, $AE\perp EC$.

(1) 证明: 平面 $AEC\perp$ 平面 AFC;

(2) 求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.



19. 某公司为确定下一年度投入某产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响. 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2$
46.6	563	6.8	289.8	1.6

$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
1.469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$, $\overline{w}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}w_i$.

(1) 根据散点图判断, $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(2) 根据 (1) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(3) 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z=0.2y-x$. 根据 (2) 的结果回答下列问题:

① 年宣传费 $x=49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

② 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$, 其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(v_i-\overline{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}$, $\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{u}$.

20. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C:y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $l:y=kx+a$ $(a>0)$ 交于 M, N 两点.

(1) 当 $k=0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;

(2) y 轴上是否存在点 P, 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM=\angle OPN$? 说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=x^3+ax+\dfrac{1}{4}$, $g(x)=-\ln x$.

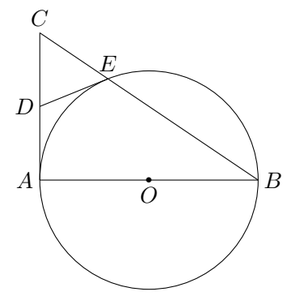
(1) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线;

(2) 用 $\min\{m,n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ $(x>0)$, 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

22. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于点 E.

(1) 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $OA=\sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1:x=-2$, 圆 $C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ $(\rho\in\mathbf{R})$, 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N, 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$, $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.

2015 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x=3n+2,n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{6,8,10,12,14\}$, 则集合 $A\cap B$ 中的元素个数为 （ ）

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

2. 已知点 $A(0,1)$, $B(3,2)$, 向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$, 则向量 $\overrightarrow{BC}=$ （ ）

(A) $(-7,-4)$ (B) $(7,4)$ (C) $(-1,4)$ (D) $(1,4)$

3. 已知复数 z 满足 $(z-1)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$, 则 $z=$ （ ）

(A) $-2-\mathrm{i}$ (B) $-2+\mathrm{i}$ (C) $2-\mathrm{i}$ (D) $2+\mathrm{i}$

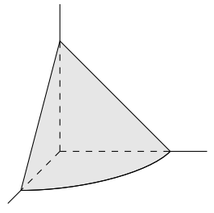
4. 如果 3 个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长, 则称这 3 个数为一组勾股数, 从 1, 2, 3, 4, 5 中任取 3 个不同的数, 则这 3 个数构成一组勾股数的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{10}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{10}$ (D) $\dfrac{1}{20}$

5. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$, E 的右焦点与抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点重合, A, B 是 C 的准线与 E 的两个交点, 则 $|AB|=$ （ ）

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

6. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何? ”其意思为: “在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少? ”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有 （ ）

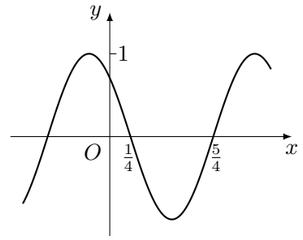


(A) 14 斛 (B) 22 斛 (C) 36 斛 (D) 66 斛

7. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_8=4S_4$, 则 $a_{10}=$ （ ）

(A) $\dfrac{17}{2}$ (B) $\dfrac{19}{2}$ (C) 10 (D) 12

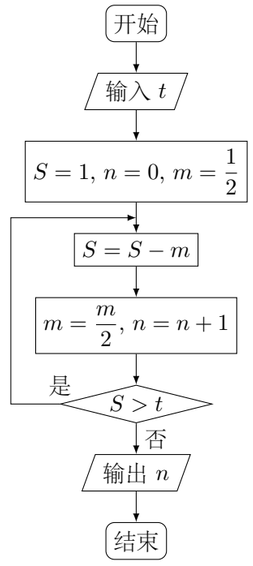
8. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 （ ）



(A) $\left(k\pi-\dfrac{1}{4},k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ (B) $\left(2k\pi-\dfrac{1}{4},2k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left(k-\dfrac{1}{4},k+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ (D) $\left(2k-\dfrac{1}{4},2k+\dfrac{3}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $t=0.01$, 则输出的 $n=$ （ ）

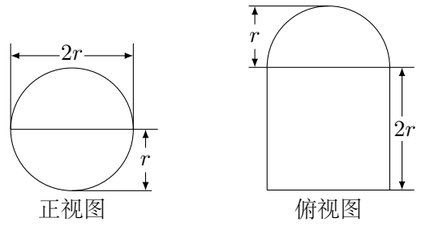


(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2, & x\leqslant 1\\ -\log_2(x+1), & x>1\end{cases}$ 且 $f(a)=-3$, 则 $f(6-a)=$ （ ）

(A) $-\dfrac{7}{4}$ (B) $-\dfrac{5}{4}$ (C) $-\dfrac{3}{4}$ (D) $-\dfrac{1}{4}$

11. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球 (半径为 r) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16+20\pi$, 则 $r=$ （ ）



(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

12. 设函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称, 且 $f(-2)+f(-4)=1$, 则 $a=$ （ ）

(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 4

二、填空题

13. 数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n=126$, 则 $n=$_____.

14. 已知函数 $f(x)=ax^3+x+1$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线过点 $(2,7)$, 则 $a=$_____.

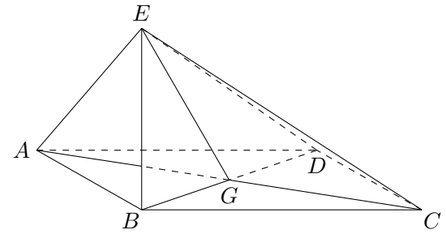
15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\ x-2y+1\leqslant 0\\ 2x-y+2\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+y$ 的最大值为_____.

16. 已知 F 是双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 的右焦点, P 是 C 左支上一点, $A\left(0,6\sqrt{6}\right)$, 当 $\triangle APF$ 周长最小时, 该三角形的面积为_____.

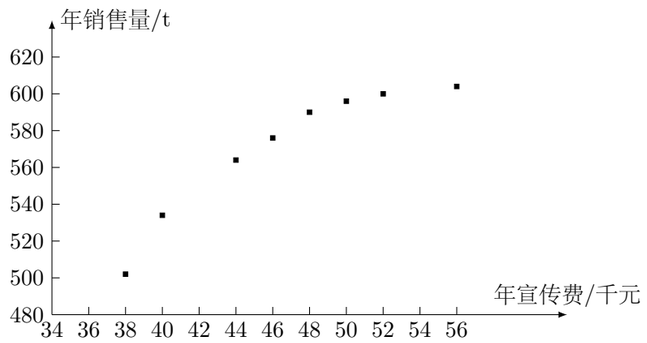
三、解答题

17. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, $\sin^2B=2\sin A\sin C$.
(1) 若 $a=b$, 求 $\cos B$;
(2) 若 $B=90^\circ$, 且 $a=\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, G 为 AC 与 BD 的交点, $BE\perp$ 平面 $ABCD$.
(1) 证明: 平面 $AEC\perp$ 平面 BED;
(2) 若 $\angle ABC=120^\circ$, $AE\perp EC$, 三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 求该三棱锥的侧面积.



19. 某公司为确定下一年度投入某产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响. 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2$
46.6	563	6.8	289.8	1.6

$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
1.469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$, $\overline{w}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}w_i$.

(1) 根据散点图判断, $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(2) 根据 (1) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(3) 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z=0.2y-x$. 根据 (2) 的结果回答下列问题:

① 年宣传费 $x=49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

② 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$, 其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(v_i-\overline{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}$, $\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{u}$.

20. 已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 M, N 两点.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$, 其中 O 为坐标原点, 求 $|MN|$.

21. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-a\ln x$.

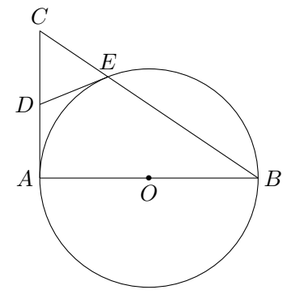
(1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点的个数;

(2) 证明: 当 $a>0$ 时, $f(x)\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

22. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于点 E.

(1) 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $OA=\sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1:x=-2$, 圆 $C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ $(\rho\in\mathbf{R})$, 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N, 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$, $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.

2015 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

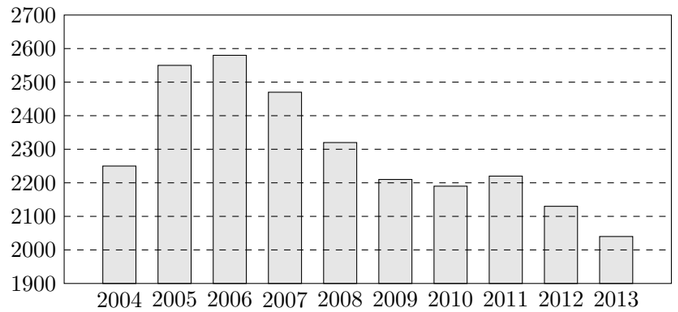
1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $B=\{x\mid (x-1)(x+2)<0\}$, 则 $A\cap B$ 等于 （ ）

(A) $\{-1,0\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{-1,0,1\}$ (D) $\{0,1,2\}$

2. 若 a 为实数, 且 $(2+a\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})=-4\mathrm{i}$, 则 $a=$ （ ）

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

3. 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量 (单位: 万吨) 柱形图, 以下结论中不正确的是 （ ）



(A) 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著

(B) 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效

(C) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势

(D) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

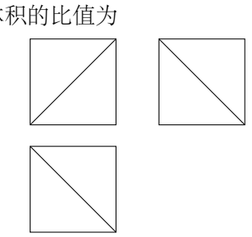
4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_1+a_3+a_5=21$, 则 $a_3+a_5+a_7=$（ ）

(A) 21 (B) 42 (C) 63 (D) 84

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x), & x<1\\ 2^{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$ 则 $f(-2)+f(\log_2 12)=$（ ）

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

6. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 （ ）

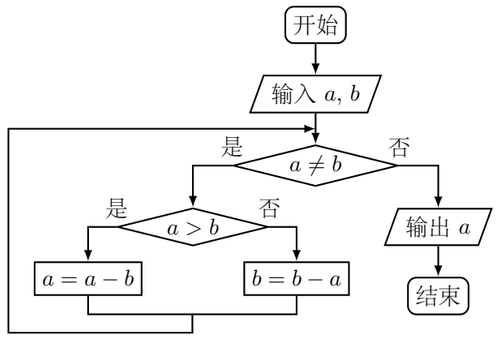


(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{5}$

7. 过三点 $A(1,3)$, $B(4,2)$, $C(1,-7)$ 的圆交 y 轴于 M, N 两点, 则 $|MN|=$ （ ）

(A) $2\sqrt{6}$ (B) 8 (C) $4\sqrt{6}$ (D) 10

8. 下边程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图, 若输入的 a, b 分别为 14, 18, 则输出的 $a=$（ ）

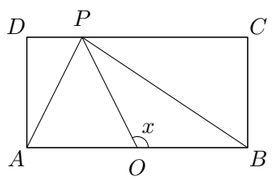


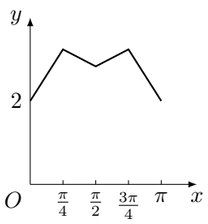
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 14

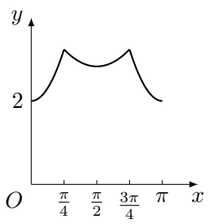
9. 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB=90^\circ$, C 为该球面上的动点, 若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为 （ ）

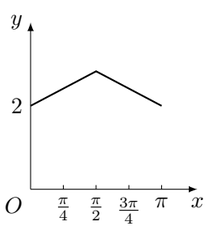
(A) 36π (B) 64π (C) 144π (D) 256π

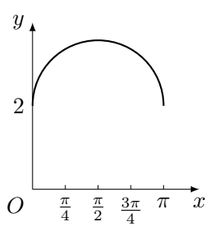
10. 如图, 长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$, $BC=1$, O 是 AB 的中点, 点 P 沿着边 BC, CD 与 DA 运动, 记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 （ ）



(A)


(B)


(C)


(D)


11. 已知 A, B 为双曲线 E 的左、右顶点, 点 M 在 E 上, $\triangle ABM$ 为等腰三角形, 且顶角为 120°, 则 E 的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{5}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

12. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1)=0$, 当 $x>0$ 时, $xf'(x)-f(x)<0$, 则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ (B) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ (D) $(0,1)\cup(1,+\infty)$

二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不平行, 向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行, 则实数 $\lambda=$_____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x-2y\leqslant 0\\ x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

15. $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32, 则 $a=$_____.

16. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1=-1$, $a_{n+1}=S_nS_{n+1}$, 则 $S_n=$_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $\dfrac{\sin B}{\sin C}$;

(2) 若 $AD=1$, $DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长.

18. 某公司为了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 20 个用户, 得到用户对产品的满意度评分如下:

A 地区:	62	73	81	92	95	85	74	64	53	76
	78	86	95	66	97	78	88	82	76	89
B 地区:	73	83	62	51	91	46	53	73	64	82
	93	48	65	81	74	56	54	76	65	79

(1) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图, 并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度 (不要求计算出具体值, 给出结论即可);

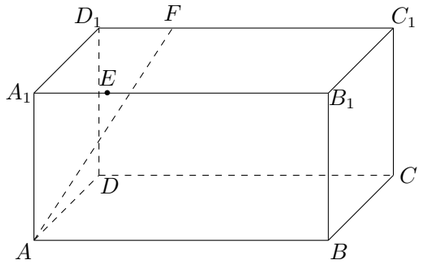
A 地区		B 地区
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	

(2) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度从低到高分为三个等级:

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C: "A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级". 假设两地区用户的评价结果相互独立. 根据所给数据, 以事件发生的频率作为相应事件发生的概率, 求 C 的概率.

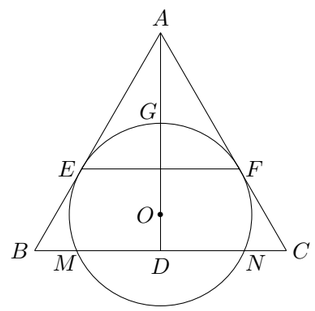
19. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=16$, $BC=10$, $AA_1=8$, 点 E, F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上, $A_1E=D_1F=4$. 过点 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.
(1) 在图中画出这个正方形 (不必说明画法和理由);
(2) 求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值.



20. 已知椭圆 $C: 9x^2+y^2=m^2$ $(m>0)$, 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B, 线段 AB 的中点为 M.
(1) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;
(2) 若 l 过点 $\left(\dfrac{m}{3},m\right)$, 延长线段 OM 与 C 交于点 P, 四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形? 若能, 求此时 l 的斜率; 若不能, 说明理由.

21. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{mx}+x^2-mx$.
(1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 单调递增;
(2) 若对于任意 x_1, $x_2\in[-1,1]$, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant \mathrm{e}-1$, 求 m 的取值范围.

22. 如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边上的高 AD 交于点 G, 且与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.
(1) 证明: $EF\parallel BC$;
(2) 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE=MN=2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数, $t\neq 0$), 其中 $0\leqslant\alpha<\pi$. 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2:\rho=2\sin\theta$, $C_3:\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.
(1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;
(2) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A, C_1 与 C_3 相交于点 B, 求 $|AB|$ 的最大值.

24. 设 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, 证明:
(1) 若 $ab>cd$, 则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$;
(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是 $|a-b|<|c-d|$ 的充要条件.

2015 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

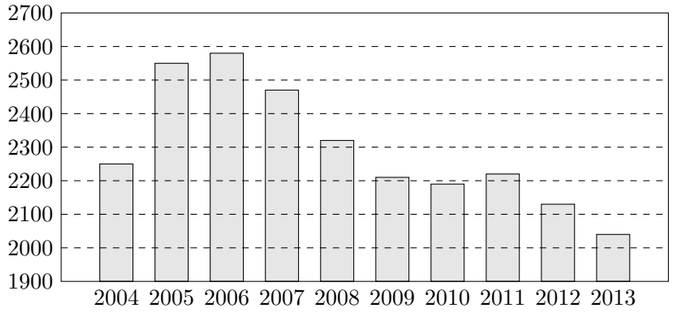
1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$, $B=\{x\mid 0<x<3\}$, 则 $A\cup B=$（　）

(A) $(-1,3)$　(B) $(-1,0)$　(C) $(0,2)$　(D) $(2,3)$

2. 若 a 为实数, 且 $\dfrac{2+a\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=3+\mathrm{i}$, 则 $a=$（　）

(A) -4　(B) -3　(C) 3　(D) 4

3. 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量 (单位: 万吨) 柱形图, 以下结论中不正确的是（　）



(A) 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著

(B) 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效

(C) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势

(D) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

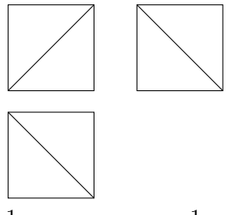
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2)$, 则 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$（　）

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1+a_3+a_5=3$, 则 $S_5=$（　）

(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 11

6. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为（　）

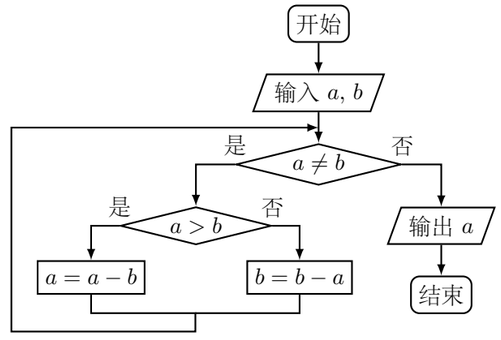


(A) $\dfrac{1}{8}$　(B) $\dfrac{1}{7}$　(C) $\dfrac{1}{6}$　(D) $\dfrac{1}{5}$

7. 已知三点 $A(1,0)$, $B\left(0,\sqrt{3}\right)$, $C\left(2,\sqrt{3}\right)$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到原点的距离为

(A) $\dfrac{5}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$　(C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$　(D) $\dfrac{4}{3}$

8. 下边程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图, 若输入的 a, b 分别为 14, 18, 则输出的 $a=$（　）



(A) 0　(B) 2　(C) 4　(D) 14

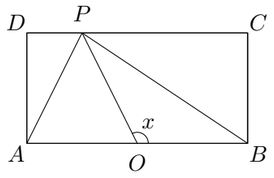
9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{4}$, $a_3a_5=4(a_4-1)$, 则 $a_2=$（　）

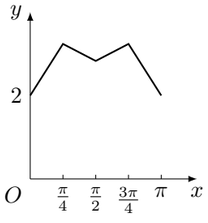
(A) 2　(B) 1　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{8}$

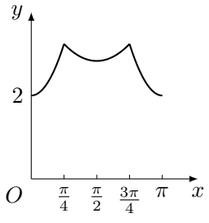
10. 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB=90^\circ$, C 为该球面上的动点, 若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为（　）

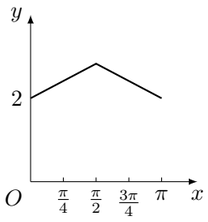
(A) 36π　(B) 64π　(C) 144π　(D) 256π

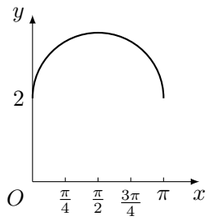
11. 如图, 长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$, $BC=1$, O 是 AB 的中点, 点 P 沿着边 BC, CD 与 DA 运动, 记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为（　）



(A)


(B)


(C)


(D)


12. 设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$, 则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是（　）

(A) $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$　(B) $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

(C) $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$　(D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=ax^3-2x$ 的图象过点 $(-1,4)$, 则 $a=$_____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-5\leqslant 0\\2x-y-1\geqslant 0\\x-2y+1\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值为_____.

15. 已知双曲线过点 $\left(4,\sqrt{3}\right)$, 且渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$, 则该双曲线的标准方程为_____.

16. 已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切, 则 $a=$_____.

三、解答题

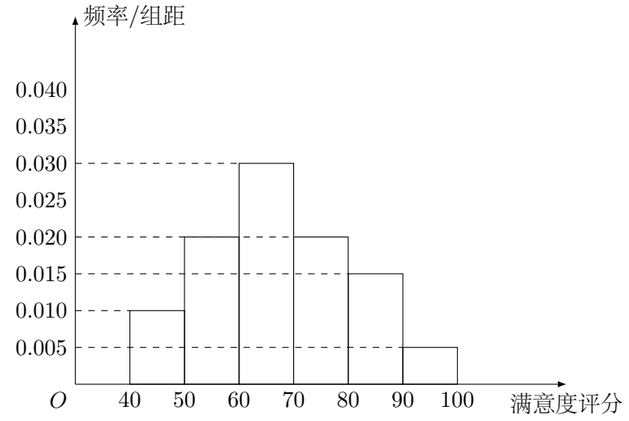
17. $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $BD=2DC$.

(1) 求 $\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$;

(2) 若 $\angle BAC=60^\circ$, 求 $\angle B$.

18. 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 40 个用户, 根据用户对其产品的满意度的评分, 得到 A 地区用户满意度评分的频率分布直方图和 B 地区用户满意度评分的频率分布表.

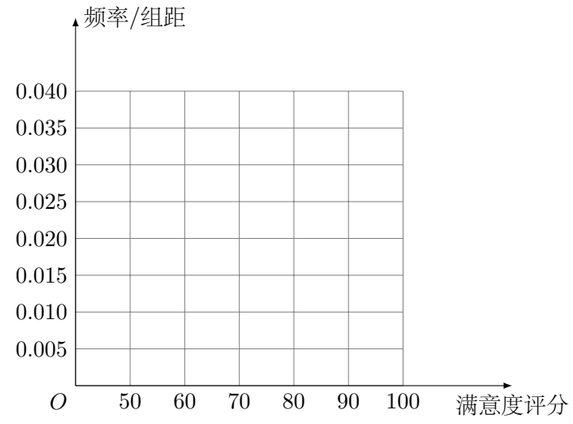
A 地区用户满意度评分的频率分布直方图



B 地区用户满意度评分的频率分布表

满意度评分分组	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100]$
频数	2	8	14	10	6

(1) 在图中作出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图, 并通过此图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度; (不要求计算出具体值, 给出结论即可)

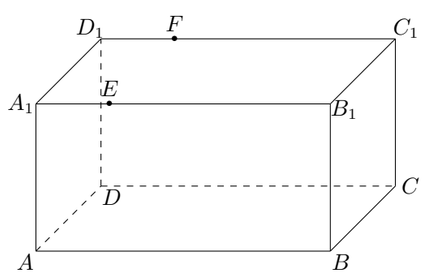


(2) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度评分分为三个等级:

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

估计哪个地区的用户的满意度等级为不满意的概率大, 说明理由.

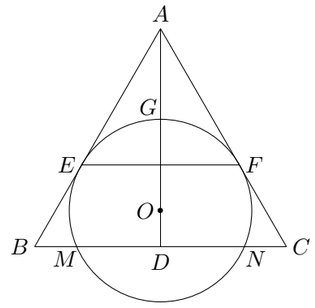
19. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=16$, $BC=10$, $AA_1=8$, 点 E, F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上, $A_1E=D_1F=4$. 过点 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.
(1) 在图中画出这个正方形 (不必说明画法和理由);
(2) 求平面 α 把该长方体分成的两部分体积的比值.



20. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $(2,\sqrt{2})$ 在 C 上.
(1) 求 C 的方程;
(2) 直线 l 不经过原点 O, 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B, 线段 AB 中点为 M, 证明: 直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率乘积为定值.

21. 已知 $f(x)=\ln x+a(1-x)$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $f(x)$ 有最大值, 且最大值大于 $2a-2$ 时, 求 a 的取值范围.

22. 如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边上的高 AD 交于点 G, 且与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.
(1) 证明: $EF\parallel BC$;
(2) 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE=MN=2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数, $t\neq 0$), 其中 $0\leqslant\alpha<\pi$. 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2:\rho=2\sin\theta$, $C_3:\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.
(1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;
(2) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A, C_1 与 C_3 相交于点 B, 求 $|AB|$ 的最大值.

24. 设 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, 证明:
(1) 若 $ab>cd$, 则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$;
(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是 $|a-b|<|c-d|$ 的充要条件.

2015 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}$, $B=\{x\mid 2<x<4\}$, 则 $A\cap B=$（　）

(A) $(1,3)$　(B) $(1,4)$　(C) $(2,3)$　(D) $(2,4)$

2. 若复数 z 满足 $\dfrac{\overline{z}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$（　）

(A) $1-\mathrm{i}$　(B) $1+\mathrm{i}$　(C) $-1-\mathrm{i}$　(D) $-1+\mathrm{i}$

3. 要得到函数 $y=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需要将函数 $y=\sin 4x$ 的图象（　）

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位　(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位　(D) 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位

4. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 a, $\angle ABC=60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=$（　）

(A) $-\dfrac{3}{2}a^2$　(B) $-\dfrac{3}{4}a^2$　(C) $\dfrac{3}{4}a^2$　(D) $\dfrac{3}{2}a^2$

5. 不等式 $|x-1|-|x-5|<2$ 的解集是（　）

(A) $(-\infty,4)$　(B) $(-\infty,1)$　(C) $(1,4)$　(D) $(1,5)$

6. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 2\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 若 $z=ax+y$ 的最大值为 4, 则 $a=$（　）

(A) 3　(B) 2　(C) -2　(D) -3

7. 在梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$, $AD\parallel BC$, $BC=2AD=2AB=2$. 将梯形 $ABCD$ 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为（　）

(A) $\dfrac{2\pi}{3}$　(B) $\dfrac{4\pi}{3}$　(C) $\dfrac{5\pi}{3}$　(D) 2π

8. 已知某批零件的长度误差 (单位: 毫米) 服从正态分布 $N(0,3^2)$, 从中随机取一件, 其长度误差落在区间 $(3,6)$ 内的概率为（　）

(附: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=68.26\%$, $P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=95.44\%$)

(A) 4.56%　(B) 13.59%　(C) 27.18%　(D) 31.74%

9. 一条光线从点 $(-2,-3)$ 射出, 经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 相切, 则反射光线所在直线的斜率为（　）

(A) $-\dfrac{5}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{5}$　(B) $-\dfrac{3}{2}$ 或 $-\dfrac{2}{3}$　(C) $-\dfrac{5}{4}$ 或 $-\dfrac{4}{5}$　(D) $-\dfrac{4}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{4}$

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1\\ 2^x, & x\geqslant 1\end{cases}$, 则满足 $f(f(a))=2^{f(a)}$ 的 a 取值范围是（　）

(A) $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$　(B) $[0,1]$　(C) $\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$　(D) $[1,+\infty)$

二、填空题

11. 观察下列各式:

$\mathrm{C}_1^0=4^0$;

$\mathrm{C}_3^0+\mathrm{C}_3^1=4^1$;

$\mathrm{C}_5^0+\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_5^2=4^2$;

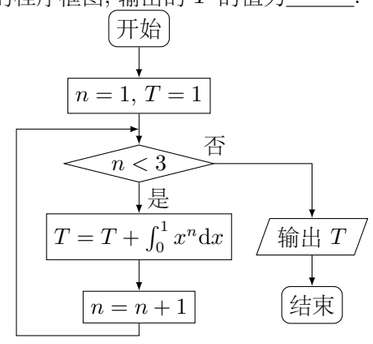
$\mathrm{C}_7^0+\mathrm{C}_7^1+\mathrm{C}_7^2+\mathrm{C}_7^3=4^3$;

……

照此规律, 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时, $\mathrm{C}_{2n-1}^0+\mathrm{C}_{2n-1}^1+\mathrm{C}_{2n-1}^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n-1}^{n-1}=$_____.

12. 若"$\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\tan x\leqslant m$"是真命题, 则实数 m 的最小值为_____.

13. 执行如图所示的程序框图, 输出的 T 的值为_____.



14. 已知函数 $f(x)=a^x+b$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的定义域和值域都是 $[-1,0]$, 则 $a+b=$_____.

15. 平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的渐近线与抛物线 $C_2:x^2=2py$ $(p>0)$ 交于 O, A, B. 若 $\triangle OAB$ 的垂心为 C_2 的焦点, 则 C_1 的离心率为_____.

三、解答题

16. 设 $f(x)=\sin x\cos x-\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

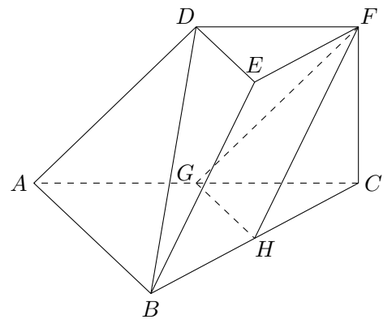
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 若 $f\left(\dfrac{A}{2}\right)=0$, $a=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

17. 如图, 在三棱台 $DEF-ABC$ 中, $AB=2DE$, G, H 分别为 AC, BC 的中点.

(1) 求证: $BD\parallel$ 平面 FGH;

(2) 若 $CF\perp$ 平面 ABC, $AB\perp BC$, $CF=DE$, $\angle BAC=45^\circ$, 求平面 FGH 与平面 $ACFD$ 所成的角 (锐角) 的大小.



18. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $2S_n=3^n+3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_nb_n=\log_3 a_n$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 若 n 是一个三位正整数, 且 n 的个位数字大于十位数字, 十位数字大于百位数字, 则称 n 为“三位递增数”(如 137, 359, 567 等). 在某次数学趣味活动中, 每位参加者需从所有的“三位递增数”中随机抽取 1 个数, 且只能抽取一次. 得分规则如下: 若抽取的“三位递增数”的三个数字之积不能被 5 整除, 参加者得 0 分; 若能被 5 整除, 但不能被 10 整除, 得 -1 分; 若能被 10 整除, 得 1 分.
(1) 写出所有个位数字是 5 的“三位递增数”;
(2) 若甲参加活动, 求甲得分 X 的分布列和数学期望 EX.

20. 平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右焦点分别是 F_1, F_2. 以 F_1 为圆心以 3 为半径的圆与以 F_2 为圆心以 1 为半径的圆相交, 且交点在椭圆 C 上.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$, P 为椭圆 C 上任意一点, 过点 P 的直线 $y=kx+m$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, 射线 PO 交椭圆 E 于点 Q.
① 求 $\dfrac{|OQ|}{|OP|}$ 的值;
② 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值.

21. 设函数 $f(x)=\ln(x+1)+a(x^2-x)$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.
(1) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数, 并说明理由;
(2) 若 $\forall x>0$, $f(x)\geqslant 0$ 成立, 求 a 的取值范围.

2015 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,2<x<4\}$, $B=\{x\,|\,(x-1)(x-3)<0\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $(1,3)$　(B) $(1,4)$　(C) $(2,3)$　(D) $(2,4)$

2. 若复数 z 满足 $\dfrac{\overline{z}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$ （　）

(A) $1-\mathrm{i}$　(B) $1+\mathrm{i}$　(C) $-1-\mathrm{i}$　(D) $-1+\mathrm{i}$

3. 设 $a=0.6^{0.6}$, $b=0.6^{1.5}$, $c=1.5^{0.6}$, 则 a, b, c 的大小关系是 （　）

(A) $a<b<c$　(B) $a<c<b$　(C) $b<a<c$　(D) $b<c<a$

4. 要得到函数 $y=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需要将函数 $y=\sin 4x$ 的图象 （　）

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位　(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位　(D) 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位

5. 若 $m\in\mathbf{R}$, 命题“$m>0$, 方程 $x^2+x-m=0$ 有实根”的逆否命题是（　）

(A) 若方程 $x^2+x-m=0$ 有实根, 则 $m>0$

(B) 若方程 $x^2+x-m=0$ 有实根, 则 $m\leqslant 0$

(C) 若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根, 则 $m>0$

(D) 若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根, 则 $m\leqslant 0$

6. 为比较甲、乙两地某月 14 时的气温情况, 随机选取该月中的 5 天, 将这 5 天中 14 时的气温数据 (单位: °C) 制成如图所示的茎叶图. 考虑以下结论:

甲				乙		
9	8	6	2	8	9	
	1	1	3	0	1	2

① 甲地该月 14 时的平均气温低于乙地该月 14 时的平均气温;
② 甲地该月 14 时的平均气温高于乙地该月 14 时的平均气温;
③ 甲地该月 14 时的平均气温的标准差小于乙地该月 14 时的气温的标准差;
④ 甲地该月 14 时的平均气温的标准差大于乙地该月 14 时的气温的标准差.
其中根据茎叶图能得到的统计结论的标号为 （　）

(A) ①③　(B) ①④　(C) ②③　(D) ②④

7. 在区间 $[0,2]$ 上随机地取一个数 x, 则事件“$-1\leqslant\log_{\frac{1}{2}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 1$”发生的概率为 （　）

(A) $\dfrac{3}{4}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

8. 若函数 $f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x-a}$ 是奇函数, 则使 $f(x)>3$ 成立的 x 的取值范围为 （　）

(A) $(-\infty,-1)$　(B) $(-1,0)$　(C) $(0,1)$　(D) $(1,+\infty)$

9. 已知等腰直角三角形的直角边的长为 2, 将该三角形绕其斜边所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为 （　）

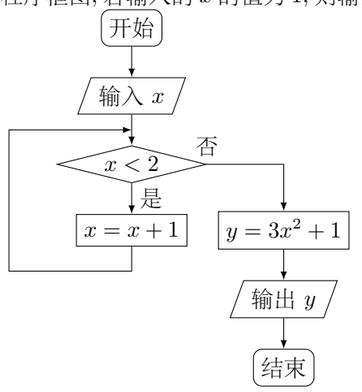
(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$　(B) $\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$　(C) $2\sqrt{2}\pi$　(D) $4\sqrt{2}\pi$

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-b, & x<1\\ 2^x, & x\geqslant 1\end{cases}$, 若 $f\left(f\left(\dfrac{5}{6}\right)\right)=4$, 则 $b=$ （　）

(A) 1　(B) $\dfrac{7}{8}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

二、填空题

11. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 x 的值为 1, 则输出的 y 的值是_____.



12. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}y-x\leqslant 1\\ x+y\leqslant 3\\ y\geqslant 1\end{cases}$, 则 $z=x+3y$ 的最大值为_____.

13. 过点 $P\left(1,\sqrt{3}\right)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的两条切线, 切点分别为 A, B, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$_____.

14. 定义运算“$\otimes$”: $x\otimes y=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ $(x,\ y\in\mathbf{R},\ xy\neq 0)$. 当 $x>0$, $y>0$ 时, $x\otimes y+(2y)\otimes x$ 的最小值为_____.

15. 过双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点作一条与其渐近线平行的直线, 交 C 于点 P. 若点 P 的横坐标为 $2a$, 则 C 的离心率为_____.

三、解答题

16. 某中学调查了某班全部 45 名同学参加书法社团和演讲社团的情况, 数据如下表: (单位: 人)

	参加书法社团	未参加书法社团
参加演讲社团	8	5
未参加演讲社团	2	30

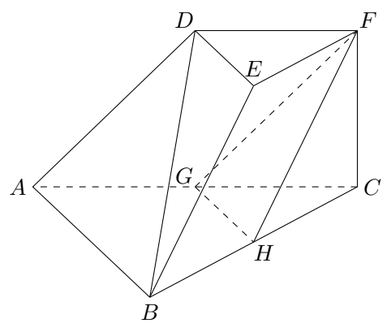
(1) 从该班随机选 1 名同学, 求该同学至少参加上述一个社团的概率;
(2) 在既参加书法社团又参加演讲社团的 8 名同学中, 有 5 名男同学 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 3 名女同学 B_1, B_2, B_3. 现从这 5 名男同学和 3 名女同学中各随机选 1 人, 求 A_1 被选中且 B_1 未被选中的概率.

17. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 已知 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin(A+B)=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$, $ac=2\sqrt{3}$, 求 $\sin A$ 和 c 的值.

18. 如图, 在三棱台 $DEF-ABC$ 中, $AB=2DE$, G, H 分别为 AC, BC 的中点.

(1) 求证: $BD\parallel$ 平面 FGH;

(2) 若 $CF\perp BC$, $AB\perp BC$, 求证: 平面 $BCD\perp$ 平面 EGH.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等差数列, 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 $\dfrac{n}{2n+1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=(a_n+1)\cdot 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln x$, $g(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$. 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $2x-y=0$ 平行.

(1) 求 a 的值;

(2) 是否存在自然数 k, 使得方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(k,k+1)$ 内存在唯一的根? 如果存在, 求出 k; 如果不存在, 请说明理由;

(3) 设函数 $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ ($\min\{p,q\}$ 表示 p, q 中的较小值), 求 $m(x)$ 的最大值.

21. 平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 且点 $\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$, P 为椭圆 C 上任意一点, 过点 P 的直线 $y=kx+m$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, 射线 PO 交椭圆 E 于点 Q.

① 求 $\dfrac{|OQ|}{|OP|}$ 的值;

② 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值.

2015 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

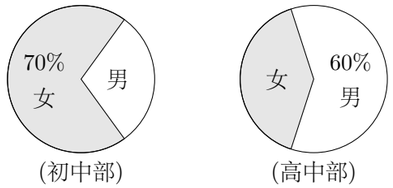
理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\mid x^2=x\}$, $N=\{x\mid \lg x\leqslant 0\}$, 则 $M\cup N=$ （　）

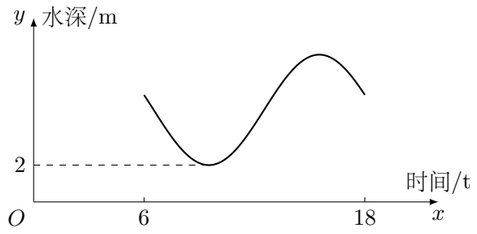
(A) $[0,1]$　(B) $(0,1]$　(C) $[0,1)$　(D) $(-\infty,1]$

2. 某中学初中部共有 110 名教师, 高中部共有 150 名教师, 其性别比例如图所示, 则该校女教师的人数为 （　）



(A) 93　(B) 123　(C) 137　(D) 167

3. 如图, 某港口一天 6 时到 18 时的水深变化曲线近似满足函数 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+k$. 据此函数可知, 这段时间水深 (单位: m) 的最大值为 （　）

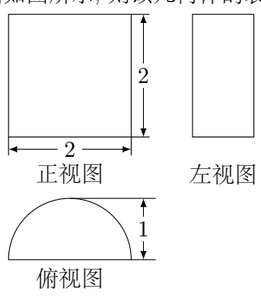


(A) 5　(B) 6　(C) 8　(D) 10

4. 二项式 $(x+1)^n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 的展开式中 x^2 的系数为 15, 则 $n=$ （　）

(A) 7　(B) 6　(C) 5　(D) 4

5. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 （　）



(A) 3π　(B) 4π　(C) $2\pi+4$　(D) $3\pi+4$

6. “$\sin\alpha=\cos\alpha$”是“$\cos 2\alpha=0$”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

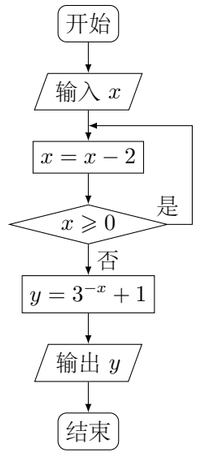
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要

7. 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 下列关系式中不恒成立的是 （　）

(A) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$　(B) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$

(C) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$　(D) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

8. 根据框图, 当输入 x 为 2006 时, 输出的 $y=$ （　）



(A) 28　(B) 10　(C) 4　(D) 2

9. 设 $f(x)=\ln x$, $0<a<b$, 若 $p=f\left(\sqrt{ab}\right)$, $q=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $r=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$, 则下列关系式中正确的是 （　）

(A) $q=r<p$　(B) $q=r>p$　(C) $p=r<q$　(D) $p=r>q$

10. 某企业生产甲、乙两种产品均需用 A, B 两种原料, 已知生产 1 吨每种产品所需原料及每天原料的可用限额如表所示. 如果生产 1 吨甲、乙产品可获利润分别为 3 万元、4 万元, 则该企业每天可获得最大利润为 （　）

	甲	乙	原料限额
A (吨)	3	2	12
B (吨)	1	2	8

(A) 12 万元　(B) 16 万元　(C) 17 万元　(D) 18 万元

11. 设复数 $z=(x-1)+y\mathrm{i}$ $(x,\ y\in\mathbf{R})$, 若 $|z|\leqslant 1$, 则 $y\geqslant x$ 的概率为 （　）

(A) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}$　(B) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$　(C) $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$　(D) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}$

12. 对二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a 为非零整数), 四位同学分别给出下列结论, 其中有且只有一个结论是错误的, 则错误的结论是 （　）

(A) -1 是 $f(x)$ 的零点　(B) 1 是 $f(x)$ 的极值点

(C) 3 是 $f(x)$ 的极值　(D) 点 $(2,8)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上

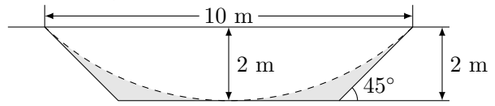
二、填空题

13. 中位数为 1010 的一组数构成等差数列, 其末项为 2015, 则该数列的首项为_____.

14. 若抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线经过双曲线 $x^2-y^2=1$ 的一个焦点, 则 $p=$_____.

15. 设曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ 上点 P 处的切线垂直, 则 P 的坐标为_____.

16. 如图, 一横截面为等腰梯形的水渠, 因泥沙沉积, 导致水渠截面边界呈抛物线型 (图中虚线所示), 则原始的最大流量与当前最大流量的比值为_____.



三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 向量 $\boldsymbol{m}=\left(a,\sqrt{3}b\right)$ 与 $\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin B)$ 平行.

(1) 求 A;

(2) 若 $a=\sqrt{7}$, $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图 1, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$, $AB=BC=1$, $AD=2$, E 是 AD 的中点, O 是 AC 与 BE 的交点. 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起到 $\triangle A_1BE$ 的位置, 如图 2.

(1) 证明: $CD\perp$ 平面 A_1OC;

(2) 若平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$, 求平面 A_1BC 与平面 A_1CD 夹角的余弦值.

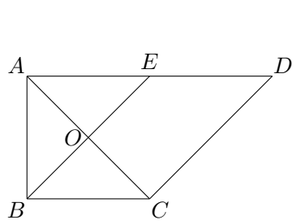


图 1

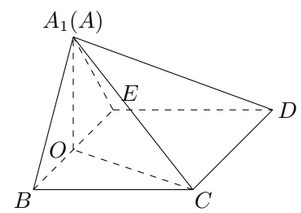


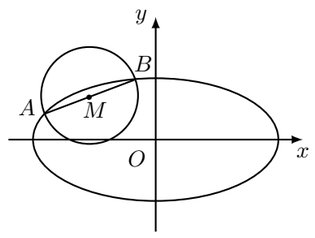
图 2

19. 设某校新、老校区之间开车单程所需时间为 T, T 只与道路畅通状况有关, 对其容量为 100 的样本进行统计, 结果如下:

T (分钟)	25	30	35	40
频数 (次)	20	30	40	10

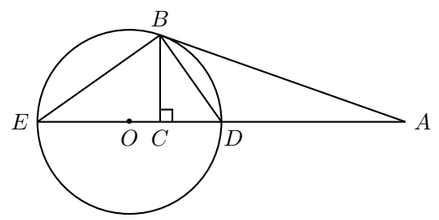
(1) 求 T 的分布列与数学期望 ET;
(2) 刘教授驾车从老校区出发, 前往新校区做一个 50 分钟的讲座, 结束后立即返回老校区, 求刘教授从离开老校区到返回老校区共用时间不超过 120 分钟的概率.

20. 已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的半焦距为 c, 原点 O 到经过两点 $(c,0)$, $(0,b)$ 的直线的距离为 $\dfrac{1}{2}c$.
(1) 求椭圆 E 的离心率;
(2) 如图, AB 是圆 M: $(x+2)^2+(y-1)^2=\dfrac{5}{2}$ 的一条直径, 若椭圆 E 经过 A, B 两点, 求椭圆 E 的方程.



21. 设 $f_n(x)$ 是等比数列 1, x, x^2, $\cdots$, x^n 的各项和, 其中 $x>0$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$.
(1) 证明: 函数 $F_n(x)=f_n(x)-2$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个零点 (记为 x_n), 且 $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x_n^{n+1}$;
(2) 设有一个与上述等比数列的首项、末项、项数分别相同的等差数列, 其各项和为 $g_n(x)$, 比较 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 的大小, 并加以证明.

22. 如图, AB 切 $\odot O$ 于点 B, 直线 AO 交 $\odot O$ 于 D, E 两点, $BC\perp DE$, 垂足为 C.
(1) 证明: $\angle CBD=\angle DBA$;
(2) 若 $AD=3DC$, $BC=\sqrt{2}$, 求 $\odot O$ 的直径.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+\dfrac{1}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数), 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, $\odot C$ 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\sin\theta$.
(1) 写出 $\odot C$ 的直角坐标方程;
(2) P 为直线 l 上一动点, 当 P 到圆心 C 的距离最小时, 求 P 的直角坐标.

24. 已知关于 x 的不等式 $|x+a|<b$ 的解集为 $\{x\,|\,2<x<4\}$.
(1) 求实数 a, b 的值;
(2) 求 $\sqrt{at+12}+\sqrt{bt}$ 的最大值.

2015 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

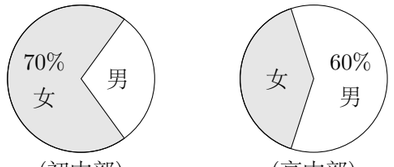
文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\mid x^2=x\}$, $N=\{x\mid \lg x\leqslant 0\}$, 则 $M\cup N=$ （　）

(A) $[0,1]$　(B) $(0,1]$　(C) $[0,1)$　(D) $(-\infty,1]$

2. 某中学初中部共有 110 名教师, 高中部共有 150 名教师, 其性别比例如图所示, 则该校女教师的人数为 （　）



(A) 93　(B) 123　(C) 137　(D) 167

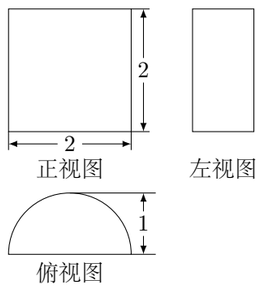
3. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线经过点 $(-1,1)$, 则该抛物线焦点坐标为 （　）

(A) $(-1,0)$　(B) $(1,0)$　(C) $(0,-1)$　(D) $(0,1)$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$, 则 $f(f(-2))=$ （　）

(A) -1　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{3}{2}$

5. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 （　）



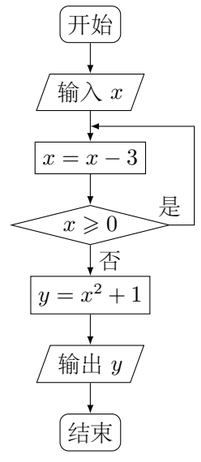
(A) 3π　(B) 4π　(C) $2\pi+4$　(D) $3\pi+4$

6. “$\sin\alpha=\cos\alpha$”是“$\cos 2\alpha=0$”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要

7. 根据框图, 当输入 x 为 6 时, 输出的 $y=$ （　）



(A) 1　(B) 2　(C) 5　(D) 10

8. 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 下列关系式中不恒成立的是 （　）

(A) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$　(B) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$

(C) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$　(D) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

9. 设 $f(x)=x-\sin x$, 则 $f(x)$ （　）

(A) 既是奇函数又是减函数　(B) 既是奇函数又是增函数

(C) 是有零点的减函数　(D) 是没有零点的奇函数

10. 设 $f(x)=\ln x$, $0<a<b$, 若 $p=f\left(\sqrt{ab}\right)$, $q=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, $r=\dfrac{1}{2}(f(a)+f(b))$, 则下列关系式中正确的是 （　）

(A) $q=r<p$　(B) $q=r>p$　(C) $p=r<q$　(D) $p=r>q$

11. 某企业生产甲、乙两种产品均需用 A, B 两种原料, 已知生产 1 吨每种产品所需原料及每天原料的可用限额如表所示. 如果生产 1 吨甲、乙产品可获利润分别为 3 万元、4 万元, 则该企业每天可获得最大利润为 （　）

	甲	乙	原料限额
A (吨)	3	2	12
B (吨)	1	2	8

(A) 12 万元　(B) 16 万元　(C) 17 万元　(D) 18 万元

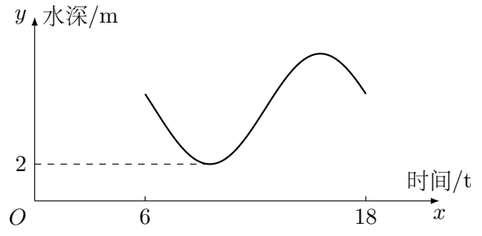
12. 设复数 $z=(x-1)+y\mathrm{i}$ $(x,\ y\in\mathbf{R})$, 若 $|z|\leqslant 1$, 则 $y\geqslant x$ 的概率为 （　）

(A) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}$　(B) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$　(C) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2\pi}$　(D) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}$

二、填空题

13. 中位数为 1010 的一组数构成等差数列, 其末项为 2015, 则该数列的首项为_____.

14. 如图, 某港口一天 6 时到 18 时的水深变化曲线近似满足函数 $y=3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}x+\varphi\right)+k$. 据此函数可知, 这段时间水深 (单位: m) 的最大值为_____.



15. 函数 $y=x\mathrm{e}^x$ 在其极值点处的切线方程为_____.

16. 观察下列等式:

$1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$,

$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$,

$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}$,

……,

据此规律, 第 n 个等式可为_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 向量 $\boldsymbol{m}=\left(a,\sqrt{3}b\right)$ 与 $\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin B)$ 平行.

(1) 求 A;

(2) 若 $a=\sqrt{7}$, $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图 1, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$, $AB=BC=\dfrac{1}{2}AD=a$, E 是 AD 的中点, O 是 AC 与 BE 的交点. 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起到图 2 中 $\triangle A_1BE$ 的位置, 得到四棱锥 A_1-BCDE.

(1) 证明: $CD\perp$ 平面 A_1OC;

(2) 若平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$, 四棱锥 A_1-BCDE 的体积为 $36\sqrt{2}$, 求 a 的值.

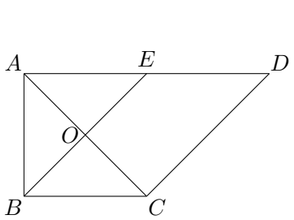


图 1

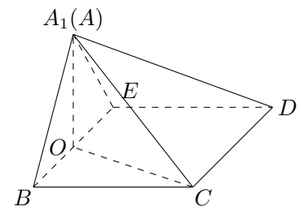


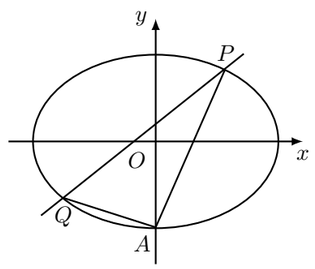
图 2

19. 随机抽取一个年份, 对西安市该年 4 月份的天气情况进行统计, 结果如下:

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
天气	晴	雨	阴	阴	阴	雨	阴	晴	晴	晴
日期	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
天气	阴	晴	晴	晴	晴	晴	阴	雨	阴	阴
日期	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
天气	晴	阴	晴	晴	晴	阴	晴	晴	晴	雨

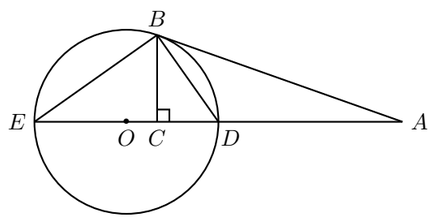
(1) 在 4 月份任取一天, 估计西安市在该天不下雨的概率;
(2) 西安市某学校拟从 4 月份的一个晴天开始举行连续 2 天的运动会, 估计运动会期间不下雨的概率.

20. 如图, 椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 经过点 $A(0,-1)$, 且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(1) 求椭圆 E 的方程;
(2) 经过点 $(1,1)$, 且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 P, Q (均异于点 A), 证明: 直线 AP 与 AQ 的斜率之和为 2.



21. 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$, $x\geqslant 0$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$.
(1) 求 $f_n'(2)$;
(2) 证明: $f_n(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 内有且仅有一个零点 (记为 a_n), 且 $0<a_n-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

22. 如图, AB 切 $\odot O$ 于点 B, 直线 AO 交 $\odot O$ 于 D, E 两点, $BC\perp DE$, 垂足为 C.
(1) 证明: $\angle CBD=\angle DBA$;
(2) 若 $AD=3DC$, $BC=\sqrt{2}$, 求 $\odot O$ 的直径.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+\dfrac{1}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数), 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, $\odot C$ 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\sin\theta$.
(1) 写出 $\odot C$ 的直角坐标方程;
(2) P 为直线 l 上一动点, 当 P 到圆心 C 的距离最小时, 求 P 的直角坐标.

24. 已知关于 x 的不等式 $|x+a|<b$ 的解集为 $\{x\mid 2<x<4\}$.
(1) 求实数 a, b 的值;
(2) 求 $\sqrt{at+12}+\sqrt{bt}$ 的最大值.

2015 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$. 若集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$, 则 $A\cap \complement_U B=$_____.

2. 若复数 z 满足 $3z+\bar{z}=1+\mathrm{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$_____.

3. 若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix}2 & 3 & c_1\\ 0 & 1 & c_2\end{pmatrix}$、解为 $\begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}$, 则 $c_1-c_2=$_____.

4. 若正三棱柱的所有棱长均为 a, 且其体积为 $16\sqrt{3}$, 则 $a=$_____.

5. 抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上的动点 Q 到焦点的距离的最小值为 1, 则 $p=$_____.

6. 若圆锥的侧面积与过轴的截面面积之比为 2π, 则其母线与轴的夹角的大小为_____.

7. 方程 $\log_2(9^{x-1}-5)=\log_2(3^{x-1}-2)+2$ 的解为_____.

8. 在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中, 选取 5 人参加义务献血, 要求男、女教师都有, 则不同的选取方式的种数为_____. (结果用数值表示)

9. 已知点 P 和 Q 的横坐标相同, P 的纵坐标是 Q 的纵坐标的 2 倍, P 和 Q 的轨迹分别为双曲线 C_1 和 C_2. 若 C_1 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$, 则 C_2 的渐近线方程为_____.

10. 设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)=2^{x-2}+\dfrac{x}{2}$, $x\in[0,2]$ 的反函数, 则 $y=f(x)+f^{-1}(x)$ 的最大值为_____.

11. 在 $\left(1+x+\dfrac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$ 的展开式中, x^2 项的系数为_____. (结果用数值表示)

12. 赌博有陷阱. 某种赌博每局的规则是: 赌客先在标记有 1, 2, 3, 4, 5 的卡片中随机摸取一张, 将卡片上的数字作为其赌金 (单位: 元); 随后放回该卡片, 再随机摸取两张, 将这两张卡片上数字之差的绝对值的 1.4 倍作为其奖金 (单位: 元). 若随机变量 ξ_1 和 ξ_2 分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金, 则 $E\xi_1-E\xi_2=$_____(元).

13. 已知函数 $f(x)=\sin x$. 若存在 x_1, x_2, $\cdots$, x_m 满足 $0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant 6\pi$. 且 $|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|+\cdots+|f(x_{m-1})-f(x_m)|=12$ $(m\geqslant 2, m\in\mathbf{N}^*)$, 则 m 的最小值为_____.

14. 在锐角三角形 ABC 中, $\tan A=\dfrac{1}{2}$, D 为边 BC 上的点, $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积分别为 2 和 4. 过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E, $DF\perp AC$ 于 F, 则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=$_____.

二、选择题

15. 设 z_1, $z_2\in\mathbf{C}$, 则“z_1, z_2 中至少有一个数是虚数”是“z_1-z_2 是虚数”的(　　)

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

16. 已知点 A 的坐标为 $\left(4\sqrt{3},1\right)$, 将 OA 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 至 OB, 则点 B 的纵坐标为(　　)

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$　　(C) $\dfrac{11}{2}$　　(D) $\dfrac{13}{2}$

17. 记方程①: $x^2+a_1x+1=0$, 方程②: $x^2+a_2x+2=0$, 方程③: $x^2+a_3x+4=0$, 其中 a_1, a_2, a_3 是正实数. 当 a_1, a_2, a_3 成等比数列时, 下列选项中, 能推出方程③无实根的是(　　)

(A) 方程①有实根, 且②有实根　　(B) 方程①有实根, 且②无实根

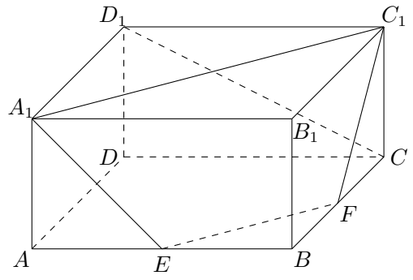
(C) 方程①无实根, 且②有实根　　(D) 方程①无实根, 且②无实根

18. 设 $P_n(x_n,y_n)$ 是直线 $2x-y=\dfrac{n}{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 在第一象限的交点, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-1}{x_n-1}=$(　　)

(A) -1　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) 1　　(D) 2

三、解答题

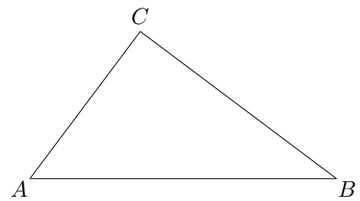
19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=1$, $AB=AD=2$, E, F 分别是棱 AB, BC 的中点. 证明 A_1, C_1, F, E 四点共面, 并求直线 CD_1 与平面 A_1C_1FE 所成角的正弦值.



20. 如图, A, B, C 三地有直道相通, $AB=5$ 千米, $AC=3$ 千米, $BC=4$ 千米. 现甲、乙两警员同时从 A 地出发匀速前往 B 地, 过 t 小时, 他们之间的距离为 $f(t)$ (单位: 千米). 甲的路线是 AB, 速度为 5 千米/小时, 乙的路线是 ACB, 速度为 8 千米/小时. 乙到达 B 地后在原地等待. 设 $t=t_1$ 时, 乙到达 C 地.

(1) 求 t_1 与 $f(t_1)$ 的值;

(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是 3 千米. 当 $t_1\leqslant t\leqslant 1$ 时, 求 $f(t)$ 的表达式, 并判断 $f(t)$ 在 $[t_1,1]$ 上的最大值是否超过 3? 说明理由.



21. 已知椭圆 $x^2+2y^2=1$, 过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别与椭圆交于点 A, B 和 C, D. 记得到的平行四边形 $ACBD$ 的面积为 S.
(1) 设 $A(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$. 用 A, C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离, 并证明 $S=2|x_1y_2-x_2y_1|$;
(2) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$, 求面积 S 的值.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 若 $b_n=3n+5$, 且 $a_1=1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项, 即 $a_{n_0}\geqslant a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 求证: $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项;
(3) 设 $a_1=\lambda<0$, $b_n=\lambda^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 求 λ 的取值范围, 使得 $\{a_n\}$ 有最大值 M 与最小值 m, 且 $\dfrac{M}{m}\in(-2,2)$.

23. 对于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $g(x)$, 若存在正常数 T, 使得 $\cos g(x)$ 是以 T 为周期的函数, 则称 $g(x)$ 为余弦周期函数, 且称 T 为其余弦周期. 已知 $f(x)$ 是以 T 为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为 $\mathbf{R}$. 设 $f(x)$ 单调递增, $f(0)=0$, $f(T)=4\pi$.
(1) 验证 $h(x)=x+\sin\dfrac{x}{3}$ 是以 6π 为余弦周期的余弦周期函数;
(2) 设 $a<b$, 证明对任意 $c\in[f(a),f(b)]$, 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=c$;
(3) 证明: "u_0 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[0,T]$ 上的解"的充要条件是"u_0+T 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[T,2T]$ 上的解", 并证明对任意 $x\in[0,T]$ 都有 $f(x+T)=f(x)+f(T)$.

2015 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 函数 $f(x)=1-3\sin^2 x$ 的最小正周期为_____.

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$. 若集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$, 则 $A\cap \complement_U B=$_____.

3. 若复数 z 满足 $3z+\overline{z}=1+\mathrm{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$_____.

4. 设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$ 的反函数, 则 $f^{-1}(2)=$_____.

5. 若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix}2&3&c_1\\0&1&c_2\end{pmatrix}$、解为 $\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$, 则 $c_1-c_2=$_____.

6. 若正三棱柱的所有棱长均为 a, 且其体积为 $16\sqrt{3}$, 则 $a=$_____.

7. 抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上的动点 Q 到焦点的距离的最小值为 1, 则 $p=$_____.

8. 方程 $\log_2(9^{x-1}-5)=\log_2(3^{x-1}-2)+2$ 的解为_____.

9. 若 x, y 满足 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 2\\y\geqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $f=x+2y$ 的最大值为_____.

10. 在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中, 选取 5 人参加义务献血, 要求男、女教师都有, 则不同的选取方式的种数为_____. (结果用数值表示)

11. 在 $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项等于_____. (结果用数值表示)

12. 已知双曲线 C_1, C_2 的顶点重合, C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$, 若 C_2 的一条渐近线的斜率是 C_1 的一条渐近线的斜率的 2 倍, 则 C_2 的方程为_____.

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 且 $\{|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c}|\}=\{1,2,3\}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的最大值是_____.

14. 已知函数 $f(x)=\sin x$. 若存在 x_1, x_2, $\cdots$, x_m 满足 $0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant 6\pi$. 且 $|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|+\cdots+|f(x_{m-1})-f(x_m)|=12$ $(m\geqslant 2, m\in\mathbf{N}^*)$, 则 m 的最小值为_____.

二、选择题

15. 设 z_1, $z_2\in\mathbf{C}$, 则“z_1, z_2 均为实数”是“z_1-z_2 是实数”的 （ ）

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分又非必要条件

16. 下列不等式中, 与不等式 $\dfrac{x+8}{x^2+2x+3}<2$ 解集相同的是 （ ）

(A) $(x+8)(x^2+2x+3)<2$　(B) $x+8<2(x^2+2x+3)$

(C) $\dfrac{1}{x^2+2x+3}<\dfrac{2}{x+8}$　(D) $\dfrac{x^2+2x+3}{x+8}>\dfrac{1}{2}$

17. 已知点 A 的坐标为 $\left(4\sqrt{3},1\right)$, 将 OA 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 至 OB, 则点 B 的纵坐标为 （ ）

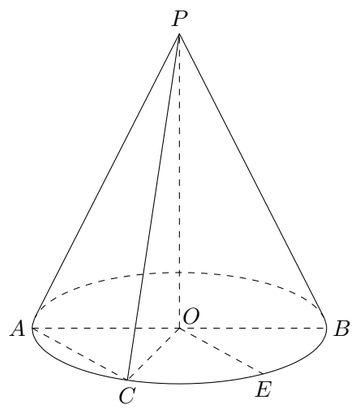
(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$　(C) $\dfrac{11}{2}$　(D) $\dfrac{13}{2}$

18. 设 $P_n(x_n,y_n)$ 是直线 $2x-y=\dfrac{n}{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 在第一象限的交点, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-1}{x_n-1}=$ （ ）

(A) -1　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2

三、解答题

19. 如图, 圆锥的顶点为 P, 底面圆心为 O, 底面的一条直径为 AB, C 为半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点, E 为劣弧 $\overset{\frown}{CB}$ 的中点, 已知 $PO=2$, $OA=1$, 求三棱锥 $P-AOC$ 的体积, 并求异面直线 PA 与 OE 所成角的余弦值.



20. 已知函数 $f(x)=ax^2+\dfrac{1}{x}$, 其中 a 为常数.

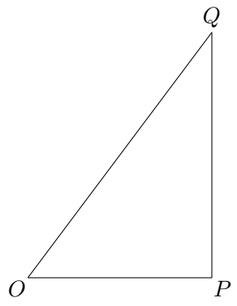
(1) 根据 a 的不同取值, 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 若 $a\in(1,3)$, 判断函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的单调性, 并说明理由.

21. 如图, O, P, Q 三地有直道相通, $OP=3$ 千米, $PQ=4$ 千米, $OQ=5$ 千米. 现甲、乙两警员同时从 O 地出发匀速前往 Q 地, 经过 t 小时, 他们之间的距离为 $f(t)$ (单位: 千米). 甲的路线是 OQ, 速度为 5 千米/小时, 乙的路线是 OPQ, 速度为 8 千米/小时. 乙到达 Q 地后在原地等待. 设 $t=t_1$ 时, 乙到达 P 地; $t=t_2$ 时, 乙到达 Q 地.

(1) 求 t_1 与 $f(t_1)$ 的值;

(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是 3 千米. 当 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 时, 求 $f(t)$ 的表达式, 并判断 $f(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上的最大值是否超过 3? 说明理由.



22. 已知椭圆 $x^2+2y^2=1$, 过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别与椭圆交于点 A, B 和 C, D. 记 $\triangle AOC$ 的面积为 S.

(1) 设 $A(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$. 用 A, C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离, 并证明 $S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$;

(2) 设 $l_1: y=kx$, $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $S=\dfrac{1}{3}$, 求 k 的值.

(3) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 m, 求 m 的值, 使得无论 l_1 与 l_2 如何变动, 面积 S 保持不变.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $b_n=3n+5$, 且 $a_1=1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项, 即 $a_{n_0}\geqslant a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项;

(3) 设 $a_1=3\lambda<0$, $b_n=\lambda^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求 λ 的取值范围, 使得对任意 m, $n\in\mathbf{N}^*$, $a_n\neq 0$, 且 $\dfrac{a_m}{a_n}\in\left(\dfrac{1}{6},6\right)$.

2015 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\,|\,(x+1)(x-2)<0\}$，集合 $B=\{x\,|\,1<x<3\}$，则 $A\cup B=$ （　）

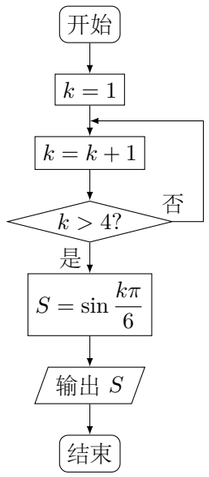
(A) $\{x\,|\,-1<x<3\}$　(B) $\{x\,|\,-1<x<1\}$

(C) $\{x\,|\,1<x<2\}$　(D) $\{x\,|\,2<x<3\}$

2. 设 i 是虚数单位，则复数 $\mathrm{i}^3-\dfrac{2}{\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $-\mathrm{i}$　(B) $-3\mathrm{i}$　(C) i　(D) $3\mathrm{i}$

3. 执行如图所示的程序框图，输出 S 的值为 （　）



(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

4. 下列函数中，最小正周期为 π 且图象关于原点对称的函数是 （　）

(A) $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$　(B) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

(C) $y=\sin 2x+\cos 2x$　(D) $y=\sin x+\cos x$

5. 过双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线，交该双曲线的两条渐近线于 A，B 两点，$|AB|=$ （　）

(A) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 6　(D) $4\sqrt{3}$

6. 用数字 0，1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，其中比 40000 大的偶数共有 （　）

(A) 144 个　(B) 120 个　(C) 96 个　(D) 72 个

7. 设四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$，$\left|\overrightarrow{AD}\right|=4$. 若点 M，N 满足 $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NC}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=$ （　）

(A) 20　(B) 15　(C) 9　(D) 6

8. 设 a，b 都是不等于 1 的正数，则“$3^a>3^b>3$”是“$\log_a 3<\log_b 3$”的 （　）

(A) 充要条件　(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

9. 如果函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(m-2)x^2+(n-8)x+1$ $(m\geqslant 0,\ n\geqslant 0)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上单调递减，那么 mn 的最大值为 （　）

(A) 16　(B) 18　(C) 25　(D) $\dfrac{81}{2}$

10. 设直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A，B 两点，与圆 $(x-5)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相切于点 M，且 M 为线段 AB 的中点. 若这样的直线 l 恰有 4 条，则 r 的取值范围是 （　）

(A) $(1,3)$　(B) $(1,4)$　(C) $(2,3)$　(D) $(2,4)$

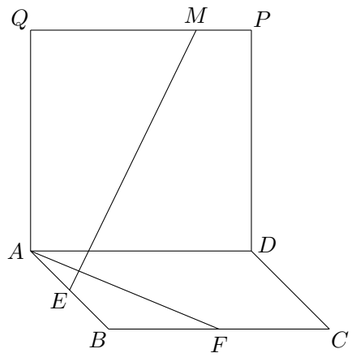
二、填空题

11. 在 $(2x-1)^5$ 的展开式中，含 x^2 的项的系数是_____. (用数字填写答案)

12. $\sin 15^\circ+\sin 75^\circ$ 的值是_____.

13. 某食品的保鲜时间 y (单位：小时) 与储藏温度 x (单位：°C) 满足函数关系 $y=\mathrm{e}^{kx+b}$ ($\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数，k，b 为常数). 若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时，在 22°C 的保鲜时间是 48 小时，则该食品在 33°C 的保鲜时间是_____小时.

14. 如图，四边形 $ABCD$ 和 $ADPQ$ 均为正方形，它们所在的平面互相垂直，动点 M 在线段 PQ 上，E，F 分别为 AB，BC 的中点. 设异面直线 EM 与 AF 所成的角为 θ，则 $\cos\theta$ 的最大值为_____.



15. 已知函数 $f(x)=2^x$，$g(x)=x^2+ax$ (其中 $a\in\mathbf{R}$). 对于不相等的实数 x_1，x_2，设 $m=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$，$n=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$，现有如下命题：

① 对于任意不相等的实数 x_1，x_2，都有 $m>0$；

② 对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1，x_2，都有 $n>0$；

③ 对于任意的 a，存在不相等的实数 x_1，x_2，使得 $m=n$；

④ 对于任意的 a，存在不相等的实数 x_1，x_2，使得 $m=-n$.

其中的真命题有_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

16. 设数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-a_1$，且 a_1，a_2+1，a_3 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，求使得 $|T_n-1|<\dfrac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值.

17. 某市 A，B 两所中学的学生组队参加辩论赛，A 中学推荐了 3 名男生、2 名女生，B 中学推荐了 3 名男生、4 名女生，两校所推荐的学生一起参加集训. 由于集训后队员水平相当，从参加集训的男生中随机抽取 3 人、女生中随机抽取 3 人组成代表队.

(1) 求 A 中学至少有 1 名学生入选代表队的概率；

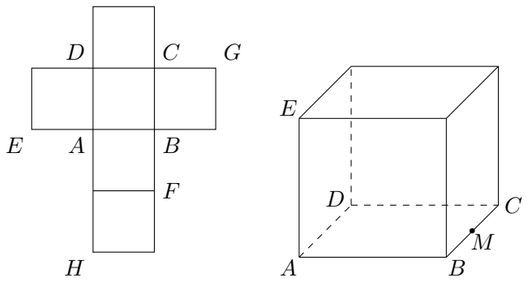
(2) 某场比赛前，从代表队的 6 名队员中随机抽取 4 人参赛，设 X 表示参赛的男生人数，求 X 的分布列和数学期望.

18. 一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示. 在正方体中, 设 BC 的中点为 M, GH 的中点为 N.

(1) 请将字母 F, G, H 标记在正方体相应的顶点处 (不需说明理由);

(2) 证明: 直线 $MN \parallel$ 平面 BDH;

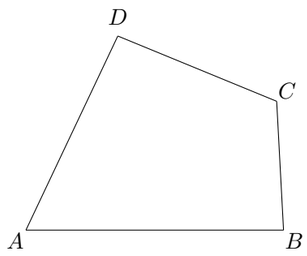
(3) 求二面角 $A-EG-M$ 的余弦值.



19. 如图, A, B, C, D 为平面四边形 $ABCD$ 的四个内角.

(1) 证明: $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}$;

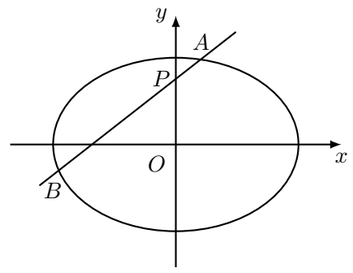
(2) 若 $A+C=180^\circ$, $AB=6$, $BC=3$, $CD=4$, $AD=5$, 求 $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{D}{2}$ 的值.



20. 如图, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 过点 $P(0,1)$ 的动直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点. 当直线 l 平行于 x 轴时, 直线 l 被椭圆 E 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中, 是否存在与点 P 不同的定点 Q, 使得 $\dfrac{|QA|}{|QB|}=\dfrac{|PA|}{|PB|}$ 恒成立? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知函数 $f(x)=-2(x+a)\ln x+x^2-2ax-2a^2+a$, 其中 $a>0$.

(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 存在 $a\in(0,1)$, 使得 $f(x)\geqslant 0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立, 且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.

2015 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\,|\,-1<x<2\}$, 集合 $B=\{x\,|\,1<x<3\}$, 则 $A\cup B=$（　）

(A) $\{x\,|\,-1<x<3\}$　(B) $\{x\,|\,-1<x<1\}$

(C) $\{x\,|\,1<x<2\}$　(D) $\{x\,|\,2<x<3\}$

2. 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(x,6)$ 共线, 则实数 $x=$（　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 6

3. 某学校为了了解三年级、六年级、九年级这三个年级之间的学生视力是否存在显著差异, 拟从这三个年级中按人数比例抽取部分学生进行调查, 则最合理的抽样方法是（　）

(A) 抽签法　(B) 系统抽样法　(C) 分层抽样法　(D) 随机数法

4. 设 a, b 为正实数, 则“$a>b>1$”是“$\log_2 a>\log_2 b>0$”的（　）

(A) 充要条件　(B) 充分不必要条件

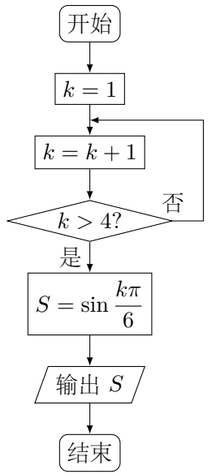
(C) 必要不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 下列函数中, 最小正周期为 π 的奇函数是（　）

(A) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$　(B) $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

(C) $y=\sin 2x+\cos 2x$　(D) $y=\sin x+\cos x$

6. 执行如图所示的程序框图, 输出 S 的值为（　）



(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

7. 过双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线, 交该双曲线的两条渐近线于 A, B 两点, $|AB|=$（　）

(A) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 6　(D) $4\sqrt{3}$

8. 某食品的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: °C) 满足函数关系 $y=\mathrm{e}^{kx+b}$ ($\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数, k, b 为常数). 若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时, 在 22°C 的保鲜时间是 48 小时, 则该食品在 33°C 的保鲜时间是（　）

(A) 16 小时　(B) 20 小时　(C) 24 小时　(D) 28 小时

9. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\leqslant 10\\ x+2y\leqslant 14\\ x+y\geqslant 6\end{cases}$, 则 xy 的最大值为（　）

(A) $\dfrac{25}{2}$　(B) $\dfrac{49}{2}$　(C) 12　(D) 16

10. 设直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A, B 两点, 与圆 $(x-5)^2+y^2=r^2$ ($r>0$) 相切于点 M, 且 M 为线段 AB 的中点. 若这样的直线 l 恰有 4 条, 则 r 的取值范围是（　）

(A) $(1,3)$　(B) $(1,4)$　(C) $(2,3)$　(D) $(2,4)$

二、填空题

11. 设 i 是虚数单位, 则复数 $\mathrm{i}-\dfrac{1}{\mathrm{i}}=$_____.

12. $\lg 0.01+\log_2 16$ 的值是_____.

13. 已知 $\sin\alpha+2\cos\alpha=0$, 则 $2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$ 的值是_____.

14. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90°$, 其正视图和侧视图都是边长为 1 的正方形, 俯视图是直角边的长为 1 的等腰直角三角形. 设点 M, N, P 分别是棱 AB, BC, B_1C_1 的中点, 则三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积是_____.

15. 已知函数 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2+ax$ (其中 $a\in\mathbf{R}$). 对于不相等的实数 x_1, x_2, 设 $m=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $n=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$, 现有如下命题:

① 对于任意不相等的实数 x_1, x_2, 都有 $m>0$;

② 对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1, x_2, 都有 $n>0$;

③ 对于任意的 a, 存在不相等的实数 x_1, x_2, 使得 $m=n$;

④ 对于任意的 a, 存在不相等的实数 x_1, x_2, 使得 $m=-n$.

其中的真命题有_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

16. 设数列 $\{a_n\}$ ($n=1,2,3,\cdots$) 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-a_1$, 且 a_1, a_2+1, a_3 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n, 求 T_n.

17. 一辆小客车上有 5 个座位, 其座位号为 1, 2, 3, 4, 5. 乘客 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 的座位号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 他们按照座位号从小到大的顺序先后上车. 乘客 P_1 因身体原因没有坐自己的 1 号座位, 这时司机要求余下的乘客按以下规则就座: 如果自己的座位空着, 就只能坐自己的座位; 如果自己的座位已有乘客就座, 就在这 5 个座位的剩余空位中任意选择座位.

(1) 若乘客 P_1 坐到了 3 号座位, 其他乘客按规则就座, 则此时共有 4 种坐法. 下表给出了其中两种坐法, 请填入余下两种坐法 (将乘客就座的座位号填入表中空格处);

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	3	2	1	4	5
	3	2	4	5	1

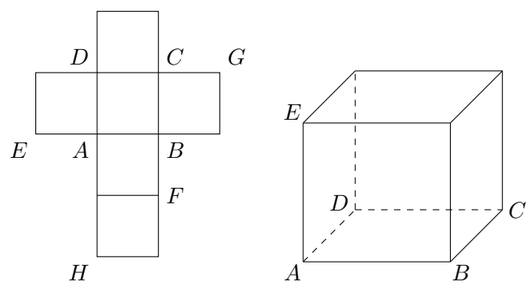
(2) 若乘客 P_1 坐到了 2 号座位, 其他乘客按规则就座, 求乘客 P_5 坐到 5 号座位的概率.

18. 一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示.

(1) 请将字母 F, G, H 标记在正方体相应的顶点处 (不需说明理由);

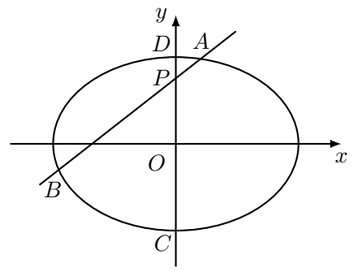
(2) 判断平面 BEG 与平面 ACH 的位置关系, 并证明你的结论;

(3) 证明: 直线 $DF\perp$ 平面 BEG.



19. 已知 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角, $\tan A$, $\tan B$ 是关于 x 的方程 $x^2+\sqrt{3}px-p+1=0$ ($p\in\mathbf{R}$) 的两个实根.
(1) 求 C 的大小;
(2) 若 $AB=3$, $AC=\sqrt{6}$, 求 p 的值.

20. 如图, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0,1)$ 在短轴 CD 上, 且 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$.
(1) 求椭圆 E 的方程;
(2) 设 O 为坐标原点, 过点 P 的动直线与椭圆交于 A, B 两点. 是否存在常数 λ, 使得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知函数 $f(x)=-2x\ln x+x^2-2ax+a^2$, 其中 $a>0$.
(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;
(2) 证明: 存在 $a\in(0,1)$, 使得 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立, 且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.

2015 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

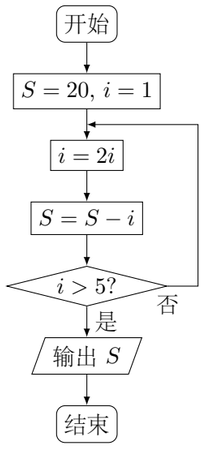
1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 集合 $A=\{2,3,5,6\}$, 集合 $B=\{1,3,4,6,7\}$, 则集合 $A\cap\complement_U B=$ （　）

(A) $\{2,5\}$　　(B) $\{3,6\}$　　(C) $\{2,5,6\}$　　(D) $\{2,3,5,6,8\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ x-y+3\geqslant 0\\ 2x+y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=x+6y$ 的最大值为 （　）

(A) 3　　(B) 4　　(C) 18　　(D) 40

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为 （　）



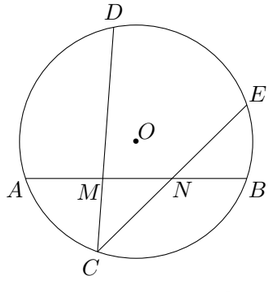
(A) -10　　(B) 6　　(C) 14　　(D) 18

4. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$|x-2|<1$”是“$x^2+x-2>0$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

5. 如图, 在圆 O 中, M, N 是弦 AB 的三等分点, 弦 CD, CE 分别经过点 M, N, 若 $CM=2$, $MD=4$, $CN=3$, 则线段 NE 的长为 （　）



(A) $\dfrac{8}{3}$　　(B) 3　　(C) $\dfrac{10}{3}$　　(D) $\dfrac{5}{2}$

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线过点 $\left(2,\sqrt{3}\right)$, 且双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2=4\sqrt{7}x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{21}-\dfrac{y^2}{28}=1$　　(B) $\dfrac{x^2}{28}-\dfrac{y^2}{21}=1$

(C) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　(D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$ (m 为实数) 为偶函数, 记 $a=f(\log_{0.5}3)$, $b=f(\log_2 5)$, $c=f(2m)$, 则 a, b, c 的大小关系为 （　）

(A) $a<b<c$　　(B) $a<c<b$　　(C) $c<a<b$　　(D) $c<b<a$

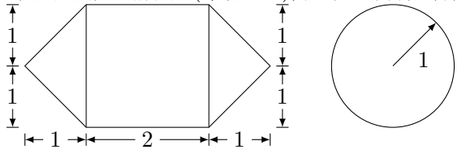
8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, & x\leqslant 2\\ (x-2)^2, & x>2\end{cases}$, 函数 $g(x)=b-f(2-x)$, 其中 $b\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰有 4 个零点, 则 b 的取值范围是 （　）

(A) $\left(\dfrac{7}{4},+\infty\right)$　　(B) $\left(-\infty,\dfrac{7}{4}\right)$　　(C) $\left(0,\dfrac{7}{4}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{7}{4},2\right)$

二、填空题

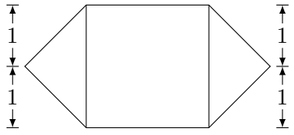
9. i 是虚数单位, 若复数 $(1-2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为_____.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____m^3.



正视图

侧视图



俯视图

11. 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成的封闭图形的面积为_____.

12. 在 $\left(x-\dfrac{1}{4x}\right)^6$ 的展开式中, x^2 的系数为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$, $b-c=2$, $\cos A=-\dfrac{1}{4}$, 则 a 的值为_____.

14. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB\parallel DC$, $AB=2$, $BC=1$, $\angle ABC=60^\circ$. 动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最小值为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x-\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

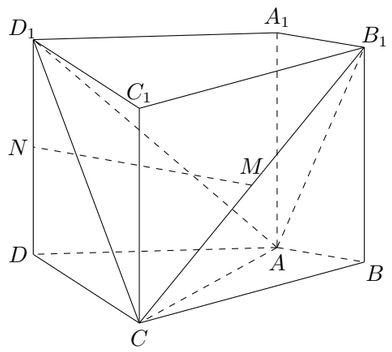
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 为推动乒乓球运动的发展, 某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加. 现有来自甲协会的运动员 3 名, 其中种子选手 2 名; 乙协会的运动员 5 名, 其中种子选手 3 名. 从这 8 名运动员中随机选择 4 人参加比赛.

(1) 设 A 为事件“选出的 4 人中恰有 2 名种子选手, 且这 2 名种子选手来自同一个协会”, 求事件 A 发生的概率;

(2) 设 X 为选出的 4 人中种子选手的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17. 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\perp AC$, $AB=1$, $AC=AA_1=2$, $AD=CD=\sqrt{5}$, 且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点.
(1) 求证: $MN\parallel$ 平面 $ABCD$;
(2) 求二面角 D_1-AC-B_1 的正弦值;
(3) 设 E 为棱 A_1B_1 上的点, 若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$, 求线段 A_1E 的长.



18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=qa_n$ (q 为实数, 且 $q\neq 1$), $n\in\mathbf{N}^*$, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5 成等差数列.
(1) 求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n=\dfrac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左焦点为 $F(-c,0)$, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 点 M 在椭圆上且位于第一象限, 直线 FM 被圆 $x^2+y^2=\dfrac{b^2}{4}$ 截得的线段的长为 c, $|FM|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
(1) 求直线 FM 的斜率;
(2) 求椭圆的方程;
(3) 设动点 P 在椭圆上, 若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$, 求直线 OP (O 为原点) 的斜率的取值范围.

20. 已知函数 $f(x)=nx-x^n$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $n\geqslant 2$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P, 曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$, 求证: 对于任意的正实数 x, 都有 $f(x)\leqslant g(x)$;
(3) 若关于 x 的方程 $f(x)=a$ (a 为实数) 有两个正实数根 x_1, x_2, 求证: $|x_2-x_1|<\dfrac{a}{1-n}+2$.

2015 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

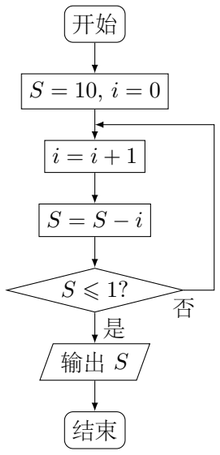
1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, 集合 $A=\{2,3,5\}$, 集合 $B=\{1,3,4,6\}$, 则集合 $A\cap\complement_U B=$ （　）

(A) $\{3\}$　　(B) $\{2,5\}$　　(C) $\{1,4,6\}$　　(D) $\{2,3,5\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2\leqslant 0\\ x-2y\leqslant 0\\ x+2y-8\leqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=3x+y$ 的最大值为 （　）

(A) 7　　(B) 8　　(C) 9　　(D) 14

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 则输出 i 的值为 （　）



(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

4. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$1<x<2$”是“$|x-2|<1$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

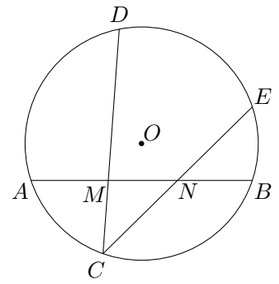
(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一焦点为 $F(2,0)$, 且双曲线的渐近线与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 相切, 则双曲线的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{13}=1$　　(B) $\dfrac{x^2}{13}-\dfrac{y^2}{9}=1$

(C) $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　　(D) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

6. 如图, 在圆 O 中, M, N 是弦 AB 的三等分点, 弦 CD, CE 分别经过点 M, N, 若 $CM=2$, $MD=4$, $CN=3$, 则线段 NE 的长为 （　）



(A) $\dfrac{8}{3}$　　(B) 3　　(C) $\dfrac{10}{3}$　　(D) $\dfrac{5}{2}$

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$ (m 为实数) 为偶函数, 记 $a=f(\log_{0.5}3)$, $b=f(\log_2 5)$, $c=f(2m)$, 则 a, b, c 的大小关系为 （　）

(A) $a<b<c$　　(B) $c<a<b$　　(C) $a<c<b$　　(D) $c<b<a$

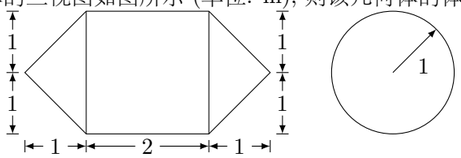
8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|,\ x\leqslant 2\\ (x-2)^2,\ x>2\end{cases}$, 函数 $g(x)=3-f(2-x)$, 则函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点个数为 （　）

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

二、填空题

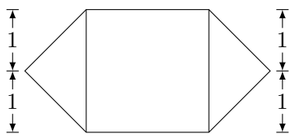
9. i 是虚数单位, 计算 $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 的结果为_____.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____m^3.



正视图

侧视图



俯视图

11. 已知函数 $f(x)=ax\ln x$, $x\in(0,+\infty)$, 其中 a 为实数, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数. 若 $f'(1)=3$, 则 a 的值为_____.

12. 已知 $a>0$, $b>0$, $ab=8$, 则当 a 的值为_____时, $\log_2 a\cdot\log_2(2b)$ 取得最大值.

13. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB\parallel DC$, $AB=2$, $BC=1$, $\angle ABC=60^\circ$. 点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的值为_____.

14. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x$ $(\omega>0)$, $x\in\mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega,\omega)$ 内单调递增, 且函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\omega$ 对称, 则 ω 的值为_____.

三、解答题

15. 设甲、乙、丙三个乒乓球协会的运动员人数分别为 27, 9, 18. 现采用分层抽样的方法从这三个协会中抽取 6 名运动员组队参加比赛.

(1) 求应从这三个协会中分别抽取的运动员的人数;

(2) 将抽取的 6 名运动员进行编号, 编号分别为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. 现从这 6 名运动员中随机抽取 2 人参加双打比赛.

① 用所给编号列出所有可能的结果;

② 设 A 为事件: “编号为 A_5 和 A_6 的两名运动员中至少有 1 人被抽到”, 求事件 A 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$, $b-c=2$, $\cos A=-\dfrac{1}{4}$.

(1) 求 a 和 $\sin C$ 的值;

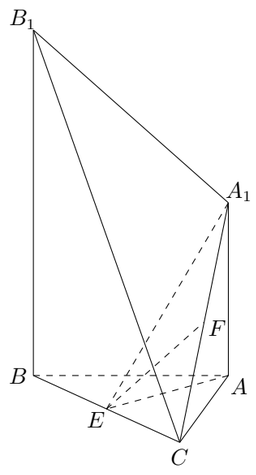
(2) 求 $\cos\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. 如图, 已知 $AA_1 \perp$ 平面 ABC, $BB_1 /\!/ AA_1$, $AB = AC = 3$, $BC = 2\sqrt{5}$, $AA_1 = \sqrt{7}$, $BB_1 = 2\sqrt{7}$, 点 E 和 F 分别为 BC 和 A_1C 的中点.

(1) 求证: $EF /\!/$ 平面 A_1B_1BA;

(2) 求证: 平面 $AEA_1 \perp$ 平面 BCB_1;

(3) 求直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成角的大小.



18. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = b_1 = 1$, $b_2 + b_3 = 2a_3$, $a_5 - 3b_2 = 7$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = a_n b_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的上顶点为 B, 左焦点为 F, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求直线 BF 的斜率;

(2) 设直线 BF 与椭圆交于点 P (P 异于点 B), 过点 B 且垂直于 BP 的直线与椭圆交于点 Q (Q 异于点 B), 直线 PQ 与 y 轴交于点 M, $|PM| = \lambda |MQ|$.

① 求 λ 的值;

② 若 $|PM| \sin \angle BQP = \dfrac{7\sqrt{5}}{9}$, 求椭圆的方程.

20. 已知函数 $f(x) = 4x - x^4$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P, 曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$, 求证: 对于任意的实数 x, 都有 $f(x) \leqslant g(x)$;

(3) 若方程 $f(x) = a$ (a 为实数) 有两个正实数根 x_1, x_2, 且 $x_1 < x_2$, 求证: $x_2 - x_1 \leqslant -\dfrac{a}{3} + 4^{\frac{1}{3}}$.

2015 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

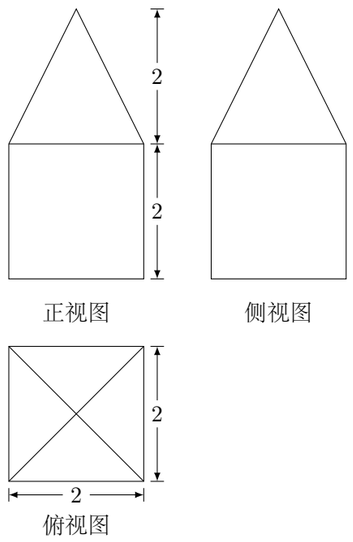
理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\mid x^2-2x\geqslant 0\}$, $Q=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}}P)\cap Q=$（　）

(A) $[0,1)$　　(B) $(0,2]$　　(C) $(1,2)$　　(D) $[1,2]$

2. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积是　　（　）



(A) 8 cm^3　　(B) 12 cm^3　　(C) $\dfrac{32}{3}$ cm^3　　(D) $\dfrac{40}{3}$ cm^3

3. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 d 不为零, 前 n 项和是 S_n, 若 a_3, a_4, a_8 成等比数列, 则　　（　）

(A) $a_1d>0$, $dS_4>0$　　(B) $a_1d<0$, $dS_4<0$

(C) $a_1d>0$, $dS_4<0$　　(D) $a_1d<0$, $dS_4>0$

4. 命题"$\forall n\in\mathbf{N}^*$, $f(n)\in\mathbf{N}^*$ 且 $f(n)\leqslant n$"的否定形式是　　（　）

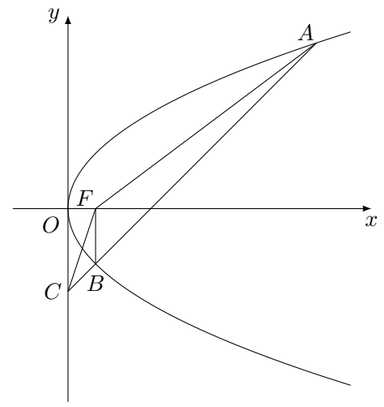
(A) $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $f(n)\notin\mathbf{N}^*$ 且 $f(n)>n$

(B) $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $f(n)\notin\mathbf{N}^*$ 或 $f(n)>n$

(C) $\exists n_0\in\mathbf{N}^*$, $f(n_0)\notin\mathbf{N}^*$ 且 $f(n_0)>n_0$

(D) $\exists n_0\in\mathbf{N}^*$, $f(n_0)\notin\mathbf{N}^*$ 或 $f(n_0)>n_0$

5. 如图, 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 不经过焦点的直线上有三个不同的点 A, B, C, 其中点 A, B 在抛物线上, 点 C 在 y 轴上, 则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比是　　（　）



(A) $\dfrac{|BF|-1}{|AF|-1}$　　(B) $\dfrac{|BF|^2-1}{|AF|^2-1}$　　(C) $\dfrac{|BF|+1}{|AF|+1}$　　(D) $\dfrac{|BF|^2+1}{|AF|^2+1}$

6. 设 A, B 是有限集, 定义: $d(A,B)=\operatorname{card}(A\cup B)-\operatorname{card}(A\cap B)$, 其中 $\operatorname{card}(A)$ 表示有限集 A 中元素的个数.
命题①: 对任意有限集 A, B, "$A\neq B$"是"$d(A,B)>0$"的充分必要条件;
命题②: 对任意有限集 A, B, C, $d(A,C)\leqslant d(A,B)+d(B,C)$.　　（　）

(A) 命题①和命题②都成立　　(B) 命题①和命题②都不成立

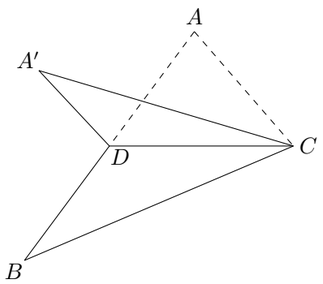
(C) 命题①成立, 命题②不成立　　(D) 命题①不成立, 命题②成立

7. 存在函数 $f(x)$ 满足: 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有　　（　）

(A) $f(\sin 2x)=\sin x$　　(B) $f(\sin 2x)=x^2+x$

(C) $f(x^2+1)=|x+1|$　　(D) $f(x^2+2x)=|x+1|$

8. 如图, 已知 $\triangle ABC$, D 是 AB 的中点, 沿直线 CD 将 $\triangle ACD$ 翻折成 $\triangle A'CD$, 所成二面角 $A'-CD-B$ 的平面角为 α, 则　　（　）



(A) $\angle A'DB\leqslant\alpha$　(B) $\angle A'DB\geqslant\alpha$　(C) $\angle A'CB\leqslant\alpha$　(D) $\angle A'CB\geqslant\alpha$

二、填空题

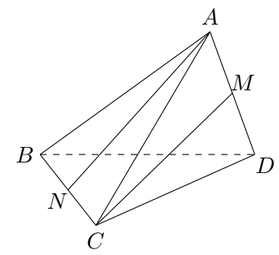
9. 双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 的焦距是_____, 渐近线方程是_____.

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{2}{x}-3, & x\geqslant 1\\ \lg(x^2+1), & x<1\end{cases}$, 则 $f(f(-3))=$_____, $f(x)$ 的最小值是_____.

11. 函数 $f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$ 的最小正周期是_____, 单调递减区间是_____.

12. 若 $a=\log_43$, 则 $2^a+2^{-a}=$_____.

13. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB=AC=BD=CD=3$, $AD=BC=2$, 点 M, N 分别为 AD, BC 的中点, 则异面直线 AN, CM 所成的角的余弦值是_____.



14. 若实数 x, y 满足 $x^2+y^2\leqslant 1$, 则 $|2x+y-2|+|6-x-3y|$ 的最小值是_____.

15. 已知 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 是空间单位向量, $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{2}$, 若空间向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=2$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=\dfrac{5}{2}$, 且对于任意 x, $y\in\mathbf{R}$, $\left|\vec{b}-(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)\right|\geqslant|\boldsymbol{b}-(x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2)|=1$ $(x_0, y_0\in\mathbf{R})$, 则 $x_0=$_____, $y_0=$_____, $|\boldsymbol{b}|=$_____.

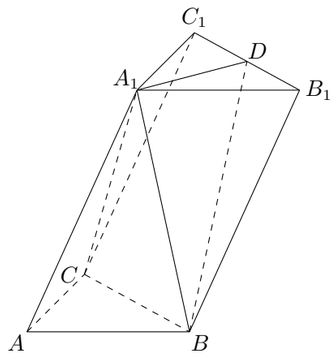
三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c. 已知 $A=\dfrac{\pi}{4}$, $b^2-a^2=\dfrac{1}{2}c^2$.
(1) 求 $\tan C$ 的值;
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 求 b 的值.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=2$, $A_1A=4$, A_1 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点, D 是 B_1C_1 的中点.

(1) 证明: $A_1D\perp$ 平面 A_1BC;

(2) 求二面角 A_1-BD-B_1 的平面角的余弦值.



18. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$, 记 $M(a,b)$ 是 $|f(x)|$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值.

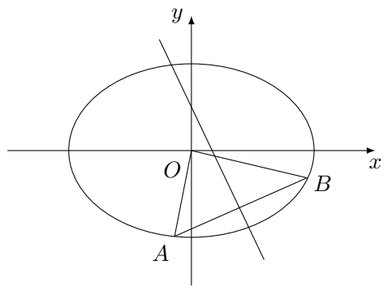
(1) 证明: 当 $|a|\geqslant 2$ 时, $M(a,b)\geqslant 2$;

(2) 当 a, b 满足 $M(a,b)\leqslant 2$ 时, 求 $|a|+|b|$ 的最大值.

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上两个不同的点 A, B 关于直线 $y=mx+\dfrac{1}{2}$ 对称.

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值 (O 为坐标原点).



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 且 $a_{n+1}=a_n-a_n^2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明: $1\leqslant\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$;

(2) 设数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 S_n, 证明: $\dfrac{1}{2(n+2)}\leqslant\dfrac{S_n}{n}\leqslant\dfrac{1}{2(n+1)}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2015 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

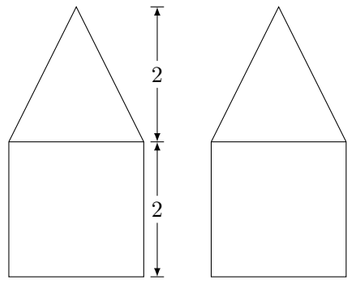
文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\mid x^2-2x\geqslant 3\}$, $Q=\{x\mid 2<x<4\}$, 则 $P\cap Q=$（　）

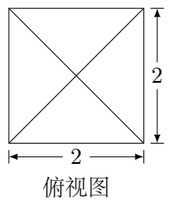
(A) $[3,4)$　　(B) $(2,3]$　　(C) $(-1,2)$　　(D) $(-1,3]$

2. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积是（　）



正视图

侧视图



俯视图

(A) 8 cm^3　　(B) 12 cm^3　　(C) $\dfrac{32}{3}$ cm^3　　(D) $\dfrac{40}{3}$ cm^3

3. 设 a, b 是实数, 则“$a+b>0$”是“$ab>0$”的（　）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

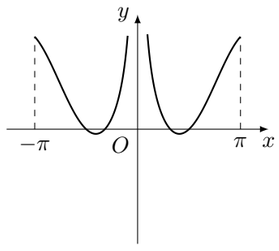
(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

4. 设 α, β 是两个不同的平面, l, m 是两条不同的直线, 且 $l\subset\alpha$, $m\subset\beta$.（　）

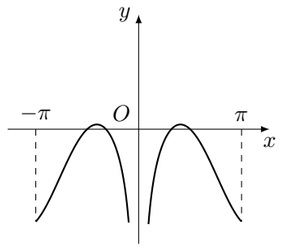
(A) 若 $l\perp\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$　　(B) 若 $\alpha\perp\beta$, 则 $l\perp m$

(C) 若 $l\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$　　(D) 若 $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\parallel m$

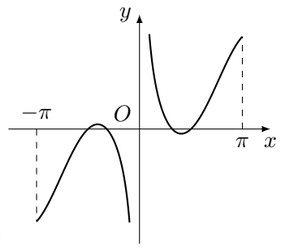
5. 函数 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cos x$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 且 $x\neq 0)$ 的图象可能为（　）



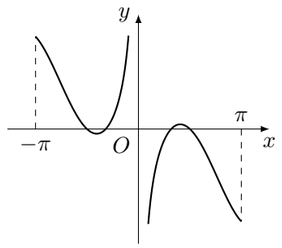
(A)



(B)



(C)

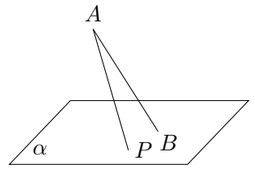


(D)

6. 有三个房间需要粉刷, 粉刷方案要求: 每个房间只用一种颜色, 且三个房间颜色各不相同. 已知三个房间的粉刷面积 (单位: m^2) 分别为 x, y, z, 且 $x<y<z$, 三种颜色涂料的粉刷费用 (单位: 元 /m^2) 分别为 a, b, c, 且 $a<b<c$. 在不同的方案中, 最低的总费用 (单位: 元) 是（　）

(A) $ax+by+cz$　(B) $az+by+cx$　(C) $ay+bz+cx$　(D) $ay+bx+cz$

7. 如图, 斜线段 AB 与平面 α 所成的角为 $60°$, B 为斜足, 平面 α 上的动点 P 满足 $\angle PAB=30°$, 则点 P 的轨迹是（　）



(A) 直线　　(B) 抛物线

(C) 椭圆　　(D) 双曲线的一支

8. 设实数 a, b, t 满足 $|a+1|=|\sin b|=t$. 则下列说法中正确的是（　）

(A) 若 t 确定, 则 b^2 唯一确定　　(B) 若 t 确定, 则 a^2+2a 唯一确定

(C) 若 t 确定, 则 $\sin\dfrac{b}{2}$ 唯一确定　　(D) 若 t 确定, 则 a^2+a 唯一确定

二、填空题

9. 计算 $\log_2\dfrac{\sqrt{2}}{2}=$_____, $2^{\log_2 3+\log_4 3}=$_____.

10. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 d 不为零. 若 a_2, a_3, a_7 成等比数列, 且 $2a_1+a_2=1$, 则 $a_1=$_____, $d=$_____.

11. 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+1$ 的最小正周期是_____, 最小值是_____.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ x+\dfrac{6}{x}-6, & x>1\end{cases}$, 则 $f(f(-2))=$_____, $f(x)$ 的最小值是_____.

13. 已知 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 是平面单位向量, 且 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{2}$. 若平面向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=1$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$_____.

14. 已知实数 x, y 满足 $x^2+y^2\leqslant 1$, 则 $|2x+y-4|+|6-x-3y|$ 的最大值是_____.

15. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点 $F(c,0)$ 关于直线 $y=\dfrac{b}{c}x$ 的对称点 Q 在椭圆上, 则椭圆的离心率是_____.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)=2$.

(1) 求 $\dfrac{\sin 2A}{\sin 2A+\cos^2 A}$ 的值;

(2) 若 $B=\dfrac{\pi}{4}$, $a=3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=2$, $b_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, $b_1+\dfrac{1}{2}b_2+\dfrac{1}{3}b_3+\cdots+\dfrac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

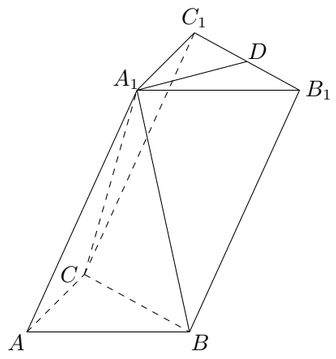
(1) 求 a_n 与 b_n;

(2) 记数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 求 T_n.

18. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=2$, $A_1A=4$, A_1 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点, D 是 B_1C_1 的中点.

(1) 证明: $A_1D\perp$ 平面 A_1BC;

(2) 求直线 A_1B 和平面 BB_1C_1C 所成的角的正弦值.

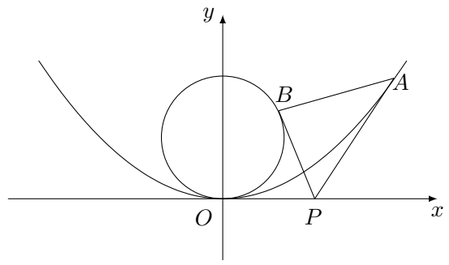


19. 如图, 已知抛物线 $C_1: y=\dfrac{1}{4}x^2$, 圆 $C_2: x^2+(y-1)^2=1$, 过点 $P(t,0)$ $(t>0)$ 作不过原点 O 的直线 PA, PB 分别与抛物线 C_1 和圆 C_2 相切, A, B 为切点.

(1) 求点 A, B 的坐标;

(2) 求 $\triangle PAB$ 的面积.

注: 直线与抛物线有且只有一个公共点, 且与抛物线的对称轴不平行, 则称该直线与抛物线相切, 称该公共点为切点.



20. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $b=\dfrac{a^2}{4}+1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值 $g(a)$ 的表达式;

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在零点, $0\leqslant b-2a\leqslant 1$, 求 b 的取值范围.

2016 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

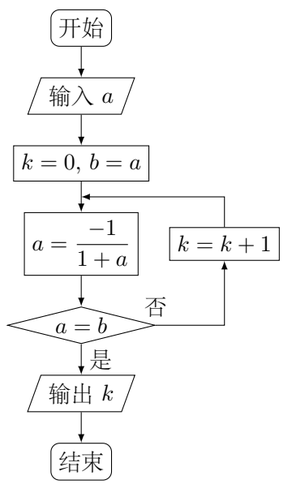
1. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x|<2\}$, $B=\{-1,0,1,2,3\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{0,1\}$　(B) $\{0,1,2\}$　(C) $\{-1,0,1\}$　(D) $\{-1,0,1,2\}$

2. 若 x, y 满足 $\begin{cases}2x-y\leqslant 0\\ x+y\leqslant 3\\ x\geqslant 0\end{cases}$, 则 $2x+y$ 的最大值为 （　）

(A) 0　(B) 3　(C) 4　(D) 5

3. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 a 值为 1, 则输出的 k 值为 （　）



(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

4. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是向量, 则“$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”是“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

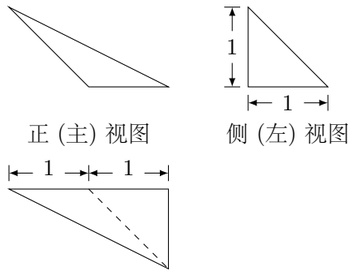
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 x, $y\in\mathbf{R}$, 且 $x>y>0$, 则 （　）

(A) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}>0$　(B) $\sin x-\sin y>0$

(C) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^y<0$　(D) $\ln x+\ln y>0$

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为 （　）



(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 1

7. 将函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 图象上的点 $P\left(\dfrac{\pi}{4},t\right)$ 向左平移 s $(s>0)$ 个单位长度得到点 P'. 若 P' 位于函数 $y=\sin 2x$ 的图象上, 则 （　）

(A) $t=\dfrac{1}{2}$, s 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, s 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$

(C) $t=\dfrac{1}{2}$, s 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, s 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$

8. 袋中装有偶数个球, 其中红球、黑球各占一半. 甲、乙、丙是三个空盒. 每次从袋中任意取出两个球, 将其中一个球放入甲盒, 如果这个球是红球, 就将另一个球放入乙盒, 否则就放入丙盒. 重复上述过程, 直到袋中所有球都被放入盒中, 则 （　）

(A) 乙盒中黑球不多于丙盒中黑球　(B) 乙盒中红球与丙盒中黑球一样多

(C) 乙盒中红球不多于丙盒中红球　(D) 乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

二、填空题

9. 设 $a\in\mathbf{R}$, 若复数 $(1+\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点位于实轴上, 则 $a=$_____.

10. 在 $(1-2x)^6$ 的展开式中, x^2 的系数为_____. (用数字作答)

11. 在极坐标系中, 直线 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-1=0$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$_____.

12. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_1=6$, $a_3+a_5=0$, 则 $S_6=$_____.

13. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的渐近线为正方形 $OABC$ 的边 OA, OC 所在的直线, 点 B 为该双曲线的焦点, 若正方形 $OABC$ 的边长为 2, 则 $a=$_____.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x\leqslant a\\ -2x, & x>a\end{cases}$.

① 若 $a=0$, 则 $f(x)$ 的最大值为_____;

② 若 $f(x)$ 无最大值, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$.

(1) 求 $\angle B$ 的大小;

(2) 求 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值.

16. A, B, C 三个班共有 100 名学生, 为调查他们的体育锻炼情况, 通过分层抽样获得了部分学生一周的锻炼时间, 数据如表 (单位: 小时):

A 班	6	6.5	7	7.5	8			
B 班	6	7	8	9	10	11	12	
C 班	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	13.5

(1) 试估计 C 班的学生人数;

(2) 从 A 班和 C 班抽出的学生中, 各随机选取一个人, A 班选出的人记为甲, C 班选出的人记为乙. 假设所有学生的锻炼时间相对独立, 求该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率;

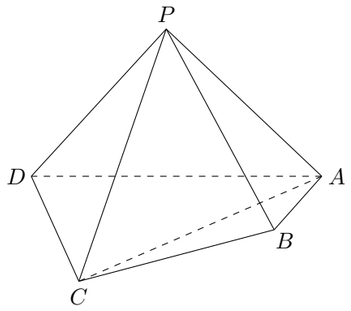
(3) 再从 A, B, C 三班中各随机抽取一名学生, 他们该周锻炼时间分别是 7, 9, 8.25 (单位: 小时), 这 3 个新数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为 μ_1, 表格中数据的平均数记为 μ_0, 试判断 μ_0 和 μ_1 的大小. (结论不要求证明)

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, $PA\perp PD$, $PA=PD$, $AB\perp AD$, $AB=1$, $AD=2$, $AC=CD=\sqrt{5}$.

(1) 求证: $PD\perp$ 平面 PAB;

(2) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值;

(3) 在棱 PA 上是否存在点 M, 使得 $BM\parallel$ 平面 PCD? 若存在, 求 $\dfrac{AM}{AP}$ 的值; 若不存在, 说明理由.



18. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{a-x}+bx$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=(\mathrm{e}-1)x+4$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $A(a,0)$, $B(0,b)$, $O(0,0)$, $\triangle OAB$ 的面积为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 P 是椭圆 C 上一点, 直线 PA 与 y 轴交于点 M, 直线 PB 与 x 轴交于点 N. 求证: $|AN|\cdot|BM|$ 为定值.

20. 设数列 A: a_1, a_2, $\cdots$, a_N $(N\geqslant 2)$. 如果对小于 n $(2\leqslant n\leqslant N)$ 的每个正整数 k 都有 $a_k<a_n$, 则称 n 是数列 A 的一个“G 时刻”. 记 $G(A)$ 是数列 A 的所有“G 时刻”组成的集合.

(1) 对数列 A: -2, 2, -1, 1, 3, 写出 $G(A)$ 的所有元素;

(2) 证明: 若数列 A 中存在 a_n 使得 $a_n>a_1$, 则 $G(A)\neq\varnothing$;

(3) 证明: 若数列 A 满足 $a_n-a_{n-1}\leqslant 1$ $(n=2,\ 3,\ \cdots,\ N)$, 则 $G(A)$ 的元素个数不小于 a_N-a_1.

2016 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\,|2<x<4\}$, $B=\{x\,|x<3$ 或 $x>5\}$, 则 $A\cap B=$（　）

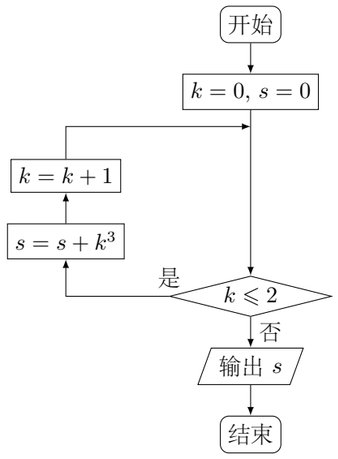
(A) $\{x\,|2<x<5\}$　　(B) $\{x\,|x<4$ 或 $x>5\}$

(C) $\{x\,|2<x<3\}$　　(D) $\{x\,|x<2$ 或 $x>5\}$

2. 复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=$（　）

(A) i　　(B) $1+\mathrm{i}$　　(C) $-\mathrm{i}$　　(D) $1-\mathrm{i}$

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为（　）



(A) 8　　(B) 9　　(C) 27　　(D) 36

4. 下列函数中, 在区间 $(-1,1)$ 上为减函数的是（　）

(A) $y=\dfrac{1}{1-x}$　　(B) $y=\cos x$　　(C) $y=\ln(x+1)$　　(D) $y=2^{-x}$

5. 圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的圆心到直线 $y=x+3$ 的距离为（　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $2\sqrt{2}$

6. 从甲、乙等 5 名学生中随机选出 2 人, 则甲被选中的概率为（　）

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) $\dfrac{2}{5}$　　(C) $\dfrac{8}{25}$　　(D) $\dfrac{9}{25}$

7. 已知 $A(2,5)$, $B(4,1)$. 若点 $P(x,y)$ 在线段 AB 上, 则 $2x-y$ 的最大值为（　）

(A) -1　　(B) 3　　(C) 7　　(D) 8

8. 某学校运动会的立定跳远和 30 秒跳绳两个单项比赛分成预赛和决赛两个阶段, 下表为 10 名学生的预赛成绩, 其中有三个数据模糊.

学生序号	1	2	3	4	5
立定跳远 (单位: 米)	1.96	1.92	1.82	1.80	1.78
30 秒跳绳 (单位: 次)	63	a	75	60	63
学生序号	6	7	8	9	10
立定跳远 (单位: 米)	1.76	1.74	1.72	1.68	1.60
30 秒跳绳 (单位: 次)	72	70	$a-1$	b	65

在这 10 名学生中, 进入立定跳远决赛的有 8 人, 同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人, 则（　）

(A) 2 号学生进入 30 秒跳绳决赛　　(B) 5 号学生进入 30 秒跳绳决赛

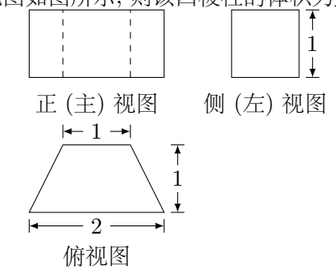
(C) 8 号学生进入 30 秒跳绳决赛　　(D) 9 号学生进入 30 秒跳绳决赛

二、填空题

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$ 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为_____.

10. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $(x\geqslant 2)$ 的最大值为_____.

11. 某四棱柱的三视图如图所示, 则该四棱柱的体积为_____.



12. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线为 $2x+y=0$, 一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$, 则 $a=$_____; $b=$_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$, $a=\sqrt{3}c$, 则 $\dfrac{b}{c}=$_____.

14. 某网店统计了连续三天售出商品的种类情况: 第一天售出 19 种商品, 第二天售出 13 种商品, 第三天售出 18 种商品; 前两天都售出的商品有 3 种, 后两天都售出的商品有 4 种, 则该网店

① 第一天售出但第二天未售出的商品有_____种;

② 这三天售出的商品最少有_____种.

三、解答题

15. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $b_2=3$, $b_3=9$, $a_1=b_1$, $a_{14}=b_4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

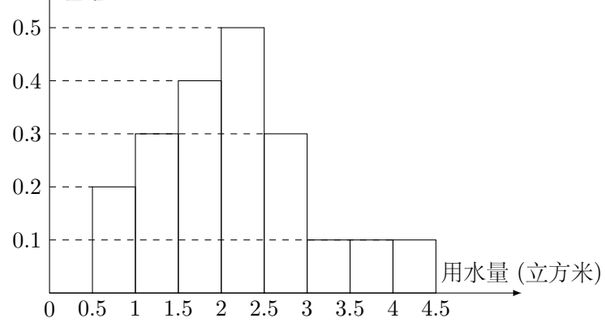
(2) 设 $c_n=a_n+b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

16. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+\cos 2\omega x$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1) 求 ω 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

17. 某市居民用水拟实行阶梯水价, 每人每月用水量中不超过 w 立方米的部分按 4 元/立方米收费, 超出 w 立方米的部分按 10 元/立方米收费, 从该市随机调查了 10000 位居民, 获得了他们某月的用水量数据, 整理得到如图频率分布直方图:



(1) 如果 w 为整数, 那么根据此次调查, 为使 80% 以上居民在该月的用水价格为 4 元/立方米, w 至少定为多少?

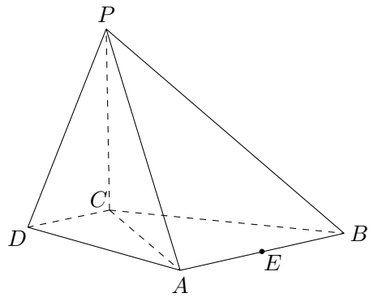
(2) 假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替, 当 $w=3$ 时, 估计该市居民该月的人均水费.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PC \perp$ 平面 $ABCD$, $AB /\!/ DC$, $DC \perp AC$.

(1) 求证: $DC \perp$ 平面 PAC;

(2) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAC;

(3) 设点 E 为 AB 的中点. 在棱 PB 上是否存在点 F, 使得 $PA /\!/$ 平面 CEF? 说明理由.



19. 已知椭圆: $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(2,0)$, $B(0,1)$ 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程及离心率;

(2) 设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上, 直线 PA 与 y 轴交于点 M, 直线 PB 与 x 轴交于点 N, 求证: 四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

20. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a=b=4$, 若函数 $f(x)$ 有三个不同零点, 求 c 的取值范围;

(3) 求证: $a^2-3b>0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

2016 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,2,3,6\}$, $B=\{x\mid -2<x<3\}$, 则 $A\cap B=$_____.

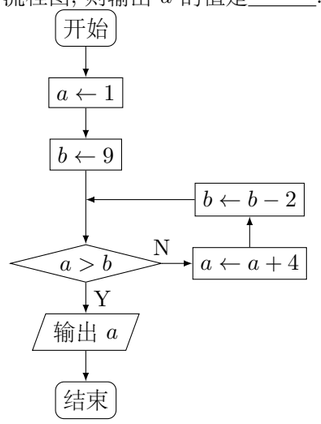
2. 复数 $z=(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$, 其中 i 为虚数单位, 则 z 的实部是_____.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦距是_____.

4. 已知一组数据 4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5, 则该组数据的方差是_____.

5. 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是_____.

6. 如图是一个算法的流程图, 则输出 a 的值是_____.

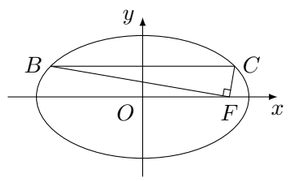


7. 将一个质地均匀的骰子 (一种各个面上分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 六个点的正方体玩具) 先后抛掷 2 次, 则出现向上的点数之和小于 10 的概率是_____.

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和. 若 $a_1+a_2^2=-3$, $S_5=10$, 则 a_9 的值是_____.

9. 定义在区间 $[0,3\pi]$ 上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是_____.

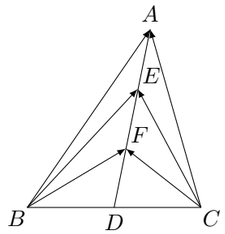
10. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点, 直线 $y=\dfrac{b}{2}$ 与椭圆交于 B, C 两点, 且 $\angle BFC=90^\circ$, 则该椭圆的离心率是_____.



11. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数, 在区间 $[-1,1)$ 上 $f(x)=\begin{cases}x+a, & -1\leqslant x<0\\ \left|\dfrac{2}{5}-x\right|, & 0\leqslant x<1\end{cases}$, 其中 $a\in\mathbf{R}$. 若 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f\left(\dfrac{9}{2}\right)$, 则 $f(5a)$ 的值是_____.

12. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0\\ 2x+y-2\geqslant 0\\ 3x-y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则 x^2+y^2 的取值范围是_____.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上两个三等分点, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$, $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$, 则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的值是_____.

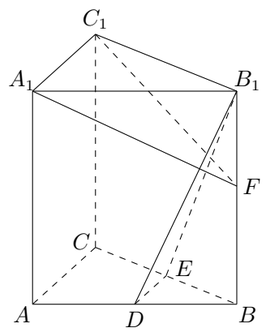


14. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin A=2\sin B\sin C$, 则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是_____.

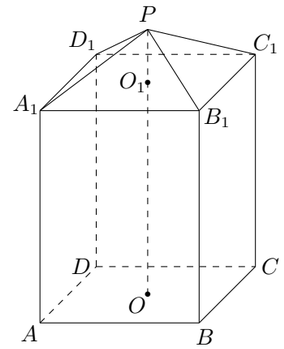
二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=6$, $\cos B=\dfrac{4}{5}$, $C=\dfrac{\pi}{4}$.
(1) 求 AB 的长;
(2) 求 $\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

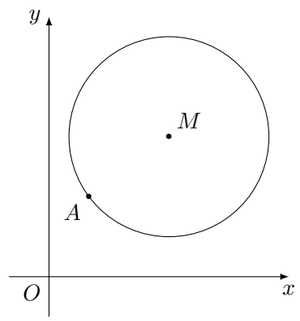
16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 AB, BC 的中点, 点 F 在侧棱 B_1B 上, 且 $B_1D\perp A_1F$, $A_1C_1\perp A_1B_1$. 求证:
(1) 直线 $DE\parallel$ 平面 A_1C_1F;
(2) 平面 $B_1DE\perp$ 平面 A_1C_1F.



17. 现需要设计一个仓库, 它由上下两部分组成, 上部分的形状是正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$, 下部分的形状是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (如图所示), 并要求正四棱柱的高 O_1O 是正四棱锥的高 PO_1 的 4 倍.
(1) 若 $AB=6$ m, $PO_1=2$ m, 则仓库的容积是多少?
(2) 若正四棱锥的侧棱长为 6 m, 当 PO_1 为多少时, 仓库的容积最大?



18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知以 M 为圆心的圆 $M:x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 $A(2,4)$.
(1) 设圆 N 与 x 轴相切, 与圆 M 外切, 且圆心 N 在直线 $x=6$ 上, 求圆 N 的标准方程;
(2) 设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B, C 两点, 且 $BC=OA$, 求直线 l 的方程;
(3) 设点 $T(t,0)$ 满足: 存在圆 M 上的两点 P 和 Q, 使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$, 求实数 t 的取值范围.



19. 已知函数 $f(x)=a^x+b^x$ $(a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1)$.

(1) 设 $a=2$, $b=\dfrac{1}{2}$.

① 求方程 $f(x)=2$ 的根;

② 若对于任意 $x\in\mathbf{R}$, 不等式 $f(2x)\geqslant mf(x)-6$ 恒成立, 求实数 m 的最大值;

(2) 若 $0<a<1$, $b>1$, 函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有 1 个零点, 求 ab 的值.

20. 记 $U=\{1,2,\cdots,100\}$. 对数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 和 U 的子集 T, 若 $T=\varnothing$, 定义 $S_T=0$; 若 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$, 定义 $S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}$. 例如: $T=\{1,3,66\}$ 时, $S_T=a_1+a_3+a_{66}$. 现设 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 是公比为 3 的等比数列, 且当 $T=\{2,4\}$ 时, $S_T=30$.

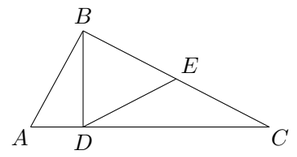
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 对任意正整数 k $(1\leqslant k\leqslant 100)$, 若 $T\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$, 求证: $S_T<a_{k+1}$;

(3) 设 $C\subseteq U$, $D\subseteq U$, $S_C\geqslant S_D$, 求证: $S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$.

21. 四选二.

【A】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $BD\perp AC$, D 为垂足, E 是 BC 中点. 求证: $\angle EDC=\angle ABD$.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{AB}$.

【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数), 椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数). 设直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.

【D】设 $a>0$, $|x-1|<\dfrac{a}{3}$, $|y-2|<\dfrac{a}{3}$, 求证: $|2x+y-4|<a$.

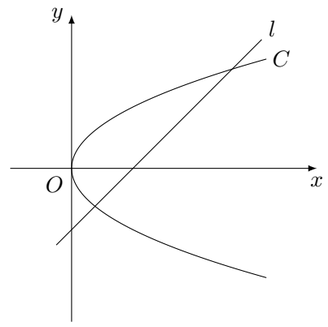
22. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l:x-y-2=0$, 抛物线 $C:y^2=2px$ $(p>0)$.

(1) 若直线 l 过抛物线 C 的焦点, 求抛物线 C 的方程;

(2) 已知抛物线 C 上存在关于直线 l 对称的相异两点 P 和 Q.

① 求证: 线段 PQ 上的中点坐标为 $(2-p,-p)$;

② 求 p 的取值范围.



23. (1) 求 $7\mathrm{C}_6^3-4\mathrm{C}_7^4$ 的值;

(2) 设 m, $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geqslant m$, 求证: $(m+1)\,\mathrm{C}_m^m+(m+2)\,\mathrm{C}_{m+1}^m+(m+3)\,\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+n\mathrm{C}_{n-1}^m+(n+1)\,\mathrm{C}_n^m=(m+1)\,\mathrm{C}_{n+2}^{m+2}$.

2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\,|\,x^2-4x+3<0\}$, $B=\{x\,|\,2x-3>0\}$, 则 $A\cap B=$（　）

(A) $\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$　(B) $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$　(C) $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　(D) $\left(\frac{3}{2},3\right)$

2. 设 $(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$, 其中 x, y 是实数, 则 $|x+y\mathrm{i}|=$（　）

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和为 27, $a_{10}=8$, 则 $a_{100}=$（　）

(A) 100　(B) 99　(C) 98　(D) 97

4. 某公司的班车在 7 : 30, 8 : 00, 8 : 30 发车, 小明在 7 : 50 至 8 : 30 之间到达发车站乘坐班车, 且到达发车站的时刻是随机的, 则他等车时间不超过 10 分钟的概率是（　）

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{3}{4}$

5. 已知方程 $\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$ 表示双曲线, 且该双曲线两焦点间的距离为 4, 则 n 的取值范围是（　）

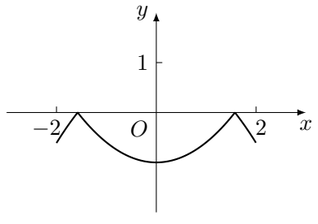
(A) $(-1,3)$　(B) $\left(-1,\sqrt{3}\right)$　(C) $(0,3)$　(D) $\left(0,\sqrt{3}\right)$

6. 如图, 某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$, 则它的表面积是（　）

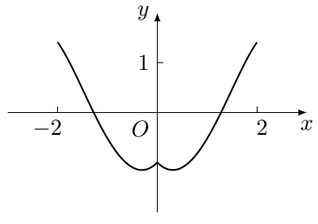
(A) 17π　(B) 18π　(C) 20π　(D) 28π

7. 函数 $y=2x^2-\mathrm{e}^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图象大致为（　）

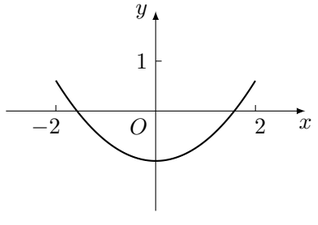
(A)



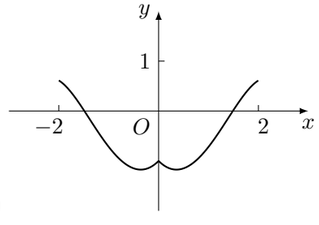
(B)



(C)



(D)

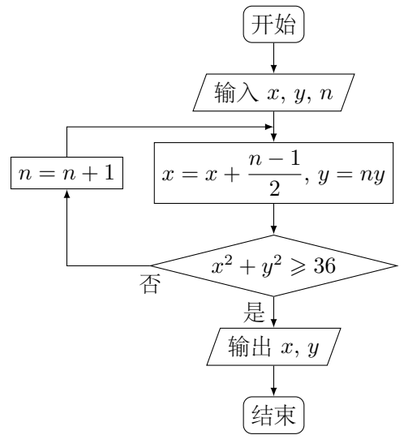


8. 若 $a>b>1$, $0<c<1$, 则（　）

(A) $a^c<b^c$　(B) $ab^c<ba^c$

(C) $a\log_b c<b\log_a c$　(D) $\log_a c<\log_b c$

9. 执行下面的程序图, 如果输入的 $x=0$, $y=1$, $n=1$, 则输出 x, y 的值满足（　）



(A) $y=2x$　(B) $y=3x$　(C) $y=4x$　(D) $y=5x$

10. 以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A, B 两点, 交 C 的准线于 D, E 两点. 已知 $|AB|=4\sqrt{2}$, $|DE|=2\sqrt{5}$, 则 C 的焦点到准线的距离为（　）

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

11. 平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A, $\alpha\,/\!/$ 平面 CB_1D_1, $\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$, $\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$, 则 m, n 所成角的正弦值为（　）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{1}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, $x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$ 单调, 则 ω 的最大值为（　）

(A) 11　(B) 9　(C) 7　(D) 5

二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(m,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$, 且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$, 则 $m=$_____.

14. $(2x+\sqrt{x})^5$ 的展开式中, x^3 的系数是_____. (用数字填写答案)

15. 设等比数列满足 $a_1+a_3=10$, $a_2+a_4=5$, 则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为_____.

16. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B, 需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品 A 需要甲材料 1.5 kg, 乙材料 1 kg, 用 5 个工时; 生产一件产品 B 需要甲材料 0.5 kg, 乙材料 0.3 kg, 用 3 个工时, 生产一件产品 A 的利润为 2100 元, 生产一件产品 B 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150 kg, 乙材料 90 kg, 则在不超过 600 个工时的条件下, 生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为_____元.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$.

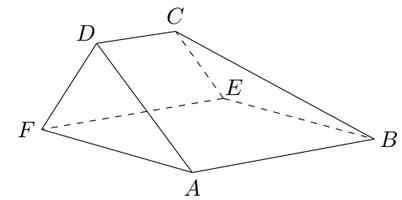
(1) 求 C;

(2) 若 $c=\sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

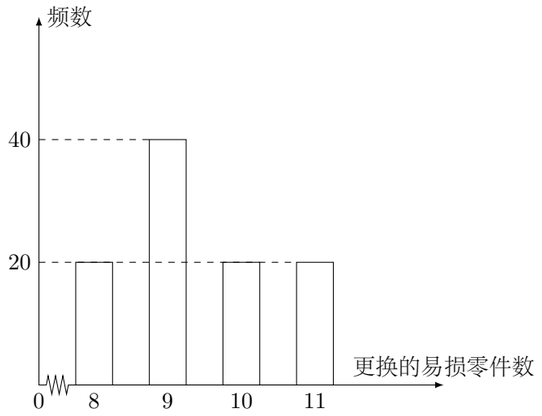
18. 如图, 在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中, 面 $ABEF$ 为正方形, $AF=2FD$, $\angle AFD=90^\circ$, 且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 60°.

(1) 证明: 平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$;

(2) 求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值.



19. 某公司计划购买 2 台机器, 该种机器使用三年后即被淘汰, 机器有一易损零件, 在购进机器时, 可以额外购买这种零件作为备件, 每个 200 元. 在机器使用期间, 如果备件不足再购买, 则每个 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件, 为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数, 得下面柱状图:



以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率, 记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数, n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数.

(1) 求 X 的分布列;

(2) 若要求 $P(X \leqslant n) \geqslant 0.5$, 确定 n 的最小值;

(3) 以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据, 在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一, 应选用哪个?

20. 设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A, 直线 l 过点 $B(1,0)$ 且与 x 轴不重合, l 交圆 A 于 C, D 两点, 过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

(1) 证明 $|EA|+|EB|$ 为定值, 并写出点 E 的轨迹方程;

(2) 设点 E 的轨迹为曲线 C_1, 直线 l 交 C_1 于 M, N 两点, 过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P, Q 两点, 求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

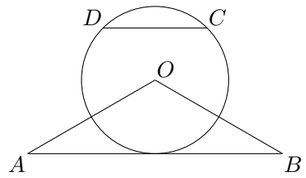
(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1+x_2<2$.

22. 如图, $\triangle OAB$ 是等腰三角形, $\angle AOB=120^\circ$, 以 O 为圆心, $\dfrac{1}{2}OA$ 为半径作圆.

(1) 证明: 直线 AB 与 $\odot O$ 相切;

(2) 点 C, D 在 $\odot O$ 上, 且 A, B, C, D 四点共圆, 证明: $AB \parallel CD$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=1+a\sin t \end{cases}$ (t 为参数, $a>0$). 在以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 C_2: $\rho=4\cos\theta$.

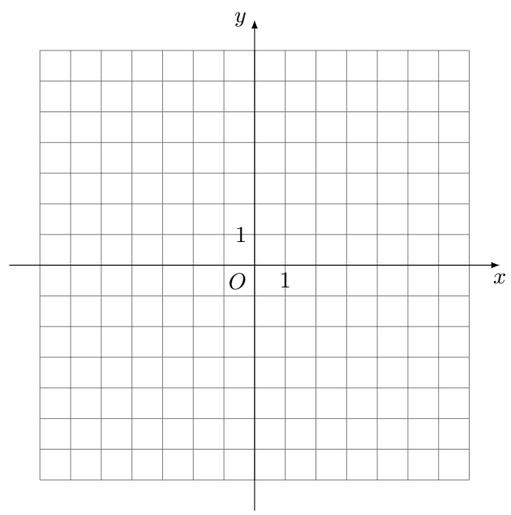
(1) 说明 C_1 是哪种曲线, 并将 C_1 的方程化为极坐标方程;

(2) 直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$, 其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$, 若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上, 求 a.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.

(1) 在图中画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 求不等式 $|f(x)|>1$ 的解集.



2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 5\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{1,3\}$ (B) $\{3,5\}$ (C) $\{5,7\}$ (D) $\{1,7\}$

2. 设 $(1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 的实部与虚部相等, 其中 a 为实数, 则 $a=$ （ ）

(A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3

3. 为美化环境, 从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中, 余下的 2 种花种在另一个花坛中, 则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{5}{6}$

4. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $a=\sqrt{5}$, $c=2$, $\cos A=\dfrac{2}{3}$, 则 $b=$ （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3

5. 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点, 若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\dfrac{1}{4}$, 则该椭圆的离心率为 （ ）

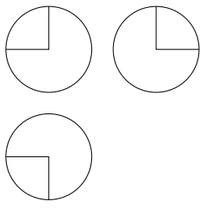
(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

6. 将函数 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{1}{4}$ 个周期后, 所得图象对应的函数为 （ ）

(A) $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (B) $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(C) $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ (D) $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. 如图, 某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\dfrac{28\pi}{3}$, 则它的表面积是 （ ）



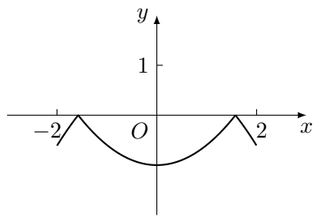
(A) 17π (B) 18π (C) 20π (D) 28π

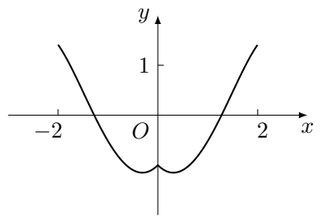
8. 若 $a>b>0$, $0<c<1$, 则 （ ）

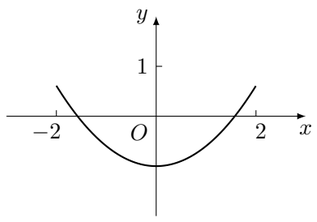
(A) $\log_a c<\log_b c$ (B) $\log_c a<\log_c b$

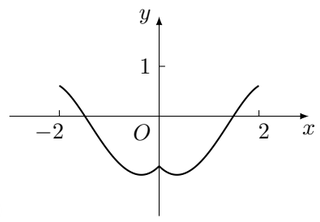
(C) $a^c<b^c$ (D) $c^a>c^b$

9. 函数 $y=2x^2-\mathrm{e}^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图象大致为 （ ）

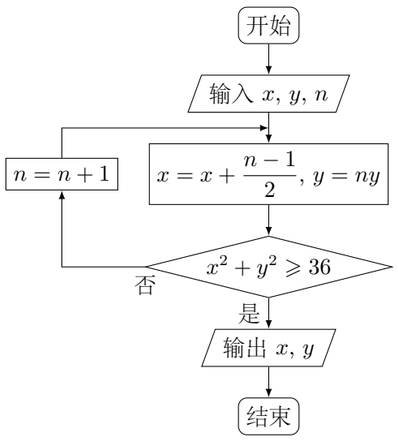
(A)


(B)


(C)


(D)


10. 执行下面的程序图, 如果输入的 $x=0$, $y=1$, $n=1$, 则输出 x, y 的值满足 （ ）



(A) $y=2x$ (B) $y=3x$ (C) $y=4x$ (D) $y=5x$

11. 平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A, $\alpha\parallel$ 平面 CB_1D_1, $\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$, $\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$, 则 m, n 所成角的正弦值为（ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

12. 若函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,1]$ (B) $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$ (C) $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$ (D) $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right]$

二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,x+1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $x=$_____.

14. 已知 θ 是第四象限角, 且 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=$_____.

15. 设直线 $y=x+2a$ 与圆 C: $x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB|=2\sqrt{3}$, 则圆 C 的面积为_____.

16. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B, 需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品 A 需要甲材料 1.5 kg, 乙材料 1 kg, 用 5 个工时; 生产一件产品 B 需要甲材料 0.5 kg, 乙材料 0.3 kg, 用 3 个工时, 生产一件产品 A 的利润为 2100 元, 生产一件产品 B 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150 kg, 乙材料 90 kg, 则在不超过 600 个工时的条件下, 生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为_____元.

三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, $b_2=\dfrac{1}{3}$, $a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.

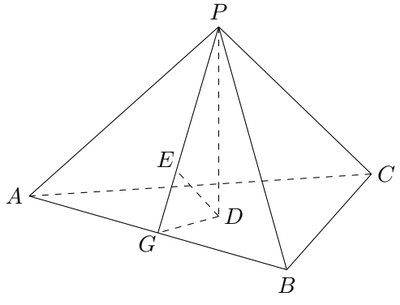
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

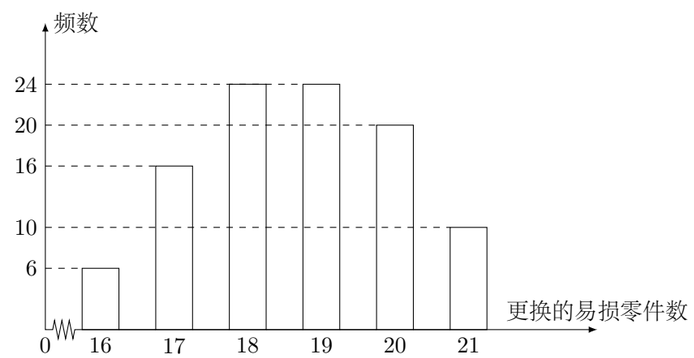
18. 如图, 在已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是直角三角形, $PA=6$, 顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D, D 在平面 PAB 内的正投影为点 E, 连接 PE 并延长交 AB 于点 G.

(1) 证明 G 是 AB 的中点;

(2) 如图, 在图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F (说明做法及理由), 并求四面体 $PDEF$ 的体积.



19. 某公司计划购买 1 台机器, 该种机器使用三年后即被淘汰, 机器有一易损零件, 在购进机器时, 可以额外购买这种零件作为备件, 每个 200 元. 在机器使用期间, 如果备件不足再购买, 则每个 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件, 为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年试用期内更换的易损零件数, 得下面柱状图:



记 x 表示 1 台机器在三年试用期内需更换的易损零件数, y 表示 1 台机器在购买易损零件上所需的费用 (单位: 元), n 表示购机的同时购买的易损零件数.

(1) 若 $n=19$, 求 y 与 x 的函数解析式;

(2) 若要求"需更换的易损零件数不大于 n"的频率不小于 0.5, 求 n 的最小值;

(3) 假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件或每台都购买 20 个易损零件, 分别计算这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数, 以此作为决策依据, 购买 1 台机器的同时应购买 19 个还是 20 个易损零件?

20. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l: $y=t$ $(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M, 交抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 于点 P, M 关于点 P 的对称点为 N, 连接 ON 并延长交 C 于点 H.

(1) 求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$;

(2) 除 H 以外, 直线 MH 与抛物线 C 是否有其它公共点? 说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=(x-2)\,\mathrm{e}^x+a\,(x-1)^2$.

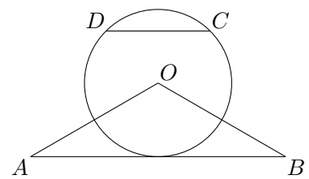
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

22. 如图, $\triangle OAB$ 是等腰三角形, $\angle AOB=120^\circ$, 以 O 为圆心, $\dfrac{1}{2}OA$ 为半径作圆.

(1) 证明: 直线 AB 与 $\odot O$ 相切;

(2) 点 C, D 在 $\odot O$ 上, 且 A, B, C, D 四点共圆, 证明: $AB\parallel CD$.



23. 在直线坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=1+a\sin t\end{cases}$ (t 为参数, $a>0$). 在以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 C_2: $\rho=4\cos\theta$.

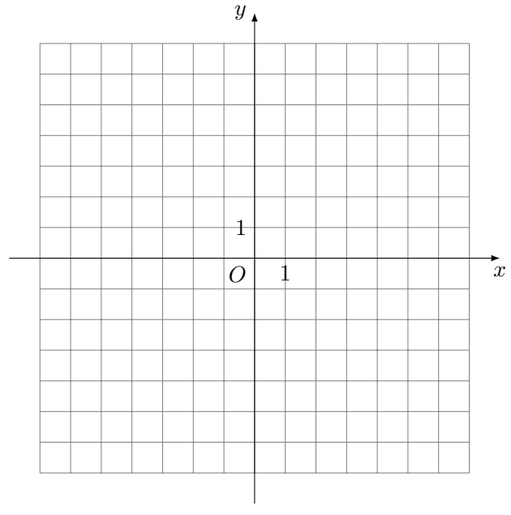
(1) 说明 C_1 是哪种曲线, 并将 C_1 的方程化为极坐标方程;

(2) 直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$, 其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$, 若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上, 求 a.

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.

(1) 在图中画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 求不等式 $|f(x)|>1$ 的解集.



2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $z=(m+3)+(m-1)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点在第四象限, 则实数 m 的取值范围是 （ ）

(A) $(-3,1)$ (B) $(-1,3)$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $(-\infty,-3)$

2. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x\,|\,(x+1)(x-2)<0, x\in\mathbf{Z}\}$, 则 $A\cup B=$ （ ）

(A) $\{1\}$ (B) $\{1,2\}$ (C) $\{0,1,2,3\}$ (D) $\{-1,0,1,2,3\}$

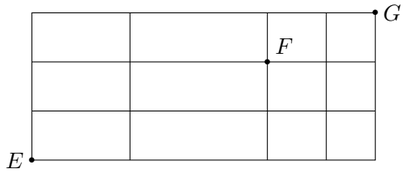
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$, $\boldsymbol{b}=(3,-2)$, 且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$ （ ）

(A) -8 (B) -6 (C) 6 (D) 8

4. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1, 则 $a=$ （ ）

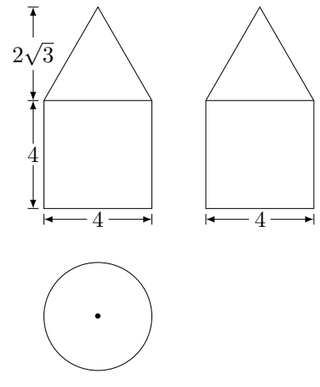
(A) $-\dfrac{4}{3}$ (B) $-\dfrac{3}{4}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

5. 如图, 小明从街道的 E 处出发, 先到 F 处与小红会合, 再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动, 则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为 （ ）



(A) 24 (B) 18 (C) 12 (D) 9

6. 如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图, 则该几何体的表面积为 （ ）



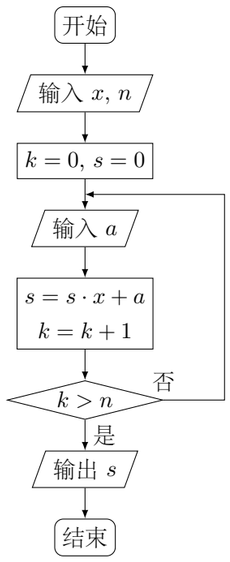
(A) 20π (B) 24π (C) 28π (D) 32π

7. 若将函数 $y=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度, 则平移后图象的对称轴为 （ ）

(A) $x=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$ (B) $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$

(C) $x=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}\ (k\in\mathbf{Z})$ (D) $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\ (k\in\mathbf{Z})$

8. 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法, 如图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图, 若输入的 $x=2$, $n=2$, 依次输入的 a 为 2, 2, 5, 则输出的 $s=$ （ ）



(A) 7 (B) 12 (C) 17 (D) 34

9. 若 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha=$ （ ）

(A) $\dfrac{7}{25}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $-\dfrac{1}{5}$ (D) $-\dfrac{7}{25}$

10. 从区间 $[0,1]$ 随机抽取 $2n$ 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$, 构成 n 个数对 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots, (x_n,y_n)$, 其中两数的平方和小于 1 的数对共有 m 个, 则用随机模拟的方法得到的圆周率的近似值为 （ ）

(A) $\dfrac{4n}{m}$ (B) $\dfrac{2n}{m}$ (C) $\dfrac{4m}{n}$ (D) $\dfrac{2m}{n}$

11. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点, 点 M 在 E 上, MF_1 与 x 轴垂直, $\sin\angle MF_2F_1=\dfrac{1}{3}$, 则 E 的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

12. 已知函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$, 若函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots, (x_m,y_m)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$（ ）

(A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

二、填空题

13. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\cos C=\dfrac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b=$_____.

14. α, β 是两个平面, m, n 是两条线, 有下列四个命题:
① 如果 $m\perp n$, $m\perp\alpha$, $n\parallel\beta$, 那么 $\alpha\perp\beta$;
② 如果 $m\perp\alpha$, $n\parallel\alpha$, 那么 $m\perp n$;
③ 如果 $\alpha\parallel\beta$, $m\subset\alpha$, 那么 $m\parallel\beta$;
④ 如果 $m\parallel n$, $\alpha\parallel\beta$, 那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.
则上述四个命题中真命题的是_____.

15. 有三张卡片, 分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: “我与乙的卡片上相同的数字不是 2”, 乙看了丙的卡片后说: “我与丙的卡片上相同的数字不是 1”, 丙说: “我的卡片上的数字之和不是 5”, 则甲的卡片上的数字是_____.

16. 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线, 也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线, $b=$_____.

三、解答题

17. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1=1$, $S_7=28$. 记 $b_n=[\lg a_n]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9]=0$, $[\lg 99]=1$.
(1) 求 b_1, b_{11}, b_{101};
(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 1000 项和.

18. 某险种的基本保费为 a (单位: 元), 继续购买该险种的投保人称为续保人, 续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下:

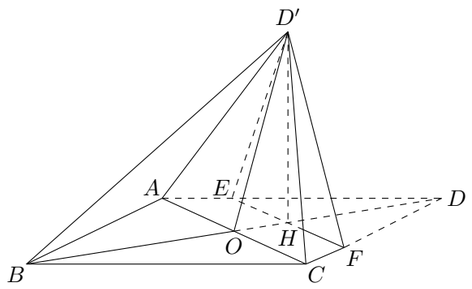
上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

设该险种一续保人一年内出险次数与相应概率如下:

一年内出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
概率	0.30	0.15	0.20	0.20	0.10	0.05

(1) 求一续保人本年度的保费高于基本保费的概率;
(2) 若一续保人本年度的保费高于基本保费, 求其保费比基本保费高出 60% 的概率;
(3) 求续保人本年度的平均保费与基本保费的比值.

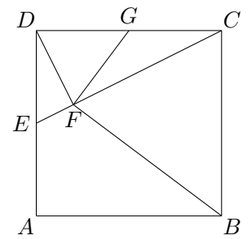
19. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O, $AB=5$, $AC=6$, 点 E, F 分别在 AD, CD 上, $AE=CF=\dfrac{5}{4}$, EF 交 BD 于点 H. 将三角形 DEF 沿 EF 折到三角形 $D'EF$ 的位置 $OD'=\sqrt{10}$.
(1) 证明: $D'H\perp$ 平面 $ABCD$;
(2) 求二面角 $B-D'A-C$ 的正弦值.



20. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上, A 是 E 的左顶点, 斜率为 k $(k>0)$ 的直线交 E 于 A, M 两点, 点 N 在 E 上, $MA\perp NA$.
(1) 当 $t=4$, $|AM|=|AN|$ 时, 求三角形 AMN 的面积;
(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时, 求 k 的取值范围.

21. (1) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\cdot \mathrm{e}^x$ 的单调性, 并证明当 $x>0$ 时, $(x-2)\,\mathrm{e}^x+x+2>0$;
(2) 证明: 当 $a\in[0,1)$ 时, 函数 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-ax-a}{x^2}$ $(x>0)$ 有最小值. 设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$, 求函数 $h(a)$ 的值域.

22. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, G 分别在边 DA, DC 上 (不与端点重合), 且 $DE=DG$, 过 D 点作 $DF\perp CE$, 垂足为 F.
(1) 证明: B, C, G, F 四点共圆;
(2) 若 $AB=1$, E 为 DA 的中点, 求四边形 $BCGF$ 的面积.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$.
(1) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求圆 C 的极坐标方程;
(2) 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, $|AB|=\sqrt{10}$, 求 l 的斜率.

24. 已知函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$, M 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.
(1) 求 M;
(2) 证明: 当 a, $b\in M$ 时, $|a+b|<|1+ab|$.

2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x\mid x^2<9\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

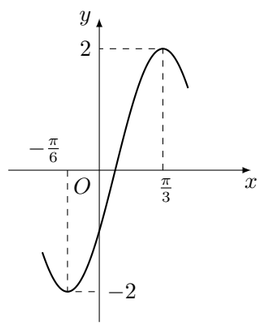
(A) $\{-2,-1,0,1,2,3\}$　(B) $\{-2,-1,0,1,2\}$

(C) $\{1,2,3\}$　(D) $\{1,2\}$

2. 设复数 z 满足 $z+\mathrm{i}=3-\mathrm{i}$, 则 $\overline{z}=$ （　）

(A) $-1+2\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) $3+2\mathrm{i}$　(D) $3-2\mathrm{i}$

3. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 （　）



(A) $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$　(B) $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

(C) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　(D) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

4. 体积为 8 的正方体的顶点都在同一球面上, 则该球面的表面积为 （　）

(A) 12π　(B) $\dfrac{32}{3}\pi$　(C) 8π　(D) 4π

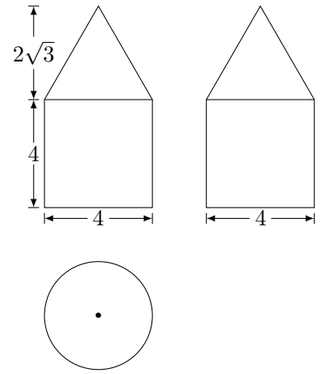
5. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点, 曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$ 与 C 交于点 P, $PF\perp x$, 则 $k=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) 2

6. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1, 则 $a=$ （　）

(A) $-\dfrac{4}{3}$　(B) $-\dfrac{3}{4}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

7. 如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图, 则该几何体的表面积为 （　）

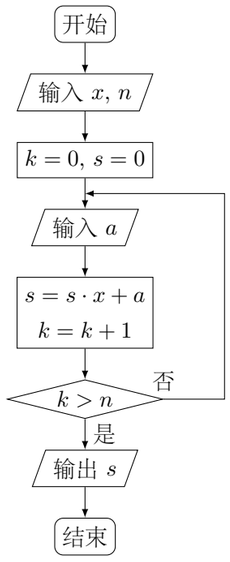


(A) 20π　(B) 24π　(C) 28π　(D) 32π

8. 某路口人行横道的信号灯为红灯和绿灯交替出现, 红灯持续时间为 40 秒. 若一名行人来到该路口遇到红灯, 则至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为 （　）

(A) $\dfrac{7}{10}$　(B) $\dfrac{5}{8}$　(C) $\dfrac{3}{8}$　(D) $\dfrac{3}{10}$

9. 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法, 如图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图, 若输入的 $x=2$, $n=2$, 依次输入的 a 为 2, 2, 5, 则输出的 $s=$ （　）



(A) 7　(B) 12　(C) 17　(D) 34

10. 下列函数中, 其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 （　）

(A) $y=x$　(B) $y=\lg x$　(C) $y=2^x$　(D) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

11. 函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 的最大值为 （　）

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

12. 已知函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$, 若函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots$, (x_m,y_m), 则 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=$（　）

(A) 0　(B) m　(C) $2m$　(D) $4m$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,4)$, $\boldsymbol{b}=(3,-2)$, 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $m=$_____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y-3\geqslant 0\\ x-3\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x-2y$ 的最小值为_____.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\cos C=\dfrac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b=$_____.

16. 有三张卡片, 分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: “我与乙的卡片上相同的数字不是 2”, 乙看了丙的卡片后说: “我与丙的卡片上相同的数字不是 1”, 丙说: “我的卡片上的数字之和不是 5”, 则甲的卡片上的数字是_____.

三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+a_4=4$, $a_5+a_7=6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=[a_n]$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9]=0$, $[2.6]=2$.

18. 某险种的基本保费为 a (单位: 元), 继续购买该险种的投保人称为续保人, 续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下:

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的 200 名续保人在一年内的出险情况, 得到如下统计表:

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
频数	60	50	30	30	20	10

(1) 记 A 为事件: “一续保人本年度的保费不高于基本保费”. 求 $P(A)$ 的估计值;

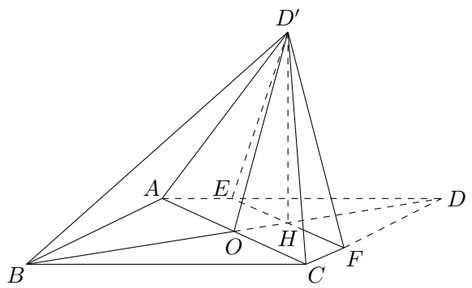
(2) 记 B 为事件: “一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%”. 求 $P(B)$ 的估计值;

(2) 求续保人本年度的平均保费估计值.

19. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O, 点 E, F 分别在 AD, CD 上, $AE=CF$, EF 交 BD 于点 H, 将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置.

(1) 证明: $AC\perp HD'$;

(2) 若 $AB=5$, $AC=6$, $AE=\dfrac{5}{4}$, $OD'=2\sqrt{2}$, 求五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积.



20. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

(1) 当 $a=4$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f(x)>0$, 求 a 的取值范围.

21. 已知点 A 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左顶点, 斜率为 k $(k>0)$ 的直线交椭圆 E 于 A, M 两点, 点 N 在 E 上, $MA\perp NA$.

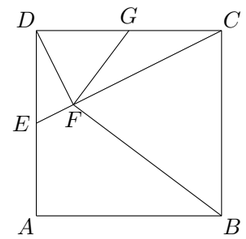
(1) 当 $|AM|=|AN|$ 时, 求三角形 AMN 的面积;

(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时, 证明: $\sqrt{3}<k<2$.

22. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, G 分别在边 DA, DC 上 (不与端点重合), 且 $DE=DG$, 过 D 点作 $DF\perp CE$, 垂足为 F.

(1) 证明: B, C, G, F 四点共圆;

(2) 若 $AB=1$, E 为 DA 的中点, 求四边形 $BCGF$ 的面积.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$.

(1) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求圆 C 的极坐标方程;

(2) 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, $|AB|=\sqrt{10}$, 求 l 的斜率.

24. 已知函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$, M 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.

(1) 求 M;

(2) 证明: 当 a, $b\in M$ 时, $|a+b|<|1+ab|$.

2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $S=\{x\,|\,(x-2)(x-3)\geqslant 0\}$, $T=\{x\,|\,x>0\}$, 则 $S\cap T=$ （　）

(A) $[2,3]$　　(B) $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

(C) $[3,+\infty)$　　(D) $(0,2]\cup[3,+\infty)$

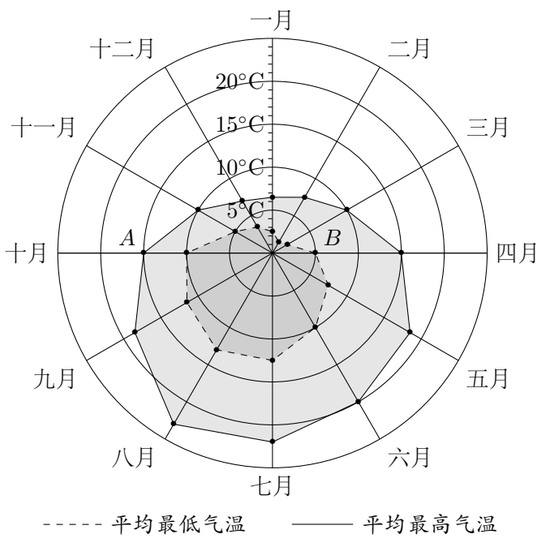
2. 若 $z=1+2\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{4\mathrm{i}}{z\bar{z}-1}=$ （　）

(A) 1　　(B) -1　　(C) i　　(D) $-\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\angle ABC=$ （　）

(A) 30°　　(B) 45°　　(C) 60°　　(D) 120°

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况, 绘制了一年中月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15°C, B 点表示四月的平均最低气温约为 5°C. 下面叙述不正确的是 （　）



(A) 各月的平均最低气温都在 0°C 以上

(B) 七月的平均温差比一月的平均温差大

(C) 三月和十一月的平均最高气温基本相同

(D) 平均气温高于 20°C 的月份有 5 个

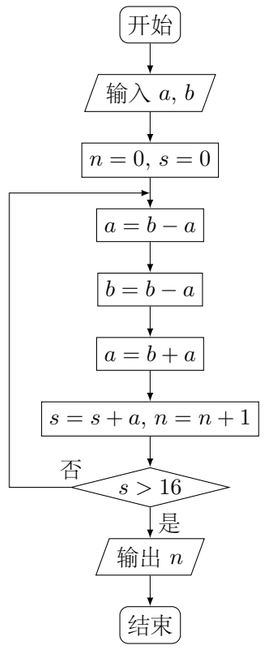
5. 若 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$, 则 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=$ （　）

(A) $\dfrac{64}{25}$　　(B) $\dfrac{48}{25}$　　(C) 1　　(D) $\dfrac{16}{25}$

6. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=4^{\frac{2}{5}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则 （　）

(A) $b<a<c$　　(B) $a<b<c$　　(C) $b<c<a$　　(D) $c<a<b$

7. 执行下图的程序框图, 如果输入的 $a=4$, $b=6$, 那么输出的 $n=$ （　）

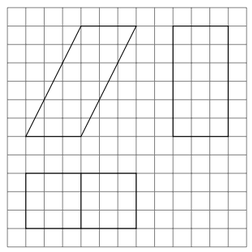


(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=\dfrac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$, 则 $\cos A=$ （　）

(A) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　(C) $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　(D) $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

9. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为 （　）



(A) $18+36\sqrt{5}$　　(B) $54+18\sqrt{5}$　　(C) 90　　(D) 81

10. 在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球, 若 $AB\perp BC$, $AB=6$, $BC=8$, $AA_1=3$, 则 V 的最大值是 （　）

(A) 4π　　(B) $\dfrac{9\pi}{2}$　　(C) 6π　　(D) $\dfrac{32\pi}{3}$

11. 已知 O 为坐标原点, F 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点, A, B 分别为 C 的左、右顶点, P 为 C 上一点, 且 $PF\perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M, 与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中点, 则 C 的离心率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $\dfrac{3}{4}$

12. 定义“规范 01 数列”$\{a_n\}$ 如下: $\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项, 其中 m 项为 0, m 项为 1, 且对任意 $k\leqslant 2m$, a_1, a_2, $\cdots$, a_k 中 0 的个数不少于 1 的个数. 若 $m=4$, 则不同的“规范 01 数列”共有 （　）

(A) 18 个　　(B) 16 个　　(C) 14 个　　(D) 12 个

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x-2y\leqslant 0\\ x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

14. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图象至少向右平移_____个单位长度得到.

15. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x<0$ 时, $f(x)=\ln(-x)+3x$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,-3)$ 处的切线方程是_____.

16. 已知直线 $l:mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A, B 两点, 过 A, B 分别做 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点, 若 $AB=2\sqrt{3}$, 则 $|CD|=$_____.

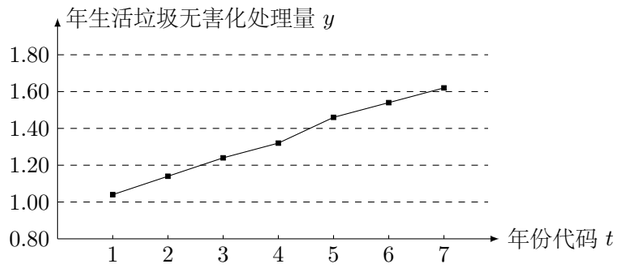
三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1+\lambda a_n$, 其中 $\lambda\neq 0$;

(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列, 并求其通项公式;

(2) 若 $S_5=\dfrac{31}{32}$, 求 λ.

18. 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量 (单位: 亿吨) 的折线图.



注: 年份代码 1 – 7 分别对应年份 2008 – 2014

(1) 由折线图看出, 可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系, 请用相关系数加以说明;

(2) 建立 y 关于 t 的回归方程 (系数精确到 0.01), 预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据: $\sum\limits_{i=1}^{7} y_i = 9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7} (y_i - \overline{y})^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

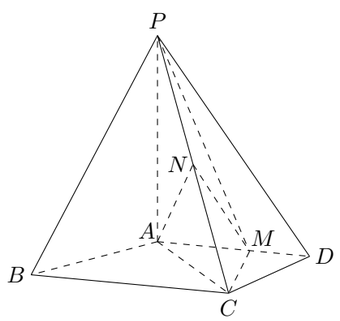
参考公式: 相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})^2 \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}}$.

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为: $\hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})(y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})^2}$, $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{t}$.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, M 为线段 AD 上一点, $AM = 2MD$, N 为 PC 的中点.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 PAB;

(2) 求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.



20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 F, 平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点, 交 C 的准线于 P, Q 两点.

(1) 若 F 在线段 AB 上, R 是 PQ 的中点, 证明 $AR \parallel FQ$;

(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍, 求 AB 中点的轨迹方程.

21. 设函数 $f(x) = \alpha \cos 2x + (\alpha - 1)(\cos x + 1)$, 其中 $\alpha > 0$, $|f(x)|$ 的最大值为 A.

(1) 求 $f'(x)$;

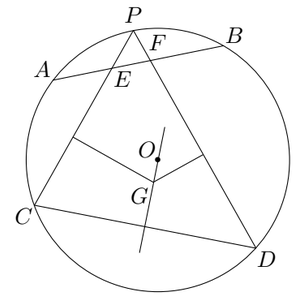
(2) 求 A;

(3) 证明 $|f'(x)| \leqslant 2A$.

22. 如图, $\odot O$ 中 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 P, 弦 PC, PD 分别交 AB 于 E, F 两点.

(1) 若 $\angle PFB = 2\angle PCD$, 求 $\angle PCD$ 的大小;

(2) 若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G, 证明 $OG \perp CD$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

(1) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 P 在 C_1 上, 点 Q 在 C_2 上, 求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

24. 已知函数 $f(x) = |2x - a| + a$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leqslant 6$ 的解集;

(2) 设函数 $g(x) = |2x - 1|$, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) + g(x) \geqslant 3$, 求 a 的取值范围.

2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{0,2,4,6,8,10\}$, $B=\{4,8\}$, 则 $\complement_A B=$ （ ）

(A) $\{4,8\}$　(B) $\{0,2,6\}$

(C) $\{0,2,6,10\}$　(D) $\{0,2,4,6,8,10\}$

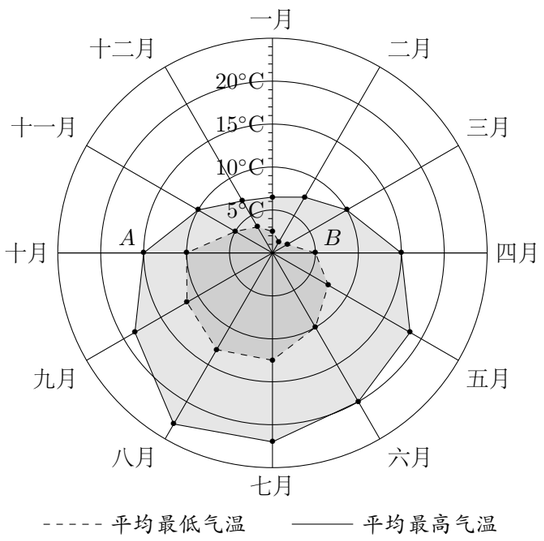
2. 若 $z=4+3\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{\overline{z}}{|z|}=$ （ ）

(A) 1　(B) -1　(C) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　(D) $\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\angle ABC=$ （ ）

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 120°

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况, 绘制了一年中月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15°C, B 点表示四月的平均最低气温约为 5°C. 下面叙述不正确的是 （ ）



(A) 各月的平均最低气温都在 0°C 以上

(B) 七月的平均温差比一月的平均温差大

(C) 三月和十一月的平均最高气温基本相同

(D) 平均气温高于 20°C 的月份有 5 个

5. 小敏打开计算机时, 忘记了开机密码的前两位, 只记得第一位是 M, I, N 中的一个字母, 第二位是 1, 2, 3, 4, 5 中的一个数字, 则小敏输入一次密码能够成功开机的概率是 （ ）

(A) $\dfrac{8}{15}$　(B) $\dfrac{1}{8}$　(C) $\dfrac{1}{15}$　(D) $\dfrac{1}{30}$

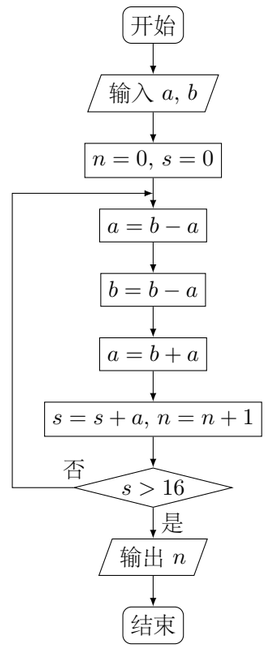
6. 若 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos 2\theta=$ （ ）

(A) $-\dfrac{4}{5}$　(B) $-\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

7. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=3^{\frac{2}{3}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则 （ ）

(A) $b<a<c$　(B) $a<b<c$　(C) $b<c<a$　(D) $c<a<b$

8. 执行下图的程序框图, 如果输入的 $a=4$, $b=6$, 那么输出的 $n=$ （ ）

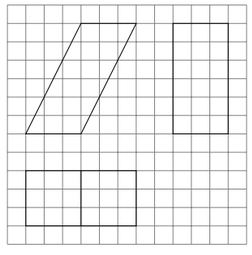


(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=\dfrac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$, 则 $\sin A=$ （ ）

(A) $\dfrac{3}{10}$　(B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(D) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

10. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为 （ ）



(A) $18+36\sqrt{5}$　(B) $54+18\sqrt{5}$　(C) 90　(D) 81

11. 在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球, 若 $AB\perp BC$, $AB=6$, $BC=8$, $AA_1=3$, 则 V 的最大值是 （ ）

(A) 4π　(B) $\dfrac{9\pi}{2}$　(C) 6π　(D) $\dfrac{32\pi}{3}$

12. 已知 O 为坐标原点, F 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点, A, B 分别为 C 的左、右顶点, P 为 C 上一点, 且 $PF\perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M, 与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中点, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y+1\geqslant 0\\ x-2y-1\leqslant 0\\ x\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=2x+3y-5$ 的最小值为_____.

14. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=2\sin x$ 的图象至少向右平移_____个单位长度得到.

15. 已知直线 $l:x-\sqrt{3}y+6=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A, B 两点, 过 A, B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点, 则 $|CD|=$_____.

16. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x\leqslant 0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^{-x-1}-x$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是_____.

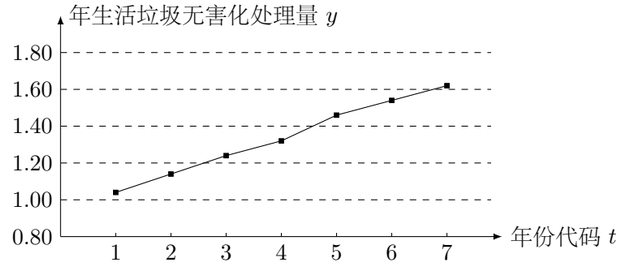
三、解答题

17. 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$.

(1) 求 a_2, a_3;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量 (单位: 亿吨) 的折线图.



注: 年份代码 1 – 7 分别对应年份 2008 – 2014

(1) 由折线图看出, 可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系, 请用相关系数加以说明;

(2) 建立 y 关于 t 的回归方程 (系数精确到 0.01), 预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据: $\sum\limits_{i=1}^{7} y_i = 9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7} (y_i - \overline{y})^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

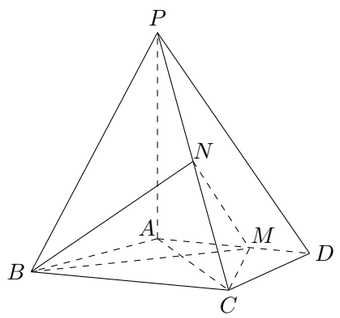
参考公式: 相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})^2 \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}}$.

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为: $\hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})(y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})^2}$, $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{t}$.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD /\!/ BC$, $AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, M 为线段 AD 上一点, $AM = 2MD$, N 为 PC 的中点.

(1) 证明: $MN /\!/$ 平面 PAB;

(2) 求四面体 $N-BCM$ 的体积.



20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 F, 平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点, 交 C 的准线于 P, Q 两点.

(1) 若 F 在线段 AB 上, R 是 PQ 的中点, 证明 $AR /\!/ FQ$;

(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍, 求 AB 中点的轨迹方程.

21. 设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

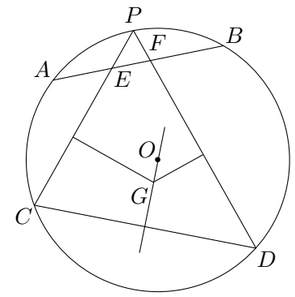
(2) 证明当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$;

(3) 设 $c > 1$, 证明当 $x \in (0, 1)$ 时, $1 + (c-1)x > c^x$.

22. 如图, $\odot O$ 中 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 P, 弦 PC, PD 分别交 AB 于 E, F 两点.

(1) 若 $\angle PFB = 2\angle PCD$, 求 $\angle PCD$ 的大小;

(2) 若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G, 证明 $OG \perp CD$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

(1) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 P 在 C_1 上, 点 Q 在 C_2 上, 求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

24. 已知函数 $f(x) = |2x - a| + a$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leqslant 6$ 的解集;

(2) 设函数 $g(x) = |2x - 1|$, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) + g(x) \geqslant 3$, 求 a 的取值范围.

2016 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

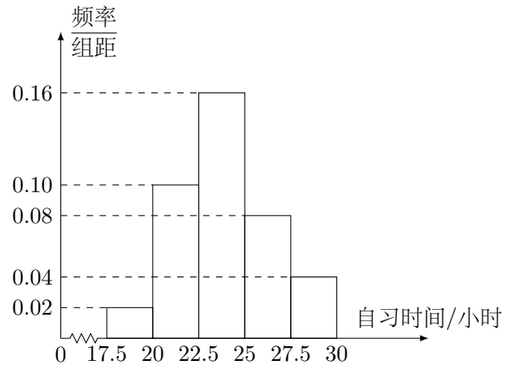
1. 若复数 z 满足 $2z+\overline{z}=3-2\mathrm{i}$ 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$ （　）

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) $-1+2\mathrm{i}$　(D) $-1-2\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{y\mid y=2^x, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid x^2-1<0\}$, 则 $A\cup B=$ （　）

(A) $(-1,1)$　(B) $(0,1)$　(C) $(-1,+\infty)$　(D) $(0,+\infty)$

3. 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $[17.5,30]$, 样本数据分组为 $[17.5,20)$, $[20,22.5)$, $[22.5,25)$, $[25,27.5)$, $[27.5,30]$. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 （　）

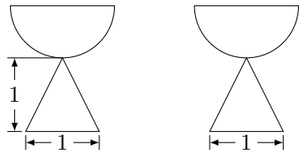


(A) 56　(B) 60　(C) 120　(D) 140

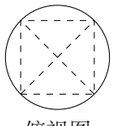
4. 若变量 x, y 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant 2\\ 2x-3y\leqslant 9\\ x\geqslant 0\end{cases}$, 则 x^2+y^2 的最大值是 （　）

(A) 4　(B) 9　(C) 10　(D) 12

5. 一个由半球和四棱锥组成的几何体, 其三视图如图所示. 则该几何体的体积为 （　）



正 (主) 视图　侧 (左) 视图



俯视图

(A) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi$　(B) $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　(C) $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$　(D) $1+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

6. 已知直线 a, b 分别在两个不同的平面 α, β 内. 则“直线 a 和直线 b 相交”是“平面 α 和平面 β 相交”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 函数 $f(x)=\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)$ 的最小正周期是 （　）

(A) $\frac{\pi}{2}$　(B) π　(C) $\frac{3\pi}{2}$　(D) 2π

8. 已知非零向量 $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ 满足 $4|\boldsymbol{m}|=3|\boldsymbol{n}|$, $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{1}{3}$. 若 $\boldsymbol{n}\perp(t\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$, 则实数 t 的值为 （　）

(A) 4　(B) -4　(C) $\frac{9}{4}$　(D) $-\frac{9}{4}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 当 $x<0$ 时, $f(x)=x^3-1$; 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(-x)=-f(x)$; 当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 则 $f(6)=$ （　）

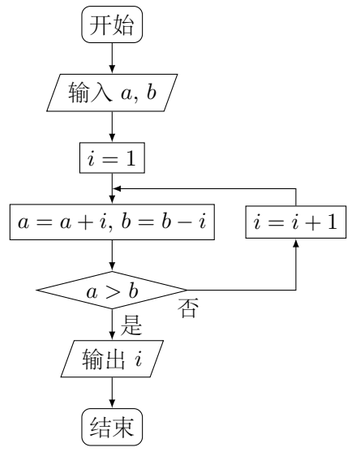
(A) -2　(B) -1　(C) 0　(D) 2

10. 若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点, 使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y=f(x)$ 具有 T 性质. 下列函数中具有 T 性质的是（　）

(A) $y=\sin x$　(B) $y=\ln x$　(C) $y=\mathrm{e}^x$　(D) $y=x^3$

二、填空题

11. 执行如图的程序框图, 若输入的 a, b 的值分别为 0 和 9, 则输出的 i 的值为_____.



12. 若 $\left(ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中 x^5 的系数是 -80, 则实数 $a=$_____.

13. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$, 若矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上, AB, CD 的中点为 E 的两个焦点, 且 $2|AB|=3|BC|$, 则 E 的离心率是_____.

14. 在 $[-1,1]$ 上随机地取一个数 k, 则事件“直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 相交”发生的概率为_____.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\leqslant m\\ x^2-2mx+4m, & x>m\end{cases}$, 其中 $m>0$, 若存在实数 b, 使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根, 则 m 的取值范围是_____.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $2(\tan A+\tan B)=\frac{\tan A}{\cos B}+\frac{\tan B}{\cos A}$.

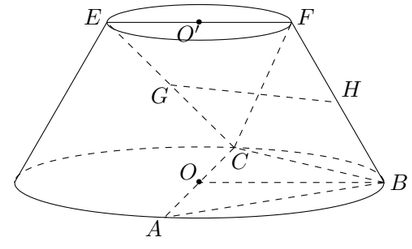
(1) 证明: $a+b=2c$;

(2) 求 $\cos C$ 的最小值.

17. 在如图所示的圆台中, AC 是下底面圆 O 的直径, EF 是上底面圆 O' 的直径, FB 是圆台的一条母线.

(1) 已知 G, H 分别为 EC, FB 的中点, 求证: $GH\parallel$ 平面 ABC;

(2) 已知 $EF=FB=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$, $AB=BC$. 求二面角 $F-BC-A$ 的余弦值.



18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动, 每轮活动由甲、乙各猜一个成语, 在一轮活动中, 如果两人都猜对, 则“星队”得 3 分; 如果只有一个人猜对, 则“星队”得 1 分; 如果两人都没猜对, 则“星队”得 0 分. 已知甲每轮猜对的概率是 $\dfrac{3}{4}$, 乙每轮猜对的概率是 $\dfrac{2}{3}$; 每轮活动中甲、乙猜对与否互不影响. 各轮结果亦互不影响. 假设“星队”参加两轮活动, 求:

(1) “星队”至少猜对 3 个成语的概率;

(2) “星队”两轮得分之和为 X 的分布列和数学期望 EX.

20. 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \dfrac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a = 1$ 时, 证明 $f(x) > f'(x) + \dfrac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 成立.

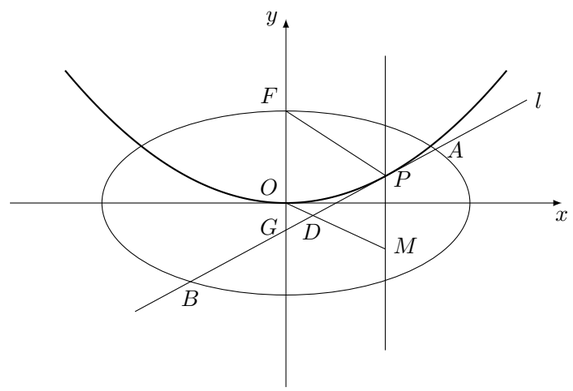
21. 平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 抛物线 $E: x^2 = 2y$ 的焦点 F 是 C 的一个顶点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 P 是 E 上的动点, 且位于第一象限, E 在点 P 处的切线 l 与 C 交于不同的两点 A, B, 线段 AB 的中点为 D, 直线 OD 与过 P 且垂直于 x 轴的直线交于点 M.

① 求证: 点 M 在定直线上;

② 直线 l 与 y 轴交于点 G, 记 $\triangle PFG$ 的面积为 S_1, $\triangle PDM$ 的面积为 S_2, 求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最大值及取得最大值时点 P 的坐标.



2016 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

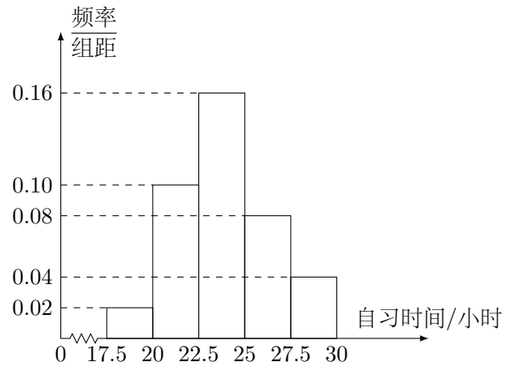
1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{3,4,5\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ （ ）

(A) $\{2,6\}$　(B) $\{3,6\}$　(C) $\{1,3,4,5\}$　(D) $\{1,2,4,6\}$

2. 若复数 $z=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $\overline{z}=$ （ ）

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

3. 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $[17.5,30]$, 样本数据分组为 $[17.5,20)$, $[20,22.5)$, $[22.5,25)$, $[25,27.5)$, $[27.5,30]$. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 （ ）

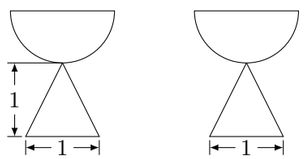


(A) 56　(B) 60　(C) 120　(D) 140

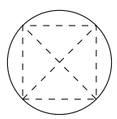
4. 若变量 x, y 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant 2\\ 2x-3y\leqslant 9\\ x\geqslant 0\end{cases}$, 则 x^2+y^2 的最大值是 （ ）

(A) 4　(B) 9　(C) 10　(D) 12

5. 一个由半球和四棱锥组成的几何体, 其三视图如图所示. 则该几何体的体积为 （ ）



正 (主) 视图　侧 (左) 视图



俯视图

(A) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\pi$　(B) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$　(C) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$　(D) $1+\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$

6. 已知直线 a, b 分别在两个不同的平面 α, β 内. 则“直线 a 和直线 b 相交”是“平面 α 和平面 β 相交”的 （ ）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 已知圆 $M:x^2+y^2-2ay=0$ $(a>0)$ 截直线 $x+y=0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$, 则圆 M 与圆 $N:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的位置关系是 （ ）

(A) 内切　(B) 相交　(C) 外切　(D) 相离

8. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c, 已知 $b=c$, $a^2=2b^2(1-\sin A)$, 则 $A=$ （ ）

(A) $\dfrac{3\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 当 $x<0$ 时, $f(x)=x^3-1$; 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(-x)=-f(x)$; 当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时, $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$. 则 $f(6)=$ （ ）

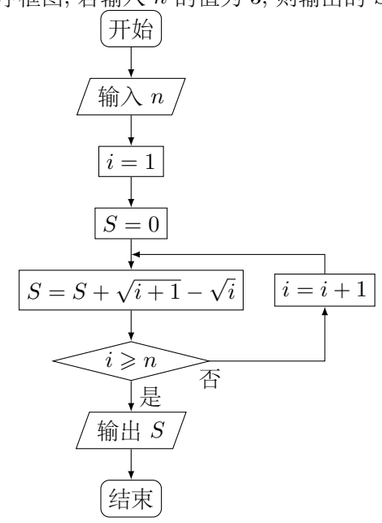
(A) -2　(B) -1　(C) 0　(D) 2

10. 若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点, 使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y=f(x)$ 具有 T 性质. 下列函数中具有 T 性质的是( )

(A) $y=\sin x$　(B) $y=\ln x$　(C) $y=\mathrm{e}^x$　(D) $y=x^3$

二、填空题

11. 执行如图的程序框图, 若输入 n 的值为 3, 则输出的 S 的值为_____.



12. 观察下列等式:

$\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^{-2}=\dfrac{4}{3}\times 1\times 2$;

$\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)^{-2}=\dfrac{4}{3}\times 2\times 3$;

$\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)^{-2}+\cdots+\left(\sin\dfrac{6\pi}{7}\right)^{-2}=\dfrac{4}{3}\times 3\times 4$;

$\left(\sin\dfrac{\pi}{9}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{3\pi}{9}\right)^{-2}+\cdots+\left(\sin\dfrac{8\pi}{9}\right)^{-2}=\dfrac{4}{3}\times 4\times 5$;

……

照此规律, $\left(\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)^{-2}+\left(\sin\dfrac{3\pi}{2n+1}\right)^{-2}+\cdots+\left(\sin\dfrac{2n\pi}{2n+1}\right)^{-2}=$_____.

13. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(6,-4)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, 则实数 t 的值为_____.

14. 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$. 矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上, AB, CD 的中点为 E 的两个焦点, 且 $2|AB|=3|BC|$, 则 E 的离心率是_____.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,\ x\leqslant m\\ x^2-2mx+4m,\ x>m\end{cases}$, 其中 $m>0$. 若存在实数 b, 使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根, 则 m 的取值范围是_____.

三、解答题

16. 某儿童乐园在“六一”儿童节推出了一项趣味活动. 参加活动的儿童需转动如图所示的转盘两次, 每次转动后, 待转盘停止转动时, 记录指针所指区域中的数. 设两次记录的数分别为 x, y. 奖励规则如下:

① 若 $xy\leqslant 3$, 则奖励玩具一个;

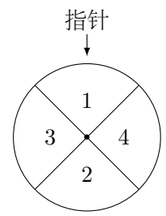
② 若 $xy\geqslant 8$, 则奖励水杯一个;

③ 其余情况奖励饮料一瓶.

假设转盘质地均匀, 四个区域划分均匀. 小亮准备参加此项活动.

(1) 求小亮获得玩具的概率;

(2) 请比较小亮获得水杯与获得饮料的概率的大小, 并说明理由.



17. 设 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\sin x-(\sin x-\cos x)^2$.

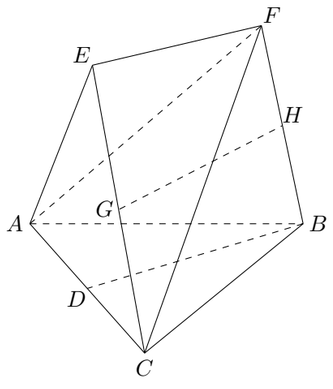
(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 把 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再把得到的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

18. 在如图所示的几何体中, D 是 AC 的中点, $EF\parallel DB$.

(1) 已知 $AB=BC$, $AE=EC$. 求证: $AC\perp FB$;

(2) 已知 G, H 分别是 EC 和 FB 的中点, 求证: $GH\parallel$ 平面 ABC.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n^2+8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n=b_n+b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n=\dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 设函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+(2a-1)x$, $a\in\mathbf{R}$.

(1) 令 $g(x)=f'(x)$, 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 求实数 a 的取值范围.

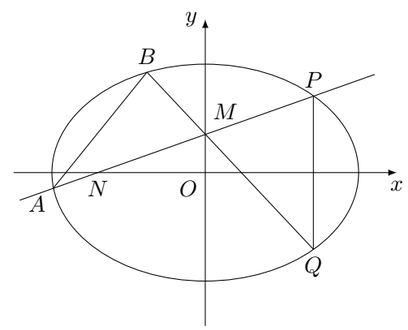
21. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的长轴长为 4, 焦距为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过动点 $M(0,m)$ $(m>0)$ 的直线交 x 轴于点 N, 交 C 于点 A, P (P 在第一象限), 且 M 是线段 PN 的中点, 过点 P 作 x 轴的垂线交 C 于另一点 Q, 延长线 QM 交 C 于点 B.

① 设直线 PM、QM 的斜率分别为 k、k', 证明 $\dfrac{k'}{k}$ 为定值;

② 求直线 AB 的斜率的最小值.



2016 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则不等式 $|x-3|<1$ 的解集为_____.

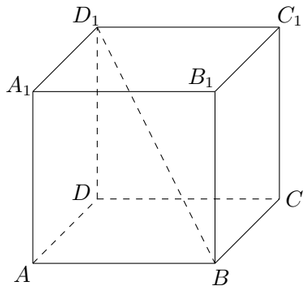
2. 设 $z=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $\operatorname{Im} z=$_____.

3. 已知平行直线 $l_1:2x+y-1=0$, $l_2:2x+y+1=0$, 则 l_1 与 l_2 的距离是_____.

4. 某次体检, 6 位同学的身高 (单位: 米) 分别为 1.72, 1.78, 1.75, 1.80, 1.69, 1.77, 则这组数据的中位数是_____(米).

5. 已知点 $(3,9)$ 在函数 $f(x)=1+a^x$ 的图象上, 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

6. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 的边长为 3, BD_1 与底面所成角的大小为 $\arctan\dfrac{2}{3}$, 则该正四棱柱的高等于_____.



7. 方程 $3\sin x=1+\cos 2x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的解为_____.

8. 在 $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于_____.

9. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 3, 5, 7, 则该三角形的外接圆半径等于_____.

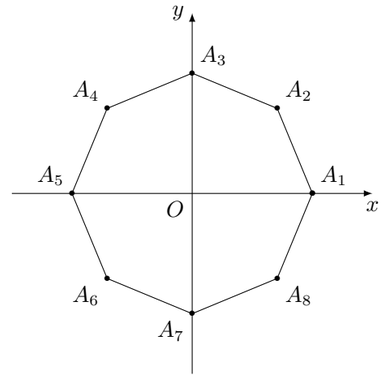
10. 设 $a>0$, $b>0$, 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases}ax+y=1\\ x+by=1\end{cases}$ 无解, 则 $a+b$ 的取值范围是_____.

11. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $S_n\in\{2,3\}$, 则 k 的最大值为_____.

12. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(1,0)$, $B(0,-1)$, P 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上一个动点, 则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的取值范围是_____.

13. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, $c\in[0,2\pi)$, 若对任意实数 x 都有 $2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=a\sin(bx+c)$, 则满足条件的有序实数组 (a,b,c) 的组数为_____.

14. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, O 为正八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的中心, $A_1(1,0)$, 任取不同的两点 A_i, A_j, 点 P 满足 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}=\vec{0}$, 则点 P 落在第一象限的概率是_____.



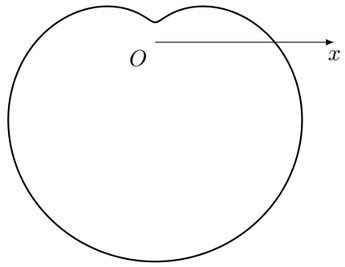
二、选择题

15. 设 $a\in\mathbf{R}$, 则“$a>1$”是“$a^2>1$”的 ( )

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分也非必要条件

16. 下列极坐标方程中, 对应的曲线为下图的是 ( )



(A) $\rho=6+5\cos\theta$　(B) $\rho=6+5\sin\theta$

(C) $\rho=6-5\cos\theta$　(D) $\rho=6-5\sin\theta$

17. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 前 n 项和为 S_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, 下列条件中, 使得 $2S_n<S$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立的是 ( )

(A) $a_1>0$, $0.6<q<0.7$　(B) $a_1<0$, $-0.7<q<-0.6$

(C) $a_1>0$, $0.7<q<0.8$　(D) $a_1<0$, $-0.8<q<-0.7$

18. 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的三个函数, 对于命题: ① 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均为增函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 中至少有一个为增函数; ② 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 下列判断正确的是 ( )

(A) ①和②均为真命题　(B) ①和②均为假命题

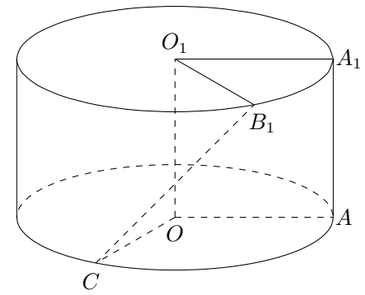
(C) ①为真命题, ②为假命题　(D) ①为假命题, ②为真命题

三、解答题

19. 将边长为 1 的正方形 AA_1O_1O (及其内部) 绕 OO_1 旋转一周形成圆柱, 如图, $\overset{\frown}{AC}$ 长为 $\dfrac{2\pi}{3}$, $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 长为 $\dfrac{\pi}{3}$, 其中 B_1 与 C 在平面 AA_1O_1O 的同侧.

(1) 求三棱锥 $C-O_1A_1B_1$ 的体积.

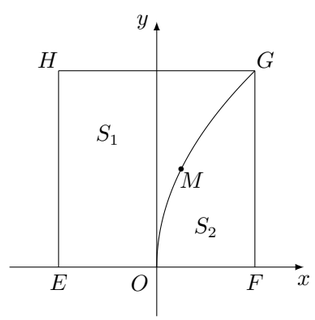
(2) 求异面直线 B_1C 与 AA_1 所成角的大小.



20. 有一块正方形菜地 $EFGH$, EH 所在直线是一条小河, 收获的蔬菜可送到 F 点或河边运走. 于是, 菜地分为两个区域 S_1 和 S_2, 其中 S_1 中的蔬菜运到河边较近, S_2 中的蔬菜运到 F 点较近, 而菜地内 S_1 和 S_2 的分界线 C 上的点到河边与到 F 点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点 O 为 EF 的中点, 点 F 的坐标为 $(1,0)$, 如图.

(1) 求菜地内的分界线 C 的方程.

(2) 菜农从蔬菜运量估计出 S_1 面积是 S_2 面积的两倍, 由此得到 S_1 面积的“经验值”为 $\dfrac{8}{3}$. 设 M 是 C 上纵坐标为 1 的点, 请计算以 EH 为一边, 另一边过点 M 的矩形的面积, 及五边形 $EOMGH$ 的面积, 并判断哪一个更接近于 S_1 面积的经验值.



21. 双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A、B 两点.

(1) 若 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$, $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程.

(2) 设 $b=\sqrt{3}$, 若 l 的斜率存在, 且 $\left(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$, 求 l 的斜率.

22. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\log_2\left(\dfrac{1}{x}+a\right)$.

(1) 当 $a=5$ 时, 解不等式 $f(x)>0$.

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)-\log_2\left[(a-4)x+2a-5\right]=0$ 的解集中恰有一个元素, 求 a 的取值范围.

(3) 设 $a>0$, 若对任意 $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值和最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围.

23. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: 只要 $a_p=a_q$ $(p,\ q\in\mathbf{N}^*)$, 必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$, 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 P.

(1) 若 $\{a_n\}$ 具有性质 P. 且 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_4=3$, $a_5=2$, $a_6+a_7+a_8=21$, 求 a_3.

(2) 若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列, $b_1=c_5=1$, $b_5=c_1=81$, $a_n=b_n+c_n$, 判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 P, 并说明理由;

(3) 设 $\{b_n\}$ 是无穷数列, 已知 $a_{n+1}=b_n+\sin a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: “对任意 a_1, $\{a_n\}$ 都具有性质 P”的充要条件为“$\{b_n\}$ 是常数列”.

2016 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则不等式 $|x-3|<1$ 的解集为_____.

2. 设 $z=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$, 其中 i 为虚数单位, 则 z 的虚部等于_____.

3. 已知平行直线 $l_1:2x+y-1=0$, $l_2:2x+y+1=0$, 则 l_1 与 l_2 的距离是_____.

4. 某次体检, 5 位同学的身高 (单位: 米) 分别为 1.72, 1.78, 1.80, 1.69, 1.76, 则这组数据的中位数是_____(米).

5. 若函数 $f(x)=4\sin x+a\cos x$ 的最大值为 5, 则常数 $a=$_____.

6. 已知点 $(3,9)$ 在函数 $f(x)=1+a^x$ 的图象上, 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

7. 若 x,y 满足 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ y\geqslant x+1\end{cases}$, 则 $x-2y$ 的最大值为_____.

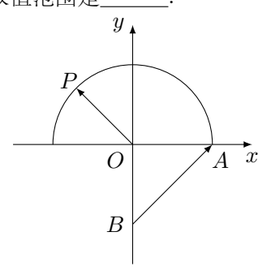
8. 方程 $3\sin x=1+\cos 2x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的解为_____.

9. 在 $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于_____.

10. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 3, 5, 7, 则该三角形的外接圆半径等于_____.

11. 某食堂规定, 每份午餐可以在四种水果中任选两种, 则甲、乙两同学各自所选的两种水果相同的概率为_____.

12. 如图, 已知点 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,-1)$, P 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上一个动点, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的取值范围是_____.



13. 设 $a>0$, $b>0$, 若关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}ax+y=1\\ x+by=1\end{cases}$ 无解, 则 $a+b$ 的取值范围是_____.

14. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $S_n\in\{2,3\}$, 则 k 的最大值为_____.

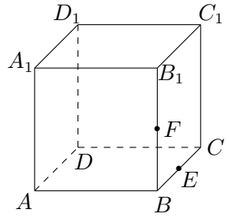
二、选择题

15. 设 $a\in\mathbf{R}$, 则"$a>1$"是"$a^2>1$"的 ( )

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分也非必要条件

16. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 BC, BB_1 的中点, 则下列直线中与直线 EF 相交的是 ( )



(A) 直线 AA_1　(B) 直线 A_1B_1　(C) 直线 A_1D_1　(D) 直线 B_1C_1

17. 设 $a\in\mathbf{R}$, $b\in[0,2\pi)$. 若对任意实数 x 都有 $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin(ax+b)$, 则满足条件的有序实数对 (a,b) 的对数为 ( )

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

18. 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的三个函数, 对于命题: ① 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均为增函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 中至少有一个为增函数; ② 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 下列判断正确的是 ( )

(A) ①和②均为真命题　(B) ①和②均为假命题

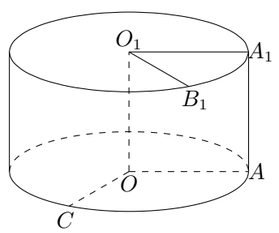
(C) ①为真命题, ②为假命题　(D) ①为假命题, ②为真命题

三、解答题

19. 将边长为 1 的正方形 AA_1O_1O (及其内部) 绕 OO_1 旋转一周形成圆柱, 如图, $\overset{\frown}{AC}$ 长为 $\dfrac{5\pi}{6}$, $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 长为 $\dfrac{\pi}{3}$, 其中 B_1 与 C 在平面 AA_1O_1O 的同侧.

(1) 求圆柱的体积与侧面积;

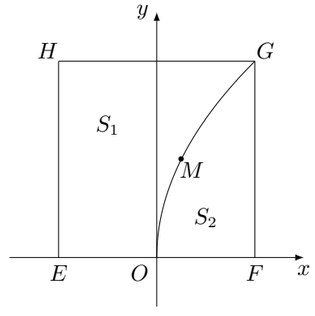
(2) 求异面直线 O_1B_1 与 OC 所成的角的大小.



20. 有一块正方形菜地 $EFGH$, EH 所在直线是一条小河, 收获的蔬菜可送到 F 点或河边运走. 于是, 菜地分为两个区域 S_1 和 S_2, 其中 S_1 中的蔬菜运到河边较近, S_2 中的蔬菜运到 F 点较近, 而菜地内 S_1 和 S_2 的分界线 C 上的点到河边与到 F 点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点 O 为 EF 的中点, 点 F 的坐标为 $(1,0)$, 如图.

(1) 求菜地内的分界线 C 的方程.

(2) 菜农从蔬菜运量估计出 S_1 面积是 S_2 面积的两倍, 由此得到 S_1 面积的"经验值"为 $\dfrac{8}{3}$. 设 M 是 C 上纵坐标为 1 的点, 请计算以 EH 为一边, 另一边过点 M 的矩形的面积, 及五边形 $EOMGH$ 的面积, 并判断哪一个更接近于 S_1 面积的经验值.



21. 双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A、B 两点.

(1) 若 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$, $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程.

(2) 设 $b=\sqrt{3}$, 若 l 的斜率存在, 且 $|AB|=4$, 求 l 的斜率.

22. 对于无穷数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$, 记 $A=\{x\,|\,x=a_n,n\in\mathbf{N}^*\}$, $B=\{x\,|\,x=b_n,n\in\mathbf{N}^*\}$, 若同时满足条件: ① $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均单调递增; ② $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\mathbf{N}^*$, 则称 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是无穷互补数列.

(1) 若 $a_n=2n-1$, $b_n=4n-2$, 判断 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是否为无穷互补数列, 并说明理由;

(2) 若 $a_n=2^n$ 且 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是无穷互补数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 16 项的和;

(3) 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是无穷互补数列, $\{a_n\}$ 为等差数列且 $a_{16}=36$, 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

23. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\log_2\left(\dfrac{1}{x}+a\right)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 解不等式 $f(x)>1$;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)+\log_2(x^2)=0$ 的解集中恰有一个元素, 求 a 的值;

(3) 设 $a>0$, 若对任意 $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围.

2016 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, 则 $A\cap\mathbf{Z}$ 中元素的个数是(　　)

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

2. 设 i 为虚数单位, 则 $(x+\mathrm{i})^6$ 的展开式中含 x^4 的项为　　(　　)

(A) $-15x^4$　　(B) $15x^4$　　(C) $-20\mathrm{i}x^4$　　(D) $20\mathrm{i}x^4$

3. 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上所有的点　　(　　)

(A) 向左平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度　　(B) 向右平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(C) 向左平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度　　(D) 向右平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度

4. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数, 其中奇数的个数为(　　)

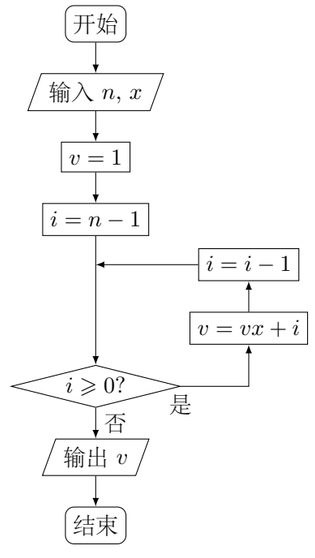
(A) 24　　(B) 48　　(C) 60　　(D) 72

5. 公司为激励创新, 计划逐年加大研发资金投入. 若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元, 在此基础上, 每年投入的研发资金比上一年增长 12%, 则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是　　(　　)

(*参考数据*: $\lg 1.12\approx 0.05$, $\lg 1.3\approx 0.11$, $\lg 2\approx 0.30$)

(A) 2018 年　　(B) 2019 年　　(C) 2020 年　　(D) 2021 年

6. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 普州 (现四川省安岳县) 人, 他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法, 至今仍是比较先进的算法. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例, 若输入 n, x 的值分别为 3, 2, 则输出 v 的值为　　(　　)



(A) 9　　(B) 18　　(C) 20　　(D) 35

7. 设 p: 实数 x, y 满足 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$, q: 实数 x, y 满足 $\begin{cases}y\geqslant x-1\\ y\geqslant 1-x\\ y\leqslant 1\end{cases}$. 则 p 是 q 的　　(　　)

(A) 必要不充分条件　　(B) 充分不必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

8. 设 O 为坐标原点, P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上任意一点, M 是线段 PF 上的点, 且 $|PM|=2|MF|$, 则直线 OM 的斜率的最大值为　　(　　)

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) 1

9. 设直线 l_1, l_2 分别是函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$ 图象上点 P_1, P_2 处的切线, l_1 与 l_2 垂直相交于点 P, 且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B, 则 $\triangle PAB$ 的面积的取值范围是　　(　　)

(A) $(0,1)$　　(B) $(0,2)$　　(C) $(0,+\infty)$　　(D) $(1,+\infty)$

10. 在平面内, 定点 A, B, C, D 满足 $\left|\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=-2$, 动点 P, M 满足 $\left|\overrightarrow{AP}\right|=1$, $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$, 则 $\left|\overrightarrow{BM}\right|^2$ 的最大值是　　(　　)

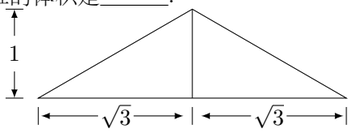
(A) $\dfrac{43}{4}$　　(B) $\dfrac{49}{4}$　　(C) $\dfrac{37+6\sqrt{3}}{4}$　　(D) $\dfrac{37+2\sqrt{33}}{4}$

二、填空题

11. $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}=$_____.

12. 同时抛掷两枚质地均匀的硬币, 当至少有一枚硬币正面向上时, 就说这次试验成功, 则在 2 次试验中成功次数 X 的均值是_____.

13. 已知三棱锥的四个面都是腰长为 2 的等腰三角形, 该三棱锥的正视图如图所示, 则该三棱锥的体积是_____.



正视图

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的奇函数, 当 $0<x<1$ 时, $f(x)=4^x$, 则 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)+f(1)=$_____.

15. 在平面直角坐标系中, 当 $P(x,y)$ 不是原点时, 定义 P 的“伴随点”为 $P'\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$; 当 P 是原点时, 定义 P 的“伴随点”为它自身, 平面曲线 C 上所以点的“伴随点”所构成的曲线 C' 定义为曲线 C 的“伴随曲线”, 现有下列命题:

① 若点 A 的“伴随点”是点 A', 则点 A' 的“伴随点”是点 A;

② 单位圆的“伴随曲线”是它自身;

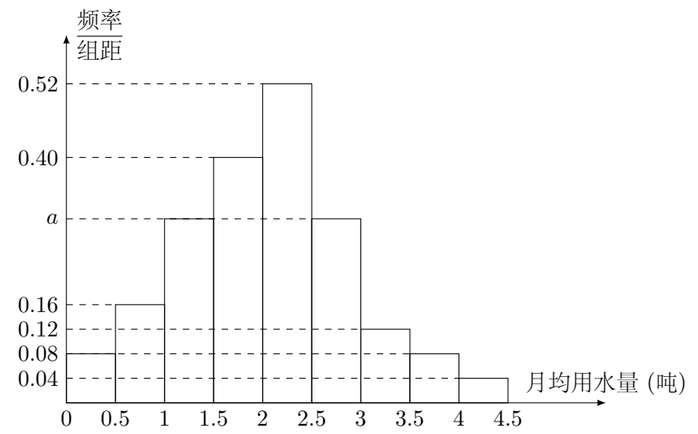
③ 若曲线 C 关于 x 轴对称, 则其“伴随曲线”C' 关于 y 轴对称;

④ 一条直线的“伴随曲线”是一条直线.

其中的真命题是_____. (写出所以真命题的序列)

三、解答题

16. 我国是世界上严重缺水的国家, 某市政府为了鼓励居民节约用水, 计划调整居民生活用水收费方案, 拟确定一个合理的月用水量标准 x (吨), 一位居民的月用水量不超过 x 的部分按平价收费, 超出 x 的部分按议价收费, 为了了解居民用水情况, 通过抽样, 获得了某年 100 位居民每人的月均用水量 (单位: 吨), 将数据按照 $[0,0.5)$, $[0.5,1)$, $\cdots$, $[4,4.5)$ 分成 9 组, 制成了如图所示的频率分布直方图.



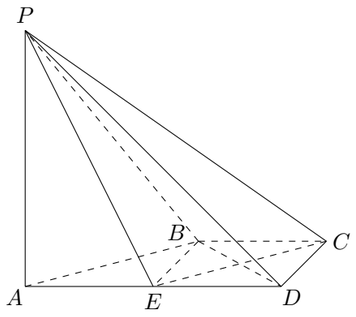
(1) 求直方图中 a 的值;

(2) 设该市有 30 万居民, 估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数, 并说明理由;

(3) 若该市政府希望使 85% 的居民每月的用水量不超过标准 x (吨), 估计 x 的值, 并说明理由.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c, 且 $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$.
(1) 证明: $\sin A\sin B=\sin C$;
(2) 若 $b^2+c^2-a^2=\dfrac{6}{5}bc$, 求 $\tan B$.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $\angle ADC=\angle PAB=90^\circ$, $BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$, E 为边 AD 的中点, 异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90°.
(1) 在平面 PAB 内找一点 M, 使得直线 $CM\parallel$ 平面 PBE, 并说明理由;
(2) 若二面角 $P-CD-A$ 的大小为 45°, 求直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_{n+1}=qS_n+1$, 其中 $q>0$, $n\in\mathbf{N}^*$.
(1) 若 $2a_2$, a_3, a_2+2 成等差数列, 求 a_n 的通项公式;
(2) 设双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{a_n^2}=1$ 的离心率为 e_n, 且 $e_2=\dfrac{5}{3}$, 证明: $e_1+e_2+\cdots+e_n>\dfrac{4^n-3^n}{3^{n-1}}$.

20. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的 3 个顶点, 直线 l: $y=-x+3$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T.
(1) 求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标;
(2) 设 O 是坐标原点, 直线 l' 平行于 OT 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B, 且与直线 l 交于点 P, 证明: 存在常数 λ, 使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$, 并求 λ 的值.

21. 设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 确定 a 的所有可能取值, 使得 $f(x)>\dfrac{1}{x}-\mathrm{e}^{1-x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立 ($\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数).

2016 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

一、选择题

1. 设 i 为虚数单位, 则复数 $(1+\mathrm{i})^2=$ （　）

(A) 0　　(B) 2　　(C) 2i　　(D) $2+2\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 5\}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, 则集合 $A\cap\mathbf{Z}$ 中元素的个数是 （　）

(A) 6　　(B) 5　　(C) 4　　(D) 3

3. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标是 （　）

(A) $(0,2)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(2,0)$　　(D) $(1,0)$

4. 为了得到函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点 （　）

(A) 向左平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(B) 向右平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(C) 向上平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

(D) 向下平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

5. 设 p: 实数 x, y 满足 $x>1$ 且 $y>1$, q: 实数 x, y 满足 $x+y>2$, 则 p 是 q 的 （　）

(A) 充分不必要条件

(B) 不要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

6. 已知 a 函数 $f(x)=x^3-12x$ 的极小值点, 则 $a=$ （　）

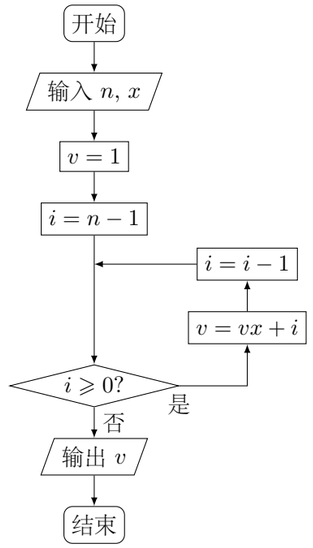
(A) -4　　(B) -2　　(C) 4　　(D) 2

7. 公司为激励创新, 计划逐年加大研发资金投入. 若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元, 在此基础上, 每年投入的研发资金比上一年增长 12%, 则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是 （　）

(*参考数据*: $\lg 1.12\approx 0.05$, $\lg 1.3\approx 0.11$, $\lg 2\approx 0.30$)

(A) 2018 年　　(B) 2019 年　　(C) 2020 年　　(D) 2021 年

8. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 普州 (现四川省安岳县) 人, 他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法, 至今仍是比较先进的算法. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例, 若输入 n, x 的值分别为 3, 2, 则输出 v 的值为 （　）



(A) 9　　(B) 18　　(C) 20　　(D) 35

9. 已知正三角形 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$, 平面 ABC 内的动点 P, M 满足 $\left|\overrightarrow{AP}\right|=1$, $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$, 则 $\left|\overrightarrow{BM}\right|^2$ 的最大值是 （　）

(A) $\dfrac{43}{4}$　　(B) $\dfrac{49}{4}$　　(C) $\dfrac{37+6\sqrt{3}}{4}$　　(D) $\dfrac{37+2\sqrt{33}}{4}$

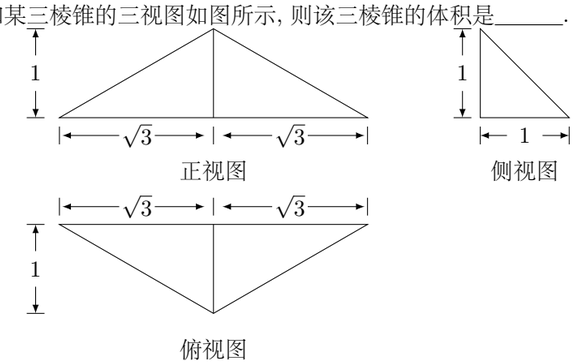
10. 设直线 l_1, l_2 分别是函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$ 图象上点 P_1, P_2 处的切线, l_1 与 l_2 垂直相交于点 P, 且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B, 则 $\triangle PAB$ 的面积的取值范围是 （　）

(A) $(0,1)$　　(B) $(0,2)$　　(C) $(0,+\infty)$　　(D) $(1,+\infty)$

二、填空题

11. $\sin 750^\circ=$_____.

12. 已知某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积是_____.



13. 从 2, 3, 8, 9 任取两个不同的数值, 分别记为 a, b, 则 $\log_a b$ 为整数的概率是_____.

14. 若函数 $f(x)$ 是定义 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的奇函数, 当 $0<x<1$ 时, $f(x)=4^x$, 则 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)+f(2)=$_____.

15. 在平面直角坐标系中, 当 $P(x,y)$ 不是原点时, 定义 P 的“伴随点”为 $P'\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$; 当 P 是原点时, 定义 P 的“伴随点”为它自身, 平面曲线 C 上所以点的“伴随点”所构成的曲线 C' 定义为曲线 C 的“伴随曲线”, 现有下列命题:

① 若点 A 的“伴随点”是点 A', 则点 A' 的“伴随点”是点 A;

② 单位圆上的“伴随点”仍在单位圆上;

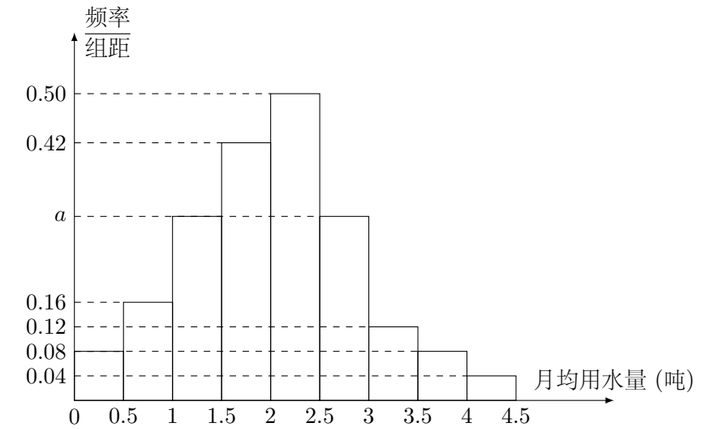
③ 若两点关于 x 轴对称, 则他们的“伴随点”关于 y 轴对称;

④ 若三点在同一条直线上, 则他们的“伴随点”一定共线.

其中的真命题是_____. (写出所以真命题的序列)

三、解答题

16. 我国是世界上严重缺水的国家, 某市政府为了鼓励居民节约用水, 计划调整居民生活用水收费方案, 拟确定一个合理的月用水量标准 x (吨), 一位居民的月用水量不超过 x 的部分按平价收费, 超出 x 的部分按议价收费, 为了了解居民用水情况, 通过抽样, 获得了某年 100 位居民每人的月均用水量 (单位: 吨), 将数据按照 $[0,0.5)$, $[0.5,1)$, $\cdots$, $[4,4.5)$ 分成 9 组, 制成了如图所示的频率分布直方图.



(1) 求直方图中 a 的值;

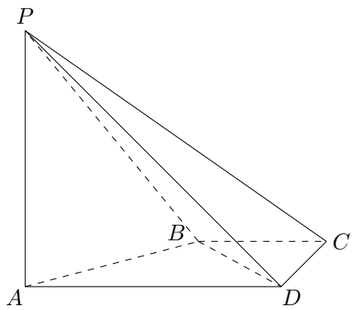
(2) 设该市有 30 万居民, 估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数, 并说明理由;

(3) 估计居民月均用水量的中位数.

17. 如图, 在四棱锥中 $P-ABCD$ 中, $PA \perp CD$, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$, $BC = CD = \dfrac{1}{2}AD$.

(1) 在平面 PAD 内找一点 M, 使得直线 $CM \parallel$ 平面 PAB, 并说明理由;

(2) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PBD.



18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c, 且 $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$.

(1) 证明: $\sin A \sin B = \sin C$;

(2) 若 $b^2 + c^2 - a^2 = \dfrac{6}{5}bc$, 求 $\tan B$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_{n+1} = qS_n + 1$, 其中 $q > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 若 a_2, a_3, $a_2 + a_3$ 成等差数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设双曲线 $x^2 - \dfrac{y^2}{a_n^2} = 1$ 的离心率为 e_n, 且 $e_2 = 2$, 求 $e_1^2 + e_2^2 \cdots + e_n^2$.

20. 已知椭圆 $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点, 点 $P\left(\sqrt{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ 在椭圆 E 上.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设不过原点 O 且斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B, 线段 AB 的中点为 M, 直线 OM 与椭圆 E 交于 C, D, 证明: $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$.

21. 设函数 $f(x) = ax^2 - a - \ln x$, $g(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e} = 2.718\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $x > 1$ 时, $g(x) > 0$;

(3) 确定 a 的所有可能取值, 使得 $f(x) > g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立.

2016 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{y\mid y=3x-2, x\in A\}$, 则 $A\cap B=$（　）

(A) $\{1\}$　　(B) $\{4\}$　　(C) $\{1,3\}$　　(D) $\{1,4\}$

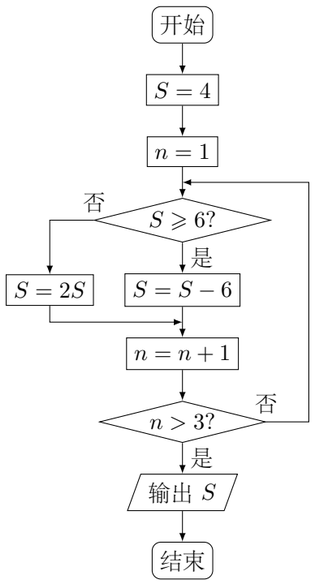
2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\geqslant 0\\2x+3y-6\geqslant 0\\3x+2y-9\leqslant 0\end{cases}$，则目标函数 $z=2x+5y$ 的最小值为（　）

(A) -4　　(B) 6　　(C) 10　　(D) 17

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB=\sqrt{13}$, $BC=3$, $\angle C=120^\circ$, 则 $AC=$（　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

4. 阅读如下的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为（　）



(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

5. 设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列, 公比为 q, 则“$q<0$”是“对任意的正整数 n, $a_{2n-1}+a_{2n}<0$”的（　）

(A) 充要条件　　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$, 以原点为圆心, 双曲线的实半轴长为半径长的圆与双曲线的两条渐近线相交于 A, B, C, D 四点, 四边形 $ABCD$ 的面积为 $2b$, 则双曲线的方程为（　）

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3y^2}{4}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{4y^2}{3}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$

7. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F, 使得 $DE=2EF$, 则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为（　）

(A) $-\dfrac{8}{5}$　　(B) $\dfrac{1}{8}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{11}{8}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, & x<0\\ \log_a(x+1)+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-x$ 恰好有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是（　）

(A) $\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}\right]$

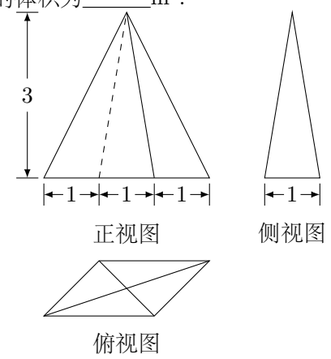
(C) $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$　　(D) $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

二、填空题

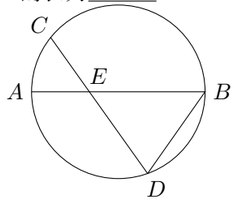
9. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $(1+\mathrm{i})(1-b\mathrm{i})=a$, 则 $\dfrac{a}{b}$ 的值为_____.

10. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中 x^7 的系数为_____. (用数字作答)

11. 已知一个四棱锥的底面是平行四边形, 该四棱锥的三视图如图所示 (单位: m), 则该四棱锥的体积为_____m^3.



12. 如图, AB 是圆的直径, 弦 CD 与 AB 相交于点 E, $BE=2AE=2$, $BD=ED$, 则线段 CE 的长为_____.



13. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f\left(2^{|a-1|}\right)>f\left(-\sqrt{2}\right)$, 则 a 的取值范围是_____.

14. 设抛物线 $\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}$ (t 为参数, $p>0$) 的焦点为 F, 准线为 l. 过抛物线上一点 A 作 l 的垂线, 垂足为 B. 设 $C\left(\dfrac{7}{2}p,0\right)$, AF 与 BC 相交于点 E. 若 $|CF|=2|AF|$, 且 $\triangle ACE$ 的面积为 $3\sqrt{2}$, 则 p 的值为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=4\tan x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期;

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的单调性.

16. 某小组共 10 人, 利用假期参加义工活动, 已知参加义工活动次数为 1, 2, 3 的人数分别为 3, 3, 4. 现从这 10 人中随机选出 2 人作为该组代表参加座谈会.

(1) 设 A 为事件“选出的 2 人参加义工活动次数之和为 4”, 求事件 A 发生的概率;

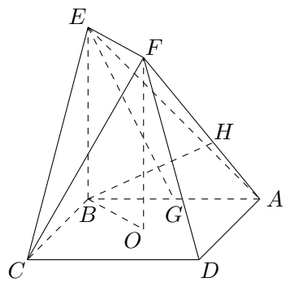
(2) 设 X 为选出的 2 人参加义工活动次数之差的绝对值, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17. 如图, 正方形 $ABCD$ 的中心为 O, 四边形 $OBEF$ 为矩形, 平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$, 点 G 为 AB 的中点, $AB = BE = 2$.

(1) 求证: $EG \parallel$ 平面 ADF;

(2) 求二面角 $O - EF - C$ 的正弦值;

(3) 设 H 为线段 AF 上的点, 且 $AH = \dfrac{2}{3}HF$, 求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值.



18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, 公差为 d, 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项.

(1) 设 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列;

(2) 设 $a_1 = d$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{T_k} < \dfrac{1}{2d^2}$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ $\left(a > \sqrt{3}\right)$ 的右焦点为 F, 右顶点为 A. 已知 $\dfrac{1}{|OF|} + \dfrac{1}{|OA|} = \dfrac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M, 与 y 轴交于点 H. 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA \leqslant \angle MAO$, 求直线 l 的斜率的取值范围.

20. 设函数 $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 a, $b \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0, 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 3$;

(3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\dfrac{1}{4}$.

2016 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

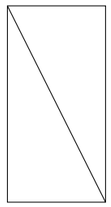
1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{y\mid y=2x-1, x\in A\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{1,3\}$　(B) $\{1,2\}$　(C) $\{2,3\}$　(D) $\{1,2,3\}$

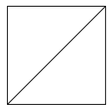
2. 甲、乙两人下棋, 两人下成和棋的概率是 $\dfrac{1}{2}$, 甲获胜的概率是 $\dfrac{1}{3}$, 则甲不输的概率为 （　）

(A) $\dfrac{5}{6}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{1}{6}$　(D) $\dfrac{1}{3}$

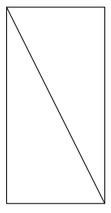
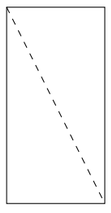
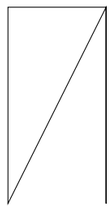
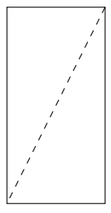
3. 将一个长方形沿相邻三个面的对角线截去一个棱锥, 得到的几何体的正视图与俯视图如图所示, 则该几何体的侧 (左) 视图为 （　）



正视图



俯视图

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

4. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 且双曲线的一条渐近线与直线 $2x+y=0$ 垂直, 则双曲线的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$　(B) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　(C) $\dfrac{3x^2}{20}-\dfrac{3y^2}{5}=1$(D) $\dfrac{3x^2}{5}-\dfrac{3y^2}{20}=1$

5. 设 $x>0$, $y\in\mathbf{R}$, 则“$x>y$”是“$x>|y|$”的 （　）

(A) 充要条件　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f\left(2^{|a-1|}\right)>f\left(-\sqrt{2}\right)$, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$　(B) $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

(C) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$　(D) $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

7. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F, 使得 $DE=2EF$, 则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为 （　）

(A) $-\dfrac{8}{5}$　(B) $\dfrac{1}{8}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{11}{8}$

8. 已知函数 $f(x)=\sin^2\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}$ $(\omega>0)$, $x\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 （　）

(A) $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]$　(B) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5}{8},1\right)$

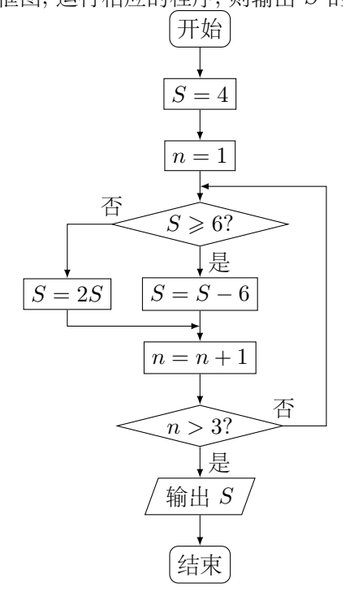
(C) $\left(0,\dfrac{5}{8}\right]$　(D) $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]\cup\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8}\right]$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2$, 则 z 的实部为_____.

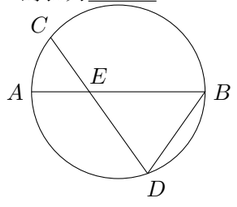
10. 已知函数 $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(0)$ 的值为_____.

11. 阅读如下的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为_____.



12. 已知圆 C 的圆心在 x 轴的正半轴上, 点 $M\left(0,\sqrt{5}\right)$ 在圆 C 上, 且圆心到直线 $2x-y=0$ 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, 则圆 C 的方程为_____.

13. 如图, AB 是圆的直径, 弦 CD 与 AB 相交于点 E, $BE=2AE=2$, $BD=ED$, 则线段 CE 的长为_____.



14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, & x<0\\ \log_a(x+1)+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-\dfrac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin 2B=\sqrt{3}b\sin A$.

(1) 求 B;

(2) 若 $\cos A=\dfrac{1}{3}$, 求 $\sin C$ 的值.

16. 某化肥厂生产甲、乙两种混合肥料, 需要 A, B, C 三种主要原料. 生产 1 车皮甲种肥料和生产 1 车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如下表所示:

原料 / 肥料	A	B	C
甲	4	8	3
乙	5	5	10

现有 A 种原料 200 吨, B 种原料 360 吨, C 种原料 300 吨, 在此基础上生产甲乙两种肥料. 已知生产 1 车皮甲种肥料, 产生的利润为 2 万元; 生产 1 车皮乙种肥料, 产生的利润为 3 万元. 分别用 x、y 表示生产甲、乙两种肥料的车皮数.

(1) 用 x, y 列出满足生产条件的数学关系式, 并画出相应的平面区域;

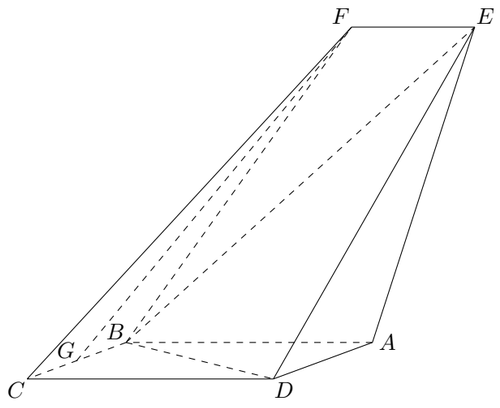
(2) 问分别生产甲、乙两种肥料各多少车皮, 能够产生最大的利润? 并求出此最大利润.

17. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel AB$, $AB=2$, $BC=EF=1$, $AE=\sqrt{6}$, $DE=3$, $\angle BAD=60^\circ$, G 为 BC 的中点.

(1) 求证: $FG \parallel$ 平面 BED;

(2) 求证: 平面 $BED \perp$ 平面 AED;

(3) 求直线 EF 与平面 BED 所成角的正弦值.



18. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前 n 项和为 S_n $(n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{2}{a_3}$, $S_6=63$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项, 求数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ $\left(a>\sqrt{3}\right)$ 的右焦点为 F, 右顶点为 A. 已知 $\dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M, 与 y 轴交于点 H. 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA=\angle MAO$, 求直线 l 的斜率.

20. 设函数 $f(x)=x^3-ax-b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 a, $b \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0, 且 $f(x_1)=f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1+2x_0=0$;

(3) 设 $a>0$, 函数 $g(x)=|f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值不小于 $\dfrac{1}{4}$.

2016 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{R}\,|\,1\leqslant x\leqslant 3\}$, $Q=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2\geqslant 4\}$, 则 $P\cup(\complement_{\mathbf{R}}Q)=$ （　）

(A) $[2,3]$　　(B) $(-2,3]$

(C) $[1,2)$　　(D) $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

2. 已知互相垂直的平面 α, β 交于直线 l, 若直线 m, n 满足 $m\parallel\alpha$, $n\perp\beta$, 则 （　）

(A) $m\parallel l$　　(B) $m\parallel n$　　(C) $n\perp l$　　(D) $m\perp n$

3. 在平面上, 过点 P 作直线 l 的垂线所得的垂足称为点 P 在直线 l 上的投影. 由区域 $\begin{cases}x-2\leqslant 0\\ x+y\geqslant 0\\ x-3y+4\geqslant 0\end{cases}$ 中的点在直线 $x+y-2=0$ 上的投影构成的线段记为 AB, 则 $|AB|=$ (　　)

(A) $2\sqrt{2}$　　(B) 4　　(C) $3\sqrt{2}$　　(D) 6

4. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}$, $\exists n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $n\geqslant x^2$”的否定形式是 （　）

(A) $\forall x\in\mathbf{R}$, $\exists n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $n<x^2$　(B) $\forall x\in\mathbf{R}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $n<x^2$

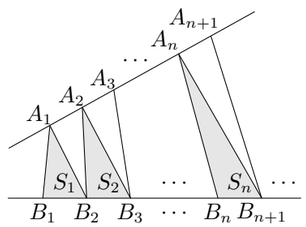
(C) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\exists n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $n<x^2$　(D) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $n<x^2$

5. 设函数 $f(x)=\sin^2 x+b\sin x+c$, 则 $f(x)$ 的最小正周期 （　）

(A) 与 b 有关, 且与 c 有关　　(B) 与 b 有关, 但与 c 无关

(C) 与 b 无关, 且与 c 无关　　(D) 与 b 无关, 但与 c 有关

6. 如图, 点列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 分别在某锐角的两边上, 且 $|A_nA_{n+1}|=|A_{n+1}A_{n+2}|$, $A_n\neq A_{n+2}$, $n\in\mathbf{N}^*$, $|B_nB_{n+1}|=|B_{n+1}B_{n+2}|$, $B_n\neq B_{n+2}$, $n\in\mathbf{N}^*$ ($P\neq Q$ 表示点 P 与 Q 不重合). 若 $d_n=|A_nB_n|$, S_n 为 $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 的面积, 则 （　）



(A) $\{S_n\}$ 是等差数列　　(B) $\{S_n^2\}$ 是等差数列

(C) $\{d_n\}$ 是等差数列　　(D) $\{d_n^2\}$ 是等差数列

7. 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{m^2}+y^2=1$ $(m>1)$ 与双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{n^2}-y^2=1$ $(n>0)$ 的焦点重合, e_1, e_2 分别为 C_1, C_2 的离心率, 则 （　）

(A) $m>n$ 且 $e_1e_2>1$　　(B) $m>n$ 且 $e_1e_2<1$

(C) $m<n$ 且 $e_1e_2>1$　　(D) $m<n$ 且 $e_1e_2<1$

8. 已知实数 a, b, c. （　）

(A) 若 $|a^2+b+c|+|a+b^2+c|\leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2<100$

(B) 若 $|a^2+b+c|+|a^2+b-c|\leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2<100$

(C) 若 $|a+b+c^2|+|a+b-c^2|\leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2<100$

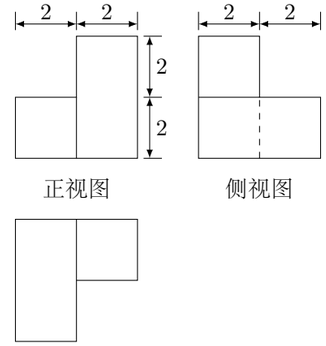
(D) 若 $|a^2+b+c|+|a+b^2-c|\leqslant 1$, 则 $a^2+b^2+c^2<100$

二、填空题

9. 若抛物线 $y^2=4x$ 上的点 M 到焦点的距离为 10, 则 M 到 y 轴的距离是_____.

10. 已知 $2\cos^2 x+\sin 2x=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ $(A>0)$, 则 $A=$_____, $b=$_____.

11. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的表面积是_____ cm^2, 体积是_____cm^3.



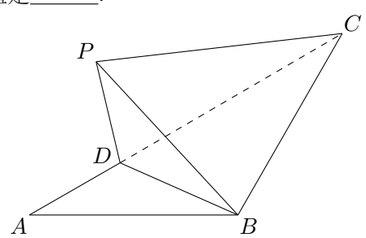
正视图　　侧视图

俯视图

12. 已知 $a>b>1$. 若 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$, $a^b=b^a$, 则 $a=$_____, $b=$_____.

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $S_2=4$, $a_{n+1}=2S_n+1$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $a_1=$_____, $S_5=$_____.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC=2$, $\angle ABC=120^\circ$. 若平面 ABC 外的点 P 和线段 AC 上的点 D, 满足 $PD=DA$, $PB=BA$, 则四面体 $PBCD$ 的体积的最大值是_____.



15. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 若对任意单位向量 $\boldsymbol{e}$, 均有 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\leqslant\sqrt{6}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最大值是_____.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $b+c=2a\cos B$.

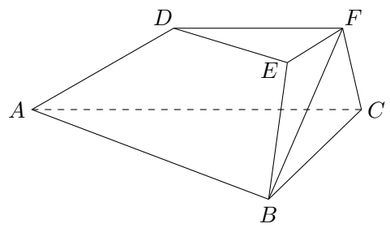
(1) 证明: $A=2B$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{a^2}{4}$, 求角 A 的大小.

17. 如图, 在三棱台 $ABC-DEF$ 中, 平面 $BCFE\perp$ 平面 ABC, $\angle ACB=90^\circ$, $BE=EF=FC=1$, $BC=2$, $AC=3$.

(1) 求证: $BF\perp$ 平面 $ACFD$;

(2) 求二面角 $B-AD-F$ 的平面角的余弦值.



18. 已知 $a \geqslant 3$, 函数 $F(x) = \min\{2|x-1|, x^2-2ax+4a-2\}$, 其中 $\min\{p,q\} = \begin{cases} p, & p \leqslant q \\ q, & p > q \end{cases}$.

(1) 求使得等式 $F(x) = x^2-2ax+4a-2$ 成立的 x 的取值范围;

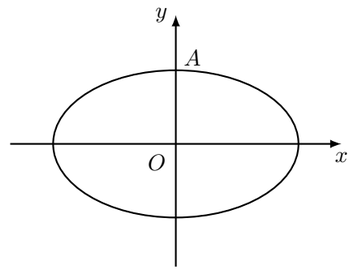
(2) ① 求 $F(x)$ 的最小值 $m(a)$;

② 求 $F(x)$ 在区间 $[0,6]$ 上的最大值 $M(a)$.

19. 如图, 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>1)$.

(1) 求直线 $y=kx+1$ 被椭圆截得的线段长 (用 a, k 表示);

(2) 若任意以点 $A(0,1)$ 为圆心的圆与椭圆至多有 3 个公共点, 求椭圆离心率的取值范围.



20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\left|a_n - \dfrac{a_{n+1}}{2}\right| \leqslant 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明: $|a_n| \geqslant 2^{n-1}(|a_1|-2)$, $n \in \mathbf{N}^*$;

(2) 若 $|a_n| \leqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $|a_n| \leqslant 2$, $n \in \mathbf{N}^*$.

2016 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

文科数学

一、选择题

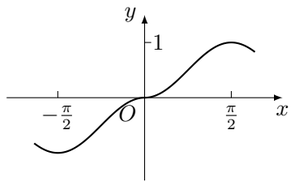
1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, 集合 $P=\{1,3,5\}$, $Q=\{1,2,4\}$, 则 $(\complement_U P)\cup Q=$ （　）

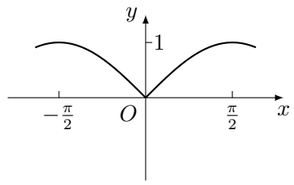
(A) $\{1\}$　　(B) $\{3,5\}$　　(C) $\{1,2,4,6\}$　　(D) $\{1,2,3,4,5\}$

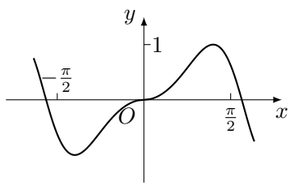
2. 已知互相垂直的平面 α, β 交于直线 l, 若直线 m, n 满足 $m\parallel\alpha$, $n\perp\beta$, 则 （　）

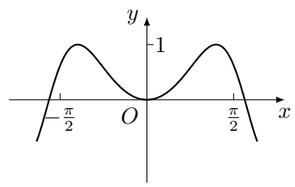
(A) $m\parallel l$　　(B) $m\parallel n$　　(C) $n\perp l$　　(D) $m\perp n$

3. 函数 $y=\sin x^2$ 的图象是 （　）

(A)


(B)


(C)


(D)


4. 若平面区域 $\begin{cases}x+y-3\geqslant 0\\ 2x-y-3\leqslant 0\\ x-2y+3\geqslant 0\end{cases}$ 夹在两条斜率为 1 的平行直线之间, 则这两条平行直线间的距离的最小值是 （　）

(A) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\sqrt{5}$

5. 已知 a, $b>0$, 且 $a\neq 1$, $b\neq 1$, 若 $\log_a b>1$, 则 （　）

(A) $(a-1)(b-1)<0$　　(B) $(a-1)(a-b)>0$

(C) $(b-1)(b-a)<0$　　(D) $(b-1)(b-a)>0$

6. 已知函数 $f(x)=x^2+bx$, 则"$b<0$"是"$f(f(x))$ 的最小值与 $f(x)$ 的最小值相等"的 （　）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

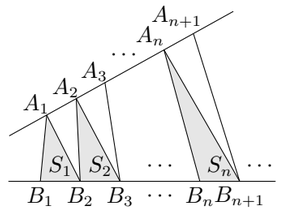
(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(x)\geqslant|x|$ 且 $f(x)\geqslant 2^x$, $x\in\mathbf{R}$. （　）

(A) 若 $f(a)\leqslant|b|$, 则 $a\leqslant b$　　(B) 若 $f(a)\leqslant 2^b$, 则 $a\leqslant b$

(C) 若 $f(a)\geqslant|b|$, 则 $a\geqslant b$　　(D) 若 $f(a)\geqslant 2^b$, 则 $a\geqslant b$

8. 如图, 点列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 分别在某锐角的两边上, 且 $|A_nA_{n+1}|=|A_{n+1}A_{n+2}|$, $A_n\neq A_{n+2}$, $n\in\mathbf{N}^*$, $|B_nB_{n+1}|=|B_{n+1}B_{n+2}|$, $B_n\neq B_{n+2}$, $n\in\mathbf{N}^*$ ($P\neq Q$ 表示点 P 与 Q 不重合). 若 $d_n=|A_nB_n|$, S_n 为 $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 的面积, 则 （　）

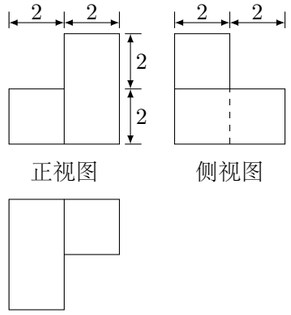


(A) $\{S_n\}$ 是等差数列　　(B) $\{S_n^2\}$ 是等差数列

(C) $\{d_n\}$ 是等差数列　　(D) $\{d_n^2\}$ 是等差数列

二、填空题

9. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的表面积是_____ cm^2, 体积是_____cm^3.



正视图　　侧视图

俯视图

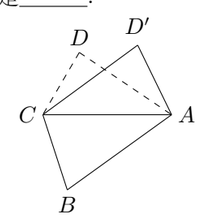
10. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+4x+8y+5a=0$ 表示圆, 则圆心坐标是_____, 半径是_____.

11. 已知 $2\cos^2 x+\sin 2x=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ $(A>0)$, 则 $A=$_____, $B=$_____.

12. 设函数 $f(x)=x^3+3x^2+1$, 已知 $a\neq 0$, 且 $f(x)-f(a)=(x-b)(x-a)^2$, $x\in\mathbf{R}$, 则实数 $a=$_____, $b=$_____.

13. 设双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2, 若点 P 在双曲线上, 且 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形, 则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围是_____.

14. 如图, 已知平面四边形 $ABCD$, $AB=BC=3$, $CD=1$, $AD=\sqrt{5}$, $\angle ADC=90^\circ$. 沿直线 AC 将 $\triangle ACD$ 翻折成 $\triangle ACD'$, 直线 AC 与 BD' 所成角的余弦的最大值是_____.



15. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$. 若 $\boldsymbol{e}$ 为平面单位向量, 则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|$ 的最大值是_____.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $b+c=2a\cos B$.

(1) 证明: $A=2B$;

(2) 若 $\cos B=\frac{2}{3}$, 求 $\cos C$ 的值.

17. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $S_2=4$, $a_{n+1}=2S_n+1$, $n\in\mathbf{N}^*$.

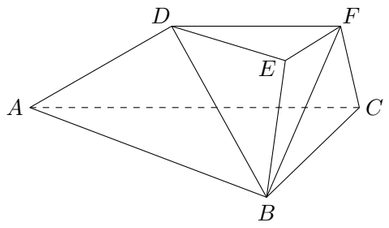
(1) 求通项公式 a_n;

(2) 求数列 $\{|a_n-n-2|\}$ 的前 n 项和.

18. 如图, 在三棱台 $ABC-DEF$ 中, 平面 $BCFE \perp$ 平面 ABC, $\angle ACB = 90°$, $BE = EF = FC = 1$, $BC = 2$, $AC = 3$.

(1) 求证: $BF \perp$ 平面 $ACFD$;

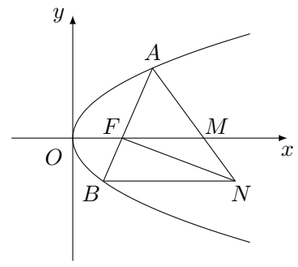
(2) 求直线 BD 与平面 $ACFD$ 所成角的余弦值.



19. 如图, 设抛物线 $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ 的焦点为 F, 抛物线上的点 A 到 y 轴的距离等于 $|AF| - 1$.

(1) 求 p 的值;

(2) 若直线 AF 交抛物线于另一点 B, 过 B 与 x 轴平行的直线和过 F 与 AB 垂直的直线交于点 N, AN 与 x 轴交于点 M. 求 M 的横坐标的取值范围.



20. 设函数 $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{1+x}$, $x \in [0,1]$. 证明:

(1) $f(x) \geqslant 1 - x + x^2$;

(2) $\dfrac{3}{4} < f(x) \leqslant \dfrac{3}{2}$.

2017 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x\,|\,-2<x<1\}$, $B=\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>3\}$, 则 $A\cap B=$(　)

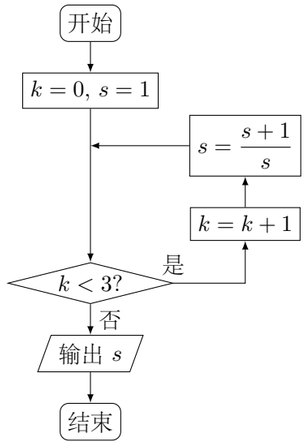
(A) $\{x\,|\,-2<x<-1\}$　　(B) $\{x\,|\,-2<x<3\}$

(C) $\{x\,|\,-1<x<1\}$　　(D) $\{x\,|\,1<x<3\}$

2. 若复数 $(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点在第二象限, 则实数 a 的取值范围是　(　)

(A) $(-\infty,1)$　　(B) $(-\infty,-1)$　　(C) $(1,+\infty)$　　(D) $(-1,+\infty)$

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为　(　)



(A) 2　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) $\dfrac{5}{3}$　　(D) $\dfrac{8}{5}$

4. 若 x, y 满足 $\begin{cases}x\leqslant 3\\ x+y\geqslant 2\\ y\leqslant x\end{cases}$, 则 $x+2y$ 的最大值为　(　)

(A) 1　　(B) 3　　(C) 5　　(D) 9

5. 已知函数 $f(x)=3^x-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$　(　)

(A) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数　(B) 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

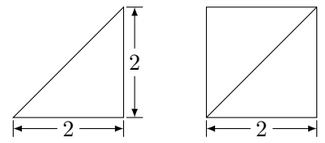
(C) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数　(D) 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

6. 设 $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ 为非零向量, 则"存在负数 λ, 使得 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$"是"$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$"的(　)

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

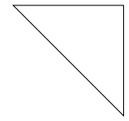
(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的最长棱的长度为　(　)



正 (主) 视图

侧 (左) 视图


俯视图

(A) $3\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) $2\sqrt{2}$　　(D) 2

8. 根据有关资料, 围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361}, 而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80}, 则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是(　)

(*参考数据*: $\lg 3\approx 0.48$)

(A) 10^{33}　　(B) 10^{53}　　(C) 10^{73}　　(D) 10^{93}

二、填空题

9. 若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则实数 $m=$_____.

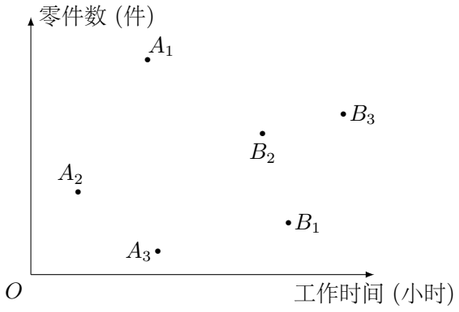
10. 若等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=-1$, $a_4=b_4=8$, 则 $\dfrac{a_2}{b_2}=$_____.

11. 在极坐标系中, 点 A 在圆 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$ 上, 点 P 的坐标为 $(1,0)$, 则 $|AP|$ 的最小值为_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称, 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha-\beta)=$_____.

13. 能够说明"设 a, b, c 是任意实数. 若 $a>b>c$, 则 $a+b>c$"是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为_____.

14. 三名工人加工同一种零件, 他们在一天中的工作情况如图所示, 其中 A_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人上午的工作时间和加工的零件数, 点 B_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人下午的工作时间和加工的零件数, $i=1,2,3$.



(1) 记 Q_i 为第 i 名工人在这一天中加工的零件总数, 则 Q_1, Q_2, Q_3 中最大的是_____;

(2) 记 p_i 为第 i 名工人在这一天中平均每小时加工的零件数, 则 p_1, p_2, p_3 中最大的是_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, $c=\dfrac{3}{7}a$.

(1) 求 $\sin C$ 的值;

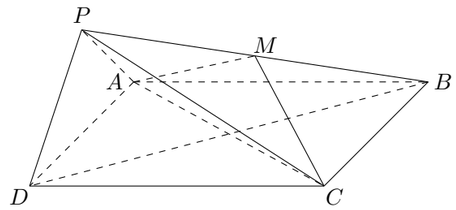
(2) 若 $a=7$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 在线段 PB 上, $PD\parallel$ 平面 MAC, $PA=PD=\sqrt{6}$, $AB=4$.

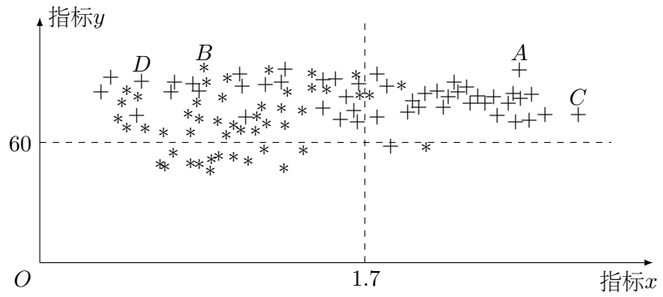
(1) 求证: M 为 PB 的中点;

(2) 求二面角 $B-PD-A$ 的大小;

(3) 求直线 MC 与平面 BDP 所成角的正弦值.



17. 为了研究一种新药的疗效, 选 100 名患者随机分成两组, 每组各 50 名, 一组服药, 另一组不服药. 一段时间后, 记录了两组患者的生理指标 x 和 y 的数据, 并制成如图, 其中“$*$”表示服药者, “$+$”表示未服药者.



(1) 从服药的 50 名患者中随机选出一人, 求此人指标 y 的值小于 60 的概率;
(2) 从图中 A, B, C, D 四人中随机选出两人, 记 ξ 为选出的两人中指标 x 的值大于 1.7 的人数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$;
(3) 试判断这 100 名患者中服药者指标 y 数据的方差与未服药者指标 y 数据的方差的大小. (只需写出结论)

18. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 过点 $P(1,1)$. 过点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 作直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 M, N, 过点 M 作 x 轴的垂线分别与直线 OP, ON 交于点 A, B, 其中 O 为原点.
(1) 求抛物线 C 的方程, 并求其焦点坐标和准线方程;
(2) 求证: A 为线段 BM 的中点.

19. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x - x$.
(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

20. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列, 记 $c_n = \max\{b_1 - a_1 n, b_2 - a_2 n, \cdots, b_n - a_n n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 其中 $\max\{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 这 s 个数中最大的数.
(1) 若 $a_n = n$, $b_n = 2n - 1$, 求 c_1, c_2, c_3 的值, 并证明 $\{c_n\}$ 是等差数列;
(2) 证明: 或者对任意正数 M, 存在正整数 m, 当 $n \geqslant m$ 时, $\frac{c_n}{n} > M$; 或者存在正整数 m, 使得 c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, $\cdots$ 是等差数列.

2017 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>2\}$, 则 $\complement_U A=$ （　）

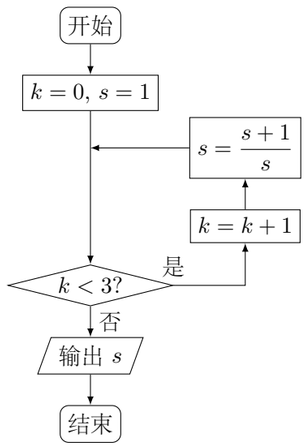
(A) $(-2,2)$　　(B) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

(C) $[-2,2]$　　(D) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

2. 若复数 $(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点在第二象限, 则实数 a 的取值范围是 （　）

(A) $(-\infty,1)$　　(B) $(-\infty,-1)$　　(C) $(1,+\infty)$　　(D) $(-1,+\infty)$

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 （　）



(A) 2　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) $\dfrac{5}{3}$　　(D) $\dfrac{8}{5}$

4. 若 x,y 满足 $\begin{cases}x\leqslant 3\\ x+y\geqslant 2\\ y\leqslant x\end{cases}$, 则 $x+2y$ 的最大值为 （　）

(A) 1　　(B) 3　　(C) 5　　(D) 9

5. 已知函数 $f(x)=3^x-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$ （　）

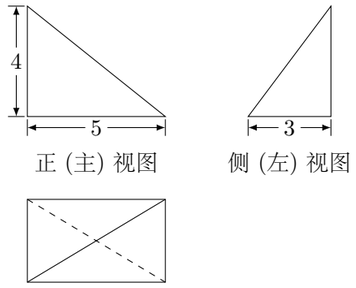
(A) 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

(B) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

(C) 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

(D) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为 （　）



正 (主) 视图　　侧 (左) 视图

俯视图

(A) 60　　(B) 30　　(C) 20　　(D) 10

7. 设 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 为非零向量, 则"存在负数 λ, 使得 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$"是"$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$"的（　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

8. 根据有关资料, 围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361}, 而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80}, 则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是（　）

(*参考数据*: $\lg 3\approx 0.48$)

(A) 10^{33}　　(B) 10^{53}　　(C) 10^{73}　　(D) 10^{93}

二、填空题

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称, 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\sin\beta=$_____.

10. 若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则实数 $m=$_____.

11. 已知 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$, 且 $x+y=1$, 则 x^2+y^2 的取值范围是_____.

12. 已知点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上, 点 A 的坐标为 $(-2,0)$, O 为原点, 则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为_____.

13. 能够说明"设 a,b,c 是任意实数. 若 $a>b>c$, 则 $a+b>c$"是假命题的一组整数 a,b,c 的值依次为_____.

14. 某学习小组由学生和教师组成, 人员构成同时满足以下三个条件:

① 男学生人数多于女学生人数;

② 女学生人数多于教师人数;

③ 教师人数的两倍多于男学生人数.

(1) 若教师人数为 4, 则女学生人数的最大值为_____;

(2) 该小组人数的最小值为_____.

三、解答题

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$, $a_2+a_4=10$, $b_2b_4=a_5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

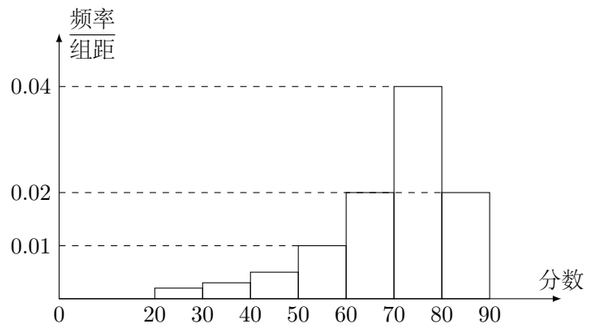
(2) 求和: $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}$.

16. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

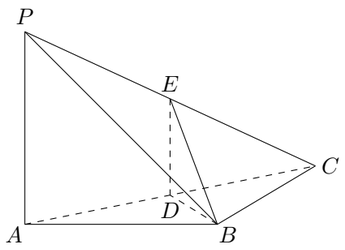
(2) 求证: 当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x)\geqslant-\dfrac{1}{2}$.

17. 某大学艺术专业 400 名学生参加某次测评, 根据男女学生人数比例, 使用分层抽样的方法从中随机抽取了 100 名学生, 记录他们的分数, 将数据分成 7 组: $[20,30)$, $[30,40)$, $\cdots$, $[80,90]$, 并整理得到如下频率分布直方图:



(1) 从总体的 400 名学生中随机抽取一人, 估计其分数小于 70 的概率;
(2) 已知样本中分数小于 40 的学生有 5 人, 试估计总体中分数在区间 $[40,50)$ 内的人数;
(3) 已知样本中有一半男生的分数不小于 70, 且样本中分数不小于 70 的男女生人数相等. 试估计总体中男生和女生人数的比例.

18. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp AB$, $PA \perp BC$, $AB \perp BC$, $PA=AB=BC=2$, D 为线段 AC 的中点, E 为线段 PC 上一点.
(1) 求证: $PA \perp BD$;
(2) 求证: 平面 $BDE \perp$ 平面 PAC;
(3) 当 $PA \parallel$ 平面 BDE 时, 求三棱锥 $E-BCD$ 的体积.



19. 已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 点 D 为 x 轴上一点, 过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M, N, 过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E. 求证: $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为 $4:5$.

20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x \cos x - x$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

2017 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

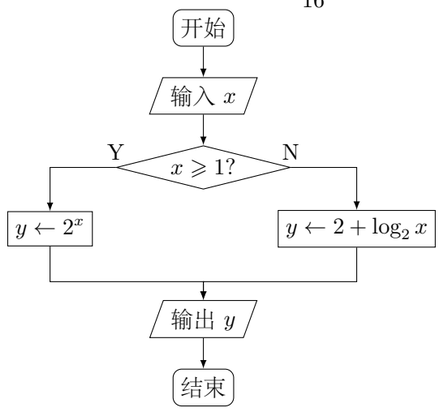
一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{a,a^2+3\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$, 则实数 a 的值为_____.

2. 已知复数 $z=(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的模是_____.

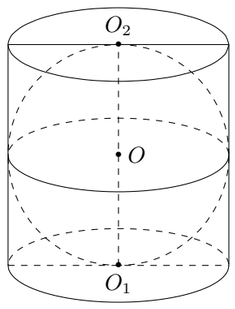
3. 某工厂生产甲、乙、丙、丁四种不同型号的产品, 产量分别为 200, 400, 300, 100 件. 为检验产品的质量, 现用分层抽样的方法从以上所有的产品中抽取 60 件进行检验, 则应从丙种型号的产品中抽取_____件.

4. 如图是一个算法流程图: 若输入 x 的值为 $\dfrac{1}{16}$, 则输出 y 的值是_____.



5. 若 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{6}$, 则 $\tan\alpha=$_____.

6. 如图, 在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O, 该球与圆柱的上、下底面及母线均相切, 记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1, 球 O 的体积为 V_2, 则 $\dfrac{V_1}{V_2}$ 的值是_____.



7. 记函数 $f(x)=\sqrt{6+x-x^2}$ 定义域为 D. 在区间 $[-4,5]$ 上随机取一个数 x, 则 $x\in D$ 的概率是_____.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右准线与它的两条渐近线分别交于点 P, Q, 其焦点是 F_1, F_2, 则四边形 F_1PF_2Q 的面积是_____.

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数, 其前 n 项为 S_n, 已知 $S_3=\dfrac{7}{4}$, $S_6=\dfrac{63}{4}$, 则 $a_8=$_____.

10. 某公司一年购买某种货物 600 吨, 每次购买 x 吨, 运费为 6 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元. 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 x 的值是_____.

11. 已知函数 $f(x)=x^3-2x+\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, 其中 e 是自然对数的底数. 若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$. 则实数 a 的取值范围是_____.

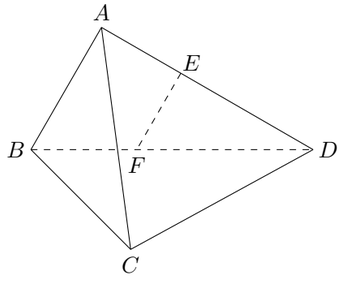
12. 如图, 在同一个平面内, 向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 的模分别为 1, 1, $\sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 α, 且 $\tan\alpha=7$, $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 45°. 若 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ $(m,\ n\in\mathbf{R})$, 则 $m+n=$_____.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-12,0)$, $B(0,6)$, 点 P 在圆 $O:x^2+y^2=50$ 上. 若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 20$, 则点 P 的横坐标的取值范围是_____.

14. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 1 的函数, 在区间 $[0,1)$ 上, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in D\\ x, & x\notin D\end{cases}$, 其中集合 $D=\left\{x\,|\,x=\dfrac{n-1}{n},n\in\mathbf{N}^*\right\}$, 则方程 $f(x)-\lg x=0$ 的解的个数是_____.

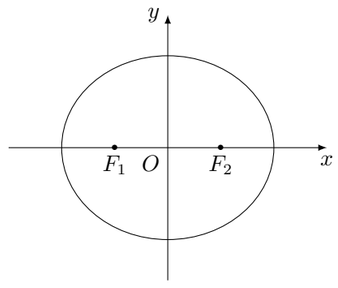
二、解答题

15. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB\perp AD$, $BC\perp BD$, 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD, 点 E, F (E 与 A, D 不重合) 分别在棱 AD, BD 上, 且 $EF\perp AD$. 求证:
(1) $EF\parallel$ 平面 ABC;
(2) $AD\perp AC$.



16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$, $\boldsymbol{b}=\left(3,-\sqrt{3}\right)$, $x\in[0,\pi]$.
(1) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 求 x 的值;
(2) 记 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值和最小值以及对应的 x 的值.

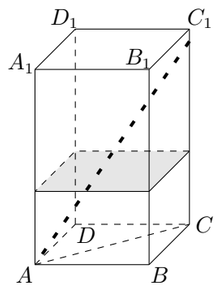
17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 两准线之间的距离为 8. 点 P 在椭圆 E 上, 且位于第一象限, 过点 F_1 作直线 PF_1 的垂线 l_1, 过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线 l_2.
(1) 求椭圆 E 的标准方程;
(2) 若直线 l_1, l_2 的交点 Q 在椭圆 E 上, 求点 P 的坐标.



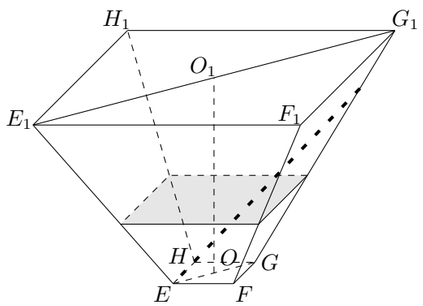
18. 如图, 水平放置的正四棱柱形玻璃容器 I 和正四棱台形玻璃容器 II 的高均为 32 cm, 容器 I 的底面对角线 AC 的长为 $10\sqrt{7}$ cm, 容器 II 的两底面对角线 EG, E_1G_1 的长分别为 14 cm 和 62 cm. 分别在容器 I 和容器 II 中注入水, 水深均为 12 cm. 现有一根玻璃棒 l, 其长度为 40 cm. (容器厚度, 玻璃棒粗细均忽略不计)

(1) 将 l 放在容器 I 中, l 的一端置于点 A 处, 另一端置于侧棱 CC_1 上, 求 l 没入水中部分的长度;

(2) 将 l 放在容器 II 中, l 的一端置于点 E 处, 另一端置于侧棱 GG_1 上, 求 l 没入水中部分的长度.



容器 I



容器 II

19. 对于给定的正整数 k, 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n-1}+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k-1}+a_{n+k}=2ka_n$ 对任意正整数 n $(n>k)$ 总成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 是"$P(k)$ 数列".

(1) 证明: 等差数列 $\{a_n\}$ 是"$P(3)$ 数列";

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 既是"$P(2)$ 数列", 又是"$P(3)$ 数列", 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列.

20. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ $(a>0,\ b\in\mathbf{R})$ 有极值, 且导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点. (极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)

(1) 求 b 关于 a 的函数关系式, 并写出定义域;

(2) 证明: $b^2>3a$;

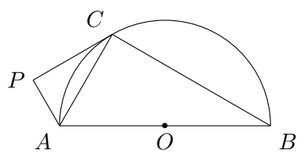
(3) 若 $f(x)$, $f'(x)$ 这两个函数的所有极值之和不小于 $-\dfrac{7}{2}$, 求 a 的取值范围.

21. 四选二.

【A】如图, AB 为半圆 O 的直径, 直线 PC 切半圆 O 于点 C, $AP\perp PC$, P 为垂足. 求证:

(1) $\angle PAC=\angle CAB$;

(2) $AC^2=AP\cdot AB$.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{AB}$;

(2) 若曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应的变换作用下得到另一曲线 C_2, 求 C_2 的方程.

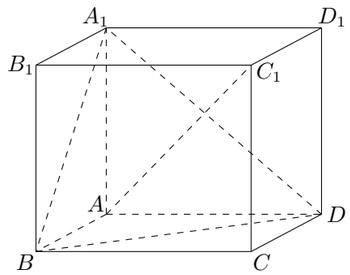
【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-8+t\\y=\dfrac{t}{2}\end{cases}$ $(t$ 为参数), 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2s^2\\y=2\sqrt{2}s\end{cases}$ $(s$ 为参数). 设 P 为曲线 C 上的动点, 求点 P 到直线 l 的距离的最小值.

【D】已知 a, b, c, d 为实数, 且 $a^2+b^2=4$, $c^2+d^2=16$, 证明 $ac+bd\leqslant 8$.

22. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AB=AD=2$, $AA_1=\sqrt{3}$, $\angle BAD=120^\circ$.

(1) 求异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值;

(2) 求二面角 $B-A_1D-A$ 的正弦值.



23. 已知一个口袋有 m 个白球, n 个黑球 $(m,\ n\in\mathbf{N}^*,\ n\geqslant 2)$, 这些球除颜色外全部相同. 现将口袋中的球随机的逐个取出, 并放入如图所示的编号为 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m+n$ 的抽屉内, 其中第 k 次取出的球放入编号为 k 的抽屉 $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m+n)$.

1	2	3	$\cdots$	$m+n$

(1) 试求编号为 2 的抽屉内放的是黑球的概率 p;

(2) 随机变量 X 表示最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数, $E(X)$ 是 X 的数学期望, 证明: $E(X)<\dfrac{n}{(m+n)(n-1)}$.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

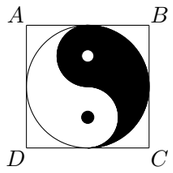
一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x<1\}$, $B=\{x\mid 3^x<1\}$, 则 （ ）

(A) $A\cap B=\{x\mid x<0\}$　(B) $A\cup B=\mathbf{R}$

(C) $A\cup B=\{x\mid x>1\}$　(D) $A\cap B=\varnothing$

2. 如图, 正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图, 正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称. 在正方形内随机取一点, 则此点取自黑色部分的概率是 （ ）



(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{8}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

3. 设有下面四个命题:

p_1: 若复数 z 满足 $\dfrac{1}{z}\in\mathbf{R}$, 则 $z\in\mathbf{R}$;

p_2: 若复数 z 满足 $z^2\in\mathbf{R}$, 则 $z\in\mathbf{R}$;

p_3: 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1z_2\in\mathbf{R}$, 则 $z_1=\overline{z_2}$;

p_4: 若复数 $z\in\mathbf{R}$, 则 $\overline{z}\in\mathbf{R}$.

其中的真命题为 （ ）

(A) p_1, p_3　(B) p_1, p_4　(C) p_2, p_3　(D) p_2, p_4

4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_4+a_5=24$, $S_6=48$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为 （ ）

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8

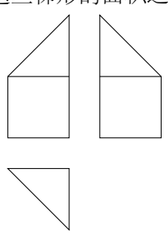
5. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减, 且为奇函数. 若 $f(1)=-1$, 则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $[-2,2]$　(B) $[-1,1]$　(C) $[0,4]$　(D) $[1,3]$

6. $\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为 （ ）

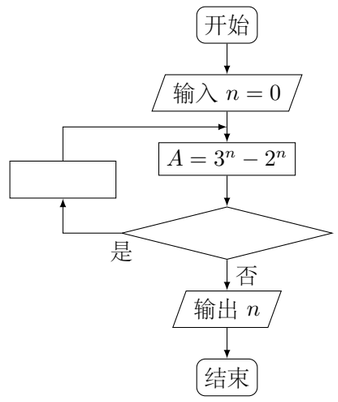
(A) 15　(B) 20　(C) 30　(D) 35

7. 某多面体的三视图如图所示, 其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成, 正方形的边长为 2, 俯视图为等腰直角三角形, 该多面体的各个面中有若干个是梯形, 这些梯形的面积之和为 （ ）



(A) 10　(B) 12　(C) 14　(D) 16

8. 如图程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n, 那么在 $\diamond$ 和 $\square$ 两个空白框中, 可以分别填入 （ ）



(A) $A>1000$ 和 $n=n+1$　(B) $A>1000$ 和 $n=n+2$

(C) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+1$　(D) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+2$

9. 已知曲线 $C_1:y=\cos x$, $C_2:y=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$, 则下面结论正确的是 （ ）

(A) 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

(B) 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

(C) 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

(D) 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

10. 已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点, 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2, 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为 （ ）

(A) 16　(B) 14　(C) 12　(D) 10

11. 设 x, y, z 为正数, 且 $2^x=3^y=5^z$, 则 （ ）

(A) $2x<3y<5z$　(B) $5z<2x<3y$　(C) $3y<5z<2x$　(D) $3y<2x<5z$

12. 几位大学生响应国家的创业号召, 开发了一款应用软件. 为激发大家学习数学的兴趣, 他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动. 这款软件的激活码为下面数学问题的答案: 已知数列 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, $\cdots$, 其中第一项是 2^0, 接下来的两项是 2^0, 2^1, 再接下来的三项是 2^0, 2^1, 2^2, 依此类推. 求满足如下条件的最小整数 N: $N>100$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂. 那么该款软件的激活码是 （ ）

(A) 440　(B) 330　(C) 220　(D) 110

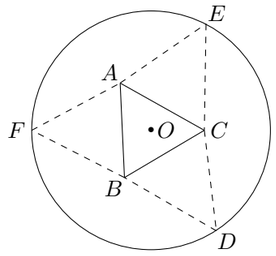
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$_____.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\leqslant 1\\ 2x+y\geqslant -1\\ x-y\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-2y$ 的最小值为_____.

15. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右顶点为 A, 以 A 为圆心, b 为半径作圆 A, 圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 若 $\angle MAN=60^\circ$, 则 C 的离心率为_____.

16. 如图, 圆形纸片的圆心为 O, 半径为 5 cm, 该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O. D, E, F 为圆 O 上的点, $\triangle DBC$, $\triangle ECA$, $\triangle FAB$ 分别是以 BC, CA, AB 为底边的等腰三角形. 沿虚线剪开后, 分别以 BC, CA, AB 为折痕折起 $\triangle DBC$, $\triangle ECA$, $\triangle FAB$, 使得 D, E, F 重合, 得到三棱锥. 当 $\triangle ABC$ 的边长变化时, 所得三棱锥体积 (单位: cm^3) 的最大值为_____.



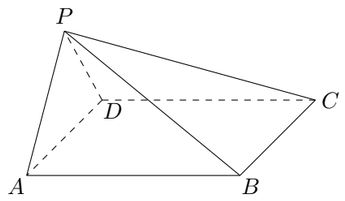
三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2}{3\sin A}$.

(1) 求 $\sin B\sin C$;

(2) 若 $6\cos B\cos C=1$, $a=3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB/\!/CD$, 且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$.
(1) 证明: 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD;
(2) 若 $PA=PD=AB=DC$, $\angle APD=90^\circ$, 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



19. 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程, 检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件, 并测量其尺寸 (单位: cm). 根据长期生产经验, 可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.
(1) 假设生产状态正常, 记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件数, 求 $P(X\geqslant 1)$ 及 X 的数学期望;
(2) 一天内抽检零件中, 如果出现了尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件, 就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况, 需对当天的生产过程进行检查.
① 试说明上述监控生产过程方法的合理性;
② 下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸:

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\overline{x}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}x_i=9.97$, $s=\sqrt{\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}\left(\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2\right)}\approx 0.212$, 其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸, $i=1,2,\cdots,16$.
用样本平均数 $\overline{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$, 用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$, 利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查? 剔除 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma},\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外的数据, 用剩下的数据估计 μ 和 σ (精确到 0.01).
附: 若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$, $0.9974^{16}\approx 0.9592$, $\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

20. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 四点 $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$, $P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.
(1) 求 C 的方程;
(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A, B 两点, 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1, 证明: l 过定点.

21. 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+4t\\ y=1-t\end{cases}$ (t 为参数).
(1) 若 $a=-1$, 求 C 与 l 的交点坐标;
(2) 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a.

23. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4$, $g(x)=|x+1|+|x-1|$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集;
(2) 若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集包含 $[-1,1]$, 求 a 的取值范围.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x<2\}$, $B=\{x\mid 3-2x>0\}$, 则 （ ）

(A) $A\cap B=\left\{x\mid x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　(B) $A\cap B=\varnothing$

(C) $A\cup B=\left\{x\mid x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　(D) $A\cup B=\mathbf{R}$

2. 为评估一种农作物的种植效果, 选了 n 块地作试验田, 这 n 块地的亩产量(单位: kg) 分别是 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 下面给出的指标中可以用来评估这种农作物亩产量稳定程度的是 （ ）

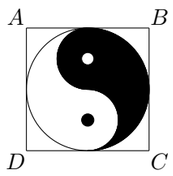
(A) x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的平均数　　(B) x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的标准差

(C) x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的最大值　　(D) x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的中位数

3. 下列各式的运算结果为纯虚数的是 （ ）

(A) $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2$　　(B) $\mathrm{i}^2(1-\mathrm{i})$　　(C) $(1+\mathrm{i})^2$　　(D) $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图, 正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称. 在正方形内随机取一点, 则此点取自黑色部分的概率是 （ ）

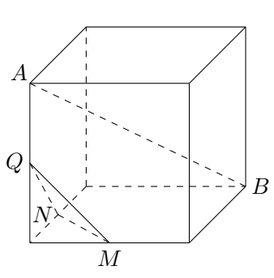


(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi}{8}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

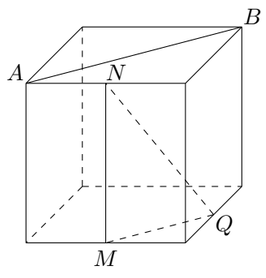
5. 已知 F 是双曲线 C: $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点, P 是 C 上一点, 且 PF 与 x 轴垂直, 点 A 的坐标是 $(1,3)$. 则 $\triangle APF$ 的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $\dfrac{3}{2}$

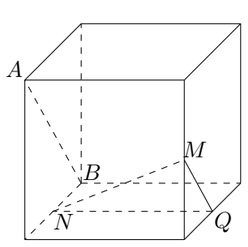
6. 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是( )



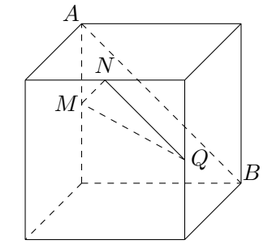
(A)



(B)



(C)

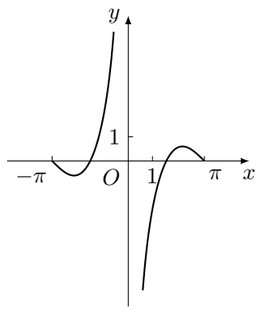


(D)

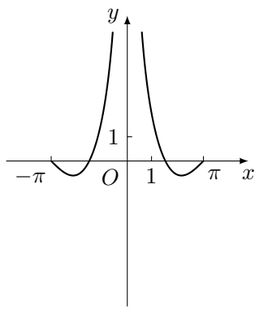
7. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y\leqslant 3\\ x-y\geqslant 1\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为 （ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

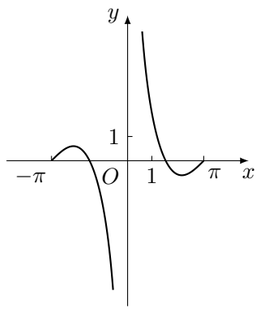
8. 函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图象大致为 （ ）



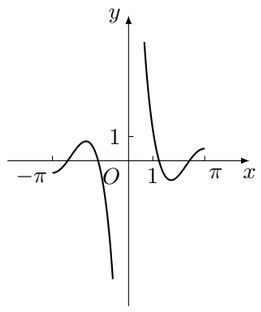
(A)



(B)



(C)



(D)

9. 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$, 则 （ ）

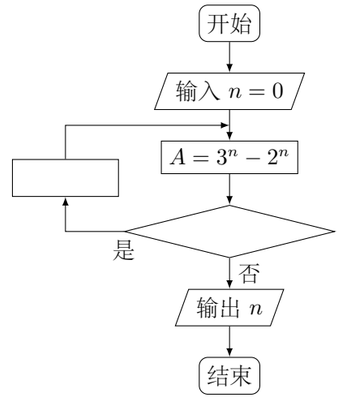
(A) $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增

(B) $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减

(C) $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

(D) $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称

10. 如图程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n, 那么在 $\diamond$ 和 $\square$ 两个空白框中, 可以分别填入 （ ）



(A) $A>1000$ 和 $n=n+1$　　(B) $A>1000$ 和 $n=n+2$

(C) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+1$　　(D) $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+2$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$, $a=2$, $c=\sqrt{2}$, 则 $C=$ （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{12}$　　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

12. 设 A, B 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点, 若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120^\circ$, 则 m 的取值范围是 （ ）

(A) $(0,1]\cup[9,+\infty)$　　(B) $\left(0,\sqrt{3}\right]\cup[9,+\infty)$

(C) $(0,1]\cup[4,+\infty)$　　(D) $\left(0,\sqrt{3}\right]\cup[4,+\infty)$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$, $\boldsymbol{b}=(m,1)$, 若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直, 则 $m=$_____.

14. 曲线 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为_____.

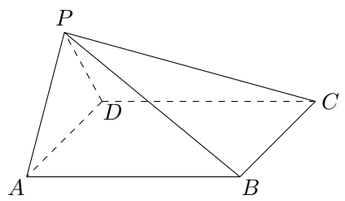
15. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\tan\alpha=2$, 则 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$_____.

16. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, SC 是球 O 的直径, 若平面 $SCA\perp$ 平面 SCB, $SA=AC$, $SB=BC$, 三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9, 则球 O 的表面积为_____.

三、解答题

17. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_2=2$, $S_3=-6$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求 S_n, 并判断 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 是否能成等差数列.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$.
(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD;
(2) 若 $PA=PD=AB=DC$, $\angle APD=90^\circ$, 且四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{8}{3}$, 求该四棱锥的侧面积.



19. 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程, 检验员每隔 30 min 从该生产线上随机抽取一个零件, 并测量其尺寸 (单位: cm). 下面是检验员在一天内依次抽取的 16 个零件的尺寸:

抽取次序	1	2	3	4	5	6	7	8
零件尺寸	9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
抽取次序	9	10	11	12	13	14	15	16
零件尺寸	10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得

$\overline{x}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}x_i=9.97$, $s=\sqrt{\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}\left(\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2\right)}\approx 0.212$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{16}(i-8.5)^2}\approx 18.439$, $\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})(i-8.5)=-2.78$, 其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸, $i=1, 2, \cdots, 16$.

(1) 求 (x_i, i) $(i=1, 2, \cdots, 16)$ 的相关系数 r, 并回答是否可以认为这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小; (若 $|r|<0.25$, 则可以认为零件的尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小)

(2) 一天内抽检零件中, 如果出现了尺寸在 $(\overline{x}-3s, \overline{x}+3s)$ 之外的零件, 就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况, 需对当天的生产过程进行检查.

① 从这一天抽检的结果看, 是否需对当天的生产过程进行检查?

② 在 $(\overline{x}-3s, \overline{x}+3s)$ 之外的数据称为离群值, 试剔除离群值, 估计这条生产线当天生产的零件尺寸的均值与标准差. (精确到 0.01)

附: 样本 (x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$, $\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

20. 设 A, B 为曲线 C: $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上两点, A 与 B 的横坐标之和为 4.
(1) 求直线 AB 的斜率;
(2) 设 M 为曲线 C 上一点, C 在 M 处的切线与直线 AB 平行, 且 $AM \perp BM$, 求直线 AB 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-a)-a^2x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+4t\\ y=1-t\end{cases}$ (t 为参数).
(1) 若 $a=-1$, 求 C 与 l 的交点坐标;
(2) 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a.

23. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4$, $g(x)=|x+1|+|x-1|$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集;
(2) 若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集包含 $[-1, 1]$, 求 a 的取值范围.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) $2+\mathrm{i}$　(D) $2-\mathrm{i}$

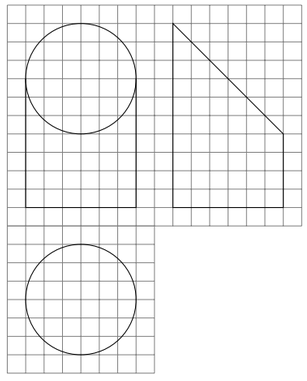
2. 设集合 $A=\{1,2,4\}$, $B=\{x\mid x^2-4x+m=0\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$, 则 $B=$ （ ）

(A) $\{1,-3\}$　(B) $\{1,0\}$　(C) $\{1,3\}$　(D) $\{1,5\}$

3. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题: “远望巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问尖头几盏灯? ”意思是: 一座 7 层塔共挂了 381 盏灯, 且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍, 则塔的顶层共有灯 （ ）

(A) 1 盏　(B) 3 盏　(C) 5 盏　(D) 9 盏

4. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得, 则该几何体的体积为( )



(A) 90π　(B) 63π　(C) 42π　(D) 36π

5. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\2x-3y+3\geqslant 0\\y+3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最小值是( )

(A) -15　(B) -9　(C) 1　(D) 9

6. 安排 3 名志愿者完成 4 项工作, 每人至少完成 1 项, 每项工作由 1 人完成, 则不同的安排方式共有 （ ）

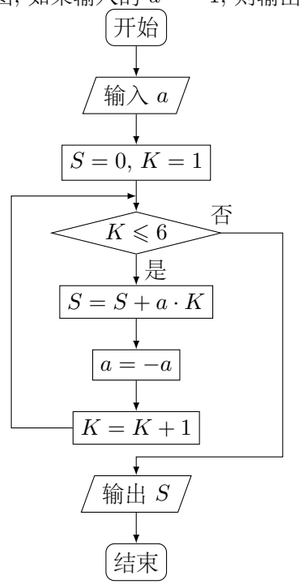
(A) 12 种　(B) 18 种　(C) 24 种　(D) 36 种

7. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩. 老师说: 你们四人中有 2 位优秀, 2 位良好, 我现在给甲看乙、丙的成绩, 给乙看丙的成绩, 给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说: 我还是不知道我的成绩. 根据以上信息, 则 （ ）

(A) 乙可以知道四人的成绩　(B) 丁可以知道四人的成绩

(C) 乙、丁可以知道对方的成绩　(D) 乙、丁可以知道自己的成绩

8. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $a=-1$, 则输出的 $S=$ （ ）



(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

9. 若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=2$, $BC=CC_1=1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　(C) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)\mathrm{e}^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极小值为 （ ）

(A) -1　(B) $-2\mathrm{e}^{-3}$　(C) $5\mathrm{e}^{-3}$　(D) 1

12. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值是 （ ）

(A) -2　(B) $-\dfrac{3}{2}$　(C) $-\dfrac{4}{3}$　(D) -1

二、填空题

13. 一批产品的二等品率为 0.02, 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 100 次, X 表示抽到的二等品件数, 则 $DX=$_____.

14. 函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}$ $\left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是_____.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_3=3$, $S_4=10$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=$_____.

16. 已知 F 是抛物线 C: $y^2=8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N. 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN|=$_____.

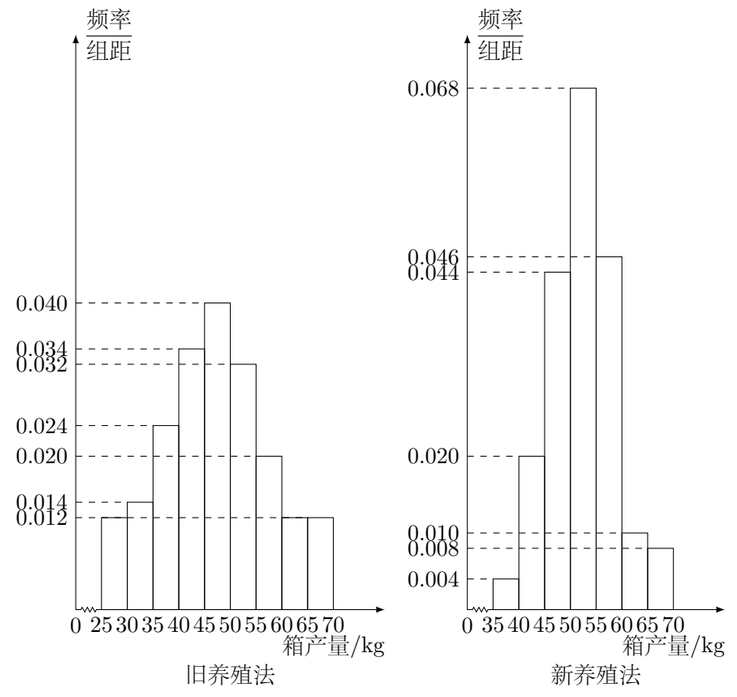
三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 面积为 2, 求 b.

18. 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如图:



(1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立, 记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50 kg, 新养殖法的箱产量不低于 50 kg”, 估计 A 的概率;

(2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关;

	箱产量 <50 kg	箱产量 $\geqslant 50$ kg
旧养殖法		
新养殖法		

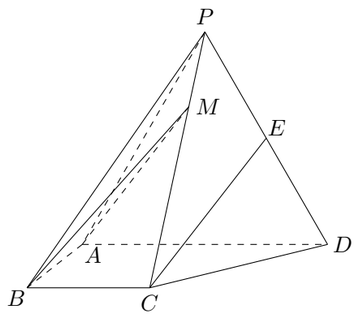
(3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的中位数的估计值 (精确到 0.01).

附:

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$, E 是 PD 的中点.
(1) 证明: 直线 $CE\parallel$ 平面 PAB;
(2) 点 M 在棱 PC 上, 且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45°, 求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.



20. 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N, 点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.
(1) 求点 P 的轨迹方程;
(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21. 已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$, 且 $f(x)\geqslant 0$.
(1) 求 a;
(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0, 且 $\mathrm{e}^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.
(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$,, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;
(2) 设点 A 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. 已知 $a>0$, $b>0$, $a^3+b^3=2$, 证明:
(1) $(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$;
(2) $a+b\leqslant 2$.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $A\cup B=$ （　）

(A) $\{1,2,3,4\}$　(B) $\{1,2,3\}$　(C) $\{2,3,4\}$　(D) $\{1,3,4\}$

2. $(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=$ （　）

(A) $1-\mathrm{i}$　(B) $1+3\mathrm{i}$　(C) $3+\mathrm{i}$　(D) $3+3\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 （　）

(A) 4π　(B) 2π　(C) π　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

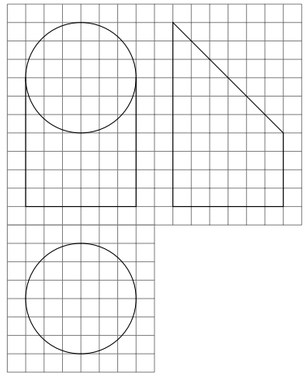
4. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 则 （　）

(A) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　(B) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　(C) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　(D) $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$

5. 若 $a>1$, 则双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是 （　）

(A) $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$　(B) $\left(\sqrt{2},2\right)$　(C) $\left(1,\sqrt{2}\right)$　(D) $(1,2)$

6. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得, 则该几何体的体积为(　)



(A) 90π　(B) 63π　(C) 42π　(D) 36π

7. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\2x-3y+3\geqslant 0\\y+3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最小值是(　)

(A) -15　(B) -9　(C) 1　(D) 9

8. 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间为 （　）

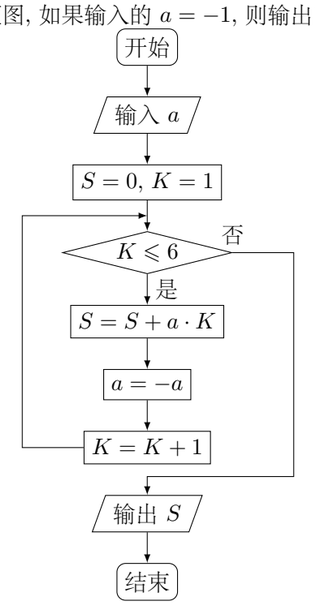
(A) $(-\infty,-2)$　(B) $(-\infty,1)$　(C) $(1,+\infty)$　(D) $(4,+\infty)$

9. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩. 老师说: 你们四人中有 2 位优秀, 2 位良好, 我现在给甲看乙、丙的成绩, 给乙看丙的成绩, 给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说: 我还是不知道我的成绩. 根据以上信息, 则 （　）

(A) 乙可以知道四人的成绩　(B) 丁可以知道四人的成绩

(C) 乙、丁可以知道对方的成绩　(D) 乙、丁可以知道自己的成绩

10. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $a=-1$, 则输出的 $S=$ （　）



(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

11. 从分别写有 1, 2, 3, 4, 5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张, 放回后再随机抽取 1 张, 则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{10}$　(B) $\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{3}{10}$　(D) $\dfrac{2}{5}$

12. 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F, 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M (M 在 x 轴上方), l 为 C 的准线, 点 N 在 l 上, 且 $MN\perp l$, 则 M 到直线 NF 的距离为 （　）

(A) $\sqrt{5}$　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $2\sqrt{3}$　(D) $3\sqrt{3}$

二、填空题

13. 函数 $f(x)=2\cos x+\sin x$ 的最大值为_____.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f(x)=2x^3+x^2$, 则 $f(2)=$_____.

15. 长方体的长、宽、高分别为 3, 2, 1, 其顶点都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为_____.

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$, 则 $B=$_____.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, $a_1=-1$, $b_1=1$, $a_2+b_2=2$.

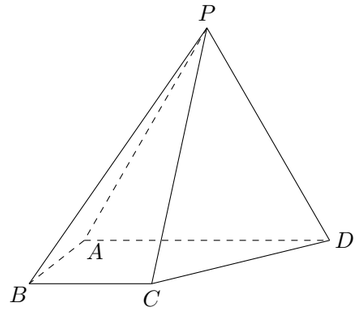
(1) 若 $a_3+b_3=5$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $T_3=21$, 求 S_3.

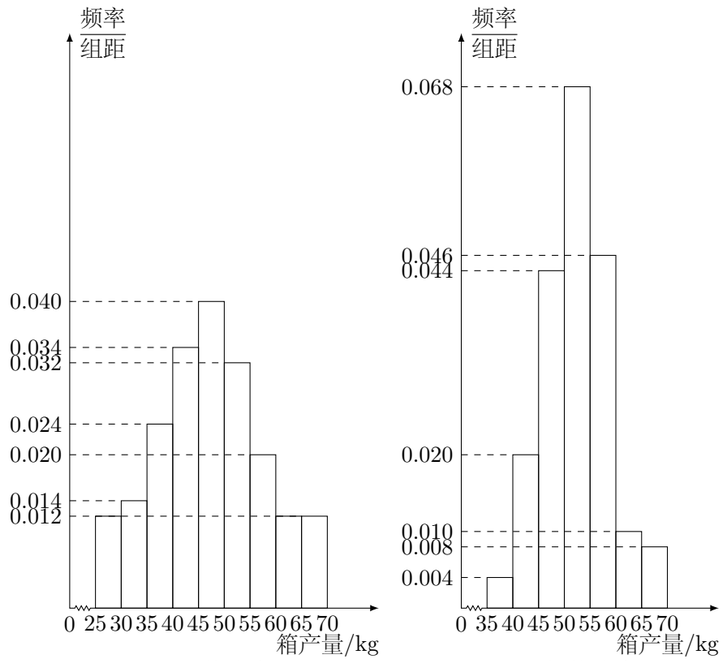
18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$.

(1) 证明: 直线 $BC\parallel$ 平面 PAD;

(2) 若 $\triangle PCD$ 面积为 $2\sqrt{7}$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



19. 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如图:



(1) 记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50 kg”, 估计 A 的概率;
(2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关;

	箱产量 <50 kg	箱产量 $\geqslant 50$ kg
旧养殖法		
新养殖法		

(3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的优劣进行比较.

附:

$P\left(K^2 \geqslant k\right)$	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

20. 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $C: \dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N, 点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.
(1) 求点 P 的轨迹方程;
(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21. 设函数 $f(x)=(1-x^2)\mathrm{e}^x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant ax+1$, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.
(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$,, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;
(2) 设点 A 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. 已知 $a>0$, $b>0$, $a^3+b^3=2$, 证明:
(1) $(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$;
(2) $a+b\leqslant 2$.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

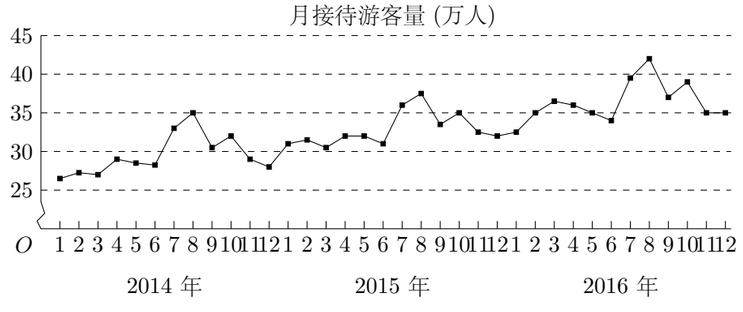
1. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|x^2+y^2=1\}$, $B=\{(x,y)\,|y=x\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 （ ）

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

2. 设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

3. 某城市为了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量 (单位: 万人) 的数据, 绘制了下面的折线图.



根据该折线图, 下列结论错误的是 （ ）

(A) 月接待游客量逐月增加

(B) 年接待游客量逐年增加

(C) 各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月

(D) 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月, 波动性更小, 变化比较平稳

4. $(x+y)(2x-y)^5$ 的展开式中的 x^3y^3 系数为 （ ）

(A) -80 (B) -40 (C) 40 (D) 80

5. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$, 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 有公共焦点, 则 C 的方程为 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{10}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$

6. 设函数 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论错误的是 （ ）

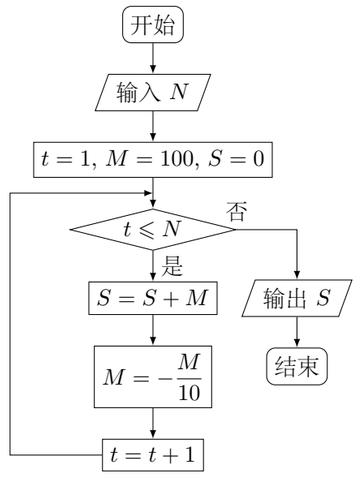
(A) $f(x)$ 的一个周期为 -2π

(B) $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{8\pi}{3}$ 对称

(C) $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\dfrac{\pi}{6}$

(D) $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减

7. 执行如图的程序框图, 为使输出 S 的值小于 91, 则输入的正整数 N 的最小值为 （ ）



(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

8. 已知圆柱的高为 1, 它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上, 则该圆柱的体积为 （ ）

(A) π (B) $\dfrac{3\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}$

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差不为 0, 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 前 6 项的和为 （ ）

(A) -24 (B) -3 (C) 3 (D) 8

10. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2, 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

11. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1}\right)$ 有唯一零点, 则 $a=$ （ ）

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

12. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $AD=2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$, 则 $\lambda+\mu$ 的最大值为 （ ）

(A) 3 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-4y$ 的最小值为_____.

14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=-1$, $a_1-a_3=-3$, 则 $a_4=$_____.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$, 则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是_____.

16. a, b 为空间中两条互相垂直的直线, 等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a, b 都垂直, 斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转, 有下列结论:
① 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 30° 角;
② 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 60° 角;
③ 直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45°;
④ 直线 AB 与 a 所成角的最大值为 60°;
其中正确的是_____. (填写所有正确结论的编号)

三、解答题

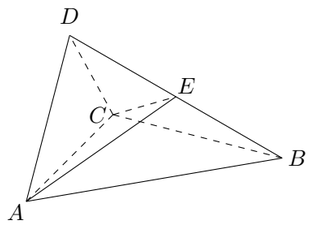
17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$, $a=2\sqrt{7}$, $b=2$.
(1) 求 c;
(2) 设 D 为 BC 边上一点, 且 $AD\perp AC$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

18. 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶 4 元, 售价每瓶 6 元, 未售出的酸奶降价处理, 以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: °C) 有关. 如果最高气温不低于 25, 需求量为 500 瓶; 如果最高气温位于区间 $[20,25)$, 需求量为 300 瓶; 如果最高气温低于 20, 需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.
(1) 求六月份这种酸奶一天的需求量 X (单位: 瓶) 的分布列;
(2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量 n (单位: 瓶) 为多少时, Y 的数学期望达到最大值?

19. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $\triangle ACD$ 是直角三角形, $\angle ABD=\angle CBD$, $AB=BD$.
(1) 证明: 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC;
(2) 过 AC 的平面交 BD 于点 E, 若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分, 求二面角 $D-AE-C$ 的余弦值.



20. 已知抛物线 C: $y^2=2x$, 过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.
(1) 证明: 坐标原点 O 在圆 M 上;
(2) 设圆 M 过点 $P(4,-2)$, 求直线 l 与圆 M 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.
(1) 若 $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的值;
(2) 设 m 为整数, 且对于任意正整数 n, $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<m$, 求 m 的最小值.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\\ y=kt\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m\\ y=\dfrac{m}{k}\end{cases}$ (m 为参数). 设 l_1 与 l_2 的交点为 P, 当 k 变化时, P 的轨迹为曲线 C.
(1) 写出 C 的普通方程;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设 l_3 : $\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$, M 为 l_3 与 C 的交点, 求 M 的极径.

23. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.
(1) 求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集;
(2) 若不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.

2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

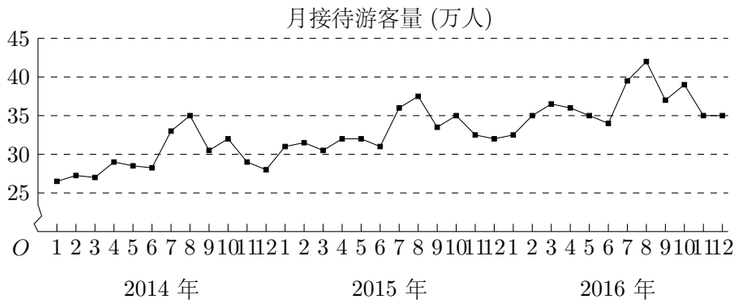
1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为(　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

2. 复平面内表示复数 $z=\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})$ 的点位于　　(　)

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 某城市为了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量 (单位: 万人) 的数据, 绘制了下面的折线图.



根据该折线图, 下列结论错误的是　　(　)

(A) 月接待游客量逐月增加

(B) 年接待游客量逐年增加

(C) 各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月

(D) 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月, 波动性更小, 变化比较平稳

4. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$, 则 $\sin 2\alpha=$　　(　)

(A) $-\dfrac{7}{9}$　　(B) $-\dfrac{2}{9}$　　(C) $\dfrac{2}{9}$　　(D) $\dfrac{7}{9}$

5. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x-y$ 的取值范围是(　)

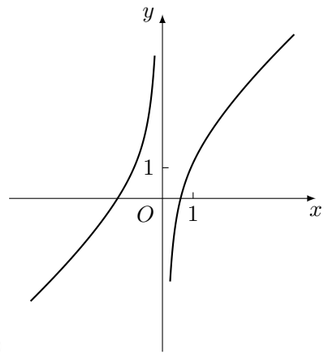
(A) $[-3,0]$　　(B) $[-3,2]$　　(C) $[0,2]$　　(D) $[0,3]$

6. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{5}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为　　(　)

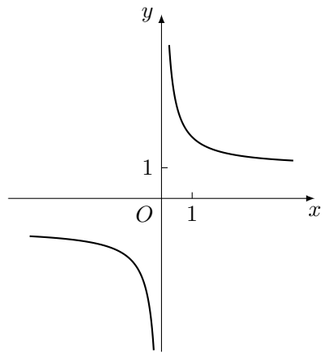
(A) $\dfrac{6}{5}$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{3}{5}$　　(D) $\dfrac{1}{5}$

7. 函数 $y=1+x+\dfrac{\sin x}{x^2}$ 的部分图象大致为　　(　)

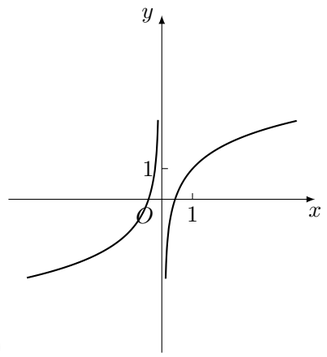
(A)



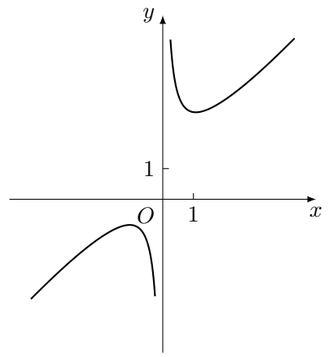
(B)



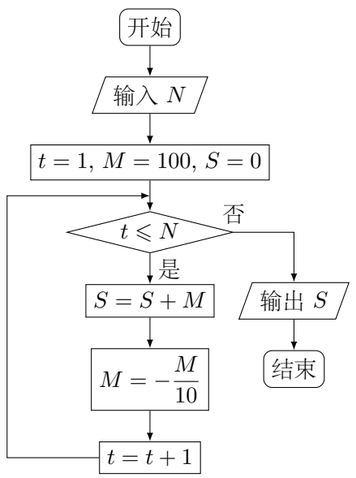
(C)



(D)



8. 执行如图的程序框图, 为使输出 S 的值小于 91, 则输入的正整数 N 的最小值为　　(　)



(A) 5　　(B) 4　　(C) 3　　(D) 2

9. 已知圆柱的高为 1, 它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上, 则该圆柱的体积为　　(　)

(A) π　　(B) $\dfrac{3\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

10. 在正方体 $ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CD 的中点, 则　　(　)

(A) $A_1E\perp DC_1$　　(B) $A_1E\perp BD$　　(C) $A_1E\perp BC_1$　　(D) $A_1E\perp AC$

11. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2, 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切, 则 C 的离心率为　　(　)

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1}\right)$ 有唯一零点, 则 $a=$　　(　)

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 1

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$, $\boldsymbol{b}=(3,m)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$_____.

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1\,(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{3}{5}x$, 则 $a=$_____.

15. $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $C=60°$, $b=\sqrt{6}$, $c=3$, 则 $A=$_____.

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$, 则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

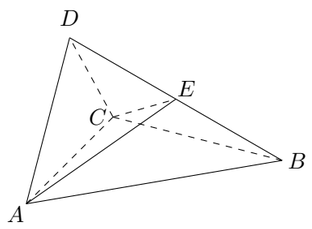
(2) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

18. 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶 4 元, 售价每瓶 6 元, 未售出的酸奶降价处理, 以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: °C) 有关. 如果最高气温不低于 25, 需求量为 500 瓶; 如果最高气温位于区间 $[20,25)$, 需求量为 300 瓶; 如果最高气温低于 20, 需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.
(1) 估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率;
(2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时, 写出 Y 的所有可能值, 并估计 Y 大于零的概率.

19. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $AD=CD$.
(1) 证明: $AC\perp BD$;
(2) 已知 $\triangle ACD$ 是直角三角形, $AB=BD$, 若 E 为棱 BD 上与 D 不重合的点, 且 $AE\perp EC$, 求四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比.



20. 在直角坐标系中 xOy, 曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 点 C 的坐标为 $(0,1)$, 当 m 变化时, 解答下列问题:
(1) 能否出现 $AC\perp BC$ 的情况? 说明理由;
(2) 证明过 A, B, C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值.

21. 已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $a<0$ 时, 证明 $f(x)\leqslant -\dfrac{3}{4a}-2$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\\ y=kt\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m\\ y=\dfrac{m}{k}\end{cases}$ (m 为参数). 设 l_1 与 l_2 的交点为 P, 当 k 变化时, P 的轨迹为曲线 C.
(1) 写出 C 的普通方程;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设 l_3 : $\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$, M 为 l_3 与 C 的交点, 求 M 的极径.

23. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.
(1) 求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集;
(2) 若不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.

2017 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 设函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 A, 函数 $y=\ln(1-x)$ 的定义域为 B, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $(1,2)$　(B) $(1,2]$　(C) $(-2,1)$　(D) $[-2,1)$

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $z=a+\sqrt{3}\mathrm{i}$, $z\cdot\overline{z}=4$, 则 $a=$ （　）

(A) 1 或 -1　(B) $\sqrt{7}$ 或 $-\sqrt{7}$　(C) $-\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{3}$

3. 已知命题 p: $\forall x>0$, $\ln(x+1)>0$; 命题 q: 若 $a>b$, 则 $a^2>b^2$, 下列命题为真命题的是 （　）

(A) $p\wedge q$　(B) $p\wedge\neg q$　(C) $\neg p\wedge q$　(D) $\neg p\wedge\neg q$

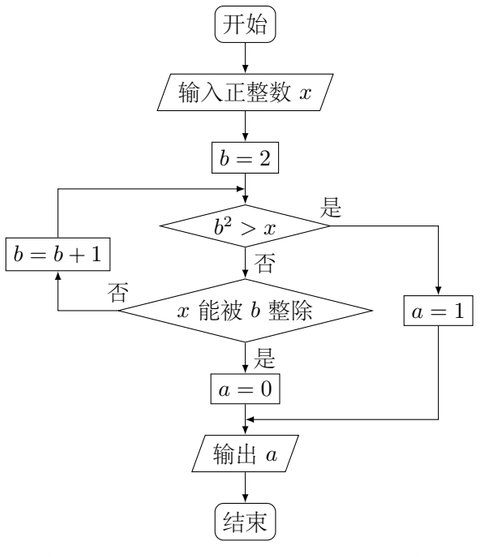
4. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+3\leqslant 0\\3x+y+5\leqslant 0\\x+3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最大值是（　）

(A) 0　(B) 2　(C) 5　(D) 6

5. 为了研究某班学生的脚长 x (单位: 厘米) 和身高 y (单位: 厘米) 的关系, 从该班随机抽取 10 名学生, 根据测量数据的散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系, 设其回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$, 已知 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=225$, $\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=1600$, $\hat{b}=4$, 该班某学生的脚长为 24, 据此估计其身高为 （　）

(A) 160　(B) 163　(C) 166　(D) 170

6. 执行两次如图所示的程序框图, 若第一次输入的 x 值为 7, 第二次输入的 x 值为 9, 则第一次, 第二次输出的 a 值分别为 （　）



(A) 0, 0　(B) 1, 1　(C) 0, 1　(D) 1, 0

7. 若 $a>b>0$, 且 $ab=1$, 则下列不等式成立的是 （　）

(A) $a+\dfrac{1}{b}<\dfrac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$　(B) $\dfrac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\dfrac{1}{b}$

(C) $a+\dfrac{1}{b}<\log_2(a+b)<\dfrac{b}{2^a}$　(D) $\log_2(a+b)<a+\dfrac{1}{b}<\dfrac{b}{2^a}$

8. 从分别标有 1, 2, $\cdots$, 9 的 9 张卡片中不放回地随机抽取 2 次, 每次抽取 1 张, 则抽到在 2 张卡片上的数奇偶性不同的概率是 （　）

(A) $\dfrac{5}{18}$　(B) $\dfrac{4}{9}$　(C) $\dfrac{5}{9}$　(D) $\dfrac{7}{9}$

9. 在 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且满足 $\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$, 则下列等式成立的是 （　）

(A) $a=2b$　(B) $b=2a$　(C) $A=2B$　(D) $B=2A$

10. 已知当 $x\in[0,1]$ 时, 函数 $y=(mx-1)^2$ 的图象与 $y=\sqrt{x}+m$ 的图象有且只有一个交点, 则正实数 m 的取值范围是 （　）

(A) $(0,1]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$　(B) $(0,1]\cup[3,+\infty)$

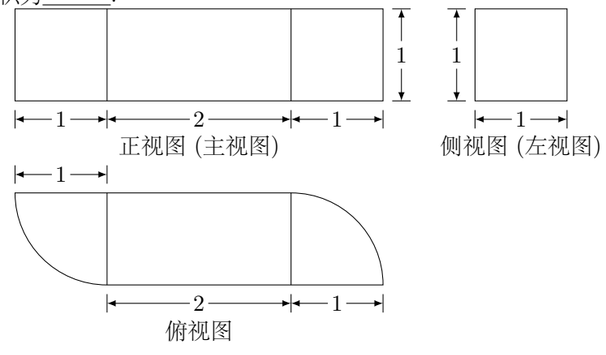
(C) $(0,\sqrt{2})\cup[2\sqrt{3},+\infty)$　(D) $(0,\sqrt{2}]\cup[3,+\infty)$

二、填空题

11. 已知 $(1+3x)^n$ 的展开式中含有 x^2 的系数是 54, 则 $n=$_____.

12. 已知 $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ 是互相垂直的单位向量, 若 $\sqrt{3}\boldsymbol{e_1}-\boldsymbol{e_2}$ 与 $\boldsymbol{e_1}+\lambda\boldsymbol{e_2}$ 的夹角为 60°, 则实数 λ 的值是_____.

13. 由一个长方体和两个 $\dfrac{1}{4}$ 圆柱体构成的几何体的三视图如图, 则该几何体的体积为_____.



14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 交于 A, B 两点, 若 $|AF|+|BF|=4|OF|$, 则该双曲线的渐近线方程为_____.

15. 若函数 $\mathrm{e}^x f(x)$ ($\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增, 则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质. 下列函数中所有具有 M 性质的函数的序号为_____.

① $f(x)=2^{-x}$; ② $f(x)=3^{-x}$; ③ $f(x)=x^3$; ④ $f(x)=x^2+2$.

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{2}\right)$, 其中 $0<\omega<3$, 已知 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

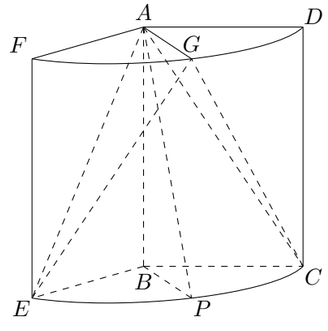
(1) 求 ω;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值.

17. 如图, 几何体是圆柱的一部分, 它是由矩形 $ABCD$ (及其内部) 以 AB 边所在直线为旋转轴旋转 120° 得到的, G 是 $\overset{\frown}{DF}$ 的中点.

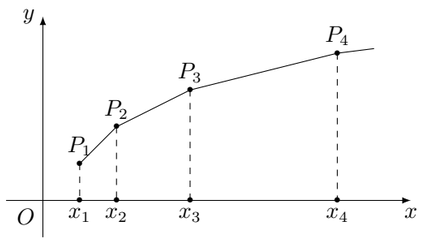
(1) 设 P 是 $\overset{\frown}{CE}$ 上的一点, 且 $AP\perp BE$, 求 $\angle CBP$ 的大小;

(2) 当 $AB=3$, $AD=2$ 时, 求二面角 $E-AG-C$ 的大小.



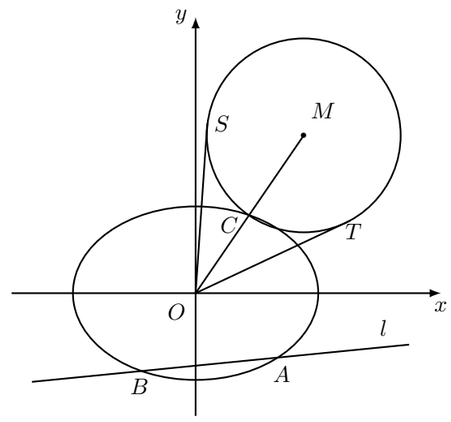
18. 在心理学研究中, 常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响, 具体方法如下: 将参加试验的志愿者随机分成两组, 一组接受甲种心理暗示, 另一组接受乙种心理暗示, 通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用, 现有 6 名男志愿者 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 和 4 名女志愿者 B_1, B_2, B_3, B_4, 从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示, 另 5 人接受乙种心理暗示.
(1) 求接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的概率;
(2) 用 X 表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数, 求 X 的分布列与数学期望 EX.

19. 已知 $\{x_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 且 $x_1+x_2=3$, $x_3-x_2=2$.
(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;
(2) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 依次连接点 $P_1(x_1,1)$, $P_2(x_2,2)$, $\cdots$, $P_{n+1}(x_{n+1},n+1)$ 得到折线 $P_1P_2\cdots P_{n+1}$, 求由该折线与直线 $y=0$, $x=x_1$, $x=x_{n+1}$ 所围成的区域的面积 T_n.



20. 已知函数 $f(x)=x^2+2\cos x$, $g(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x+2x-2)$, 其中 $\mathrm{e}=2.17828\cdots$ 是自然对数的底数.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi,f(\pi))$ 处的切线方程;
(2) 令 $h(x)=g(x)-af(x)$ $(a\in\mathbf{R})$, 讨论 $h(x)$ 的单调性并判断有无极值, 有极值时求出极值.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 焦距为 2.
(1) 求椭圆 E 的方程.
(2) 如图, 该直线 $l:y=k_1x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, C 是椭圆 E 上的一点, 直线 OC 的斜率为 k_2, 且 $k_1k_2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, M 是线段 OC 延长线上一点, 且 $|MC|:|AB|=2:3$, $\odot M$ 的半径为 $|MC|$, OS, OT 是 $\odot M$ 的两条切线, 切点分别为 S, T, 求 $\angle SOT$ 的最大值, 并求取得最大值时直线 l 的斜率.



2017 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\,|\,|x-1|<1\}$, $N=\{x\,|\,x<2\}$, 则 $M\cap N=$

(A) $(-1,1)$　(B) $(-1,2)$　(C) $(0,2)$　(D) $(1,2)$

2. 已知 i 是虚数单位, 若复数 z 满足 $z\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$, 则 $z^2=$　（　）

(A) $-2\mathrm{i}$　(B) $2\mathrm{i}$　(C) -2　(D) 2

3. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y+5\leqslant 0\\ x+3\geqslant 0\\ y\leqslant 2\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最大值是(　)

(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3

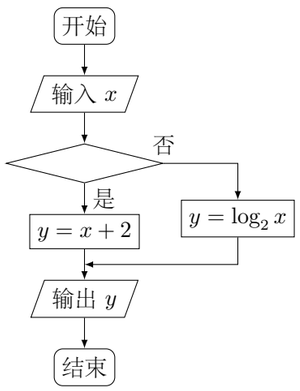
4. 已知 $\cos x=\dfrac{3}{4}$, 则 $\cos 2x=$　（　）

(A) $-\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $-\dfrac{1}{8}$　(D) $\dfrac{1}{8}$

5. 已知命题 p: $\exists x\in\mathbf{R}$, $x^2-x+1\geqslant 0$. 命题 q: 若 $a^2<b^2$, 则 $a<b$, 下列命题为真命题的是　（　）

(A) $p\wedge q$　(B) $p\wedge\neg q$　(C) $\neg p\wedge q$　(D) $\neg p\wedge\neg q$

6. 若执行下侧的程序框图, 当输入的 x 的值为 4 时, 输出的 y 的值为 2, 则空白判断框中的条件可能为　（　）



(A) $x>3$　(B) $x>4$　(C) $x\leqslant 4$　(D) $x\leqslant 5$

7. 函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ 的最小正周期为　（　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{2\pi}{3}$　(C) π　(D) 2π

8. 如图所示的茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名工人某日的产量数据 (单位: 件). 若这两组数据的中位数相等, 且平均值也相等, 则 x 和 y 的值分别为　（　）

甲组		乙组
6	5	9
2 5	6	1 7 y
x 4	7	8

(A) 3, 5　(B) 5, 5　(C) 3, 7　(D) 5, 7

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0<x<1\\ 2(x-1), & x\geqslant 1\end{cases}$, 若 $f(a)=f(a+1)$, 则 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=$（　）

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

10. 若函数 $\mathrm{e}^x f(x)$ ($\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增, 则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质, 下列函数中具有 M 性质的是(　)

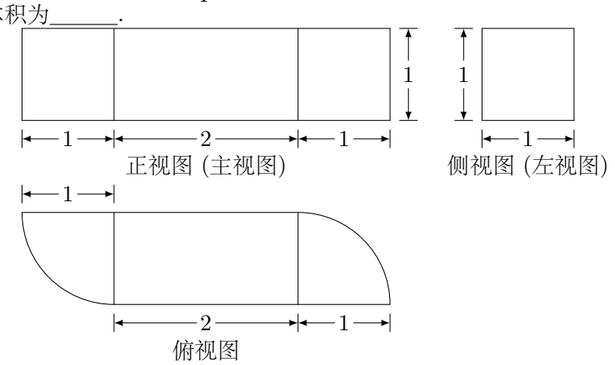
(A) $f(x)=2^{-x}$　(B) $f(x)=x^2$　(C) $f(x)=3^{-x}$　(D) $f(x)=\cos x$

二、填空题

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,6)$, $\boldsymbol{b}=(-1,\lambda)$, 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $\lambda=$_____.

12. 若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ($a>0$, $b>0$) 过点 $(1,2)$, 则 $2a+b$ 的最小值为_____.

13. 由一个长方体和两个 $\dfrac{1}{4}$ 圆柱体构成的几何体的三视图如图, 则该几何体的体积为_____.



14. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x+4)=f(x-2)$. 若当 $x\in[-3,0]$ 时, $f(x)=6^{-x}$, 则 $f(919)=$_____.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2=2py$ ($p>0$) 交于 A, B 两点, 若 $|AF|+|BF|=4|OF|$, 则该双曲线的渐近线方程为_____.

三、解答题

16. 某旅游爱好者计划从 3 个亚洲国家 A_1, A_2, A_3 和 3 个欧洲国家 B_1, B_2, B_3 中选择 2 个国家去旅游.

(1) 若从这 6 个国家中任选 2 个, 求这 2 个国家都是亚洲国家的概率;

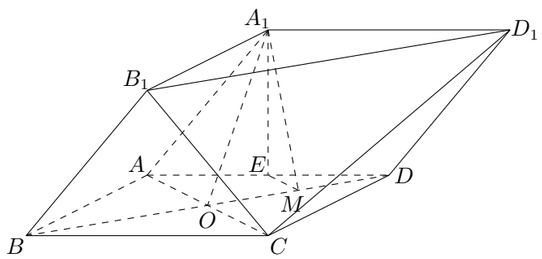
(2) 若从亚洲国家和欧洲国家中各任选 1 个, 求这 2 个国家包括 A_1 但不包括 B_1 的概率.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $b=3$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$, $S_{\triangle ABC}=3$, 求 A 和 a.

18. 由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示, 四边形 $ABCD$ 为正方形, O 为 AC 与 BD 的交点, E 为 AD 的中点, $A_1E\perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 证明: $A_1O\parallel$ 平面 B_1CD_1;

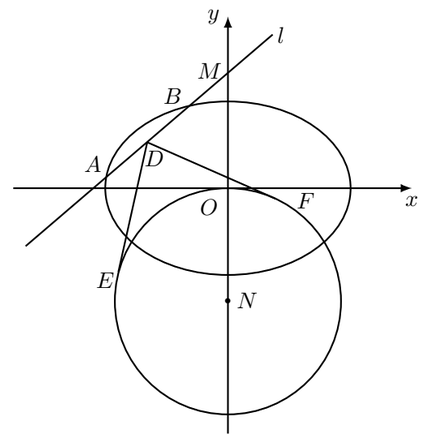
(2) 设 M 是 OD 的中点, 证明: 平面 $A_1EM\perp$ 平面 B_1CD_1.



19. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 且 $a_1+a_2=6$, $a_1a_2=a_3$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式;
(2) $\{b_n\}$ 为各项非零的等差数列, 其前 n 项和为 S_n, 已知 $S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$, 求数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2$, $a\in\mathbf{R}$.
(1) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线方程;
(2) 设函数 $g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$, 讨论 $g(x)$ 的单调性并判断有无极值, 有极值时求出极值.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆 C 截直线 $y=1$ 所得线段的长度为 $2\sqrt{2}$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 动直线 $l:y=kx+m$ $(m\neq0)$ 交椭圆 C 于 A, B 两点, 交 y 轴于点 M. 点 N 是 M 关于 O 的对称点, $\odot N$ 的半径为 $|NO|$. 设 D 为 AB 的中点, DE, DF 与 $\odot N$ 分别相切于点 E, F, 求 $\angle EDF$ 的最小值.



2017 年普通高等学校招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$, 集合 $B=\{3,4,5\}$, 则 $A\cap B=$_____.

2. 若排列数 $\mathrm{P}_6^m=6\times5\times4$, 则 $m=$_____.

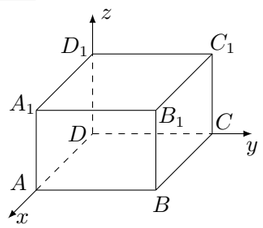
3. 不等式 $\dfrac{x-1}{x}>1$ 的解集为_____.

4. 已知球的体积为 36π, 则该球主视图的面积等于_____.

5. 已知复数 z 满足 $z+\dfrac{3}{z}=0$, 则 $|z|=$_____.

6. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 的焦点为 F_1, F_2, P 为该双曲线上的一点, 若 $|PF_1|=5$, 则 $|PF_2|=$_____.

7. 如图, 以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点, 过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴, 建立空间直角坐标系, 若 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(4,3,2)$, 则 $\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标是_____.



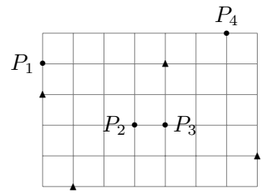
8. 定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$, 若 $g(x)=\begin{cases}3^x-1, & x\leqslant0\\ f(x), & x>0\end{cases}$ 为奇函数, 则 $f^{-1}(x)=2$ 的解为_____.

9. 已知四个函数: ① $y=-x$, ② $y=-\dfrac{1}{x}$, ③ $y=x^3$, ④ $y=x^{\frac{1}{2}}$. 从中任选 2 个, 则事件"所选 2 个函数的图象有且仅有一个公共点"的概率为_____.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $a_n=n^2$, $n\in\mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的项是互不相等的正整数, 若对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的第 a_n 项都等于 $\{a_n\}$ 的第 b_n 项, 则 $\dfrac{\lg(b_1b_4b_9b_{16})}{\lg(b_1b_2b_3b_4)}=$_____.

11. 设 α_1, $\alpha_2\in\mathbf{R}$, 且 $\dfrac{1}{2+\sin\alpha_1}+\dfrac{1}{2+\sin(2\alpha_2)}=2$, 则 $|10\pi-\alpha_1-\alpha_2|$ 的最小值等于_____.

12. 如图, 用 35 个单位正方形拼成一个矩形, 点 P_1, P_2, P_3, P_4 以及四个标记为"▲"的点在正方形的顶点处, 设集合 $\Omega=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$, 点 $P\in\Omega$, 过 P 作直线 l_P, 使得不在 l_P 上的"▲"的点分布在 l_P 的两侧. 用 $D_1(l_P)$ 和 $D_2(l_P)$ 分别表示 l_P 一侧和另一侧的"▲"的点到 l_P 的距离之和. 若过 P 的直线 l_P 中有且只有一条满足 $D_1(l_P)=D_2(l_P)$, 则 Ω 中所有这样的 P 为_____.



二、选择题

13. 关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases}x+5y=0\\ 2x+3y=4\end{cases}$ 的系数行列式 D 为 (　　)

(A) $\begin{vmatrix}0&5\\4&3\end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix}1&0\\2&4\end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix}1&5\\2&3\end{vmatrix}$　(D) $\begin{vmatrix}6&0\\5&4\end{vmatrix}$

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ (　　)

(A) 等于 $-\dfrac{1}{2}$　(B) 等于 0　(C) 等于 $\dfrac{1}{2}$　(D) 不存在

15. 已知 a、b、c 为实常数, 数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n=an^2+bn+c$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则"存在 $k\in\mathbf{N}^*$, 使得 x_{100+k}, x_{200+k}, x_{300+k} 成等差数列"的一个必要条件是 (　　)

(A) $a\geqslant0$　(B) $b\leqslant0$

(C) $c=0$　(D) $a-2b+c=0$

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 和 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$. P 为 C_1 上的动点, Q 为 C_2 上的动点, w 是 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值. 记 $\Omega=\left\{(P,Q)\,|\,P\text{ 在 }C_1\text{ 上, }Q\text{ 在 }C_2\text{ 上, 且 }\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=w\right\}$, 则 Ω 中(　　)

(A) 元素个数为 2　(B) 元素个数为 4

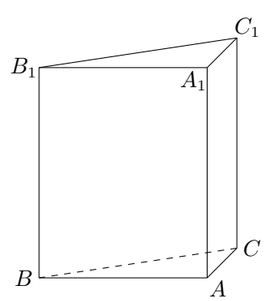
(C) 元素个数为 8　(D) 含有无穷个元素

三、解答题

17. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形, 两直角边 AB 和 AC 的长分别为 4 和 2, 侧棱 AA_1 的长为 5.

(1) 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积;

(2) 设 M 是 BC 中点, 求直线 A_1M 与平面 ABC 所成角的大小.



18. 已知函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x+\dfrac{1}{2}$, $x\in(0,\pi)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 角 A 所对边 $a=\sqrt{19}$, 角 B 所对边 $b=5$, 若 $f(A)=0$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 根据预测, 某地第 n $(n\in\mathbf{N}^*)$ 个月共享单车的投放量和损失量分别为 a_n 和 b_n (单位: 辆), 其中 $a_n=\begin{cases}5n^4+15, & 1\leqslant n\leqslant 3\\ -10n+470, & n\geqslant 4\end{cases}$, $b_n=n+5$, 第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月的累计投放量与累计损失量的差.
(1) 求该地区第 4 个月底的共享单车的保有量;
(2) 已知该地共享单车停放点第 n 个月底的单车容纳量 $S_n=-4(n-46)^2+8800$ (单位: 辆). 设在某月底, 共享单车保有量达到最大, 问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量?

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, A 为 Γ 的上顶点, P 为 Γ 上异于上、下顶点的动点, M 为 x 轴正半轴上的动点.
(1) 若 P 在第一象限, 且 $|OP|=\sqrt{2}$, 求 P 的坐标;
(2) 设 $P\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$, 若以 A, P, M 为顶点的三角形是直角三角形, 求 M 的横坐标;
(3) 若 $|MA|=|MP|$, 直线 AQ 与 Γ 交于另一点 C, 且 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PM}$, 求直线 AQ 的方程.

21. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对于任意的 x_1, $x_2\in\mathbf{R}$, 当 $x_1<x_2$ 时, 都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.
(1) 若 $f(x)=ax^3+1$, 求 a 的取值范围;
(2) 若 $f(x)$ 是周期函数, 证明: $f(x)$ 是常值函数;
(3) 设 $f(x)$ 恒大于零. $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的、恒大于零的周期函数, M 是 $g(x)$ 的最大值. 函数 $h(x)=f(x)g(x)$. 证明: “$h(x)$ 是周期函数”的充要条件是“$f(x)$ 是常值函数”.

2017 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,4,6\}$, $B=\{2,4\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}\,|\,-1\leqslant x\leqslant 5\}$, 则 $(A\cup B)\cap C=$ （　）

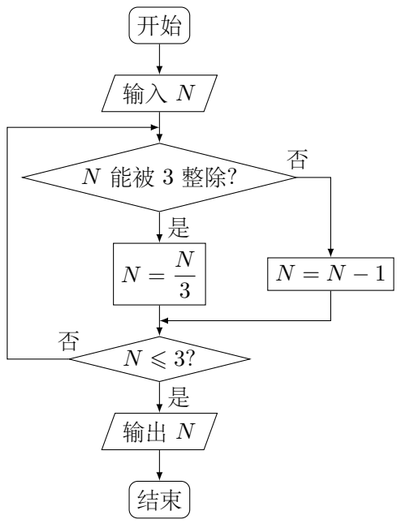
(A) $\{2\}$　　(B) $\{1,2,4\}$

(C) $\{1,2,4,5\}$　　(D) $\{x\in\mathbf{R}\,|\,-1\leqslant x\leqslant 5\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y\geqslant 0\\ x+2y-2\geqslant 0\\ x\leqslant 0\\ y\leqslant 3\end{cases}$, 则目标函数 $z=x+y$ 的最大值为 （　）

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{3}{2}$　　(D) 3

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 24, 则输出 N 的值为 （　）



(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 设 $\theta\in\mathbf{R}$, 则“$\left|\theta-\dfrac{\pi}{12}\right|<\dfrac{\pi}{12}$”是“$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左焦点为 F, 离心率为 $\sqrt{2}$. 若经过 F 和 $P(0,4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线, 则双曲线的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$

6. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, $g(x)=xf(x)$. 若 $a=g(-\log_2 5.1)$, $b=g(2^{0.8})$, $c=g(3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 （　）

(A) $a<b<c$　　(B) $c<b<a$　　(C) $b<a<c$　　(D) $b<c<a$

7. 设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $\omega>0$, $|\varphi|<\pi$. 若 $f\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=2$, $f\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)=0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π, 则 （　）

(A) $\omega=\dfrac{2}{3}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{12}$　　(B) $\omega=\dfrac{2}{3}$, $\varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$

(C) $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=-\dfrac{11\pi}{24}$　　(D) $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=\dfrac{7\pi}{24}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3, & x\leqslant 1\\ x+\dfrac{2}{x}, & x>1\end{cases}$, 设 $a\in\mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\left|\dfrac{x}{2}+a\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $\left[-\dfrac{47}{16},2\right]$　(B) $\left[-\dfrac{47}{16},\dfrac{39}{16}\right]$　(C) $\left[-2\sqrt{3},2\right]$　(D) $\left[-2\sqrt{3},\dfrac{39}{16}\right]$

二、填空题

9. 已知 $a\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位, 若 $\dfrac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 为实数, 则 a 的值为_____.

10. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若这个正方体的表面积为 18, 则这个球的体积为_____.

11. 在极坐标系中, 直线 $4\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)+1=0$ 与圆 $\rho=2\sin\theta$ 的公共点的个数为_____.

12. 若 a, $b\in\mathbf{R}$, $ab>0$, 则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, $AB=3$, $AC=2$. 若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$, 则 λ 的值为_____.

14. 用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成没有重复数字, 且至多有一个数字是偶数的四位数, 这样的四位数一共有_____个. (用数字作答)

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a>b$, $a=5$, $c=6$, $\sin B=\dfrac{3}{5}$.

(1) 求 b 和 $\sin A$ 的值;

(2) 求 $\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

16. 从甲地到乙地要经过 3 个十字路口, 设各路口信号灯工作相互独立, 且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$.

(1) 设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

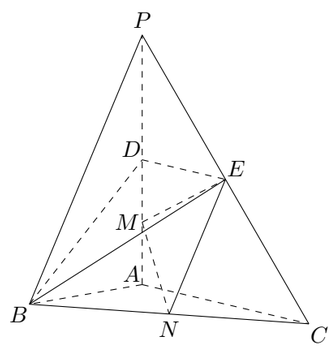
(2) 若有 2 辆车独立地从甲地到乙地, 求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.

17. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 底面 ABC, $\angle BAC=90^\circ$. 点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点, M 是线段 AD 的中点, $PA=AC=4$, $AB=2$.

(1) 求证: $MN\parallel$ 平面 BDE;

(2) 求二面角 $C-EM-N$ 的正弦值;

(3) 已知点 H 在棱 PA 上, 且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{21}$, 求线段 AH 的长.



18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 S_n $(n\in\mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 且公比大于 0, $b_2+b_3=12$, $b_3=a_4-2a_1$, $S_{11}=11b_4$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和 $(n\in\mathbf{N}^*)$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 F, 右顶点为 A, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$. 已知 A 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, F 到抛物线的准线 l 的距离为 $\dfrac{1}{2}$.
(1) 求椭圆的方程和抛物线的方程;
(2) 设 l 上两点 P, Q 关于 x 轴对称, 直线 AP 与椭圆相交于点 B (B 异于 A), 直线 BQ 与 x 轴相交于点 D. 若 $\triangle APD$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 求直线 AP 的方程.

20. 设 $a\in\mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$ 在区间 $(1,2)$ 内有一个零点 x_0, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
(1) 求 $g(x)$ 的单调区间;
(2) 设 $m\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$, 函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$, 求证: $h(m)h(x_0)<0$;
(3) 求证: 存在大于 0 的常数 A, 使得对于任意的正整数 p, q, 且 $\dfrac{p}{q}\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$, 满足 $\left|\dfrac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\dfrac{1}{Aq^4}$.

2017 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,6\}$, $B=\{2,4\}$, $C=\{1,2,3,4\}$, 则 $(A\cup B)\cap C=$（　）

(A) $\{2\}$　(B) $\{1,2,4\}$　(C) $\{1,2,4,6\}$　(D) $\{1,2,3,4,6\}$

2. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$2-x\geqslant 0$”是“$|x-1|\leqslant 1$”的（　）

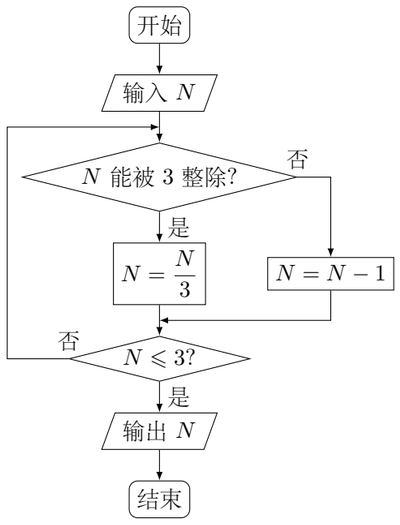
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 有 5 支彩笔 (除颜色外无差别), 颜色分别为红、黄、蓝、绿、紫. 从这 5 支彩笔中任取 2 支不同颜色的彩笔, 则取出的 2 支彩笔中含有红色彩笔的概率为（　）

(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{1}{5}$

4. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 19, 则输出 N 的值为（　）



(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 点 A 在双曲线的渐近线上, $\triangle OAF$ 是边长为 2 的等边三角形 (O 为原点), 则双曲线方程为（　）

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　(D) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

6. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 若 $a=-f\left(\log_2\dfrac{1}{5}\right)$, $b=f(\log_2 4.1)$, $c=f(2^{0.8})$, 则 a, b, c 的大小关系为（　）

(A) $a<b<c$　(B) $b<a<c$　(C) $c<b<a$　(D) $c<a<b$

7. 设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $\omega>0$, $|\varphi|<\pi$. 若 $f\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=2$, $f\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)=0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π, 则（　）

(A) $\omega=\dfrac{2}{3}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{12}$　(B) $\omega=\dfrac{2}{3}$, $\varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$

(C) $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=-\dfrac{11\pi}{24}$　(D) $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=\dfrac{7\pi}{24}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|+2, & x<1\\ x+\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 1\end{cases}$, 设 $a\in\mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\left|\dfrac{x}{2}+a\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是（　）

(A) $[-2,2]$　(B) $[-2\sqrt{3},2]$　(C) $[-2,2\sqrt{3}]$　(D) $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$

二、填空题

9. 已知 $a\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位, 若 $\dfrac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 为实数, 则 a 的值为_____.

10. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 设函数 $f(x)=ax-\ln x$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 l, 则 l 在 y 轴上的截距为_____.

11. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若这个正方体的表面积为 18, 则这个球的体积为_____.

12. 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l. 已知点 C 在 l 上, 以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A. 若 $\angle FAC=120^\circ$, 则圆的方程为_____.

13. 若 a, $b\in\mathbf{R}$, $ab>0$, 则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, $AB=3$, $AC=2$. 若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$, 则 λ 的值为_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin A=4b\sin B$, $ac=\sqrt{5}(a^2-b^2-c^2)$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 求 $\sin(2B-A)$ 的值.

16. 电视台播放甲、乙两套连续剧, 每次播放连续剧时, 需要播放广告. 已知每次播放甲、乙两套连续剧时, 连续剧播放时长、广告播放时长、收视人次如下表所示:

	连续剧播放时长 (分钟)	广告播放时长 (分钟)	收视人次 (万)
甲	70	5	60
乙	60	5	25

已知电视台每周安排的甲、乙连续剧的总播放时间不多于 600 分钟, 广告的总播放时间不少于 30 分钟, 且甲连续剧播放的次数不多于乙连续剧播放次数的 2 倍. 分别用 x, y 表示每周计划播出的甲、乙两套连续剧的次数.

(1) 用 x, y 列出满足题目条件的数学关系式, 并画出相应的平面区域;

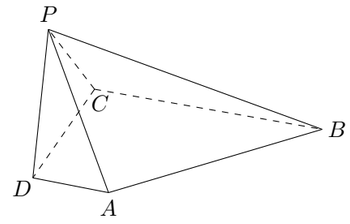
(2) 问电视台每周播出甲、乙两套连续剧各多少次, 才能使总收视人次最多?

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD\perp$ 平面 PDC, $AD\parallel BC$, $PD\perp PB$, $AD=1$, $BC=3$, $CD=4$, $PD=2$.

(1) 求异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值;

(2) 求证: $PD\perp$ 平面 PBC;

(3) 求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.



18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 S_n $(n\in\mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 且公比大于 0, $b_2+b_3=12$, $b_3=a_4-2a_1$, $S_{11}=11b_4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_{2n}b_n\}$ 的前 n 项和 $(n\in\mathbf{N}^*)$.

19. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, $|a|\leqslant 1$. 已知函数 $f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$, $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 已知函数 $y=g(x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象在公共点 (x_0,y_0) 处有相同的切线.

① 求证: $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 0;

② 若关于 x 的不等式 $g(x)\leqslant\mathrm{e}^x$ 在区间 $[x_0-1,x_0+1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$, 右顶点为 A, 点 E 的坐标为 $(0,c)$, $\triangle EFA$ 的面积为 $\dfrac{b^2}{2}$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设点 Q 在线段 AE 上, $|FQ|=\dfrac{3}{2}c$, 延长线段 FQ 与椭圆交于点 P, 点 M, N 在 x 轴上, $PM\parallel QN$, 且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c, 四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$.

① 求直线 FP 的斜率;

② 求椭圆的方程.

2017 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

数学试卷

一、选择题

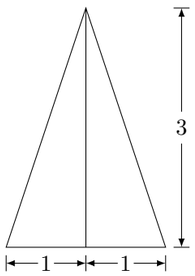
1. 已知集合 $P=\{x\mid -1<x<1\}$, $Q=\{x\mid 0<x<2\}$, 那么 $P\cup Q=$(　　)

(A) $(-1,2)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(-1,0)$　　(D) $(1,2)$

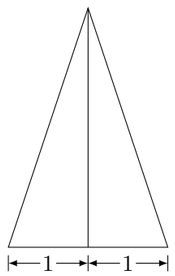
2. 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的离心率是　　(　　)

(A) $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $\dfrac{5}{9}$

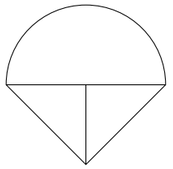
3. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积 (单位: cm^2) 是　　(　　)



正视图



侧视图


俯视图

(A) $\dfrac{\pi}{2}+1$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}+3$　　(C) $\dfrac{3\pi}{2}+1$　　(D) $\dfrac{3\pi}{2}+3$

4. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+y-3\geqslant 0\\ x-2y\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的取值范围是(　　)

(A) $[0,6]$　　(B) $[0,4]$　　(C) $[6,+\infty)$　　(D) $[4,+\infty)$

5. 若函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值是 M, 最小值是 m, 则 $M-m$　　(　　)

(A) 与 a 有关, 且与 b 有关　　(B) 与 a 有关, 但与 b 无关

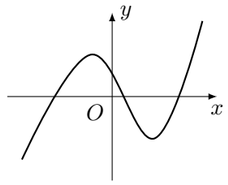
(C) 与 a 无关, 且与 b 无关　　(D) 与 a 无关, 但与 b 有关

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 前 n 项和为 S_n, 则"$d>0$"是"$S_4+S_6>2S_5$"的　　(　　)

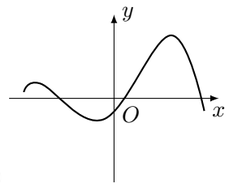
(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

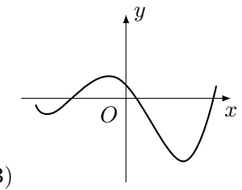
7. 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是　　(　　)



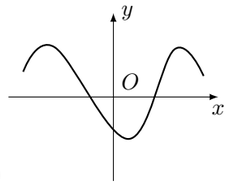
(A)



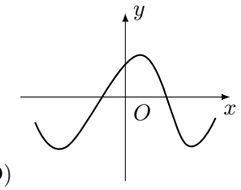
(B)



(C)



(D)

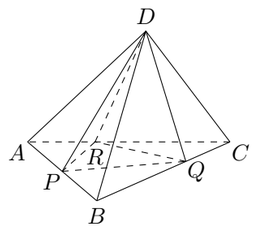


8. 已知随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i=1)=p_i$, $P(\xi_i=0)=1-p_i$, $i=1,2$. 若 $0<p_1<p_2<\dfrac{1}{2}$, 则　　(　　)

(A) $E(\xi_1)<E(\xi_2)$, $D(\xi_1)<D(\xi_2)$　(B) $E(\xi_1)<E(\xi_2)$, $D(\xi_1)>D(\xi_2)$

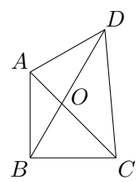
(C) $E(\xi_1)>E(\xi_2)$, $D(\xi_1)<D(\xi_2)$　(D) $E(\xi_1)>E(\xi_2)$, $D(\xi_1)>D(\xi_2)$

9. 如图, 已知正四面体 $D-ABC$ (所有棱长均相等的三棱锥), P, Q, R 分别为 AB, BC, CA 上的点, $AP=PB$, $\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{CR}{RA}=2$, 分别记二面角 $D-PR-Q$, $D-PQ-R$, $D-QR-P$ 的平面角为 α, β, γ, 则　　(　　)



(A) $\gamma<\alpha<\beta$　　(B) $\alpha<\gamma<\beta$　　(C) $\alpha<\beta<\gamma$　　(D) $\beta<\gamma<\alpha$

10. 如图, 已知平面四边形 $ABCD$, $AB\perp BC$, $AB=BC=AD=2$, $CD=3$, AC 与 BD 交于点 O, 记 $I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$, $I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$, 则　　(　　)



(A) $I_1<I_2<I_3$　(B) $I_1<I_3<I_2$　(C) $I_3<I_1<I_2$　(D) $I_2<I_1<I_3$

二、填空题

11. 我国古代数学家刘徽创立的"割圆术"可以估算圆周率 π, 理论上能把 π 的值计算到任意精度, 祖冲之继承并发展了"割圆术", 将 π 的值精确到小数点后七位, 其结果领先世界一千多年, "割圆术"的第一步是计算单位圆内接正六边形的面积 S_6, $S_6=$_____.

12. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, $(a+b\mathrm{i})^2=3+4\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 $a^2+b^2=$_____, $ab=$_____.

13. 已知多项式 $(x+1)^3(x+2)^2=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$, 则 $a_4=$_____, $a_5=$_____.

14. 已知 $\triangle ABC$, $AB=AC=4$, $BC=2$, 点 D 为 AB 延长线上一点, $BD=2$, 连接 CD, 则 $\triangle BDC$ 的面积是_____, $\cos\angle BDC=$_____.

15. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

16. 从 6 男 2 女共 8 名学生中选出队长 1 人, 副队长 1 人, 普通队员 2 人组成 4 人服务队, 要求服务队中至少有 1 名女生, 共有_____种不同的选法. (用数字作答)

17. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{4}{x}-a\right|+a$ 在区间 $[1,4]$ 上的最大值是 5, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

18. 已知函数 $f(x)=\sin^2x-\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$ ($x\in\mathbf{R}$).

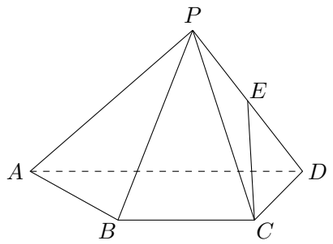
(1) 求 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

19. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形, $BC \parallel AD$, $CD \perp AD$, $PC=AD=2DC=2CB$, E 为 PD 的中点.

(1) 证明: $CE \parallel$ 平面 PAB;

(2) 求直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值.



20. 已知函数 $f(x)=\left(x-\sqrt{2x-1}\right)\mathrm{e}^{-x}\ \left(x \geqslant \dfrac{1}{2}\right)$.

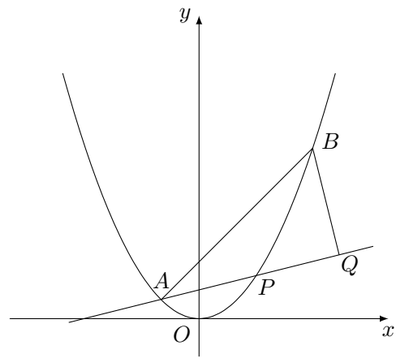
(1) 求 $f(x)$ 的导函数;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上的取值范围.

21. 如图, 已知抛物线 $x^2=y$, 点 $A\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$, 抛物线上的点 $P(x,y)\ \left(-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\right)$, 过点 B 作直线 AP 的垂线, 垂足为 Q.

(1) 求直线 AP 斜率的取值范围;

(2) 求 $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值.



22. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1=1$, $x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})\ (n \in \mathbf{N}^*)$, 证明: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时,

(1) $0<x_{n+1}<x_n$;

(2) $2x_{n+1}-x_n \leqslant \dfrac{x_n x_{n+1}}{2}$;

(3) $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

2018 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

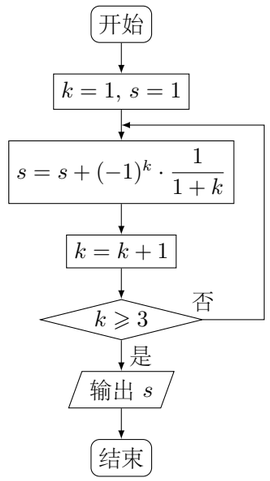
1. 已知集合 $A=\{x\mid |x|<2\}$, $B=\{-2,0,1,2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{0,1\}$　(B) $\{-1,0,1\}$　(C) $\{-2,0,1,2\}$　(D) $\{-1,0,1,2\}$

2. 在复平面内, 复数 $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ 的共轭复数对应的点位于 （　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 （　）

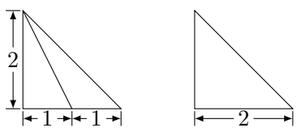


(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{5}{6}$　(C) $\dfrac{7}{6}$　(D) $\dfrac{7}{12}$

4. “十二平均律”是通用的音律体系, 明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$. 若第一个单音的频率为 f, 则第八个单音的频率为 （　）

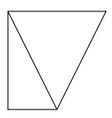
(A) $\sqrt[3]{2}f$　(B) $\sqrt[3]{2^2}f$　(C) $\sqrt[12]{2^5}f$　(D) $\sqrt[12]{2^7}f$

5. 某四棱锥的三视图如图所示, 在此四棱锥的侧面中, 直角三角形的个数为 （　）



正 (主) 视图

侧 (左) 视图


俯视图

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

6. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 均为单位向量, 则“$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 在平面直角坐标系中, 记 d 为点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 到直线 $x-my-2=0$ 的距离. 当 θ, m 变化时, d 的最大值为 （　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

8. 设集合 $A=\{(x,y)\mid x-y\geqslant 1, ax+y>4, x-ay\leqslant 2\}$, 则 （　）

(A) 对任意实数 a, $(2,1)\in A$　(B) 对任意实数 a, $(2,1)\notin A$

(C) 当且仅当 $a<0$ 时, $(2,1)\notin A$　(D) 当且仅当 $a\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时, $(2,1)\notin A$

二、填空题

9. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=3$, $a_2+a_5=36$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

10. 在极坐标系中, 直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=a$ $(a>0)$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 相切, 则 $a=$_____.

11. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ $(\omega>0)$. 若 $f(x)\leqslant f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立, 则 ω 的最小值为_____.

12. 若 x, y 满足 $x+1\leqslant y\leqslant 2x$, 则 $2y-x$ 的最小值是_____.

13. 能说明“若 $f(x)>f(0)$ 对任意的 $x\in(0,2]$ 都成立, 则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是增函数”为假命题的一个函数是_____.

14. 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 双曲线 $N:\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$. 若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点, 则椭圆 M 的离心率为_____; 双曲线 N 的离心率为_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=7$, $b=8$, $\cos B=-\dfrac{1}{7}$.

(1) 求 $\angle A$;

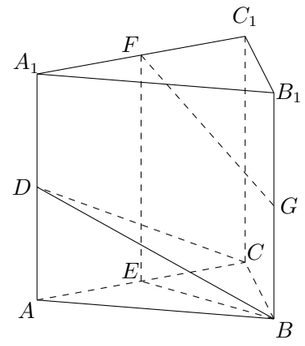
(2) 求 AC 边上的高.

16. 如图, 在三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CC_1\perp$ 平面 ABC, D, E, F, G 分别为 AA_1, AC, A_1C_1, BB_1 的中点, $AB=BC=\sqrt{5}$, $AC=AA_1=2$.

(1) 求证: $AC\perp$ 平面 BEF;

(2) 求二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值;

(3) 证明: 直线 FG 与平面 BCD 相交.



17. 电影公司随机收集了电影的有关数据, 经分类整理得到下表:

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指: 一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

假设所有电影是否获得好评相互独立.

(1) 从电影公司收集的电影中随机选取 1 部, 求这部电影是获得好评的第四类电影的概率;

(2) 从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部, 估计恰有 1 部获得好评的概率;

(3) 假设每类电影得到人们喜欢的概率与表格中该类电影的好评率相等. 用“$\xi_k=1$”表示第 k 类电影得到人们喜欢, “$\xi_k=0$”表示第 k 类电影没有得到人们喜欢 ($k=1,2,3,4,5,6$). 写出方差 $D\xi_1$, $D\xi_2$, $D\xi_3$, $D\xi_4$, $D\xi_5$, $D\xi_6$ 的大小关系.

18. 设函数 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]\mathrm{e}^x$.
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行, 求 a;
(2) 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.

19. 已知抛物线 $C:y^2=2px$ 经过点 $P(1,2)$. 过点 $Q(0,1)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B, 且直线 PA 交 y 轴于 M, 直线 PB 交 y 轴于 N.
(1) 求直线 l 的斜率的取值范围;
(2) 设 O 为原点, $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$, 求证: $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 为定值.

20. 设 n 为正整数, 集合 $A=\{\alpha|\alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\cdots,n\}$. 对于集合 A 中的任意元素 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 记 $M(\alpha,\beta)=\dfrac{1}{2}[(x_1+y_1-|x_1-y_1|)+(x_2+y_2-|x_2-y_2|)+\cdots+(x_n+y_n-|x_n-y_n|)]$.
(1) 当 $n=3$ 时, 若 $\alpha=(1,1,0)$, $\beta=(0,1,1)$, 求 $M(\alpha,\alpha)$ 和 $M(\alpha,\beta)$ 的值;
(2) 当 $n=4$ 时, 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意元素 α, β, 当 α, β 相同时, $M(\alpha,\beta)$ 是奇数; 当 α, β 不同时, $M(\alpha,\beta)$ 是偶数. 求集合 B 中元素个数的最大值;
(3) 给定不小于 2 的 n, 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意两个不同的元素 α, β, $M(\alpha,\beta)=0$. 写出一个集合 B, 使其元素个数最多, 并说明理由.

2018 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

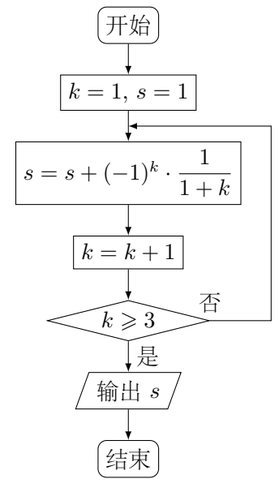
1. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x|<2\}$, $B=\{-2,0,1,2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{0,1\}$　(B) $\{-1,0,1\}$　(C) $\{-2,0,1,2\}$　(D) $\{-1,0,1,2\}$

2. 在复平面内, 复数 $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ 的共轭复数对应的点位于 （　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 （　）



(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{5}{6}$　(C) $\dfrac{7}{6}$　(D) $\dfrac{7}{12}$

4. 设 a, b, c, d 是非零实数, 则“$ad=bc$”是“a, b, c, d 成等比数列”的 （　）

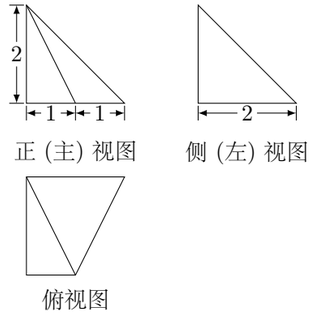
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. “十二平均律”是通用的音律体系, 明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$. 若第一个单音的频率为 f, 则第八个单音的频率为 （　）

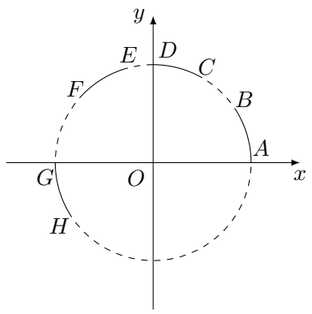
(A) $\sqrt[3]{2}f$　(B) $\sqrt[3]{2^2}f$　(C) $\sqrt[12]{2^5}f$　(D) $\sqrt[12]{2^7}f$

6. 某四棱锥的三视图如图所示, 在此四棱锥的侧面中, 直角三角形的个数为 （　）



(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

7. 在平面直角坐标系中, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{GH}$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的四段弧 (如图), 点 P 在其中一段上, 角 α 以 Ox 为始边, OP 为终边. 若 $\tan\alpha<\cos\alpha<\sin\alpha$, 则 P 所在的圆弧是 （　）



(A) $\overset{\frown}{AB}$　(B) $\overset{\frown}{CD}$　(C) $\overset{\frown}{EF}$　(D) $\overset{\frown}{GH}$

8. 设集合 $A=\{(x,y)\,|\,x-y\geqslant 1, ax+y>4, x-ay\leqslant 2\}$, 则 （　）

(A) 对任意实数 a, $(2,1)\in A$　(B) 对任意实数 a, $(2,1)\notin A$

(C) 当且仅当 $a<0$ 时, $(2,1)\notin A$　(D) 当且仅当 $a\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时, $(2,1)\notin A$

二、填空题

9. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$, $\boldsymbol{b}=(-1,m)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, 则 $m=$_____.

10. 已知直线 l 过点 $(1,0)$ 且垂直于 x 轴. 若 l 被抛物线 $y^2=4ax$ 截得的线段长为 4, 则抛物线的焦点坐标为_____.

11. 能说明“若 $a>b$, 则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$”为假命题的一组 a, b 的值依次为_____.

12. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4}=1$ $(a>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 则 $a=$_____.

13. 若 x, y 满足 $x+1\leqslant y\leqslant 2x$, 则 $2y-x$ 的最小值是_____.

14. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$, 且 $\angle C$ 为钝角, 则 $\angle B=$_____; $\dfrac{c}{a}$ 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=\ln 2$, $a_2+a_3=5\ln 2$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求 $\mathrm{e}^{a_1}+\mathrm{e}^{a_2}+\cdots+\mathrm{e}^{a_n}$.

16. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},m\right]$ 上的最大值为 $\dfrac{3}{2}$, 求 m 的最小值.

17. 电影公司随机收集了电影的有关数据, 经分类整理得到下表:

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指: 一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

(1) 从电影公司收集的电影中随机选取 1 部, 求这部电影是获得好评的第四类电影的概率;

(2) 随机选取 1 部电影, 估计这部电影没有获得好评的概率;

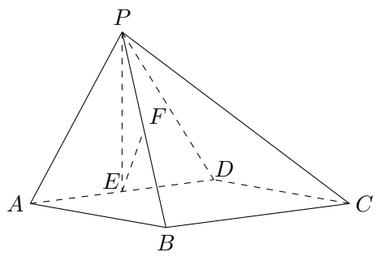
(3) 电影公司为增加投资回报, 拟改变投资策略, 这将导致不同类型电影的好评率发生变化. 假设表格中只有两类电影的好评率数据发生变化, 那么哪类电影的好评率增加 0.1, 哪类电影的好评率减少 0.1, 使得获得好评的电影总部数与样本中的电影总部数的比值达到最大? (只需写出结论)

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$, $PA=PD$, E, F 分别为 AD, PB 的中点.

(1) 求证: $PE \perp BC$;

(2) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD;

(3) 求证: $EF \parallel$ 平面 PCD;



19. 设函数 $f(x)=\left[ax^2-(3a+1)x+3a+2\right]\mathrm{e}^x$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线斜率为 0, 求 a;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.

20. 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 焦距为 $2\sqrt{2}$, 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B.

(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) 若 $k=1$, 求 $|AB|$ 的最大值;

(3) 设 $P(-2,0)$, 直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C, 直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D. 若 C, D 和点 $Q\left(-\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ 共线, 求 k.

2018 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,8\}$, $B=\{-1,1,6,8\}$, 那么 $A\cap B=$_____.

2. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z=1+2\mathrm{i}$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的实部为_____.

3. 已知 5 位裁判给某运动员打出的分数的茎叶图如图所示, 那么这 5 位裁判打出的分数的平均数为_____.

8	9 9
9	0 1 1

4. 一个算法的伪代码如图所示, 执行此算法, 最后输出的 S 的值为_____.

```
I ← 1
S ← 1
While I < 6
    I ← I + 2
    S ←2S
End While
Print S
```

5. 函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域为_____.

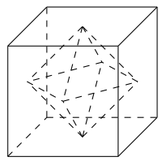
6. 某兴趣小组有 2 名男生和 3 名女生, 现从中任选 2 名学生去参加活动, 则恰好选中 2 名女生的概率为_____.

7. 已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称, 则 φ 的值为_____.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点 $F(c,0)$ 到一条渐近线的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$, 则其离心率的值为_____.

9. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$, 且在区间 $(-2,2]$ 上, $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & 0<x\leqslant 2\\ \left|x+\dfrac{1}{2}\right|, & -2<x\leqslant 0\end{cases}$, 则 $f(f(15))$ 的值为_____.

10. 如图所示, 正方体的棱长为 2, 以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为_____.



11. 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1$ $(a\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点, 则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为_____.

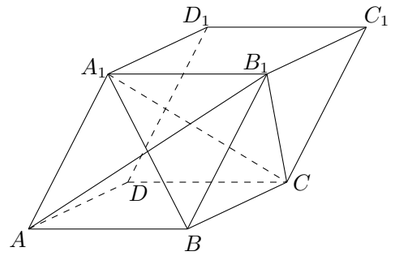
12. 在平面直角坐标系 xOy 中, A 为直线 $l:y=2x$ 上在第一象限内的点, $B(5,0)$, 以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, 则点 A 的横坐标为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, $\angle ABC=120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D, 且 $BD=1$, 则 $4a+c$ 的最小值为_____.

14. 已知集合 $A=\{x\,|\,x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$, $B=\{x\,|\,x=2^n,n\in\mathbf{N}^*\}$. 将 $A\cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则使得 $S_n>12a_{n+1}$ 成立的 n 的最小值为_____.

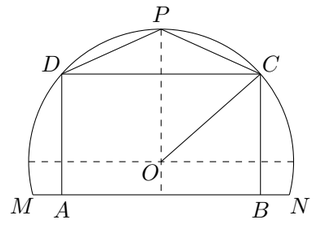
二、解答题

15. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB$, $AB_1\perp B_1C_1$. 求证:
(1) $AB\parallel$ 平面 A_1B_1C;
(2) 平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC.

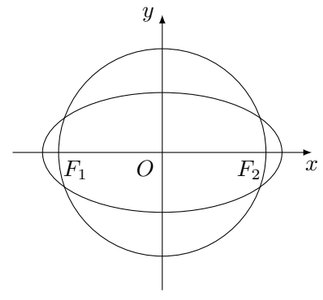


16. 已知 α, β 为锐角, $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值;
(2) 求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

17. 某农场有一块农田, 如图所示, 它的边界由圆 O 的一段圆弧 MPN (P 为此圆弧的中点) 和线段 MN 构成. 已知圆 O 的半径为 40 米, 点 P 到 MN 的距离为 50 米. 现规划在此农田上修建两个温室大棚, 大棚 I 内的地块形状为矩形 $ABCD$, 大棚 II 内的地块形状为 $\triangle CDP$, 要求 A, B 均在线段 MN 上, C, D 均在圆弧上. 设 OC 与 MN 所成的角为 θ.
(1) 用 θ 分别表示矩形 $ABCD$ 和 $\triangle CDP$ 的面积, 并确定 $\sin\theta$ 的取值范围;
(2) 若大棚 I 内种植甲种蔬菜, 大棚 II 内种植乙种蔬菜, 且甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为 4 : 3. 求当 θ 为何值时, 能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大.



18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 过点 $\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$, 焦点为 $F_1(-\sqrt{3},0)$, $F_2(\sqrt{3},0)$, 圆 O 的直径为 F_1F_2.
(1) 求椭圆 C 及圆 O 的方程;
(2) 设直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P.
① 若直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点, 求点 P 的坐标;
② 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$, 求直线 l 的方程.



19. 记 $f'(x)$, $g'(x)$ 分别为函数 $f(x)$, $g(x)$ 的导函数. 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x_0)=g(x_0)$ 且 $f'(x_0)=g'(x_0)$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个“S 点”.

(1) 证明: 函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=x^2+2x-2$ 不存在“S 点”;

(2) 若函数 $f(x)=ax^2-1$ 与 $g(x)=\ln x$ 存在“S 点”, 求实数 a 的值;

(3) 已知函数 $f(x)=-x^2+a$, $g(x)=\dfrac{b\mathrm{e}^x}{x}$. 对任意 $a>0$, 判断是否存在 $b>0$, 使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在“S 点”, 并说明理由.

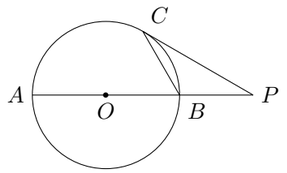
20. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1, 公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是首项为 b_1, 公比为 q 的等比数列.

(1) 设 $a_1=0$, $b_1=1$, $q=2$, 若 $|a_n-b_n|\leqslant b_1$ 对 $n=1,2,3,4$ 均成立, 求 d 的取值范围;

(2) 若 $a_1=b_1>0$, $m\in\mathbf{N}^*$, $q\in\left(1,\sqrt[m]{2}\right]$, 证明: 存在 $d\in\mathbf{R}$, 使得 $|a_n-b_n|\leqslant b_1$ 对 $n=2,3,\cdots,m+1$ 均成立, 并求 d 的取值范围 (用 b_1, m, q 表示).

21. 四选二.

【A】如图, 圆 O 的半径为 2, AB 为圆 O 的直径, P 为 AB 延长线上一点, 过 P 作圆 O 的切线, 切点为 C. 若 $PC=2\sqrt{3}$, 求 BC 的长.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 若点 P 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的变换作用下得到点 $P'(3,1)$, 求点 P 的坐标.

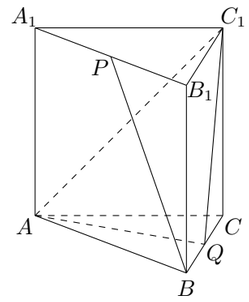
【C】在极坐标系中, 直线 l 的方程为 $\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=2$, 曲线 C 的方程为 $\rho=4\cos\theta$, 求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

【D】若 x, y, z 为实数, 且 $x+2y+2z=6$, 求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值.

22. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AA_1=2$, 点 P, Q 分别为 A_1B_1, BC 的中点.

(1) 求异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值;

(2) 求直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值.



23. 设 $n\in\mathbf{N}^*$, 对 1, 2, $\cdots$, n 的一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$, 如果当 $s<t$ 时, 有 $i_s>i_t$, 则称 (i_s,i_t) 是排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的一个逆序, 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的所有逆序的总个数称为其逆序数. 例如: 对 1, 2, 3 的一个排列 231, 只有两个逆序 $(2,1)$, $(3,1)$, 则排列 231 的逆序数为 2. 记 $f_n(k)$ 为 1, 2, $\cdots$, n 的所有排列中逆序数为 k 的全部排列的个数.

(1) 求 $f_3(2)$, $f_4(2)$ 的值;

(2) 求 $f_n(2)$ $(n\geqslant 5)$ 的表达式 (用 n 表示).

2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ （　）

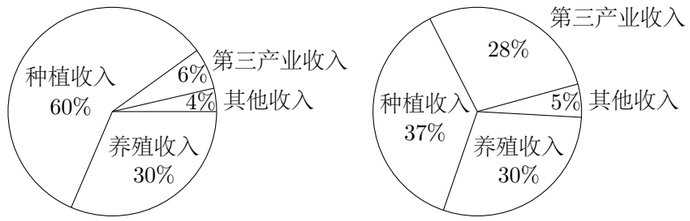
(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) 1　　(D) $\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$

(A) $\{x\mid -1<x<2\}$　　(B) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$

(C) $\{x\mid x<-1\}\cup\{x\mid x>2\}$　　(D) $\{x\mid x\leqslant -1\}\cup\{x\mid x\geqslant 2\}$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍. 实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



建设前经济收入构成比例

建设后经济收入构成比例

则下面结论中不正确的是 （　）

(A) 新农村建设后, 种植收入减少

(B) 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上

(C) 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍

(D) 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $3S_3=S_2+S_4$, $a_1=2$, 则 $a_5=$（　）

(A) -12　　(B) -10　　(C) 10　　(D) 12

5. 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 （　）

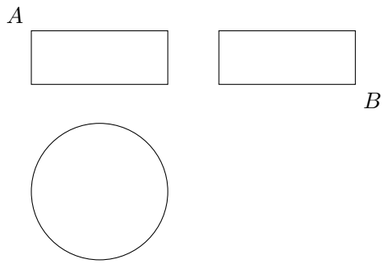
(A) $y=-2x$　　(B) $y=-x$　　(C) $y=2x$　　(D) $y=x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB}=$（　）

(A) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　(B) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

(C) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　(D) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

7. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图. 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A, 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B, 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为 （　）



(A) $2\sqrt{17}$　　(B) $2\sqrt{5}$　　(C) 3　　(D) 2

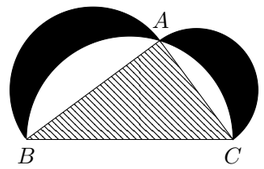
8. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F, 过点 $(-2,0)$ 且斜率为 $\dfrac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=$ （　）

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$, $g(x)=f(x)+x+a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $[-1,0)$　　(B) $[0,+\infty)$　　(C) $[-1,+\infty)$　　(D) $[1,+\infty)$

10. 如图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形. 此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC, 直角边 AB, AC. $\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为 I, 黑色部分记为 II, 其余部分记为 III. 在整个图形中随机取一点, 此点取自 I, II, III 的概率分别记为 p_1, p_2, p_3, 则 （　）



(A) $p_1=p_2$　　(B) $p_1=p_3$　　(C) $p_2=p_3$　　(D) $p_1=p_2+p_3$

11. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$, O 为坐标原点, F 为 C 的右焦点, 过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M, N. 若 $\triangle OMN$ 为直角三角形, 则 $|MN|=$ （　）

(A) $\dfrac{3}{2}$　　(B) 3　　(C) $2\sqrt{3}$　　(D) 4

12. 已知正方体的棱长为 1, 每条棱所在直线与平面 α 所成的角相等, 则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为 （　）

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\leqslant 0\\ x-y+1\geqslant 0\\ y\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为_____.

14. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n=2a_n+1$, 则 $S_6=$_____.

15. 从 2 位女生, 4 位男生中选 3 人参加科技比赛, 且至少有 1 位女生入选, 则不同的选法共有_____种. (用数字填写答案)

16. 已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.

三、解答题

17. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC=90^\circ$, $\angle A=45^\circ$, $AB=2$, $BD=5$.

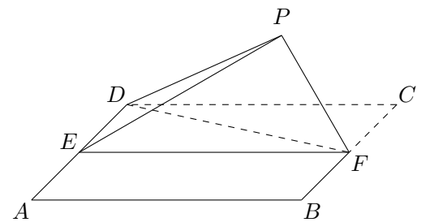
(1) 求 $\cos\angle ADB$;

(2) 若 $DC=2\sqrt{2}$, 求 BC.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 以 DF 为折痕, 把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且 $PF\perp BF$.

(1) 证明: 平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$;

(2) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.



19. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F, 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2,0)$.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA=\angle OMB$.

20. 某工厂的某种产品成箱包装, 每箱 200 件, 每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验, 如检验出不合格品, 则更换为合格品. 检验时, 先从这箱产品中任取 20 件作检验, 再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验, 设每件产品为不合格品的概率都为 p $(0<p<1)$, 且各件产品是否为不合格品相互独立.

(1) 记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值点 p_0;

(2) 现对一箱产品检验了 20 件, 结果恰有 2 件不合格品, 以 (1) 中确定的 p_0 作为 p 的值. 已知每件产品的检验费用为 2 元, 若有不合格品进入用户手中, 则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.

① 若不对该箱余下的产品作检验, 这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X, 求 EX;

② 以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据, 是否该对这箱余下的所有产品作检验?

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2, 证明: $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.

(1) 求 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

23. 已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;

(2) 若 $x\in(0,1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立, 求 a 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{0,2\}$, $B=\{-2,-1,0,1,2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

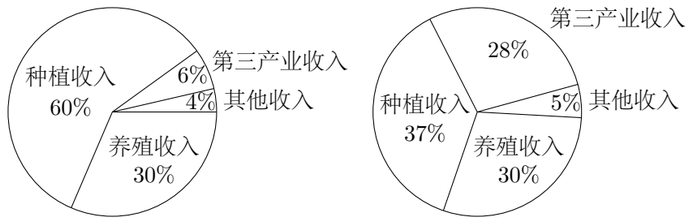
(A) $\{0,2\}$　　(B) $\{1,2\}$

(C) $\{0\}$　　(D) $\{-2,-1,0,1,2\}$

2. 设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ （　）

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) 1　　(D) $\sqrt{2}$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍. 实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



建设前经济收入构成比例

建设后经济收入构成比例

则下面结论中不正确的是 （　）

(A) 新农村建设后, 种植收入减少

(B) 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上

(C) 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍

(D) 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的一个焦点为 $(2,0)$, 则 C 的离心率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1, O_2, 过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形, 则该圆柱的表面积为 （　）

(A) $12\sqrt{2}\pi$　　(B) 12π　　(C) $8\sqrt{2}\pi$　　(D) 10π

6. 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 （　）

(A) $y=-2x$　　(B) $y=-x$　　(C) $y=2x$　　(D) $y=x$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB}=$（　）

(A) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　(B) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

(C) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　(D) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

8. 已知函数 $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2$, 则 （　）

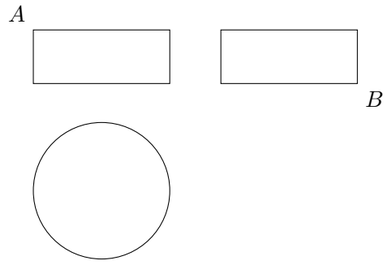
(A) $f(x)$ 的最小正周期为 π, 最大值为 3

(B) $f(x)$ 的最小正周期为 π, 最大值为 4

(C) $f(x)$ 的最小正周期为 2π, 最大值为 3

(D) $f(x)$ 的最小正周期为 2π, 最大值为 4

9. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图. 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A, 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B, 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为 （　）



(A) $2\sqrt{17}$　　(B) $2\sqrt{5}$　　(C) 3　　(D) 2

10. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2$, AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30°, 则该长方体的体积为 （　）

(A) 8　　(B) $6\sqrt{2}$　　(C) $8\sqrt{2}$　　(D) $8\sqrt{3}$

11. 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边上有两点 $A(1,a)$, $B(2,b)$, 且 $\cos 2\alpha=\dfrac{2}{3}$, 则 $|a-b|=$（　　）

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　(C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　(D) 1

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$, 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是 （　）

(A) $(-\infty,-1]$　　(B) $(0,+\infty)$　　(C) $(-1,0)$　　(D) $(-\infty,0)$

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+a)$, 若 $f(3)=1$, 则 $a=$_____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\leqslant 0\\ x-y+1\geqslant 0\\ y\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为_____.

15. 直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$_____.

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$, $b^2+c^2-a^2=8$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $na_{n+1}=2(n+1)a_n$, 设 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$.

(1) 求 b_1, b_2, b_3;

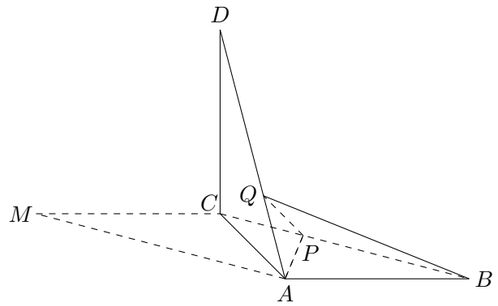
(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并说明理由;

(3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 如图, 在平行四边形 $ABCM$ 中, $AB=AC=3$, $\angle ACM=90^\circ$, 以 AC 为折痕将 $\triangle ACM$ 折起, 使点 M 到达点 D 的位置, 且 $AB\perp DA$.

(1) 证明: 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC;

(2) Q 为线段 AD 上一点, P 为线段 BC 上一点, 且 $BP=DQ=\dfrac{2}{3}DA$, 求三棱锥 $Q-ABP$ 的体积.



19. 某家庭记录了未使用节水龙头 50 天的日用水量数据 (单位: m^3) 和使用了节水龙头 50 天的日用水量数据, 得到频数分布表如下:

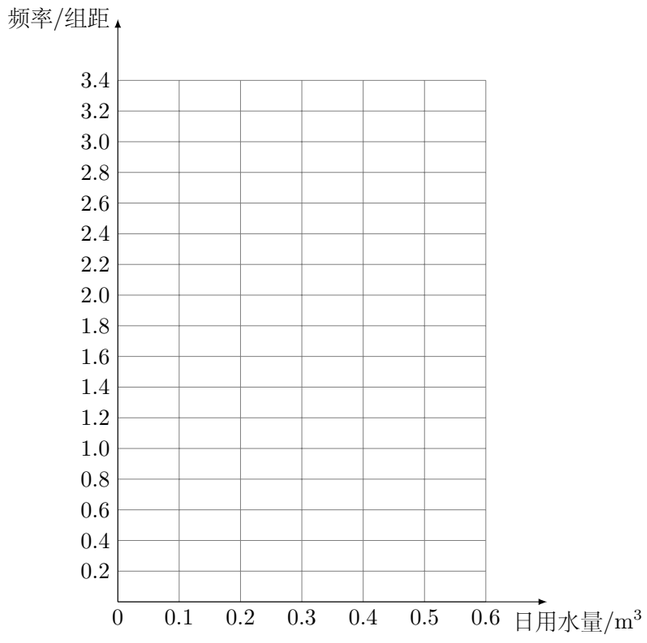
未使用节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	$[0,0.1)$	$[0.1,0.2)$	$[0.2,0.3)$	$[0.3,0.4)$
频数	1	3	2	4
日用水量	$[0.4,0.5)$	$[0.5,0.6)$	$[0.6,0.7)$	
频数	9	26	5	

使用了节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	$[0,0.1)$	$[0.1,0.2)$	$[0.2,0.3)$
频数	1	5	13
日用水量	$[0.3,0.4)$	$[0.4,0.5)$	$[0.5,0.6)$
频数	10	16	5

(1) 在答题卡上作出使用了节水龙头 50 天的日用水量数据的频率分布直方图:



(2) 估计该家庭使用节水龙头后, 日用水量小于 0.35 m^3 的概率;
(3) 估计该家庭使用节水龙头后, 一年能节省多少水? (一年按 365 天计算, 同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表.)

20. 设抛物线 $C: y^2=2x$, 点 $A(2,0)$, $B(-2,0)$, 过点 A 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点.
(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 BM 的方程;
(2) 证明: $\angle ABM=\angle ABN$.

21. 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x-1$.
(1) 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点. 求 a, 并求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 证明: 当 $a\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $f(x)\geqslant 0$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.
(1) 求 C_2 的直角坐标方程;
(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

23. 已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;
(2) 若 $x\in(0,1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立, 求 a 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=$ （ ）

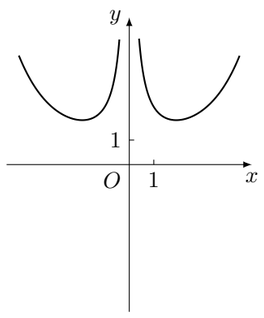
(A) $-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　(B) $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　(C) $-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　(D) $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3, x\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{Z}\}$，则 A 中元素的个数为 （ ）

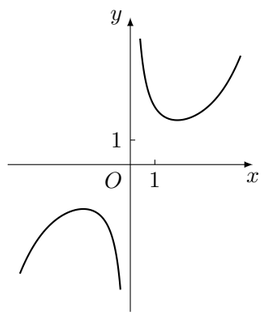
(A) 9　(B) 8　(C) 5　(D) 4

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 （ ）

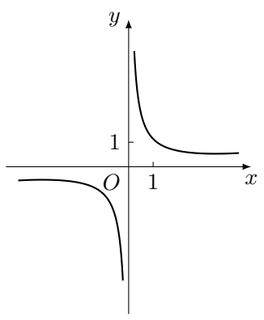
(A)



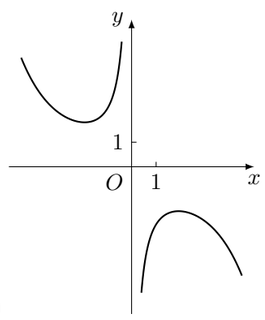
(B)



(C)



(D)



4. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ （ ）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 0

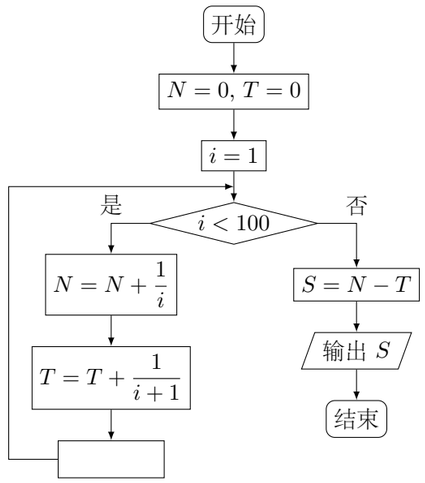
5. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为（ ）

(A) $y=\pm\sqrt{2}x$　(B) $y=\pm\sqrt{3}x$　(C) $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　(D) $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$ （ ）

(A) $4\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{30}$　(C) $\sqrt{29}$　(D) $2\sqrt{5}$

7. 为计算 $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}$，设计了如图的程序框图，则在空白框中应填入 （ ）



(A) $i=i+1$　(B) $i=i+2$　(C) $i=i+3$　(D) $i=i+4$

8. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”，如 $30=7+23$. 在不超过 30 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 30 的概率是（ ）

(A) $\dfrac{1}{12}$　(B) $\dfrac{1}{14}$　(C) $\dfrac{1}{15}$　(D) $\dfrac{1}{18}$

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a,a]$ 是减函数，则 a 的最大值是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　(C) $\dfrac{3\pi}{4}$　(D) π

11. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$ （ ）

(A) -50　(B) 0　(C) 2　(D) 50

12. 已知 F_1，F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左，右焦点，A 是 C 的左顶点，点 P 在过 A 且斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120^\circ$，则 C 的离心率为 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

二、填空题

13. 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

14. 若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0\\ x-2y+3\geqslant 0\\ x-5\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

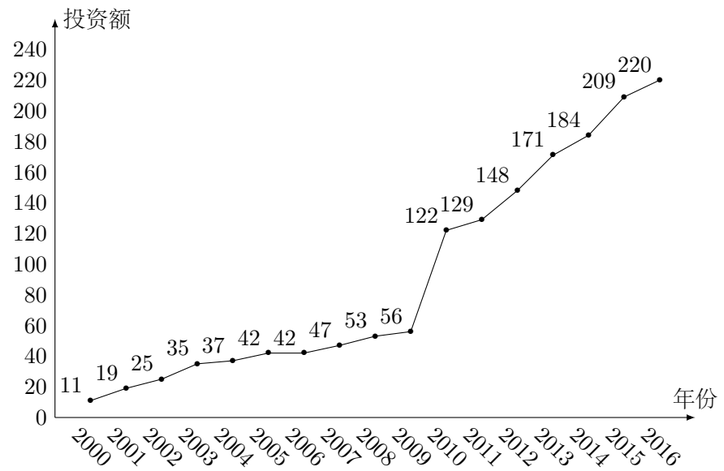
15. 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$_____.

16. 已知圆锥的顶点为 S，母线 SA，SB 所成角的余弦值为 $\dfrac{7}{8}$，SA 与圆锥底面所成角为 45°，若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为_____.

三、解答题

17. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(2) 求 S_n，并求 S_n 的最小值.

18. 如图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y（单位：亿元）的折线图. 为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额，建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 $1,2,\cdots,17$）建立模型①：$\hat{y}=-30.4+13.5t$；根据 2010 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 $1,2,\cdots,7$）建立模型②：$\hat{y}=99+17.5t$.
(1) 分别利用这两个模型，求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值；
(2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠？并说明理由.



19. 设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F, 过 F 且斜率为 k $(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=8$.

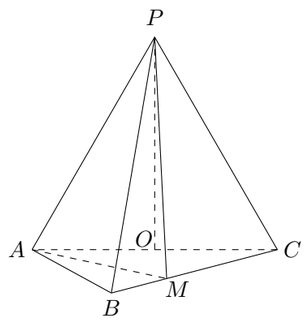
(1) 求 l 的方程;

(2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

20. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=BC=2\sqrt{2}$, $PA=PB=PC=AC=4$, O 为 AC 的中点.

(1) 证明: $PO\perp$ 平面 ABC;

(2) 若点 M 在棱 BC 上, 且二面角 $M-PA-C$ 为 30°, 求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.



21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$.

(1) 若 $a=1$, 证明: 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant 1$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点, 求 a.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=4\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1,2)$, 求 l 的斜率.

23. 设函数 $f(x)=5-|x+a|-|x-2|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x)\leqslant 1$, 求 a 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. $\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=$ （　）

(A) $3-2\mathrm{i}$　(B) $3+2\mathrm{i}$　(C) $-3-2\mathrm{i}$　(D) $-3+2\mathrm{i}$

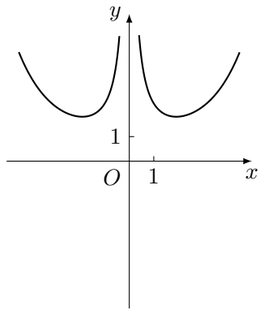
2. 已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{3\}$　(B) $\{5\}$

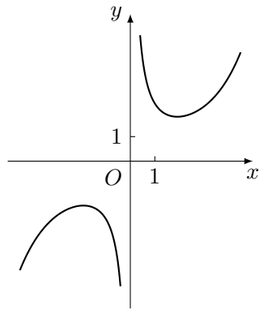
(C) $\{3,5\}$　(D) $\{1,2,3,4,5,7\}$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 （　）

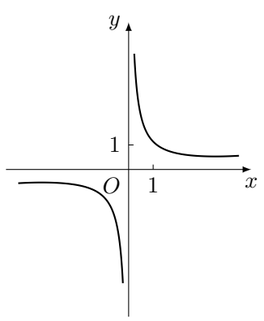
(A)



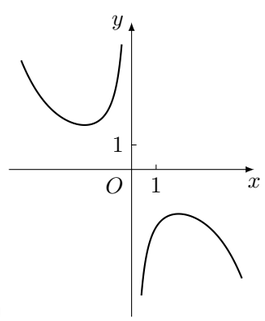
(B)



(C)



(D)



4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ （　）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 0

5. 从 2 名男同学和 3 名女同学中任选 2 人参加社区服务, 则选中的 2 人都是女同学的概率为 （　）

(A) 0.6　(B) 0.5　(C) 0.4　(D) 0.3

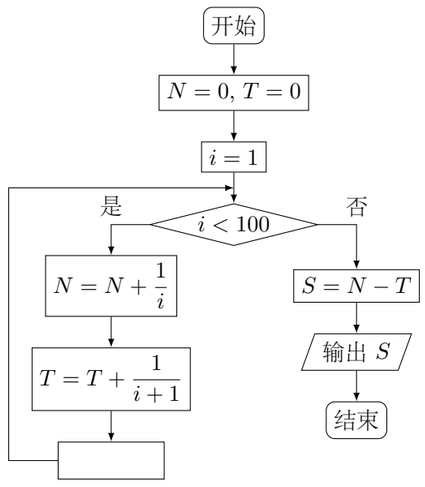
6. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为（　）

(A) $y=\pm\sqrt{2}x$　(B) $y=\pm\sqrt{3}x$　(C) $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　(D) $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $BC=1$, $AC=5$, 则 $AB=$ （　）

(A) $4\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{30}$　(C) $\sqrt{29}$　(D) $2\sqrt{5}$

8. 为计算 $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}$, 设计了如图的程序框图, 则在空白框中应填入 （　）



(A) $i=i+1$　(B) $i=i+2$　(C) $i=i+3$　(D) $i=i+4$

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

10. 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[0,a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　(C) $\dfrac{3\pi}{4}$　(D) π

11. 已知 F_1, F_2 是椭圆 C 的两个焦点, P 是 C 上的一点, 若 $PF_1\perp PF_2$, 且 $\angle PF_2F_1=60^\circ$, 则 C 的离心率为 （　）

(A) $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $2-\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　(D) $\sqrt{3}-1$

12. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(1)=2$, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$ （　）

(A) -50　(B) 0　(C) 2　(D) 50

二、填空题

13. 曲线 $y=2\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为_____.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0\\ x-2y+3\geqslant 0\\ x-5\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

15. 已知 $\tan\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{5}$, 则 $\tan\alpha=$_____.

16. 已知圆锥的顶点为 S, 母线 SA, SB 互相垂直, SA 与圆锥底面所成角为 30°, 若 $\triangle SAB$ 的面积为 8, 则该圆锥的体积为_____.

三、解答题

17. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=-7$, $S_3=-15$.

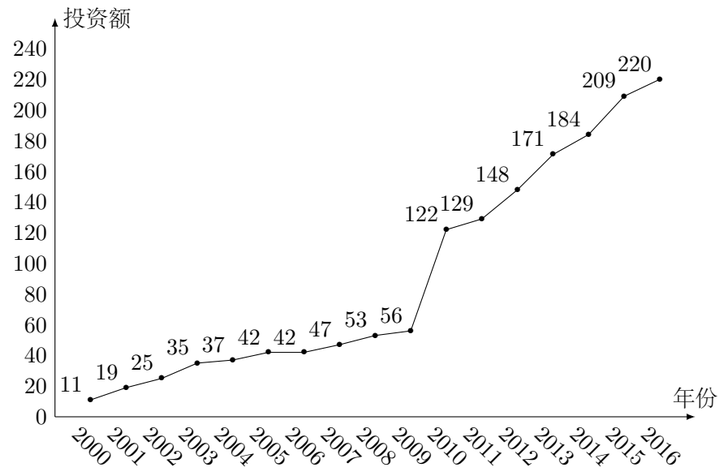
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n, 并求 S_n 的最小值.

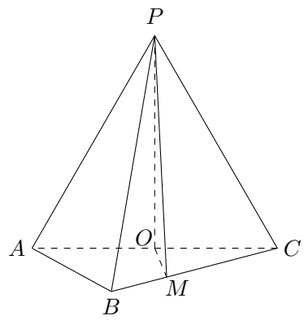
18. 如图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图. 为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额, 建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 1, 2, $\cdots$, 17) 建立模型①: $\hat{y}=-30.4+13.5t$; 根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 1, 2, $\cdots$, 7) 建立模型②: $\hat{y}=99+17.5t$.

(1) 分别利用这两个模型, 求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值;

(2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 并说明理由.



19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=BC=2\sqrt{2}$, $PA=PB=PC=AC=4$, O 为 AC 的中点.
(1) 证明: $PO\perp$ 平面 ABC;
(2) 若点 M 在棱 BC 上, 且 $MC=2MB$, 求点 C 到平面 POM 的距离.



20. 设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F, 过 F 且斜率为 k $(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=8$.
(1) 求 l 的方程;
(2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$.
(1) 若 $a=3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 证明: $f(x)$ 只有一个零点.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=4\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数).
(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;
(2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1,2)$, 求 l 的斜率.

23. 设函数 $f(x)=5-|x+a|-|x-2|$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集;
(2) 若 $f(x)\leqslant 1$, 求 a 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

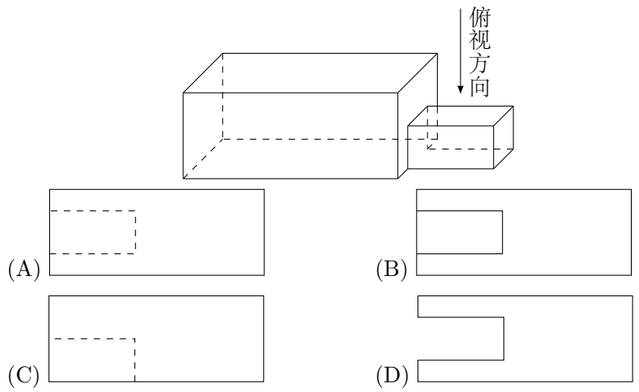
1. 已知集合 $A=\{x\mid x-1\geqslant 0\}$, $B=\{0,1,2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{0\}$　(B) $\{1\}$　(C) $\{1,2\}$　(D) $\{0,1,2\}$

2. $(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=$ （　）

(A) $-3-\mathrm{i}$　(B) $-3+\mathrm{i}$　(C) $3-\mathrm{i}$　(D) $3+\mathrm{i}$

3. 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来, 构件的凸出部分叫榫头, 凹进部分叫卯眼, 图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体, 则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是 （　）



(A)　(B)　(C)　(D)

4. 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha=$ （　）

(A) $\dfrac{8}{9}$　(B) $\dfrac{7}{9}$　(C) $-\dfrac{7}{9}$　(D) $-\dfrac{8}{9}$

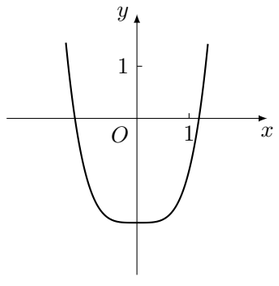
5. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为 （　）

(A) 10　(B) 20　(C) 40　(D) 80

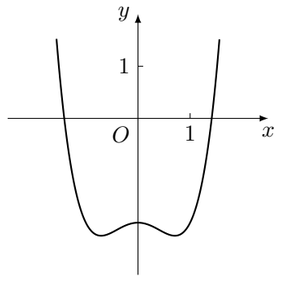
6. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上, 则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是 （　）

(A) $[2,6]$　(B) $[4,8]$　(C) $[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　(D) $[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

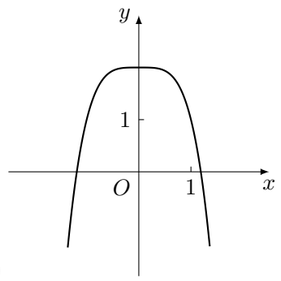
7. 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图象大致为 （　）



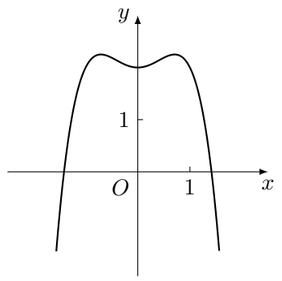
(A)



(B)



(C)



(D)

8. 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p, 各成员的支付方式相互独立, 设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数, $DX=2.4$, $P(X=4)<P(X=6)$, 则 $p=$ （　）

(A) 0.7　(B) 0.6　(C) 0.4　(D) 0.3

9. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}$, 则 $C=$ （　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

10. 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点, $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$, 则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 （　）

(A) $12\sqrt{3}$　(B) $18\sqrt{3}$　(C) $24\sqrt{3}$　(D) $54\sqrt{3}$

11. 设 F_1, F_2 是双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点, O 是坐标原点. 过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P. 若 $|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$, 则 C 的离心率为 （　）

(A) $\sqrt{5}$　(B) 2　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{2}$

12. 设 $a=\log_{0.2}0.3$, $b=\log_2 0.3$, 则 （　）

(A) $a+b<ab<0$　(B) $ab<a+b<0$

(C) $a+b<0<ab$　(D) $ab<0<a+b$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-2)$, $\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$. 若 $\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, 则 $\lambda=$_____.

14. 曲线 $y=(ax+1)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率为 -2, 则 $a=$_____.

15. 函数 $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 的零点个数为_____.

16. 已知点 $M(-1,1)$ 和抛物线 C: $y^2=4x$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $\angle AMB=90^\circ$, 则 $k=$_____.

三、解答题

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_5=4a_3$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m=63$, 求 m.

18. 某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人, 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间 (单位: min) 绘制了如图茎叶图:

第一种生产方式												第二种生产方式									
									8	6	5	5	6	8	9						
						9	7	6	2	7	0	1	2	2	3	4	5	6	6	8
9	8	7	7	6	5	4	3	3	2	8	1	4	4	5						
					2	1	1	0	0	9	0									

(1) 根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高? 并说明理由;
(2) 求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m, 并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异?

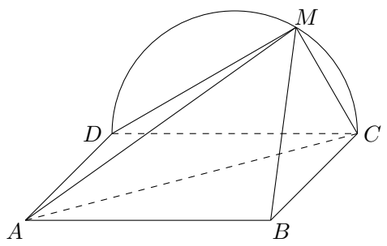
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直, M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C, D 的点.

(1) 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC;

(2) 当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时, 求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值.



20. 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A, B 两点. 线段 AB 的中点为 $M(1,m)$ $(m>0)$.

(1) 证明: $k<-\dfrac{1}{2}$;

(2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$. 证明: $\left|\overrightarrow{FA}\right|$, $\left|\overrightarrow{FP}\right|$, $\left|\overrightarrow{FB}\right|$ 成等差数列, 并求该数列的公差.

21. 已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

(1) 若 $a=0$, 证明: 当 $-1<x<0$ 时, $f(x)<0$; 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$;

(2) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数), 过点 $\left(0,-\sqrt{2}\right)$ 且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点.

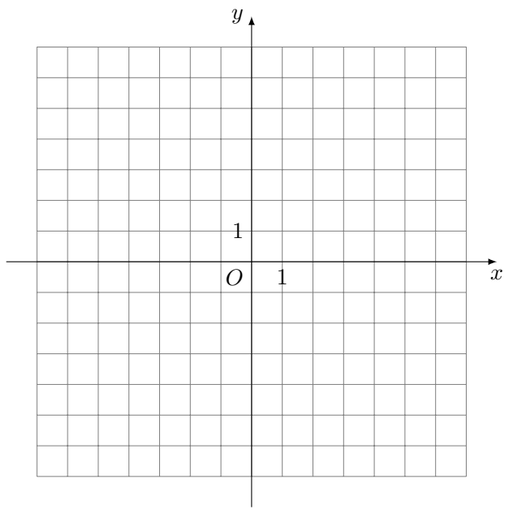
(1) 求 α 的取值范围;

(2) 求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

23. 设函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 当 $x\in[0,+\infty)$ 时, $f(x)\leqslant ax+b$, 求 $a+b$ 的最小值.



2018 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

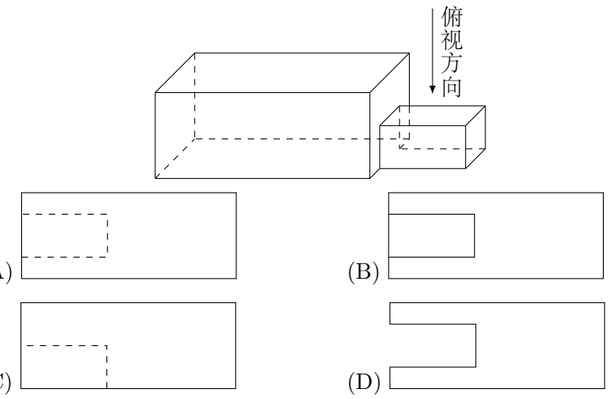
1. 已知集合 $A=\{x\mid x-1\geqslant 0\}$, $B=\{0,1,2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{0\}$　(B) $\{1\}$　(C) $\{1,2\}$　(D) $\{0,1,2\}$

2. $(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=$ （　）

(A) $-3-\mathrm{i}$　(B) $-3+\mathrm{i}$　(C) $3-\mathrm{i}$　(D) $3+\mathrm{i}$

3. 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来, 构件的凸出部分叫榫头, 凹进部分叫卯眼, 图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体, 则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是 （　）



(A)　(B)　(C)　(D)

4. 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha=$ （　）

(A) $\dfrac{8}{9}$　(B) $\dfrac{7}{9}$　(C) $-\dfrac{7}{9}$　(D) $-\dfrac{8}{9}$

5. 若某群体中的成员只用现金支付的概率为 0.45, 既用现金支付也用非现金支付的概率为 0.15, 则不用现金支付的概率为 （　）

(A) 0.3　(B) 0.4　(C) 0.6　(D) 0.7

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期为 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　(C) π　(D) 2π

7. 下列函数中, 其图象与函数 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的是（　）

(A) $y=\ln(1-x)$　(B) $y=\ln(2-x)$

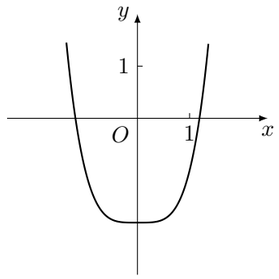
(C) $y=\ln(1+x)$　(D) $y=\ln(2+x)$

8. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上, 则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是 （　）

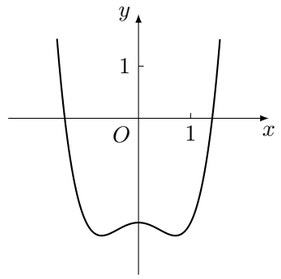
(A) $[2,6]$　(B) $[4,8]$　(C) $[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　(D) $[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

9. 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图象大致为 （　）

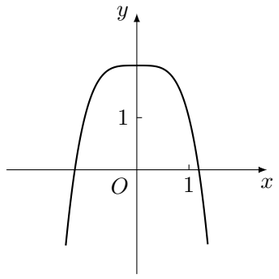
(A)



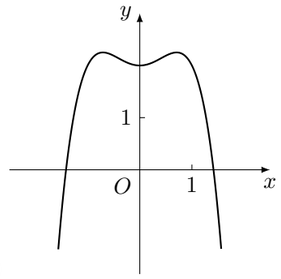
(B)



(C)



(D)



10. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$, 则点 $(4,0)$ 到 C 的渐近线的距离为 （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) 2　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(D) $2\sqrt{2}$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}$, 则 $C=$ （　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

12. 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点, $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$, 则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 （　）

(A) $12\sqrt{3}$　(B) $18\sqrt{3}$　(C) $24\sqrt{3}$　(D) $54\sqrt{3}$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-2)$, $\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$. 若 $\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, 则 $\lambda=$_____.

14. 某公司有大量客户, 且不同龄段客户对其服务的评价有较大差异. 为了解客户的评价, 该公司准备进行抽样调查, 可供选择的抽样方法有简单随机抽样、分层抽样和系统抽样, 则最合适的抽样方法是_____.

15. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y+3\geqslant 0\\ x-2y+4\geqslant 0\\ x-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+\dfrac{1}{3}y$ 的最大值是_____.

16. 已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1$, $f(a)=4$, 则 $f(-a)=$_____.

三、解答题

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_5=4a_3$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m=63$, 求 m.

18. 某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人, 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间 (单位: min) 绘制了如图茎叶图:

第一种生产方式												第二种生产方式									
								8	6	5	5	6	8	9							
						9	7	6	2	7	0	1	2	2	3	4	5	6	6	8
9	8	7	7	6	5	4	3	3	2	8	1	4	4	5						
					2	1	1	0	0	9	0									

(1) 根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高? 并说明理由;
(2) 求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m, 并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异?

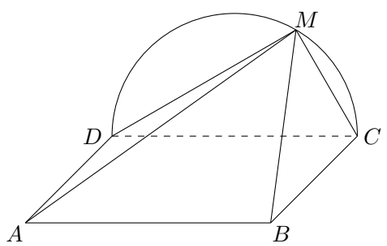
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直, M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C, D 的点.

(1) 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC;

(2) 在线段 AM 上是否存在点 P, 使得 $MC \parallel$ 平面 PBD? 说明理由.



20. 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A, B 两点. 线段 AB 的中点为 $M(1,m)$ $(m>0)$.

(1) 证明: $k<-\dfrac{1}{2}$;

(2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$. 证明: $2\left|\overrightarrow{FP}\right|=\left|\overrightarrow{FA}\right|+\left|\overrightarrow{FB}\right|$.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{\mathrm{e}^x}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程;

(2) 证明: 当 $a \geqslant 1$ 时, $f(x)+\mathrm{e} \geqslant 0$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 过点 $\left(0,-\sqrt{2}\right)$ 且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点.

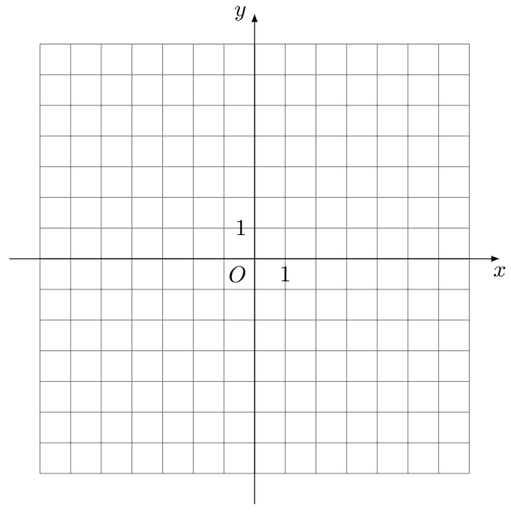
(1) 求 α 的取值范围;

(2) 求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

23. 设函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 当 $x \in [0,+\infty)$ 时, $f(x) \leqslant ax+b$, 求 $a+b$ 的最小值.



2018 年普通高等学校招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为_____.

2. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为_____.

3. 在 $(1+x)^7$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为_____. (结果用数值表示)

4. 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$. 若 $f(x)$ 的反函数的图象经过点 $(3,1)$, 则 $a =$_____.

5. 已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z = 1 - 7\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 $|z| =$_____.

6. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_3 = 0$, $a_6 + a_7 = 14$, 则 $S_7 =$_____.

7. 已知 $\alpha \in \left\{-2, -1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$, 若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 则 $\alpha =$_____.

8. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, E, F 是 y 轴上的两个动点, 且 $\left|\overrightarrow{EF}\right| = 2$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值为_____.

9. 有编号互不相同的五个砝码, 其中 5 克、3 克、1 克砝码各一个, 2 克砝码两个. 从中随机选取三个, 则这三个砝码的总质量为 9 克的概率是_____. (结果用最简分数表示)

10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = q^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 前 n 项和为 S_n, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{2}$, 则 $q =$_____.

11. 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + ax}$ 的图象经过点 $P\left(p, \dfrac{6}{5}\right)$, $Q\left(q, -\dfrac{1}{5}\right)$. 若 $2^{p+q} = 36pq$, 则 $a =$_____.

12. 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足: $x_1^2 + y_1^2 = 1$, $x_2^2 + y_2^2 = 1$, $x_1x_2 + y_1y_2 = \dfrac{1}{2}$, 则 $\dfrac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \dfrac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为_____.

二、选择题

13. 设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 上的动点, 则 P 到该椭圆的两个焦点的距离之和为 (　　)

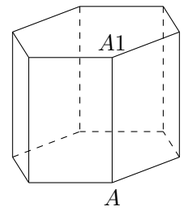
(A) $2\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) $2\sqrt{5}$　　(D) $4\sqrt{2}$

14. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则"$a > 1$"是"$\dfrac{1}{a} < 1$"的 (　　)

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

15. 《九章算术》中, 称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马. 设 AA_1 是正六棱柱的一条侧棱, 如图. 若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点、以 AA_1 为底面矩形的一边, 则这样的阳马的个数是 (　　)



(A) 4　　(B) 8　　(C) 12　　(D) 16

16. 设 D 是含数 1 的有限实数集, $f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 若 $f(x)$ 的图象绕原点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{6}$ 后与原图象重合, 则在以下各项中, $f(1)$ 的可能取值只能是 (　　)

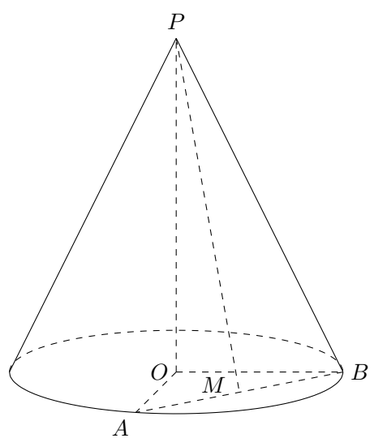
(A) $\sqrt{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) 0

三、解答题

17. 已知圆锥的顶点为 P, 底面圆心为 O, 半径为 2.

(1) 设圆锥的母线长为 4, 求圆锥的体积;

(2) 设 $PO = 4$, OA, OB 是底面半径, 且 $\angle AOB = 90°$, M 为线段 AB 的中点, 如图, 求异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小.



18. 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = a\sin 2x + 2\cos^2 x$.

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(2) 若 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$, 求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解.

19. 某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时. 某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤. 分析显示: 当 S 中 $x\%$ $(0<x<100)$ 的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为 $f(x)=\begin{cases}30, & 0<x\leqslant 30\\ 2x+\dfrac{1800}{x}-90, & 30<x<100\end{cases}$ (单位: 分钟), 而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响, 恒为 40 分钟. 试根据上述分析结果回答下列问题:

(1) 当 x 在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?

(2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式; 讨论 $g(x)$ 的单调性, 并说明其实际意义.

20. 设常数 $t>2$. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F(2,0)$, 直线 $l: x=t$, 曲线 $\Gamma: y^2=8x$ $(0\leqslant x\leqslant t,\ y\geqslant 0)$. l 与 x 轴交于点 A、与 Γ 交于点 B. P, Q 分别是曲线 Γ 与线段 AB 上的动点.

(1) 用 t 表示点 B 到点 F 的距离;

(2) 设 $t=3$, $|FQ|=2$, 线段 OQ 的中点在直线 FP 上, 求 $\triangle AQP$ 的面积;

(3) 设 $t=8$, 是否存在以 FP, FQ 为邻边的矩形 $FPEQ$, 使得点 E 在 Γ 上? 若存在, 求点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

21. 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $|b_n-a_n|\leqslant 1$, 则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$“接近”.

(1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n=a_{n+1}+1$, $n\in\mathbf{N}^*$, 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M=\{x\,|\,x=b_i, i=1,2,3,4\}$, 求 M 中元素的个数 m;

(3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列. 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 b_2-b_1, b_3-b_2, $\cdots$, $b_{201}-b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 d 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

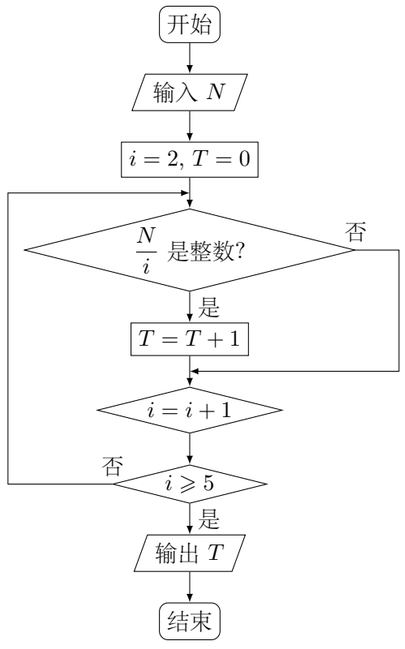
1. 设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|0<x<2\}$, $B=\{x|x\geqslant 1\}$, 则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$(　　)

(A) $\{x|0<x\leqslant 1\}$ (B) $\{x|0<x<1\}$ (C) $\{x|1\leqslant x<2\}$ (D) $\{x|0<x<2\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5\\2x-y\leqslant 4\\-x+y\leqslant 1\\y\geqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=3x+5y$ 的最大值为(　　)

(A) 6　　(B) 19　　(C) 21　　(D) 45

3. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 20, 则输出 T 的值为(　　)



(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

4. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$”是“$x^3<1$”的(　　)

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $a=\log_2 \mathrm{e}$, $b=\ln 2$, $c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系为(　　)

(A) $a>b>c$　　(B) $b>a>c$　　(C) $c>b>a$　　(D) $c>a>b$

6. 将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数(　　)

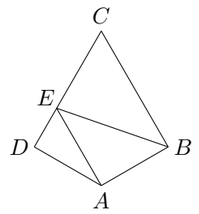
(A) 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增　　(B) 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减

(C) 在区间 $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增　　(D) 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上单调递减

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 2, 过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点. 设 A, B 到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2, 且 $d_1+d_2=6$, 则双曲线的方程为(　　)

(A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　(B) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$　(C) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$　(D) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

8. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB\perp BC$, $AD\perp CD$, $\angle BAD=120^\circ$, $AB=AD=1$. 若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为(　　)



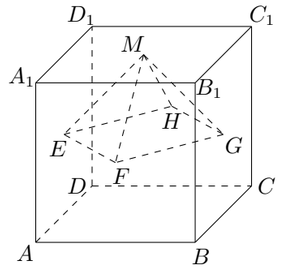
(A) $\frac{21}{16}$　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) $\frac{25}{16}$　　(D) 3

二、填空题

9. i 是虚数单位, 复数 $\frac{6+7\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$_____.

10. 在 $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为_____.

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 除面 $ABCD$ 外, 该正方体其余各面的中心分别为点 E, F, G, H, M (如图), 则四棱锥 $M-EFGH$ 的体积为_____.



12. 已知圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的圆心为 C, 直线 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\y=3-\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数) 与该圆相交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

13. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $a-3b+6=0$, 则 $2^a+\frac{1}{8^b}$ 的最小值为_____.

14. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+a,\ x\leqslant 0\\-x^2+2ax-2a,\ x>0\end{cases}$. 若关于 x 的方程 $f(x)=ax$ 恰有 2 个互异的实数解, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 设 $a=2$, $c=3$, 求 b 和 $\sin(2A-B)$ 的值.

16. 已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为 24, 16, 16. 现采用分层抽样的方法从中抽取 7 人, 进行睡眠时间的调查.

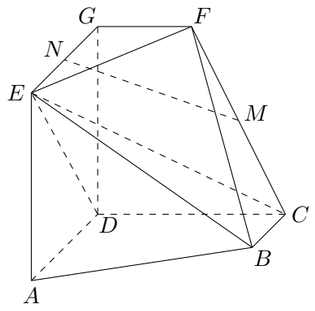
(1) 应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人?

(2) 若抽出的 7 人中有 4 人睡眠不足, 3 人睡眠充足, 现从这 7 人中随机抽取 3 人做进一步的身体检查.

① 用 X 表示抽取的 3 人中睡眠不足的员工人数, 求随机变量 X 的分布列与数学期望;

② 设 A 为事件“抽取的 3 人中, 既有睡眠充足的员工, 也有睡眠不足的员工”, 求事件 A 发生的概率.

17. 如图, $AD \parallel BC$ 且 $AD=2BC$, $AD \perp CD$, $EG \parallel AD$ 且 $EG=AD$, $CD \parallel FG$ 且 $CD=2FG$, $DG \perp$ 平面 $ABCD$, $DA=DC=DG=2$.
(1) 若 M 为 CF 的中点, N 为 EG 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 CDE;
(2) 求二面角 $E-BC-F$ 的正弦值;
(3) 若点 P 在线段 DG 上, 且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60°, 求线段 DP 的长.



18. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 S_n $(n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列. 已知 $a_1=1$, $a_3=a_2+2$, $a_4=b_3+b_5$, $a_5=b_4+2b_6$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n $(n \in \mathbf{N}^*)$.
① 求 T_n;
② 证明 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(T_k+b_{k+2})\,b_k}{(k+1)\,(k+2)}=\dfrac{2^{n+2}}{n+2}-2$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 F, 上顶点为 B. 已知椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, 点 A 的坐标为 $(b,0)$, 且 $|FB| \cdot |AB|=6\sqrt{2}$.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设直线 l: $y=kx$ $(k>0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P, 且 l 与直线 AB 交于点 Q. 若 $\dfrac{|AQ|}{|PQ|}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$ (O 为原点), 求 k 的值.

20. 已知函数 $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$, 其中 $a>1$.
(1) 求函数 $h(x)=f(x)-x\ln a$ 的单调区间;
(2) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,g(x_2))$ 处的切线平行, 证明 $x_1+g(x_2)=-\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$;
(3) 证明当 $a \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时, 存在直线 l, 使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线, 也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.

2018 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{-1,0,2,3\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}\,|\,-1\leqslant x<2\}$, 则 $(A\cup B)\cap C=$ （　）

(A) $\{-1,1\}$　(B) $\{0,1\}$　(C) $\{-1,0,1\}$　(D) $\{2,3,4\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5\\2x-y\leqslant 4\\-x+y\leqslant 1\\y\geqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=3x+5y$ 的最大值为 （　）

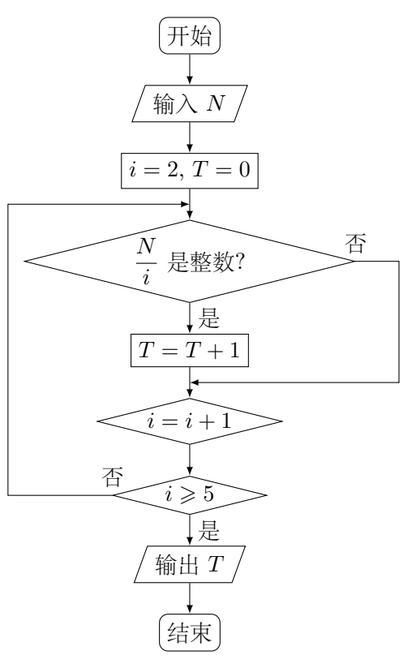
(A) 6　(B) 19　(C) 21　(D) 45

3. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$x^3>8$”是“$|x|>2$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 20, 则输出 T 的值为 （　）



(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

5. 已知 $a=\log_3\frac{7}{2}$, $b=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 （　）

(A) $a>b>c$　(B) $b>a>c$　(C) $c>b>a$　(D) $c>a>b$

6. 将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 （　）

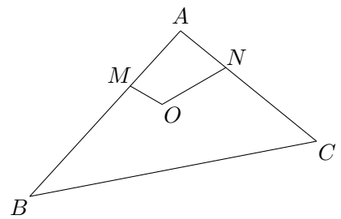
(A) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增　(B) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ 上单调递减

(C) 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增　(D) 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 2, 过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点. 设 A, B 到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2, 且 $d_1+d_2=6$, 则双曲线的方程为 （　）

(A) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$　(B) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$　(C) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　(D) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

8. 在如图的平面图形中, 已知 $OM=1$, $ON=2$, $\angle MON=120°$, $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$, 则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的值为 （　）



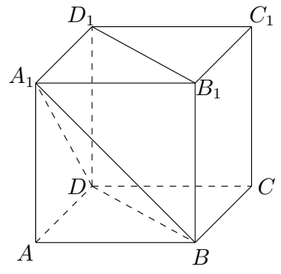
(A) -15　(B) -9　(C) -6　(D) 0

二、填空题

9. i 是虚数单位, 复数 $\frac{6+7\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$_____.

10. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为_____.

11. 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则四棱锥 $A_1-BB_1D_1D$ 的体积为_____.



12. 在平面直角坐标系中, 经过三点 $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ 的圆的方程为_____.

13. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $a-3b+6=0$, 则 $2^a+\frac{1}{8^b}$ 的最小值为_____.

14. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2,\ x\leqslant 0\\-x^2+2x-2a,\ x>0\end{cases}$. 若对任意 $x\in[-3,+\infty)$, $f(x)\leqslant|x|$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

15. 已知某校甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数分别为 240, 160, 160. 现采用分层抽样的方法从中抽取 7 名同学去某敬老院参加献爱心活动.

(1) 应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取多少人?

(2) 设抽出的 7 名同学分别用 A, B, C, D, E, F, G 表示, 现从中随机抽取 2 名同学承担敬老院的卫生工作.

① 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果;

② 设 M 为事件“抽取的 2 名同学来自同一年级”, 求事件 M 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求角 B 的大小;

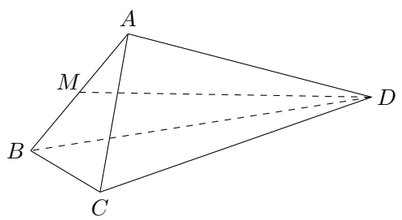
(2) 设 $a=2$, $c=3$, 求 b 和 $\sin(2A-B)$ 的值.

17. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 平面 $ABC \perp$ 平面 ABD, 点 M 为棱 AB 的中点, $AB=2$, $AD=2\sqrt{3}$, $\angle BAD=90^\circ$.

(1) 求证: $AD \perp BC$;

(2) 求异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值;

(3) 求直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值.



18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n $(n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 T_n $(n \in \mathbf{N}^*)$. 已知 $b_1=1$, $b_3=b_2+2$, $b_4=a_3+a_5$, $b_5=a_4+2a_6$.

(1) 求 S_n 和 T_n;

(2) 若 $S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$, 求正整数 n 的值.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右顶点为 A, 上顶点为 B. 已知椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $|AB|=\sqrt{13}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 $l: y=kx$ $(k<0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点, l 与直线 AB 交于点 M, 且点 P, M 均在第四象限. 若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍, 求 k 的值.

20. 设函数 $f(x)=(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$, 其中 t_1, t_2, $t_3 \in \mathbf{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列.

(1) 若 $t_2=0$, $d=1$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $d=3$, 求 $f(x)$ 的极值;

(3) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围.

2018 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

数学试卷

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,3\}$, 则 $\complement_U A=$ （　）

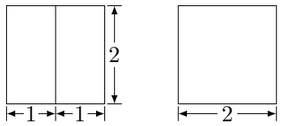
(A) $\varnothing$　　(B) $\{1,3\}$　　(C) $\{2,4,5\}$　　(D) $\{1,2,3,4,5\}$

2. 双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的焦点坐标是 （　）

(A) $\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\left(\sqrt{2},0\right)$　　(B) $(-2,0)$, $(2,0)$

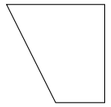
(C) $\left(0,-\sqrt{2}\right)$, $\left(0,\sqrt{2}\right)$　　(D) $(0,-2)$, $(0,2)$

3. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积 (单位: cm^3) 是 （　）



正视图

侧视图


俯视图

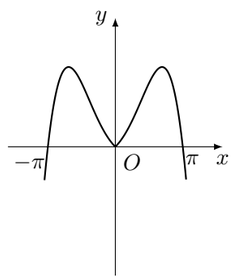
(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

4. 复数 $\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位) 的共轭复数是 （　）

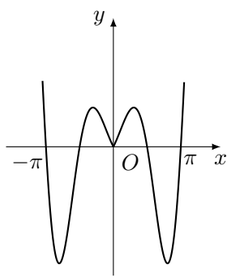
(A) $1+\mathrm{i}$　　(B) $1-\mathrm{i}$　　(C) $-1+\mathrm{i}$　　(D) $-1-\mathrm{i}$

5. 函数 $y=2^{|x|}\sin 2x$ 的图象可能是 （　）

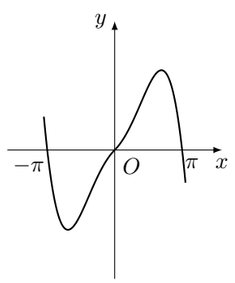
(A)



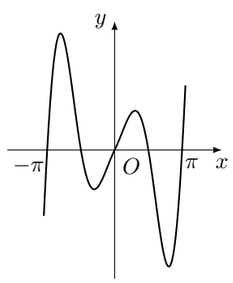
(B)



(C)



(D)



6. 已知平面 α, 直线 m, n 满足 $m\not\subset\alpha$, $n\subset\alpha$, 则“$m\parallel n$”是“$m\parallel\alpha$”的 （　）

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 设 $0<p<1$, 随机变量 ξ 的分布列是

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{1-p}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{p}{2}$

则当 p 在 $(0,1)$ 内增大时, （　）

(A) $D(\xi)$ 减小　　(B) $D(\xi)$ 增大

(C) $D(\xi)$ 先减小后增大　　(D) $D(\xi)$ 先增大后减小

8. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形, 侧棱长均相等, E 是线段 AB 上的点 (不含端点), 设 SE 与 BC 所成的角为 θ_1, SE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ_2, 二面角 $S-AB-C$ 的平面角为 θ_3, 则 （　）

(A) $\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\theta_3$　(B) $\theta_3\leqslant\theta_2\leqslant\theta_1$　(C) $\theta_1\leqslant\theta_3\leqslant\theta_2$　(D) $\theta_2\leqslant\theta_3\leqslant\theta_1$

9. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$ 是平面向量, $\boldsymbol{e}$ 是单位向量. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值是 （　）

(A) $\sqrt{3}-1$　　(B) $\sqrt{3}+1$　　(C) 2　　(D) $2-\sqrt{3}$

10. 已知 a_1, a_2, a_3, a_4 成等比数列, 且 $a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$. 若 $a_1>1$, 则 （　）

(A) $a_1<a_3$, $a_2<a_4$　　(B) $a_1>a_3$, $a_2<a_4$

(C) $a_1<a_3$, $a_2>a_4$　　(D) $a_1>a_3$, $a_2>a_4$

二、填空题

11. 我国古代数学著作《张邱建算经》中记载百鸡问题: “今有鸡翁一, 值钱五; 鸡母一, 值钱三; 鸡雏三, 值钱一. 凡百钱, 买鸡百只, 问鸡翁、母、雏各几何? ”设鸡翁, 鸡母, 鸡雏个数分别为 x, y, z, 则 $\begin{cases}x+y+z=100\\5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100\end{cases}$, 当 $z=81$ 时, $x=$_____, $y=$_____.

12. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\2x+y\leqslant 6\\x+y\geqslant 2\end{cases}$, 则 $z=x+3y$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若 $a=\sqrt{7}$, $b=2$, $A=60^\circ$, 则 $\sin B=$_____, $c=$_____.

14. 二项式 $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式的常数项是_____.

15. 已知 $\lambda\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x-4, & x\geqslant\lambda\\x^2-4x+3, & x<\lambda\end{cases}$, 当 $\lambda=2$ 时, 不等式 $f(x)<0$ 的解集是_____. 若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则 λ 的取值范围是_____.

16. 从 1, 3, 5, 7, 9 中任取 2 个数字, 从 0, 2, 4, 6 中任取 2 个数字, 一共可以组成_____个没有重复数字的四位数. (用数字作答)

17. 已知点 $P(0,1)$, 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=m$ $(m>1)$ 上两点 A, B 满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$, 则当 $m=$_____时, 点 B 横坐标的绝对值最大.

三、解答题

18. 已知角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$.

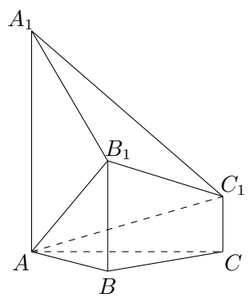
(1) 求 $\sin(\alpha+\pi)$ 的值;

(2) 若角 β 满足 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{13}$, 求 $\cos\beta$ 的值.

19. 如图, 已知多面体 $ABCA_1B_1C_1$, A_1A, B_1B, C_1C 均垂直于平面 ABC, $\angle ABC=120^\circ$, $A_1A=4$, $C_1C=1$, $AB=BC=B_1B=2$.

(1) 证明: $AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$;

(2) 求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值.



20. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$, 且 $a_3+a_4+a_5=28$, a_4+2 是 a_3, a_5 的等差中项. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, 数列 $\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$ 的前 n 项和为 $2n^2+n$.

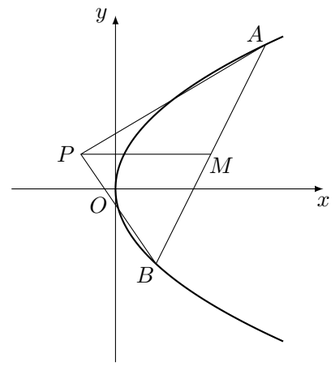
(1) 求 q 的值;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

21. 如图, 已知点 P 是 y 轴左侧 (不含 y 轴) 一点, 抛物线 $C: y^2=4x$ 上存在不同的两点 A, B 满足 PA, PB 的中点均在 C 上.

(1) 设 AB 中点为 M, 证明: PM 垂直于 y 轴;

(2) 若 P 是半椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ $(x<0)$ 上的动点, 求 $\triangle PAB$ 面积的取值范围.



22. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=x_1$, x_2 $(x_1\neq x_2)$ 处导数相等, 证明: $f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$;

(2) 若 $a\leqslant 3-4\ln 2$, 证明: 对于任意 $k>0$, 直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点.

2019 年普通高等学校招生考试（北京卷）

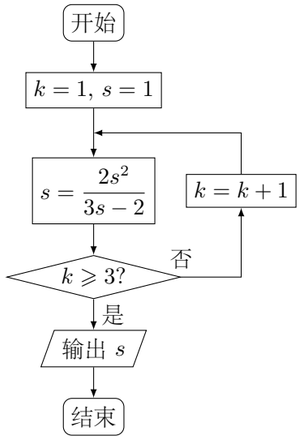
理科数学

一、选择题

1. 已知复数 $z=2+\mathrm{i}$, 则 $z\cdot\overline{z}=$ （　）

(A) $\sqrt{3}$　　(B) $\sqrt{5}$　　(C) 3　　(D) 5

2. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 （　）



(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

3. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\end{cases}$ (t 为参数), 则点 $(1,0)$ 到直线 l 的距离是 （　）

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) $\dfrac{2}{5}$　　(C) $\dfrac{4}{5}$　　(D) $\dfrac{6}{5}$

4. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 则 （　）

(A) $a^2=2b^2$　　(B) $3a^2=4b^2$　　(C) $a=2b$　　(D) $3a=4b$

5. 若 x,y 满足 $|x|\leqslant 1-y$, 且 $y\geqslant -1$, 则 $3x+y$ 的最大值为 （　）

(A) -7　　(B) 1　　(C) 5　　(D) 7

6. 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\dfrac{5}{2}\lg\dfrac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k $(k=1,\ 2)$. 已知太阳的星等是 -26.7, 天狼星的星等是 -1.45, 则太阳与天狼星的亮度的比值为 （　）

(A) $10^{10.1}$　　(B) 10.1　　(C) $\lg 10.1$　　(D) $10^{-10.1}$

7. 设点 A, B, C 不共线, 则“$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角”是“$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|>\left|\overrightarrow{BC}\right|$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

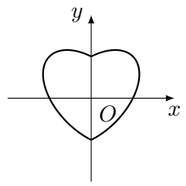
8. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 曲线 $C:x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一 (如图). 给出下列三个结论:

① 曲线 C 恰好经过 6 个整点 (即横、纵坐标均为整数的点);

② 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$;

③ 曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3.

其中, 所有正确结论的序号是 （　）



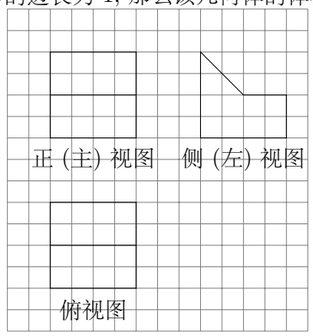
(A) ①　　(B) ②　　(C) ①②　　(D) ①②③

二、填空题

9. 函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的最小正周期是_____.

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_2=-3$, $S_5=-10$, 则 $a_5=$_____, S_n 的最小值为_____.

11. 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为_____.



12. 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

① $l\perp m$;

② $m\parallel\alpha$;

③ $l\perp\alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: _____.

13. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a=$_____; 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则 a 的取值范围是_____.

14. 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.

① 当 $x=10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付_____元;

② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b-c=2$, $\cos B=-\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 b, c 的值;

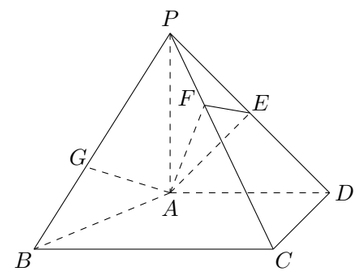
(2) 求 $\sin(B-C)$ 的值.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AD\perp CD$, $AD\parallel BC$, $PA=AD=CD=2$, $BC=3$. E 为 PD 的中点, 点 F 在 PC 上, 且 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$.

(1) 求证: $CD\perp$ 平面 PAD;

(2) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值;

(3) 设点 G 在 PB 上, 且 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$. 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内, 说明理由.



17. 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付方式的使用情况, 从全校学生中随机抽取了 100 人, 发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下:

支付方式 \ 支付金额 (元)	$(0,1000]$	$(1000,2000]$	大于 2000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

(1) 从全校学生中随机抽取 1 人, 估计该学生上个月 A, B 两种支付方式都使用的概率;
(2) 从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人, 以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数, 求 X 的分布列和数学期望;
(3) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用 A 的学生中, 随机抽查 3 人, 发现他们本月的支付金额都大于 2000 元. 根据抽查结果, 能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化? 说明理由.

18. 已知抛物线 C: $x^2=-2py$ 经过点 $(2,-1)$.
(1) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;
(2) 设 O 为原点, 过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M, N, 直线 $y=-1$ 分别交直线 OM, ON 于点 A 和点 B. 求证: 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;
(2) 当 $x\in[-2,4]$ 时, 求证: $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$;
(3) 设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|$ $(a\in\mathbf{R})$, 记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、$\cdots$、第 i_m 项 $(i_1<i_2<\cdots<i_m)$, 若 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$, 则称新数列 a_{i_1}, a_{i_2}, $\cdots$, a_{i_m} 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列. 规定: 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列.
(1) 写出数列 1, 8, 3, 7, 5, 6, 9 的一个长度为 4 的递增子列;
(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0}, 长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0}. 若 $p<q$, 求证: $a_{m_0}<a_{n_0}$;
(3) 设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 且任意两项均不相等. 若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s-1$, 且长度为 s 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个 $(s=1,\ 2,\ \cdots)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2019 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$, $B=\{x\mid x>1\}$, 则 $A\cup B=$ （　）

(A) $(-1,1)$　(B) $(1,2)$　(C) $(-1,+\infty)$　(D) $(1,+\infty)$

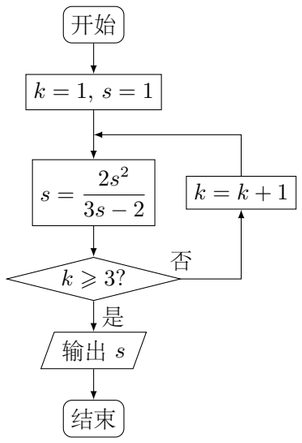
2. 已知复数 $z=2+\mathrm{i}$, 则 $z\cdot\overline{z}=$ （　）

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\sqrt{5}$　(C) 3　(D) 5

3. 下列函数中, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是 （　）

(A) $y=x^{\frac{1}{2}}$　(B) $y=2^{-x}$　(C) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　(D) $y=\dfrac{1}{x}$

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 （　）



(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\,(a>0)$ 的离心率是 $\sqrt{5}$, 则 $a=$ （　）

(A) $\sqrt{6}$　(B) 4　(C) 2　(D) $\dfrac{1}{2}$

6. 设函数 $f(x)=\cos x+b\sin x$ (b 为常数), 则“$b=0$”是“$f(x)$ 为偶函数”的 （　）

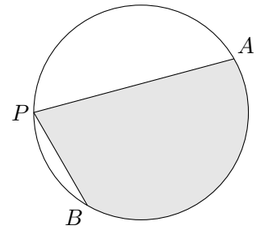
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\dfrac{5}{2}\lg\dfrac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k ($k=1,\ 2$). 已知太阳的星等是 -26.7, 天狼星的星等是 -1.45, 则太阳与天狼星的亮度的比值为 （　）

(A) $10^{10.1}$　(B) 10.1　(C) $\lg 10.1$　(D) $10^{-10.1}$

8. 如图, A, B 是半径为 2 的圆周上的定点, P 为圆周上的动点, $\angle APB$ 是锐角, 大小为 β. 图中阴影区域的面积的最大值为 （　）



(A) $4\beta+4\cos\beta$　(B) $4\beta+4\sin\beta$　(C) $2\beta+2\cos\beta$　(D) $2\beta+2\sin\beta$

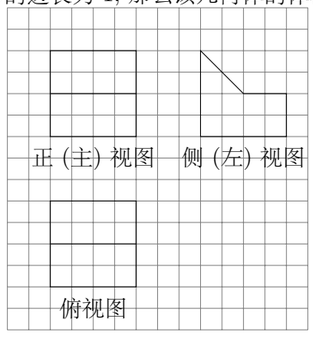
二、填空题

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-4,3)$, $\boldsymbol{b}=(6,m)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$_____.

10. 若 x, y 满足 $\begin{cases}x\leqslant 2\\ y\geqslant -1\\ 4x-3y+1\geqslant 0\end{cases}$, 则 $y-x$ 的最小值为_____, 最大值为_____.

11. 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l. 则以 F 为圆心, 且与 l 相切的圆的方程为_____.

12. 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为_____.



13. 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

① $l\perp m$;

② $m\parallel\alpha$;

③ $l\perp\alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: _____.

14. 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.

① 当 $x=10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付_____元;

② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b-c=2$, $\cos B=-\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 b, c 的值;

(2) 求 $\sin(B+C)$ 的值.

16. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1=-10$, 且 a_2+10, a_3+8, a_4+6 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

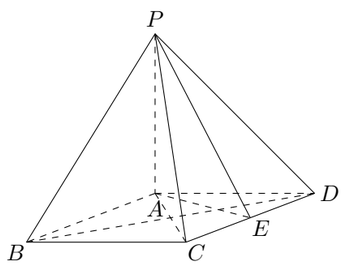
(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 求 S_n 的最小值.

17. 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付方式的使用情况, 从全校所有的 1000 名学生中随机抽取了 100 人, 发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下:

支付方式 \ 支付金额	不大于 2000 元	大于 2000 元
仅使用 A	27 人	3 人
仅使用 B	24 人	1 人

(1) 估计该校学生中上个月 A, B 两种支付方式都使用的人数;
(2) 从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人, 求该学生上个月支付金额大于 2000 元的概率;
(3) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人, 发现他本月的支付金额大于 2000 元. 结合 (2) 的结果, 能否认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化? 说明理由.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 底部 $ABCD$ 为菱形, E 为 CD 的中点.
(1) 求证: $BD\perp$ 平面 PAC;
(2) 若 $\angle ABC=60^\circ$, 求证: 平面 $PAB\perp$ 平面 PAE;
(3) 棱 PB 上是否存在点 F, 使得 $CF\parallel$ 平面 PAE? 说明理由.



19. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 $(1,0)$, 且经过点 $A(0,1)$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 设 O 为原点, 直线 l: $y=kx+t$ $(t\neq\pm1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q, 直线 AP 与 x 轴交于点 M, 直线 AQ 与 x 轴交于点 N, 若 $|OM|\cdot|ON|=2$, 求证: 直线 l 经过定点.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;
(2) 当 $x\in[-2,4]$ 时, 求证: $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$;
(3) 设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|$ $(a\in\mathbf{R})$, 记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

2019 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

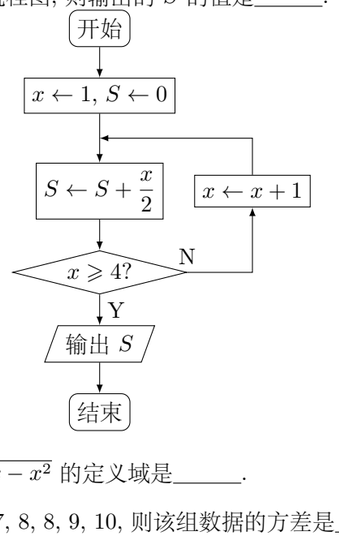
数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,6\}$, $B=\{x\mid x>0, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$_____.

2. 已知复数 $(a+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ 的实部为 0, 其中 i 为虚数单位, 则实数 a 的值是_____.

3. 如图是一个算法流程图, 则输出的 S 的值是_____.



4. 函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是_____.

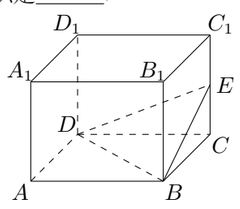
5. 已知一组数据 6, 7, 8, 8, 9, 10, 则该组数据的方差是_____.

6. 从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务, 则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是_____.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$ 经过点 $(3,4)$, 则该双曲线的渐近线方程是_____.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和. 若 $a_2a_5+a_8=0$, $S_9=27$, 则 S_8 的值是_____.

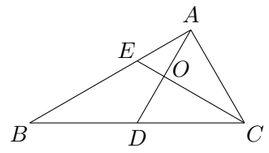
9. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 120, E 为 CC_1 的中点, 则三棱锥 $E-BCD$ 的体积是_____.



10. 在平面直角坐标系 xOy 中, P 是曲线 $y=x+\dfrac{4}{x}$ $(x>0)$ 上的一个动点, 则点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值是_____.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上, 且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-\mathrm{e},-1)$ (e 为自然对数的底数), 则点 A 的坐标是_____.

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, $BE=2EA$, AD 与 CE 交于点 O. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$, 则 $\dfrac{AB}{AC}$ 的值是_____.



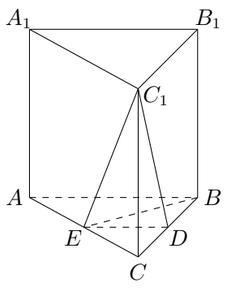
13. 已知 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{2}{3}$, 则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值是_____.

14. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个周期函数, $f(x)$ 的周期为 4, $g(x)$ 的周期为 2, 且 $f(x)$ 是奇函数. 当 $x\in(0,2]$ 时, $f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$, $g(x)=\begin{cases}k(x+2), & 0<x\leqslant 1\\ -\dfrac{1}{2}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$, 其中 $k>0$. 若在区间 $(0,9]$ 上, 关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 8 个不同的实数根, 则 k 的取值范围是_____.

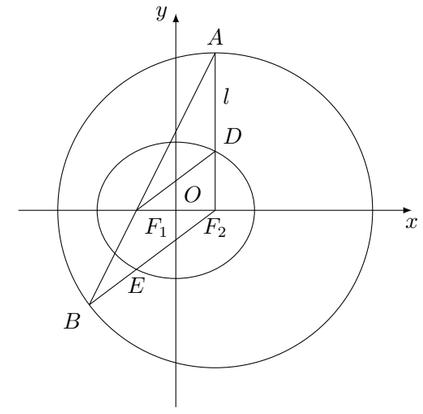
二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c.
(1) 若 $a=3c$, $b=\sqrt{2}$, $\cos B=\dfrac{2}{3}$, 求 c 的值;
(2) 若 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$, 求 $\sin\left(B+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的值.

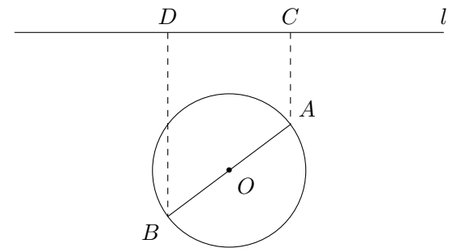
16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 BC, AC 的中点, $AB=BC$. 求证:
(1) $A_1B_1\parallel$ 平面 DEC_1;
(2) $BE\perp C_1E$.



17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$. 过 F_2 作 x 轴的垂线 l, 在 x 轴的上方, l 与圆 F_2: $(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A, 与椭圆 C 交于点 D. 连接 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B, 连接 BF_2 交椭圆 C 于点 E, 连接 DF_1. 已知 $DF_1=\dfrac{5}{2}$.
(1) 求椭圆 C 的标准方程;
(2) 求点 E 的坐标.



18. 如图, 一个湖的边界是圆心为 O 的圆, 湖的一侧有一条直线型公路 l, 湖上有桥 AB (AB 是圆 O 的直径). 规划在公路 l 上选两个点 P, Q, 并修建两段直线型道路 PB, QA. 规划要求: 线段 PB, QA 上的所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径. 已知点 A, B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD (C, D 为垂足), 测得 $AB=10$, $AC=6$, $BD=12$ (单位: 百米).
(1) 若道路 PB 与桥 AB 垂直, 求道路 PB 的长;
(2) 在规划要求下, P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处? 并说明理由;
(3) 在规划要求下, 若道路 PB 和 QA 的长度均为 d (单位: 百米). 求当 d 最小时, P, Q 两点间的距离.



19. 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, a, b, $c\in\mathbf{R}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 若 $a=b=c$, $f(4)=8$, 求 a 的值;

(2) 若 $a\neq b$, $b=c$, 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中, 求 $f(x)$ 的极小值;

(3) 若 $a=0$, $0<b\leqslant 1$, $c=1$, 且 $f(x)$ 的极大值为 M, 求证: $M\leqslant\dfrac{4}{27}$.

20. 定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“$M-$ 数列”.

(1) 已知等比数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足: $a_2a_4=a_5$, $a_3-4a_2+4a_1=0$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为“$M-$ 数列”;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足: $b_1=1$, $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$, 其中 S_n 为数列 b_n 的前 n 项和.

① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

② 设 m 为正整数, 若存在“$M-$ 数列”$\{c_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 对任意正整数 k, 当 $k\leqslant m$ 时, 都有 $c_k\leqslant b_k\leqslant c_{k+1}$ 成立, 求 m 的最大值.

21. 三选二.

【A】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^2$;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

【B】在极坐标系中, 已知两点 $A\left(3,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $B\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 直线 l 的方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=3$.

(1) 求 A, B 两点间的距离;

(2) 求点 B 到直线 l 的距离.

【C】设 $x\in\mathbf{R}$, 解不等式 $|x|+|2x-1|>2$.

22. 设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, $n\geqslant 4$, $n\in\mathbf{N}^*$. 已知 $a_3^2=2a_2a_4$.

(1) 求 n 的值;

(2) 设 $\left(1+\sqrt{3}\right)^n=a+b\sqrt{3}$, 其中 a, $b\in\mathbf{N}^*$, 求 a^2-3b^2 的值.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设点集 $A_n=\{(0,0),(1,0),(2,0),\cdots,(n,0)\}$, $B_n=\{(0,1),(n,1)\}$, $C_n=\{(0,2),(1,2),(2,2),\cdots,(n,2)\}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 令 $M_n=A_n\cup B_n\cup C_n$. 从集合 M_n 中任取两个不同的点, 用随机变量 X 表示它们之间的距离.

(1) 当 $n=1$ 时, 求 X 的概率分布;

(2) 对给定的正整数 n $(n\geqslant 3)$, 求概率 $P(X\leqslant n)$ (用 n 表示).

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\,|-4<x<2\}$, $N=\{x\,|x^2-x-6<0\}$, 则 $M\cap N=$ （　）

(A) $\{x\,|-4<x<3\}$　(B) $\{x\,|-4<x<-2\}$

(C) $\{x\,|-2<x<2\}$　(D) $\{x\,|2<x<3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$, z 在复平面内对应的点为 (x,y), 则 （　）

(A) $(x+1)^2+y^2=1$　(B) $(x-1)^2+y^2=1$

(C) $x^2+(y-1)^2=1$　(D) $x^2+(y+1)^2=1$

3. 已知 $a=\log_2 0.2$, $b=2^{0.2}$, $c=0.2^{0.3}$, 则 （　）

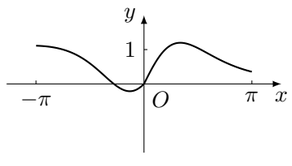
(A) $a<b<c$　(B) $a<c<b$　(C) $c<a<b$　(D) $b<c<a$

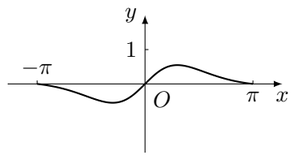
4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是 （　）

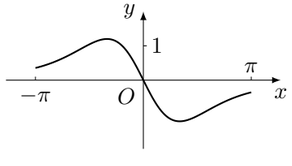


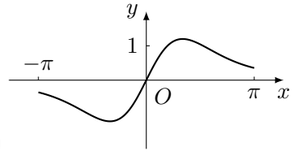
(A) 165 cm　(B) 175 cm　(C) 185 cm　(D) 190 cm

5. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为 （　）

(A)


(B)


(C)


(D)


6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是 （　）

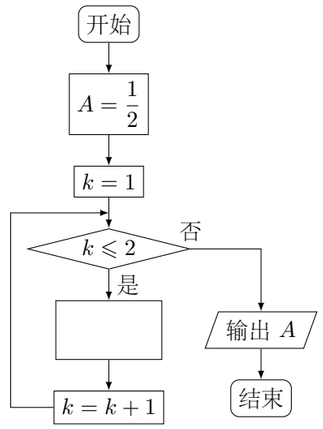


(A) $\frac{5}{16}$　(B) $\frac{11}{32}$　(C) $\frac{21}{32}$　(D) $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$, 且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 （　）

(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{3}$　(C) $\frac{2\pi}{3}$　(D) $\frac{5\pi}{6}$

8. 如图是求 $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入 （　）



(A) $A=\frac{1}{2+A}$　(B) $A=2+\frac{1}{A}$　(C) $A=\frac{1}{1+2A}$　(D) $A=1+\frac{1}{2A}$

9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4=0$, $a_5=5$, 则 （　）

(A) $a_n=2n-5$　(B) $a_n=3n-10$　(C) $S_n=2n^2-8n$(D) $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$, 则 C 的方程为 （　）

(A) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　(B) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　(C) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　(D) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

11. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论:

① $f(x)$ 是偶函数;

② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增;

③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点;

④ $f(x)$ 的最大值为 2.

其中所有正确结论的编号是 （　）

(A) ①②④　(B) ②④　(C) ①④　(D) ①③

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF=90^\circ$, 则球 O 的体积为 （　）

(A) $8\sqrt{6}\pi$　(B) $4\sqrt{6}\pi$　(C) $2\sqrt{6}\pi$　(D) $\sqrt{6}\pi$

二、填空题

13. 曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_4^2=a_6$, 则 S_5=_____.

15. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以 4 : 1 获胜的概率是_____.

16. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$, 则 C 的离心率为_____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

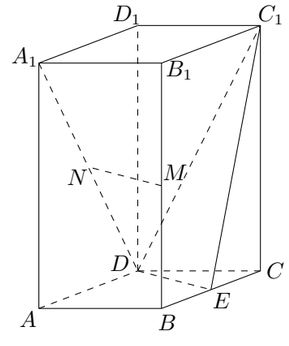
(1) 求 A;

(2) 若 $\sqrt{2}a+b=2c$, 求 $\sin C$.

18. 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

(1) 证明: $MN\parallel$ 平面 C_1DE;

(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.



19. 已知抛物线 C: $y^2=3x$ 的焦点为 F, 斜率为 $\dfrac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B, 与 x 轴的交点为 P.

(1) 若 $|AF|+|BF|=4$, 求 l 的方程;

(2) 若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$, 求 $|AB|$.

20. 已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21. 为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β, 一轮试验中甲药的得分记为 X.

(1) 求 X 的分布列;

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分, p_i $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0=0$, $p_8=1$, $p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$, 其中 $a=P(X=-1)$, $b=P(X=0)$, $c=P(X=1)$. 假设 $\alpha=0.5$, $\beta=0.8$.

① 证明: $\{p_{i+1}-p_i\}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ 为等比数列;

② 求 p_4, 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ y=\dfrac{4t}{1+t^2}\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. 已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc=1$. 证明:

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$;

(2) $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$.

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 设 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$, 则 $|z|=$ （　）

(A) 2　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 1

2. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A=\{2,3,4,5\}$, $B=\{2,3,6,7\}$, 则 $B\cap \complement_U A=$ （　）

(A) $\{1,6\}$　　(B) $\{1,7\}$　　(C) $\{6,7\}$　　(D) $\{1,6,7\}$

3. 已知 $a=\log_2 0.2$, $b=2^{0.2}$, $c=0.2^{0.3}$, 则 （　）

(A) $a<b<c$　　(B) $a<c<b$　　(C) $c<a<b$　　(D) $b<c<a$

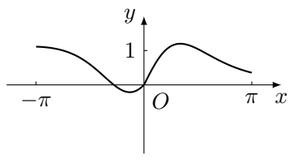
4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是 （　）



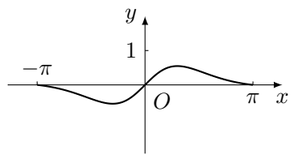
(A) 165 cm　　(B) 175 cm　　(C) 185 cm　　(D) 190 cm

5. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为 （　）

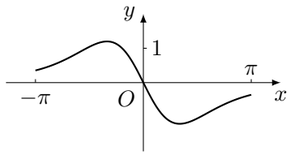
(A)



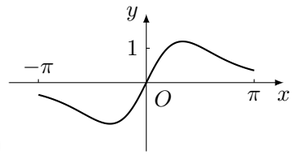
(B)



(C)



(D)



6. 某学校为了解 1000 名新生的身体素质, 将这些学生编号为 1, 2, $\cdots$, 1000, 从这些新生中用系统抽样方法等距抽取 100 名学生进行体质测验. 若 46 号学生被抽到, 则下面 4 名学生中被抽到的是 （　）

(A) 8 号学生　　(B) 200 号学生　　(C) 616 号学生　　(D) 815 号学生

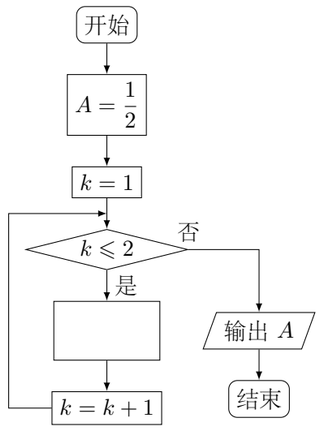
7. $\tan 255^\circ=$ （　）

(A) $-2-\sqrt{3}$　　(B) $-2+\sqrt{3}$　　(C) $2-\sqrt{3}$　　(D) $2+\sqrt{3}$

8. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$, 且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{5\pi}{6}$

9. 如图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入 （　）



(A) $A=\dfrac{1}{2+A}$　　(B) $A=2+\dfrac{1}{A}$　　(C) $A=\dfrac{1}{1+2A}$　　(D) $A=1+\dfrac{1}{2A}$

10. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 130°, 则 C 的离心率为 （　）

(A) $2\sin 40^\circ$　　(B) $2\cos 40^\circ$　　(C) $\dfrac{1}{\sin 50^\circ}$　　(D) $\dfrac{1}{\cos 50^\circ}$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $a\sin A-b\sin B=4c\sin C$, $\cos A=-\dfrac{1}{4}$, 则 $\dfrac{b}{c}=$ （　）

(A) 6　　(B) 5　　(C) 4　　(D) 3

12. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$, 则 C 的方程为 （　）

(A) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　(B) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　(C) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　(D) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

二、填空题

13. 曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=1$, $S_3=\dfrac{3}{4}$, 则 $S_4=$_____.

15. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{2}\right)-3\cos x$ 的最小值为_____.

16. 已知 $\angle ACB=90^\circ$, P 为平面 ABC 外一点, $PC=2$, 点 P 到 $\angle ACB$ 两边 AC, BC 的距离均为 $\sqrt{3}$, 那么 P 到平面 ABC 的距离为_____.

三、解答题

17. 某商场为提高服务质量, 随机调查了 50 名男顾客和 50 名女顾客, 每位顾客对该商场的服务给出满意或不满意的评价, 得到如表列联表:

	满意	不满意
男顾客	40	10
女顾客	30	20

(1) 分别估计男、女顾客对该商场服务满意的概率;

(2) 能否有 95% 的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异?

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_9=-a_5$.

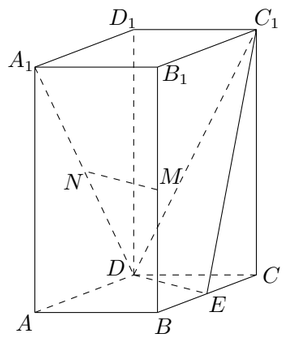
(1) 若 $a_3=4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1>0$, 求使得 $S_n\geqslant a_n$ 的 n 的取值范围.

19. 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

(1) 证明: $MN\parallel$ 平面 C_1DE;

(2) 求点 C 到平面 C_1DE 的距离.



20. 已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

(1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点;

(2) 若 $x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)\geqslant ax$, 求 a 的取值范围.

21. 已知点 A, B 关于坐标原点 O 对称, $|AB|=4$, $\odot M$ 过点 A, B 且与直线 $x+2=0$ 相切.

(1) 若 A 在直线 $x+y=0$ 上, 求 $\odot M$ 的半径;

(2) 是否存在定点 P, 使得当 A 运动时, $|MA|-|MP|$ 为定值? 并说明理由.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ y=\dfrac{4t}{1+t^2}\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. 已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc=1$. 证明:

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$;

(2) $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$.

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6>0\}$, $B=\{x\mid x-1<0\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $(-\infty,1)$ (B) $(-2,1)$ (C) $(-3,-1)$ (D) $(3,+\infty)$

2. 设 $z=-3+2\mathrm{i}$, 则在复平面内 $\bar{z}$ 对应的点位于 （ ）

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

3. 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$, $\overrightarrow{AC}=(3,t)$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=1$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ （ ）

(A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3

4. 2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆, 我国航天事业取得又一重大成就, 实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系. 为解决这个问题, 发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”, 鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行. L_2 点是平衡点, 位于地月连线的延长线上. 设地球质量为 M_1, 月球质量为 M_2, 地月距离为 R, L_2 点到月球的距离为 r, 根据牛顿运动定律和万有引力定律, r 满足方程: $\dfrac{M_1}{(R+r)^2}+\dfrac{M_2}{r^2}=(R+r)\dfrac{M_1}{R^3}$. 设 $\alpha=\dfrac{r}{R}$, 由于 α 的值很小, 因此在近似计算中 $\dfrac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$, 则 r 的近似值为 （ ）

(A) $\sqrt{\dfrac{M_2}{M_1}}R$ (B) $\sqrt{\dfrac{M_2}{2M_1}}R$ (C) $\sqrt[3]{\dfrac{3M_2}{M_1}}R$ (D) $\sqrt[3]{\dfrac{M_2}{3M_1}}R$

5. 演讲比赛共有 9 位评委分别给出某选手的原始评分, 评定该选手的成绩时, 从 9 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分, 得到 7 个有效评分. 7 个有效评分与 9 个原始评分相比, 不变的数字特征是 （ ）

(A) 中位数 (B) 平均数 (C) 方差 (D) 极差

6. 若 $a>b$, 则 （ ）

(A) $\ln(a-b)>0$ (B) $3^a<3^b$ (C) $a^3-b^3>0$ (D) $|a|>|b|$

7. 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha\parallel\beta$ 的充要条件是 （ ）

(A) α 内有无数条直线与 β 平行 (B) α 内有两条相交直线与 β 平行

(C) α, β 平行于同一条直线 (D) α, β 垂直于同一平面

8. 若抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点是椭圆 $\dfrac{x^2}{3p}+\dfrac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点, 则 $p=$ （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8

9. 下列函数中, 以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增的是 （ ）

(A) $f(x)=|\cos 2x|$ (B) $f(x)=|\sin 2x|$

(C) $f(x)=\cos|x|$ (D) $f(x)=\sin|x|$

10. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$, 则 $\sin\alpha=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

11. 设 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ|=|OF|$, 则 C 的离心率为 （ ）

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+1)=2f(x)$, 且当 $x\in(0,1]$ 时, $f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,m]$, 都有 $f(x)\geqslant-\dfrac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$ (B) $\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]$ (C) $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$ (D) $\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]$

二、填空题

13. 我国高铁发展迅速, 技术先进. 经统计, 在经停某站的高铁列车中, 有 10 个车次的正点率为 0.97, 有 20 个车次的正点率为 0.98, 有 10 个车次的正点率为 0.99, 则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为_____.

14. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x<0$ 时, $f(x)=-\mathrm{e}^{ax}$. 若 $f(\ln 2)=8$, 则 $a=$_____.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 若 $b=6$, $a=2c$, $B=\dfrac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

16. 中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有_____个面, 其棱长为_____.



图 1

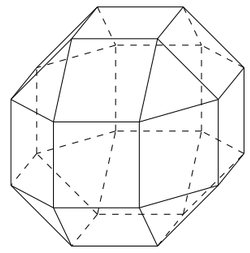


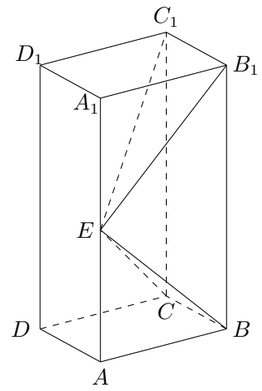
图 2

三、解答题

17. 如图, 长方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE\perp EC_1$.

(1) 证明: $BE\perp$ 平面 EB_1C_1;

(2) 若 $AE=A_1E$, 求二面角 B–EC–C_1 的正弦值.



18. 11 分制乒乓球比赛, 每赢一球得 1 分, 当某局打成 10 : 10 平后, 每球交换发球权, 先多得 2 分的一方获胜, 该局比赛结束. 甲、乙两位同学进行单打比赛, 假设甲发球时甲得分的概率为 0.5, 乙发球时甲得分的概率为 0.4, 各球的结果相互独立. 在某局双方 10 : 10 平后, 甲先发球, 两人又打了 X 个球该局比赛结束.

(1) 求 $P(X=2)$;

(2) 求事件“$X=4$ 且甲获胜”的概率.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$, $b_1=0$, $4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$, $4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.
(1) 证明: $\{a_n+b_n\}$ 是等比数列, $\{a_n-b_n\}$ 是等差数列;
(2) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

20. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点;
(2) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点, 证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线.

21. 已知点 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, 动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$. 记 M 的轨迹为曲线 C.
(1) 求 C 的方程, 并说明 C 是什么曲线;
(2) 过坐标原点的直线交 C 于 P, Q 两点, 点 P 在第一象限, $PE\perp x$ 轴, 垂足为 E, 连接 QE 并延长交 C 于点 G.
① 证明: $\triangle PQG$ 是直角三角形;
② 求 $\triangle PQG$ 面积的最大值.

22. 在极坐标系中, O 为极点, 点 $M(\rho_0,\theta_0)$ $(\rho_0>0)$ 在曲线 $C:\rho=4\sin\theta$ 上, 直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直, 垂足为 P.
(1) 当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$ 时, 求 ρ_0 及 l 的极坐标方程;
(2) 当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时, 求 P 点轨迹的极坐标方程.

23. 已知 $f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)<0$ 的解集;
(2) 若 $x\in(-\infty,1]$ 时, $f(x)<0$, 求 a 的取值范围.

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x>-1\}$, $B=\{x\mid x<2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $(-1,+\infty)$　(B) $(-\infty,2)$　(C) $(-1,2)$　(D) $\varnothing$

2. 设 $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$, 则 $\overline{z}=$ （　）

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $-1+2\mathrm{i}$　(C) $1-2\mathrm{i}$　(D) $-1-2\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$, $\boldsymbol{b}=(3,2)$, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$ （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) 2　(C) $5\sqrt{2}$　(D) 50

4. 生物实验室有 5 只兔子, 其中只有 3 只测量过某项指标, 若从这 5 只兔子中随机取出 3 只, 则恰有 2 只测量过该指标的概率为 （　）

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{1}{5}$

5. 在“一带一路”知识测验后, 甲、乙、丙三人对成绩进行预测.
甲: 我的成绩比乙高.
乙: 丙的成绩比我和甲的都高.
丙: 我的成绩比乙高.
成绩公布后, 三人成绩互不相同且只有一个人预测正确, 那么三人按成绩由高到低的次序为 （　）

(A) 甲、乙、丙　(B) 乙、甲、丙　(C) 丙、乙、甲　(D) 甲、丙、乙

6. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^x-1$, 则当 $x<0$ 时, $f(x)=$（　）

(A) $\mathrm{e}^{-x}-1$　(B) $\mathrm{e}^{-x}+1$　(C) $-\mathrm{e}^{-x}-1$　(D) $-\mathrm{e}^{-x}+1$

7. 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha\parallel\beta$ 的充要条件是 （　）

(A) α 内有无数条直线与 β 平行　(B) α 内有两条相交直线与 β 平行
(C) α, β 平行于同一条直线　(D) α, β 垂直于同一平面

8. 若 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 两个相邻的极值点, 则 $\omega=$ （　）

(A) 2　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) 1　(D) $\dfrac{1}{2}$

9. 若抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点是椭圆 $\dfrac{x^2}{3p}+\dfrac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点, 则 $p=$ （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 8

10. 曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi,-1)$ 处的切线方程为 （　）

(A) $x-y-\pi-1=0$　(B) $2x-y-2\pi-1=0$
(C) $2x+y-2\pi+1=0$　(D) $x+y-\pi+1=0$

11. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$, 则 $\sin\alpha=$ （　）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 设 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ|=|OF|$, 则 C 的离心率为 （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) $\sqrt{5}$

二、填空题

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-6\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\\ y-2\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-y$ 的最大值是_____.

14. 我国高铁发展迅速, 技术先进. 经统计, 在经停某站的高铁列车中, 有 10 个车次的正点率为 0.97, 有 20 个车次的正点率为 0.98, 有 10 个车次的正点率为 0.99, 则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为_____.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $b\sin A+a\cos B=0$, 则 $B=$_____.

16. 中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有_____个面, 其棱长为_____.



图 1

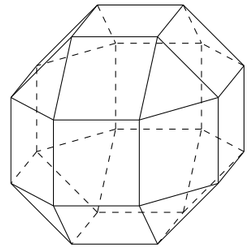
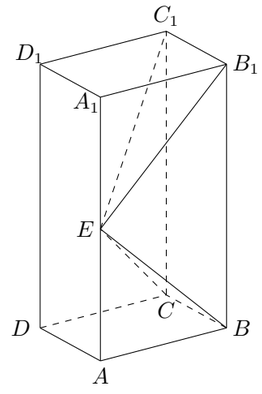


图 2

三、解答题

17. 如图, 长方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE\perp EC_1$.
(1) 证明: $BE\perp$ 平面 EB_1C_1;
(2) 若 $AE=A_1E$, $AB=3$, 求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积.



18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $a_1=2$, $a_3=2a_2+16$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n=\log_2 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. 某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况, 随机调查了 100 个企业, 得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率 y 的频数分布表.

y 的分组	$[-0.20,0)$	$[0,0.20)$	$[0.20,0.40)$	$[0.40,0.60)$	$[0.60,0.80)$
企业数	2	24	53	14	7

(1) 分别估计这类企业中产值增长率不低于 40% 的企业比例、产值负增长的企业比例;
(2) 求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表). (精确到 0.01)
附: $\sqrt{74} \approx 8.602$.

20. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的两个焦点, P 为 C 上一点, O 为坐标原点.
(1) 若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形, 求 C 的离心率;
(2) 如果存在点 P, 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 16, 求 b 的值和 a 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$. 证明:
(1) $f(x)$ 存在唯一的极值点;
(2) $f(x)=0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

22. 在极坐标系中, O 为极点, 点 $M(\rho_0,\theta_0)$ $(\rho_0>0)$ 在曲线 $C: \rho=4\sin\theta$ 上, 直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直, 垂足为 P.
(1) 当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$ 时, 求 ρ_0 及 l 的极坐标方程;
(2) 当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时, 求 P 点轨迹的极坐标方程.

23. 已知 $f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)<0$ 的解集;
(2) 若 $x\in(-\infty,1]$ 时, $f(x)<0$, 求 a 的取值范围.

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x\,|x^2\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{-1,0,1\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{-1,1\}$ (D) $\{0,1,2\}$

2. 若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$, 则 $z=$ （ ）

(A) $-1-\mathrm{i}$ (B) $-1+\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $1+\mathrm{i}$

3. 《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝, 并称为中国古典小说四大名著. 某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况, 随机调查了 100 位学生, 其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位, 阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位, 阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位, 则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为 （ ）

(A) 0.5 (B) 0.6 (C) 0.7 (D) 0.8

4. $(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为 （ ）

(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24

5. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项为和为 15, 且 $a_5=3a_3+4a_1$, 则 $a_3=$ （ ）

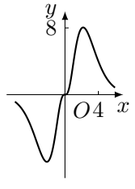
(A) 16 (B) 8 (C) 4 (D) 2

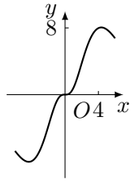
6. 已知曲线 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $(1,a\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y=2x+b$, 则（ ）

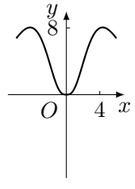
(A) $a=\mathrm{e}$, $b=-1$ (B) $a=\mathrm{e}$, $b=1$

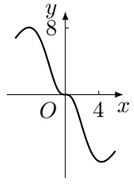
(C) $a=\mathrm{e}^{-1}$, $b=1$ (D) $a=\mathrm{e}^{-1}$, $b=-1$

7. 函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图象大致为 （ ）

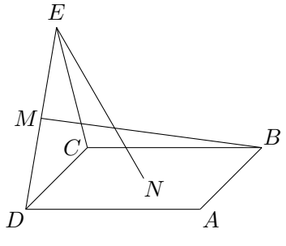
(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

8. 如图, 点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心, $\triangle ECD$ 为正三角形, 平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$, M 是线段 ED 的中点, 则 （ ）



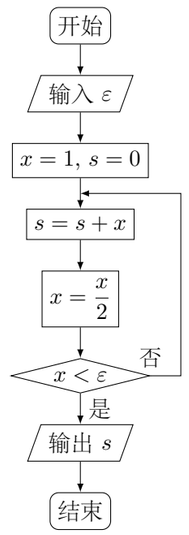
(A) $BM=EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线

(B) $BM\neq EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线

(C) $BM=EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

(D) $BM\neq EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 ε 为 0.01, 则输出 s 的值等于 （ ）



(A) $2-\dfrac{1}{2^4}$ (B) $2-\dfrac{1}{2^5}$ (C) $2-\dfrac{1}{2^6}$ (D) $2-\dfrac{1}{2^7}$

10. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为 F, 为点 P 在 C 的一条渐近线上, O 为坐标原点, 若 $|PO|=|PF|$, 则 $\triangle PFO$ 的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $3\sqrt{2}$

11. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递减, 则 （ ）

(A) $f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$

(B) $f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

(C) $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$

(D) $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$

12. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ $(\omega>0)$, 已知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 5 个零点. 下述四个结论:

① $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点;

② $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点;

③ $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{10})$ 单调递增;

④ ω 的取值范围是 $\left[\dfrac{12}{5},\dfrac{29}{10}\right)$.

其中所有正确结论的编号是 （ ）

(A) ①④ (B) ②③ (C) ①②③ (D) ①③④

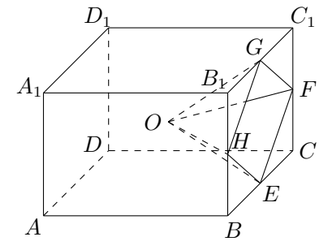
二、填空题

13. 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为单位向量, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 若 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\sqrt{5}\boldsymbol{b}$, 则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$_____.

14. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1\neq 0$, $a_2=3a_1$, 则 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=$_____.

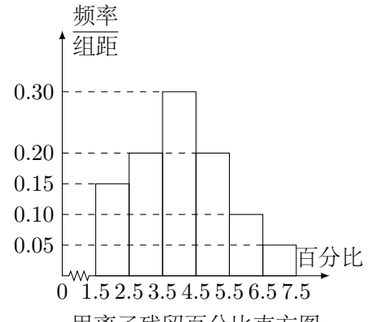
15. 设 F_1, F_2 为椭圆 C: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点, M 为 C 上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形, 则 M 的坐标为_____.

16. 学生到工厂劳动实践, 利用 3D 打印技术制作模型. 如图, 该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 O–$EFGH$ 后所得的几何体, 其中 O 为长方体的中心, E, F, G, H 分别为所在棱的中点, $AB=BC=6$ cm, $AA_1=4$ cm, 3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm^3, 不考虑打印损耗, 制作该模型所需原料的质量为_____g.

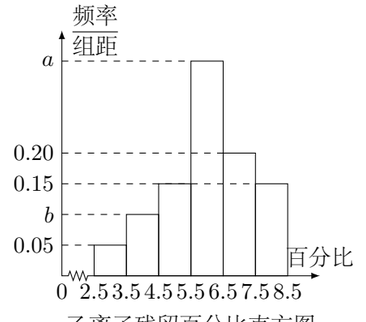


三、解答题

17. 为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度, 进行如下试验: 将 200 只小鼠随机分成 A, B 两组, 每组 100 只, 其中 A 组小鼠给服甲离子溶液, B 组小鼠给服乙离子溶液. 每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同. 经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比. 根据试验数据分别得到如下直方图:



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记 C 为事件: “乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”, 根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70.

(1) 求乙离子残留百分比直方图中 a, b 的值;

(2) 分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表).

18. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$.
(1) 求 B;
(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19. 图 1 是由矩形 $ADEB$, Rt$\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形, 其中 $AB=1$, $BE=BF=2$, $\angle FBC=60^\circ$. 将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合, 连接 DG, 如图 2.
(1) 证明: 图 2 中的 A, C, G, D 四点共面, 且平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$;
(2) 求图 2 中的二面角 $B-CG-A$ 的大小.

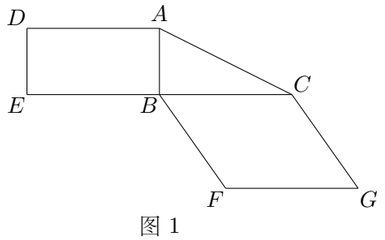


图 1

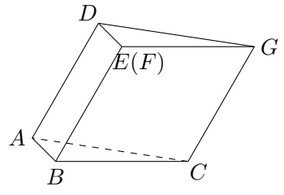
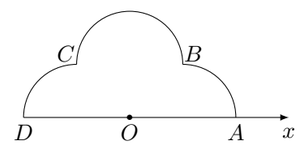


图 2

20. 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 是否存在 a, b, 使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小为 -1 且最大值为 1? 若存在, 求出 a, b 的所有值; 若不存在, 说明理由.

21. 已知曲线 C: $y=\dfrac{x^2}{2}$, D 为直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上的动点, 过 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B.
(1) 证明: 直线 AB 过定点;
(2) 若以 $E\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求四边形 $ADBE$ 的面积.

22. 如图, 在极坐标系 Ox 中, $A(2,0)$, $B\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $D(2,\pi)$, 弧 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1,0)$, $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $(1,\pi)$, 曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$, 曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$, 曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$.
(1) 分别写出 M_1, M_2, M_3 的极坐标方程;
(2) 曲线 M 由 M_1, M_2, M_3 构成, 若点 P 在 M 上, 且 $|OP|=\sqrt{3}$, 求 P 的极坐标.



23. 设 x, y, $z\in\mathbf{R}$, 且 $x+y+z=1$.
(1) 求 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值;
(2) 若 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\dfrac{1}{3}$ 成立, 证明: $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$.

2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x\,|x^2\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{-1,0,1\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{-1,1\}$ (D) $\{0,1,2\}$

2. 若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$, 则 $z=$ （ ）

(A) $-1-\mathrm{i}$ (B) $-1+\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $1+\mathrm{i}$

3. 两位男同学和两位女同学随机排成一列, 则两位女同学相邻的概率是（ ）

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

4. 《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝, 并称为中国古典小说四大名著. 某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况, 随机调查了 100 位学生, 其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位, 阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位, 阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位, 则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为 （ ）

(A) 0.5 (B) 0.6 (C) 0.7 (D) 0.8

5. 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在 $[0,2\pi]$ 的零点个数为 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

6. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15, 且 $a_5=3a_3+4a_1$, 则 $a_3=$ （ ）

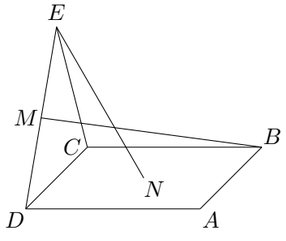
(A) 16 (B) 8 (C) 4 (D) 2

7. 已知曲线 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $(1,a\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y=2x+b$, 则（ ）

(A) $a=\mathrm{e}$, $b=-1$ (B) $a=\mathrm{e}$, $b=1$

(C) $a=\mathrm{e}^{-1}$, $b=1$ (D) $a=\mathrm{e}^{-1}$, $b=-1$

8. 如图, 点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心, $\triangle ECD$ 为正三角形, 平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$, M 是线段 ED 的中点, 则 （ ）



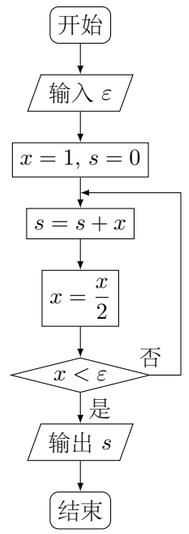
(A) $BM=EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线

(B) $BM\neq EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线

(C) $BM=EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

(D) $BM\neq EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

9. 执行如图的程序框图, 如果输入的 ε 为 0.01, 则输出 s 的值等于 （ ）



(A) $2-\dfrac{1}{2^4}$ (B) $2-\dfrac{1}{2^5}$ (C) $2-\dfrac{1}{2^6}$ (D) $2-\dfrac{1}{2^7}$

10. 已知 F 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的一个焦点, 点 P 在 C 上, O 为坐标原点, 若 $|OP|=|OF|$, 则 $\triangle OPF$ 的面积为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{5}{2}$ (C) $\dfrac{7}{2}$ (D) $\dfrac{9}{2}$

11. 记不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 6\\ 2x-y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域为 D. 命题 $p:\exists(x,y)\in D$, $2x+y\geqslant 9$; 命题 $q:\forall(x,y)\in D$, $2x+y\leqslant 12$. 下面给出了四个命题:

① $p\vee q$; ② $\neg p\vee q$; ③ $p\wedge\neg q$; ④ $\neg p\wedge\neg q$.

这四个命题中, 所有真命题的编号是 （ ）

(A) ①③ (B) ①② (C) ②③ (D) ③④

12. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递减, 则 （ ）

(A) $f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$

(B) $f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

(C) $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$

(D) $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$

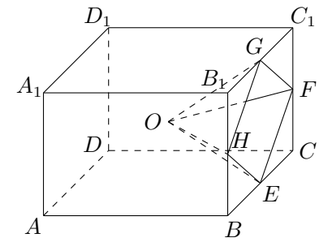
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,2)$, $\boldsymbol{b}=(-8,6)$, 则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$_____.

14. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3=5$, $a_7=13$, 则 $S_{10}=$_____.

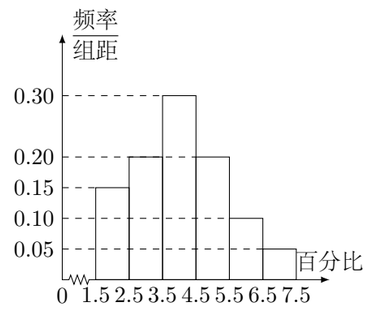
15. 设 F_1, F_2 为椭圆 C: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点, M 为 C 上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形, 则 M 的坐标为_____.

16. 学生到工厂劳动实践, 利用 3D 打印技术制作模型. 如图, 该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 O–$EFGH$ 后所得的几何体, 其中 O 为长方体的中心, E, F, G, H 分别为所在棱的中点, $AB=BC=6$ cm, $AA_1=4$ cm, 3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm^3, 不考虑打印损耗, 制作该模型所需原料的质量为_____g.

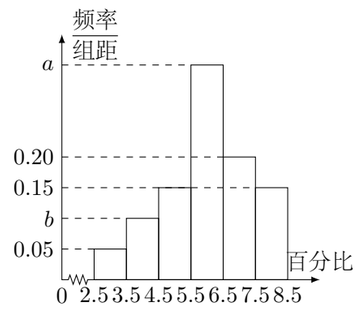


三、解答题

17. 为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度, 进行如下试验: 将 200 只小鼠随机分成 A, B 两组, 每组 100 只, 其中 A 组小鼠给服甲离子溶液, B 组小鼠给服乙离子溶液. 每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同. 经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比. 根据试验数据分别得到如下直方图:



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记 C 为事件: “乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”, 根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70.

(1) 求乙离子残留百分比直方图中 a, b 的值;

(2) 分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表).

18. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$.
(1) 求 B;
(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19. 图 1 是由矩形 $ADEB$, Rt$\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形, 其中 $AB=1$, $BE=BF=2$, $\angle FBC=60^\circ$. 将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合, 连接 DG, 如图 2.
(1) 证明: 图 2 中的 A, C, G, D 四点共面, 且平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$;
(2) 求图 2 中的四边形 $ACGD$ 的面积.

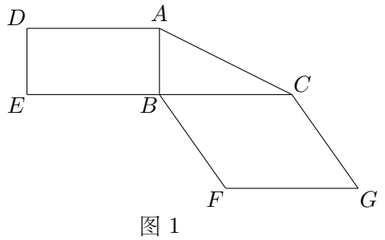


图 1

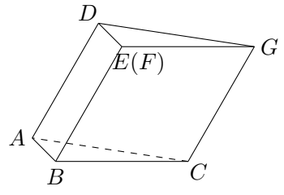
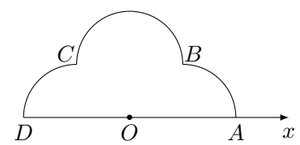


图 2

20. 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+2$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $0<a<3$ 时, 记 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 求 $M-m$ 的取值范围.

21. 已知曲线 C: $y=\dfrac{x^2}{2}$, D 为直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上的动点, 过 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B.
(1) 证明: 直线 AB 过定点;
(2) 若以 $E\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求该圆的方程.

22. 如图, 在极坐标系 Ox 中, $A(2,0)$, $B\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $D(2,\pi)$, 弧 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1,0)$, $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $(1,\pi)$, 曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$, 曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$, 曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$.
(1) 分别写出 M_1, M_2, M_3 的极坐标方程;
(2) 曲线 M 由 M_1, M_2, M_3 构成, 若点 P 在 M 上, 且 $|OP|=\sqrt{3}$, 求 P 的极坐标.



23. 设 x, y, $z\in\mathbf{R}$, 且 $x+y+z=1$.
(1) 求 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值;
(2) 若 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\dfrac{1}{3}$ 成立, 证明: $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$.

2019 年普通高等学校招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=(-\infty,3)$, $B=(2,+\infty)$, 则 $A\cap B=$_____.

2. 已知 $z\in\mathbf{C}$ 且满足 $\dfrac{1}{z-5}=\mathrm{i}$, 求 $z=$_____.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,1,0)$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为_____.

4. 已知二项式 $(2x+1)^5$, 则展开式中含 x^2 项的系数为_____.

5. 已知 x、y 满足 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 2\end{cases}$, 求 $z=2x-3y$ 的最小值为_____.

6. 已知函数 $f(x)$ 周期为 1, 且当 $0<x\leqslant 1$ 时, $f(x)=-\log_2 x$, 则 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=$_____.

7. 若 $x,y\in\mathbf{R}^+$, 且 $\dfrac{1}{x}+2y=3$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为_____.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n, 且满足 $S_n+a_n=2$, 则 $S_5=$_____.

9. 过 $y^2=4x$ 的焦点 F 并垂直于 x 轴的直线分别与 $y^2=4x$ 交于 A、B, A 在 B 上方, M 为抛物线上一点, $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+(\lambda-2)\overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda=$_____.

10. 某三位数密码锁, 每位数字在 $0-9$ 数字中选取, 其中恰有两位数字相同的概率是_____.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n<a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 若点 $P_n(n,a_n)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|P_nP_{n+1}|=$_____.

12. 常数 $a>0$, 将函数 $y=\dfrac{2}{x}$ $(x>0)$ 的图象先向右平移 1 个单位, 再向下平移 a 个单位, 然后将所得的图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴向上翻折, 其余部分保持不变, 得到函数 $f(x)=\left|\dfrac{2}{x-1}-a\right|$ $(x>1)$ 的图象 L, 当 $a=a_0$ 时, L 与 x 轴交点为 A, 在 L 上任意一点 P (P 异于 A), 总存在一点 Q 使得 $AP\perp AQ$ 且 $|AP|=|AQ|$, 则 $a_0=$_____.

二、选择题

13. 已知直线方程 $2x-y+c=0$ 的一个方向向量 $\boldsymbol{d}$ 可以是 （　）

(A) $(2,-1)$　(B) $(2,1)$　(C) $(-1,2)$　(D) $(1,2)$

14. 一个直角三角形的两条直角边长分别为 1 和 2, 将该三角形分别绕其两个直角边旋转得到的两个圆锥的体积之比为 （　）

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8

15. 已知 $\omega\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=(x-6)^2\cdot\sin(\omega x)$, 存在常数 $a\in\mathbf{R}$, 使得 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 ω 可能的值为 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{5}$

16. 已知 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)$. ① 存在角 α 在第一象限, 角 β 在第三象限; ② 存在角 α 在第二象限, 角 β 在第四象限; 那么 （　）

(A) ①②均正确　(B) ①②均错误

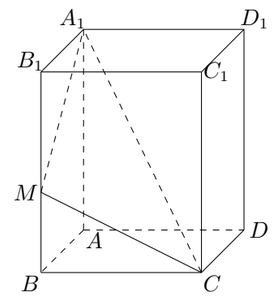
(C) ①正确, ②错误　(D) ①错误, ②正确

三、解答题

17. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 BB_1 上一点, 已知 $BM=2$, $AD=4$, $CD=3$, $AA_1=5$.

(1) 求直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 的夹角;

(2) 求点 A 到平面 A_1MC 的距离.



18. 已知 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x+1}$ $(a\in\mathbf{R})$.

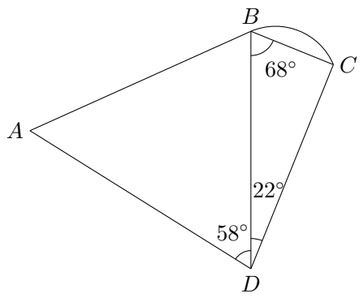
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)+1<f(x+1)$ 的解集;

(2) 若 $x\in[1,2]$ 时, $f(x)$ 有零点, 求 a 的范围.

19. 如图, 某段海岸线可近似看作一条曲线, 该曲线由线段 AB 和四分之一圆周 $\overset{\frown}{BC}$ 构成, D 为一海岛, B 在 D 的正北方向, 且 B、D 相距 39.2 千米, A 在 D 的北偏西 58° 方向, C 在 D 的北偏东 22° 方向, C 在 B 的南偏东 68° 方向.

(1) 若沿 $\overset{\frown}{BC}$ 建观光道, 计算该观光道的长度; (精确到 0.001 千米)

(2) 现规划在该海岸线上选取一点 E, 修建从 E 直通 D 的公路桥, 已知 A、B 相距 40 千米, 求公路桥 DE 的最短长度. (精确到 0.001 千米)



20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$, F_1, F_2 分别为左、右焦点, 直线 l 过 F_2 交椭圆于 A、B 两点.

(1) 若直线 l 垂直于 x 轴, 求 $|AB|$;

(2) 当 $\angle F_1AB=90°$ 时, 点 A 在 x 轴上方, 求 A, B 的坐标;

(3) 设直线 AF_1 交 y 轴于点 M, 直线 BF_1 交 y 轴于点 N, 是否存在直线 l, 使得 $S_{\triangle F_1AB}=S_{\triangle F_1MN}$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. 数列 $\{a_n\}$ 有 100 项, $a_1=a$, 对任意 $n\in[2,100]$, 存在 i 使得 $a_n=a_i+d$, $i\in[1,n-1]$, 若 a_k 与其之前中某一项相等, 则称 a_k 具有性质 P.

(1) 若 $a_1=1$, $d=2$, 求 a_4 所有可能的值;

(2) 若 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 求证: $\{a_n\}$ 中存在具有性质 P 的项;

(3) 若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P, 这三项和为 C, 试用 a, d, c 表示 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$.

2019 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}\,|\,1\leqslant x<3\}$, 则 $(A\cap C)\cup B=$ （　）

(A) $\{2\}$　(B) $\{2,3\}$　(C) $\{-1,2,3\}$　(D) $\{1,2,3,4\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\ x-y+2\geqslant 0\\ x\geqslant -1\\ y\geqslant -1\end{cases}$, 则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为 （　）

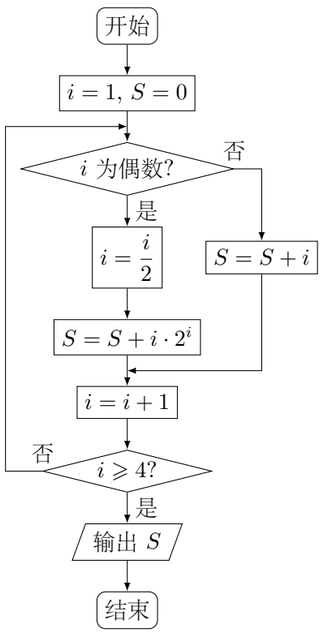
(A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) 6

3. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 阅读如图的程序框图, 运行相应的程序, 输出 S 的值为 （　）



(A) 5　(B) 8　(C) 24　(D) 29

5. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l. 若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B, 且 $|AB|=4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为 （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) $\sqrt{5}$

6. 已知 $a=\log_5 2$, $b=\log_{0.5}0.2$, $c=0.5^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 （　）

(A) $a<c<b$　(B) $a<b<c$　(C) $b<c<a$　(D) $c<a<b$

7. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\pi)$ 是奇函数, 将 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$. 若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π, 且 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, 则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=$ （　）

(A) -2　(B) $-\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

8. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\leqslant 1\\ x-a\ln x, & x>1\end{cases}$, 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围为 （　）

(A) $[0,1]$　(B) $[0,2]$　(C) $[0,\mathrm{e}]$　(D) $[1,\mathrm{e}]$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 则 $\left|\frac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$ 的值为_____.

10. $\left(2x-\frac{1}{8x^3}\right)^8$ 的展开式中的常数项为_____.

11. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点, 另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心, 则该圆柱的体积为_____.

12. 设 $a\in\mathbf{R}$, 直线 $ax-y+2=0$ 和圆 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 相切, 则 a 的值为_____.

13. 设 $x>0$, $y>0$, $x+2y=5$, 则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为_____.

14. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $AB=2\sqrt{3}$, $AD=5$, $\angle A=30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE=BE$, 则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $b+c=2a$, $3c\sin B=4a\sin C$.

(1) 求 $\cos B$ 的值;

(2) 求 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

16. 设甲、乙两位同学上学期间, 每天 7 : 30 之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响, 且任一同学每天到校情况相互独立.

(1) 用 X 表示甲同学上学期间的三天中 7 : 30 之前到校的天数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

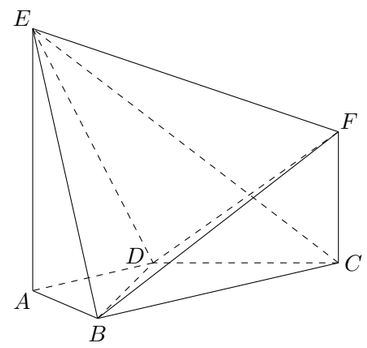
(2) 设 M 为事件“上学期间的三天中, 甲同学在 7 : 30 之前到校的天数比乙同学在 7 : 30 之前到校的天数恰好多 2”, 求事件 M 发生的概率.

17. 如图, $AE\perp$ 平面 $ABCD$, $CF\parallel AE$, $AD\parallel BC$, $AD\perp AB$, $AB=AD=1$, $AE=BC=2$.

(1) 求证: $BF\parallel$ 平面 ADE;

(2) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值;

(3) 若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 CF 的长.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 F, 上顶点为 B. 已知椭圆的短轴长为 4, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设点 P 在椭圆上, 且异于椭圆的上、下顶点, 点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点, 点 N 在 y 轴的负半轴上. 若 $|ON|=|OF|$ (O 为原点), 且 $OP\perp MN$, 求直线 PB 的斜率.

19. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列. 已知 $a_1=4$, $b_1=6$, $b_2=2a_2-2$, $b_3=2a_3+4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1=1$, $c_n=\begin{cases}1, & 2^k<n<2^{k+1}\\ b_k, & n=2^k\end{cases}$, 其中 $k\in\mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n}-1)\}$ 的通项公式;

② 求 $\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

20. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$;

(3) 设 x_n 为函数 $u(x)=f(x)-1$ 在区间 $\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{4},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n\in\mathbf{N}$, 证明 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n<\dfrac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$.

2019 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}\,|\,1\leqslant x<3\}$, 则 $(A\cap C)\cup B=$ （　）

(A) $\{2\}$　　(B) $\{2,3\}$　　(C) $\{-1,2,3\}$　　(D) $\{1,2,3,4\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\ x-y+2\geqslant 0\\ x\geqslant -1\\ y\geqslant -1\end{cases}$, 则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为 （　）

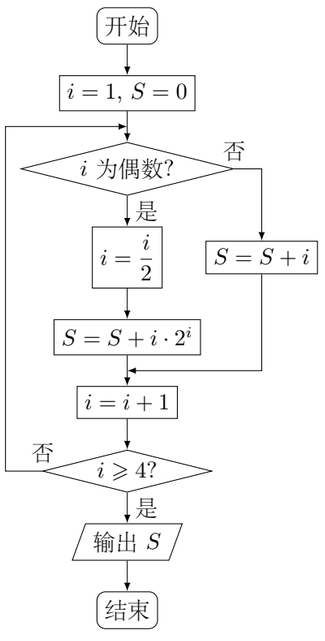
(A) 2　　(B) 3　　(C) 5　　(D) 6

3. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$0<x<5$”是“$|x-1|<1$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

4. 阅读如图的程序框图, 运行相应的程序, 输出 S 的值为 （　）



(A) 5　　(B) 8　　(C) 24　　(D) 29

5. 已知 $a=\log_2 7$, $b=\log_3 8$, $c=0.3^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 （　）

(A) $c<b<a$　　(B) $a<b<c$　　(C) $b<c<a$　　(D) $c<a<b$

6. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l. 若 l 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B, 且 $|AB|=4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为 （　）

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 2　　(D) $\sqrt{5}$

7. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\pi)$ 是奇函数, 且 $f(x)$ 的最小正周期为 π, 将 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$. 若 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, 则 $f\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=$ （　）

(A) -2　　(B) $-\sqrt{2}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 2

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x},\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x},\ x>1\end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{4}x+a$ $(a\in\mathbf{R})$ 恰有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围为 （　）

(A) $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]$　　(B) $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]$　　(C) $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]\cup\{1\}$　　(D) $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]\cup\{1\}$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 则 $\left|\dfrac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$ 的值为_____.

10. 设 $x\in\mathbf{R}$, 使不等式 $3x^2+x-2<0$ 成立的 x 的取值范围为_____.

11. 曲线 $y=\cos x-\dfrac{x}{2}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_____.

12. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点, 另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心, 则该圆柱的体积为_____.

13. 设 $x>0$, $y>0$, $x+2y=5$, 则 $\dfrac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为_____.

14. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $AB=2\sqrt{3}$, $AD=5$, $\angle A=30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE=BE$, 则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$_____.

三、解答题

15. 2019 年, 我国施行个人所得税专项附加扣除办法, 涉及子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等六项专项附加扣除. 某单位老、中、青员工分别有 72, 108, 120 人, 现采用分层抽样的方法, 从该单位上述员工中抽取 25 人调查专项附加扣除的享受情况.

项目＼员工	A	B	C	D	E	F
子女教育	◯	◯	×	◯	×	◯
继续教育	×	×	◯	×	◯	◯
大病医疗	×	×	×	◯	×	×
住房贷款利息	◯	◯	×	×	◯	◯
住房租金	×	×	◯	×	×	×
赡养老人	◯	◯	×	×	×	◯

(1) 应从老、中、青员工中分别抽取多少人?

(2) 抽取的 25 人中, 享受至少两项专项附加扣除的员工有 6 人, 分别记为 A, B, C, D, E, F. 享受情况如表, 其中“◯”表示享受, “×”表示不享受. 现从这 6 人中随机抽取 2 人接受采访.

① 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果;

② 设 M 为事件“抽取的 2 人享受的专项附加扣除至少有一项相同”, 求事件 M 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $b+c=2a$, $3c\sin B=4a\sin C$.

(1) 求 $\cos B$ 的值;

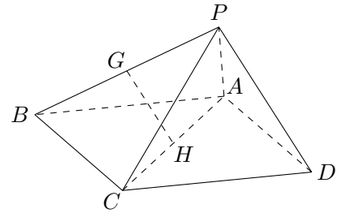
(2) 求 $\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\triangle PCD$ 为等边三角形, 平面 $PAC\perp$ 平面 PCD, $PA\perp CD$, $CD=2$, $AD=3$.

(1) 设 G, H 分别为 PB, AC 的中点, 求证: $GH\parallel$ 平面 PAD;

(2) 求证: $PA\perp$ 平面 PCD;

(3) 求直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.



18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 已知 $a_1=b_1=3$, $b_2=a_3$, $b_3=4a_2+3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\begin{cases}1, & n \text{ 为奇数}\\ b_{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数}\end{cases}$, 求 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 F, 左顶点为 A, 上顶点为 B. 已知 $\sqrt{3}|OA|=2|OB|$ (O 为原点).

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设经过点 F 且斜率为 $\dfrac{3}{4}$ 的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点为 P, 圆 C 同时与 x 轴和直线 l 相切, 圆心 C 在直线 $x=4$ 上, 且 $OC\parallel AP$, 求椭圆的方程.

20. 设函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)\mathrm{e}^x$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $a\leqslant 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,

① 证明 $f(x)$ 恰有两个零点;

② 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1>x_0$, 证明 $3x_0-x_1>2$.

2019 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

数学试卷

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{-1,0,1,2,3\}$, 集合 $A=\{0,1,2\}$, $B=\{-1,0,1\}$, 则 $\left(\complement_U A\right)\cap B=$ （　）

(A) $\{-1\}$　　(B) $\{0,1\}$　　(C) $\{-1,2,3\}$　　(D) $\{-1,0,1,3\}$

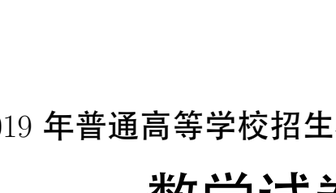
2. 渐近线方程为 $x\pm y=0$ 的双曲线的离心率是 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(B) 1　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 2

3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-3y+4\geqslant 0\\3x-y-4\leqslant 0\\x+y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值是 （　）

(A) -1　　(B) 1　　(C) 10　　(D) 12

4. 祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家, 他提出的“幂势既同, 则积不容异”称为祖暅原理, 利用该原理可以得到柱体的体积公式 $V_{柱体}=Sh$, 其中 S 是柱体的底面积, h 是柱体的高. 若某柱体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该柱体的体积 (单位: cm^3) 是 （　）



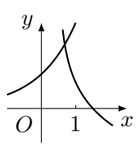
(A) 158　　(B) 162　　(C) 182　　(D) 324

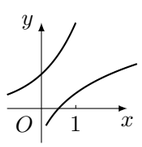
5. 若 $a>0$, $b>0$, 则“$a+b\leqslant 4$”是“$ab\leqslant 4$”的 （　）

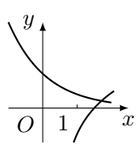
(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

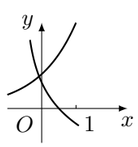
(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

6. 在同一直角坐标系中, 函数 $y=\dfrac{1}{a^x}$, $y=\log_a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的图象可能是 （　）

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

7. 设 $0<a<1$, 则随机变量 X 的分布列是

X	0	a	1
P	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$

则当 a 在 $(0,1)$ 内增大时 （　）

(A) $D(X)$ 增大　　(B) $D(X)$ 减小

(C) $D(X)$ 先增大后减小　　(D) $D(X)$ 先减小后增大

8. 设三棱锥 $V-ABC$ 的底面是正三角形, 侧棱长均相等, P 是棱 VA 上的点 (不含端点), 记直线 PB 与直线 AC 所成角为 α, 直线 PB 与平面 ABC 所成角为 β, 二面角 $P-AC-B$ 的平面角为 γ, 则 （　）

(A) $\beta<\gamma$, $\alpha<\gamma$　　(B) $\beta<\alpha$, $\beta<\gamma$

(C) $\beta<\alpha$, $\gamma<\alpha$　　(D) $\alpha<\beta$, $\gamma<\beta$

9. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2+ax, & x\geqslant 0\end{cases}$, 若函数 $y=f(x)-ax-b$ 恰有 3 个零点, 则 （　）

(A) $a<-1$, $b<0$　　(B) $a<-1$, $b>0$

(C) $a>-1$, $b<0$　　(D) $a>-1$, $b>0$

10. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n^2+b$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 （　）

(A) 当 $b=\dfrac{1}{2}$ 时, $a_{10}>10$　　(B) 当 $b=\dfrac{1}{4}$ 时, $a_{10}>10$

(C) 当 $b=-2$ 时, $a_{10}>10$　　(D) 当 $b=-4$ 时, $a_{10}>10$

二、填空题

11. 复数 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位), 则 $|z|=$_____.

12. 已知圆 C 的圆心坐标是 $(0,m)$, 半径长是 r. 若直线 $2x-y+3=0$ 与圆相切于点 $A(-2,-1)$, 则 $m=$_____, $r=$_____.

13. 在二项式 $\left(\sqrt{2}+x\right)^9$ 的展开式中, 常数项是_____, 系数为有理数的项的个数是_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=4$, $BC=3$, 点 D 在线段 AC 上, 若 $\angle BDC=45^\circ$, 则 $BD=$_____, $\cos\angle ABD=$_____.

15. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左焦点为 F, 点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方, 若线段 PF 的中点在以原点 O 为圆心, $|OF|$ 为半径的圆上, 则直线 PF 的斜率是_____.

16. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=ax^3-x$, 若存在 $t\in\mathbf{R}$, 使得 $|f(t+2)-f(t)|\leqslant\dfrac{2}{3}$, 则实数 a 的最大值是_____.

17. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 当每个 λ_i $(i=1,2,3,4,5,6)$ 取遍 ± 1 时, $\left|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}\right|$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

三、解答题

18. 设函数 $f(x)=\sin x$, $x\in\mathbf{R}$.

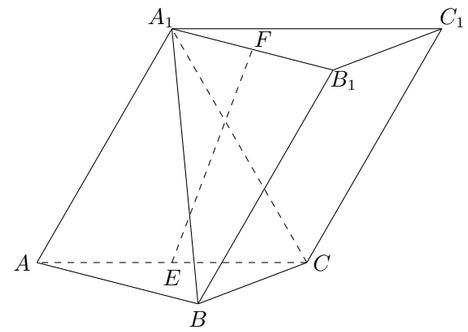
(1) 已知 $\theta\in[0,2\pi)$, 函数 $f(x+\theta)$ 是偶函数, 求 θ 的值;

(2) 求函数 $y=\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^2$ 的值域.

19. 如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle BAC=30^\circ$, $A_1A=A_1C=AC$, E, F 分别是 AC, A_1B_1 的中点.

(1) 证明: $EF\perp BC$;

(2) 求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.



20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_3=4$, $a_4=S_3$. 数列 $\{b_n\}$ 满足: 对每个 $n\in\mathbf{N}^*$, S_n+b_n, $S_{n+1}+b_n$, $S_{n+2}+b_n$ 成等比数列.

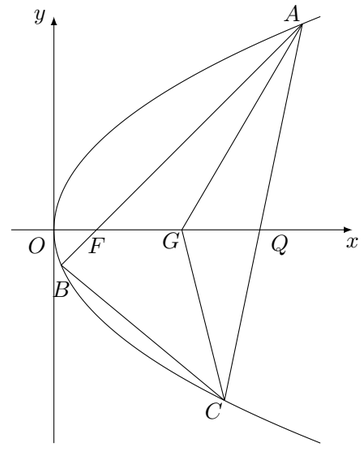
(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明: $c_1+c_2+\cdots+c_n<2\sqrt{n}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

21. 如图, 已知点 $F(1,0)$ 为抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, 过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 点 C 在抛物线上, 使得 $\triangle ABC$ 的重心 G 在 x 轴上, 直线 AC 交 x 轴于点 Q, 且 Q 在点 F 的右侧. 记 $\triangle AFG$, $\triangle CQG$ 的面积分别为 S_1, S_2.

(1) 求 p 的值及抛物线的准线方程;

(2) 求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最小值及此时点 G 的坐标.



22. 已知实数 $a\neq 0$, 设函数 $f(x)=a\ln x+\sqrt{x+1}$, $x>0$.

(1) 当 $a=-\dfrac{3}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 对任意 $x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},+\infty\right)$ 均有 $f(x)\leqslant\dfrac{\sqrt{x}}{2a}$, 求 a 的取值范围.

注: $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

2020 年普通高等学校招生考试（北京卷）

数学试卷

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x\mid 0<x<3\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{-1,0,1\}$　(B) $\{0,1\}$　(C) $\{-1,1,2\}$　(D) $\{1,2\}$

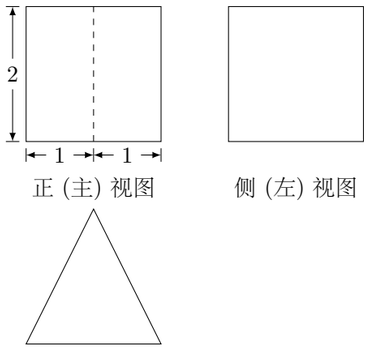
2. 在复平面内, 复数 z 对应的点的坐标是 $(1,2)$, 则 $\mathrm{i}\cdot z=$ （　）

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $-2+\mathrm{i}$　(C) $1-2\mathrm{i}$　(D) $-2-\mathrm{i}$

3. 在 $(\sqrt{x}-2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 （　）

(A) -5　(B) 5　(C) -10　(D) 10

4. 某三棱柱的底面为正三角形, 其三视图如图所示, 该三棱柱的表面积为（　）



正 (主) 视图　侧 (左) 视图　俯视图

(A) $6+\sqrt{3}$　(B) $6+2\sqrt{3}$　(C) $12+\sqrt{3}$　(D) $12+2\sqrt{3}$

5. 已知半径为 1 的圆经过点 $(3,4)$, 则其圆心到原点的距离的最小值为（　）

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

6. 已知函数 $f(x)=2^x-x-1$, 则不等式 $f(x)>0$ 的解集是 （　）

(A) $(-1,1)$　(B) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(C) $(0,1)$　(D) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

7. 设抛物线的顶点为 O, 焦点为 F, 准线为 l. P 是抛物线上异于 O 的一点, 过 P 作 $PQ\perp l$ 于 Q, 则线段 FQ 的垂直平分线 （　）

(A) 经过点 O　(B) 经过点 P

(C) 平行于直线 OP　(D) 垂直于直线 OP

8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=-9$, $a_3=-1$. 记 $T_n=a_1a_2\cdots a_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 则数列 $\{T_n\}$ （　）

(A) 有最大项, 有最小项　(B) 有最大项, 无最小项

(C) 无最大项, 有最小项　(D) 无最大项, 无最小项

9. 已知 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, 则“存在 $k\in\mathbf{Z}$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

10. 2020 年 3 月 14 日是全球首个国际圆周率日 (π Day). 历史上, 求圆周率 π 的方法有多种, 与中国传统数学中的“割圆术”相似. 数学家阿尔·卡西的方法是: 当正整数 n 充分大时, 计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形 (各边均与圆相切的正 $6n$ 边形) 的周长, 将它们的算术平均数作为 2π 的近似值. 按照阿尔·卡西的方法, π 的近似值的表达式是 （　）

(A) $3n\left(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n}\right)$　(B) $6n\left(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n}\right)$

(C) $3n\left(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n}\right)$　(D) $6n\left(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n}\right)$

二、填空题

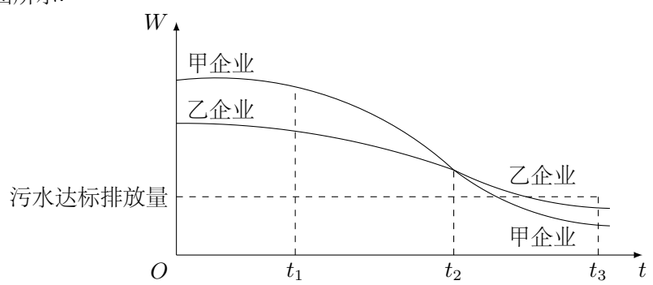
11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln x$ 的定义域是_____.

12. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$, 则 C 的右焦点的坐标为_____; C 的焦点到其渐近线的距离是_____.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, 则 $\left|\overrightarrow{PD}\right|=$_____; $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$_____.

14. 若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$ 的最大值为 2, 则常数 φ 的一个取值为_____.

15. 为满足人民对美好生活的向往, 环保部门要求相关企业加强污水治理, 排放未达标的企业要限期整改. 设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$, 用 $-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a,b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱, 已知整改期内, 甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图所示.



给出下列四个结论:

① 在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;

② 在 t_2 时刻, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;

③ 在 t_3 时刻, 甲、乙两企业的污水排放都已达标;

④ 甲企业在 $[0,t_1]$, $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$ 这三段时间中, 在 $[0,t_1]$ 的污水治理能力最强.

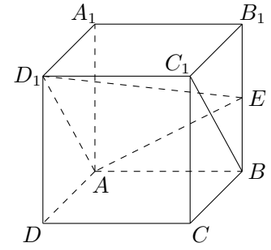
其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题

16. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 BB_1 的中点.

(1) 求证: $BC_1\parallel$ 平面 AD_1E;

(2) 求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.



17. 在 $\triangle ABC$ 中, $a+b=11$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:

(1) a 的值;

(2) $\sin C$ 和 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $c=7$, $\cos A=-\dfrac{1}{7}$;

条件②: $\cos A=\dfrac{1}{8}$, $\cos B=\dfrac{9}{16}$.

18. 某校为举办甲、乙两项不同活动, 分别设计了相应的活动方案: 方案一、方案二. 为了解该校学生对活动方案是否支持, 对学生进行简单随机抽样, 获得数据如下表:

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	200 人	400 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立.

(1) 分别估计该校男生支持方案一的概率、该校女生支持方案一的概率;

(2) 从该校全体男生中随机抽取 2 人, 全体女生中随机抽取 1 人, 估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率;

(3) 将该校学生支持方案二的概率估计值记为 p_0, 假设该校一年级有 500 名男生和 300 名女生, 除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1, 试比较 p_0 与 p_1 的大小. (结论不要求证明)

19. 已知函数 $f(x)=12-x^2$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率等于 -2 的切线方程;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最小值.

20. 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2,-1)$, 且 $a=2b$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M, N, 直线 MA, NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P, Q. 求 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}$ 的值.

21. 已知 $\{a_n\}$ 是无穷数列. 给出两个性质:

① 对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 a_i, a_j $(i>j)$, 在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 a_m, 使 $\dfrac{a_i^2}{a_j}=a_m$;

② 对于 $\{a_n\}$ 中任意项 a_n $(n\geqslant 3)$, 在 $\{a_n\}$ 中都存在两项 a_k, a_l $(k>l)$, 使得 $a_n=\dfrac{a_k^2}{a_l}$.

(1) 若 $a_n=n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否满足性质①, 说明理由;

(2) 若 $a_n=2^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否同时满足性质①和性质②, 说明理由;

(3) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且同时满足性质①和性质②, 证明: $\{a_n\}$ 为等比数列.

2020 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

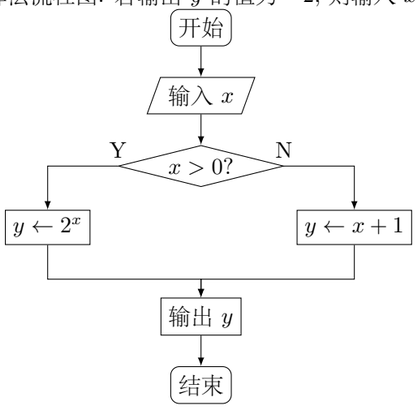
1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{0,2,3\}$, 则 $A\cap B=$_____.

2. 已知 i 是虚数单位, 则复数 $z=(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$ 的实部是_____.

3. 已知一组数据 4, $2a$, $3-a$, 5, 6 的平均数为 4, 则 a 的值是_____.

4. 将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次, 观察向上的点数, 则点数和为 5 的概率是_____.

5. 如图是一个算法流程图. 若输出 y 的值为 -2, 则输入 x 的值是_____.

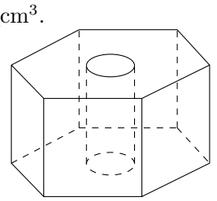


6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5}=1$ $(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$, 则该双曲线的离心率是_____.

7. 已知 $y=f(x)$ 是奇函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, 则 $f(-8)$ 的值是_____.

8. 已知 $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{2}{3}$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值是_____.

9. 如图, 六角螺帽毛坯是由一个正六棱柱挖去一个圆柱所构成的. 已知螺帽的底面正六边形边长为 2 cm, 高为 2 cm, 内孔半径为 0.5 cm, 则此六角螺帽毛坯的体积是_____cm^3.

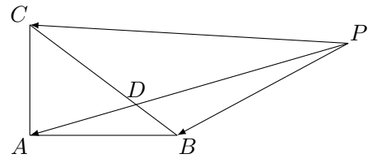


10. 将函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是_____.

11. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 已知数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-n+2^n-1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $d+q$ 的值是_____.

12. 已知 $5x^2y^2+y^4=1$ $(x,\ y\in\mathbf{R})$, 则 x^2+y^2 的最小值是_____.

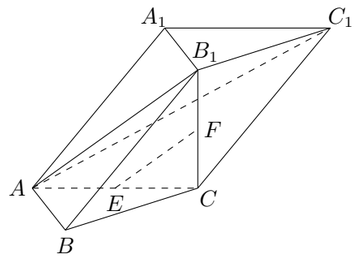
13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $AC=3$, $\angle BAC=90^\circ$, D 在边 BC 上, 延长 AD 到 P, 使得 $AP=9$, 若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+\left(\dfrac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$ (m 为常数), 则 CD 的长度是_____.



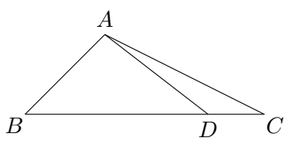
14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, A, B 是圆 C: $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=36$ 上的两个动点, 满足 $PA=PB$, 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是_____.

二、解答题

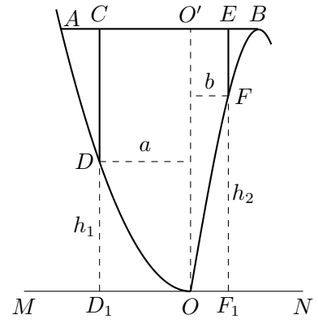
15. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp AC$, $B_1C\perp$ 平面 ABC, E, F 分别是 AC, B_1C 的中点.
(1) 求证: $EF\parallel$ 平面 AB_1C_1;
(2) 求证: 平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABB_1.



16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $a=3$, $c=\sqrt{2}$, $B=45^\circ$.
(1) 求 $\sin C$ 的值;
(2) 在边 BC 上取一点 D, 使得 $\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$, 求 $\tan\angle DAC$ 的值.



17. 某地准备在山谷中建一座桥梁, 桥址位置的竖直截面图如图所示: 谷底 O 在水平线 MN 上、桥 AB 与 MN 平行, OO' 为铅垂线 (O' 在 AB 上). 经测量, 左侧曲线 AO 上任一点 D 到 MN 的距离 h_1 (米) 与 D 到 OO' 的距离 a (米) 之间满足关系式 $h_1=\dfrac{1}{40}a^2$; 右侧曲线 BO 上任一点 F 到 MN 的距离 h_2 (米) 与 F 到 OO' 的距离 b (米) 之间满足关系式 $h_2=-\dfrac{1}{800}b^3+6b$. 已知点 B 到 OO' 的距离为 40 米.
(1) 求桥 AB 的长度;
(2) 计划在谷底两侧建造平行于 OO' 的桥墩 CD 和 EF, 且 CE 为 80 米, 其中 C, E 在 AB 上 (不包括端点). 桥墩 EF 每米造价 k (万元)、桥墩 CD 每米造价 $\dfrac{3}{2}k$ (万元) ($k>0$). 问 $O'E$ 为多少米时, 桥墩 CD 与 EF 的总造价最低?



18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 点 A 在椭圆 E 上且在第一象限内, $AF_2\perp F_1F_2$, 直线 AF_1 与椭圆 E 相交于另一点 B.
(1) 求 $\triangle AF_1F_2$ 的周长;
(2) 在 x 轴上任取一点 P, 直线 AP 与椭圆 E 的右准线相交于点 Q, 求 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}$ 的最小值;
(3) 设点 M 在椭圆 E 上, 记 $\triangle OAB$ 与 $\triangle MAB$ 的面积分别为 S_1, S_2, 若 $S_2=3S_1$, 求点 M 的坐标.

19. 已知关于 x 的函数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 与 $h(x)=kx+b$ $(k,\ b\in\mathbf{R})$ 在区间 D 上恒有 $f(x)\geqslant h(x)\geqslant g(x)$.
(1) 若 $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=-x^2+2x$, $D=(-\infty,+\infty)$, 求 $h(x)$ 的表达式;
(2) 若 $f(x)=x^2-x+1$, $g(x)=k\ln x$, $h(x)=kx-k$, $D=(0,+\infty)$, 求 k 的取值范围;
(3) 若 $f(x)=x^4-2x^2$, $g(x)=4x^2-8$, $h(x)=4(t^3-t)x-3t^4+2t^2$ $\left(0<|t|\leqslant\sqrt{2}\right)$, $D=[m,n]\subseteq\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$, 求证: $n-m\leqslant\sqrt{7}$.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的首项 $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n. 设 λ 与 k 是常数, 若对一切正整数 n, 均有 $S_{n+1}^{\frac{1}{k}}-S_n^{\frac{1}{k}}=\lambda a_{n+1}^{\frac{1}{k}}$ 成立, 则称此数列为"$\lambda\sim k$"数列.
(1) 若等差数列 $\{a_n\}$ 是"$\lambda\sim1$"数列, 求 λ 的值;
(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是"$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sim2$"数列, 且 $a_n>0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 对于给定的 λ, 是否存在三个不同的数列 $\{a_n\}$ 为"$\lambda\sim3$"数列, 且 $a_n\geqslant0$? 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

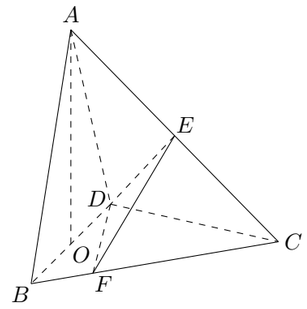
21. 三选二.

【A】平面上点 $A(2,-1)$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a&1\\-1&b\end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到点 $B(3,-4)$.
(1) 求实数 a, b 的值;
(2) 求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$.

【B】在极坐标系中, 已知点 $A\left(\rho_1,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在直线 l: $\rho\cos\theta=2$ 上, 点 $B\left(\rho_2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在圆 C: $\rho=4\sin\theta$ 上 (其中 $\rho\geqslant0$, $0\leqslant\theta<2\pi$).
(1) 求 ρ_1, ρ_2 的值;
(2) 求出直线 l 与圆 C 的公共点的极坐标.

【C】设 $x\in\mathbf{R}$, 解不等式 $2|x+1|+|x|\leqslant4$.

22. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 已知 $CB=CD=\sqrt{5}$, $BD=2$, O 为 BD 的中点, $AO\perp$ 平面 BCD, $AO=2$, E 为 AC 的中点.
(1) 求直线 AB 与 DE 所成角的余弦值;
(2) 若点 F 在 BC 上, 满足 $BF=\dfrac{1}{4}BC$, 设二面角 $F-DE-C$ 的大小为 θ, 求 $\sin\theta$ 的值.



23. 甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球, 乙口袋中装有 3 个白球. 现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋, 重复 n 次这样的操作, 记甲口袋中黑球个数为 X_n, 恰有 2 个黑球的概率为 p_n, 恰有 1 个黑球的概率为 q_n.
(1) 求 p_1, q_1 和 p_2, q_2;
(2) 求 $2p_n+q_n$ 与 $2p_{n-1}+q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ (用 n 表示).

2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 若 $z=1+\mathrm{i}$, 则 $|z^2-2z|=$ （　）

(A) 0　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

2. 设集合 $A=\{x\,|\,x^2-4\leqslant 0\}$, $B=\{x\,|\,2x+a\leqslant 0\}$, 且 $A\cap B=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 1\}$, 则 $a=$ （　）

(A) -4　(B) -2　(C) 2　(D) 4

3. 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一, 它的形状可视为一个正四棱锥, 以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积, 则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为 （　）

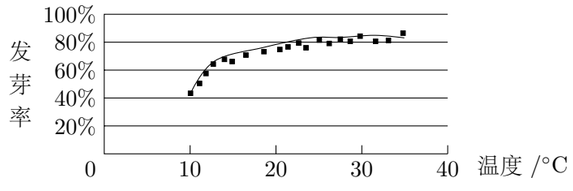


(A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

4. 已知 A 为抛物线 $C: y^2=2px$ $(p>0)$ 上一点, 点 A 到 C 的焦点的距离为 12, 到 y 轴的距离为 9, 则 $p=$ （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 6　(D) 9

5. 某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x (单位: °C) 的关系, 在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验, 由实验数据 (x_i, y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$ 得到下面的散点图:



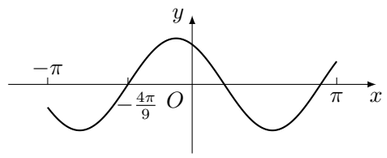
由此散点图, 在 10°C 至 40°C 之间, 下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是 （　）

(A) $y=a+bx$　(B) $y=a+bx^2$　(C) $y=a+b\mathrm{e}^x$　(D) $y=a+b\ln x$

6. 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 （　）

(A) $y=-2x-1$　(B) $y=-2x+1$　(C) $y=2x-3$　(D) $y=2x+1$

7. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如下图, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 （　）



(A) $\dfrac{10\pi}{9}$　(B) $\dfrac{7\pi}{6}$　(C) $\dfrac{4\pi}{3}$　(D) $\dfrac{3\pi}{2}$

8. $\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为 （　）

(A) 5　(B) 10　(C) 15　(D) 20

9. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$, 且 $3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$, 则 $\sin\alpha=$ （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$

10. 已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点, $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆. 若 $\odot O_1$ 的面积为 4π, $AB=BC=AC=OO_1$, 则球 O 的表面积为 （　）

(A) 64π　(B) 48π　(C) 36π　(D) 32π

11. 已知 $\odot M$: $x^2+y^2-2x-2y-2=0$, 直线 l: $2x+y+2=0$, P 为 l 上的动点, 过点 P 作 $\odot M$ 的切线 PA, PB, 切点为 A, B, 当 $|PM|\cdot|AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为 （　）

(A) $2x-y-1=0$　(B) $2x+y-1=0$　(C) $2x-y+1=0$　(D) $2x+y+1=0$

12. 若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$, 则 （　）

(A) $a>2b$　(B) $a<2b$　(C) $a>b^2$　(D) $a<b^2$

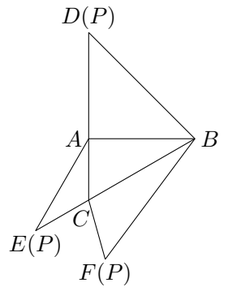
二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0\\ x-y-1\geqslant 0\\ y+1\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+7y$ 的最大值为_____.

14. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为单位向量, 且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$_____.

15. 已知 F 为双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点, A 为 C 的右顶点, B 为 C 上的点, 且 BF 垂直于 x 轴. 若 AB 的斜率为 3, 则 C 的离心率为_____.

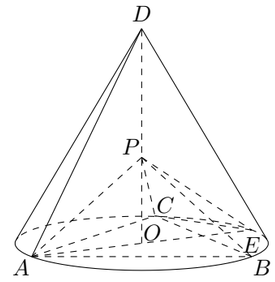
16. 如图, 在三棱锥 P–ABC 的平面展开图中, $AC=1$, $AB=AD=\sqrt{3}$, $AB\perp AC$, $AB\perp AD$, $\angle CAE=30°$, 则 $\cos\angle FCB=$_____.



三、解答题

17. 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, a_1 为 a_2, a_3 的等差中项.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比;
(2) 若 $a_1=1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

18. 如图, D 为圆锥的顶点, O 是圆锥底面的圆心, AE 为底面直径, $AE=AD$. $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形, P 为 DO 上一点, $PO=\dfrac{\sqrt{6}}{6}DO$.
(1) 证明: $PA\perp$ 平面 PBC;
(2) 求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值.



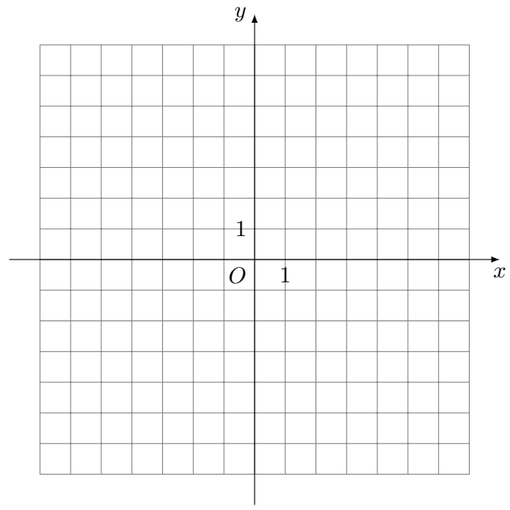
19. 甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛, 约定赛制如下: 累计负两场者被淘汰; 比赛前抽签决定首先比赛的两人, 另一人轮空; 每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛, 负者下一场轮空, 直至有一人被淘汰; 当一人被淘汰后, 剩余的两人继续比赛, 直至其中一人被淘汰, 另一人最终获胜, 比赛结束. 经抽签, 甲、乙首先比赛, 丙轮空. 设每场比赛双方获胜的概率都为 $\dfrac{1}{2}$.
(1) 求甲连胜四场的概率;
(2) 求需要进行第五场比赛的概率;
(3) 求丙最终获胜的概率.

20. 已知 A, B 分别为椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>1)$ 的左、右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$, P 为直线 $x=6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D.
(1) 求 E 的方程;
(2) 证明: 直线 CD 过定点.

21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2-x$.
(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}x^3+1$, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^k t\\ y=\sin^k t\end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$.
(1) 当 $k=1$ 时, C_1 是什么曲线?
(2) 当 $k=4$ 时, 求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

23. 已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$.
(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;
(2) 求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.



2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-4<0\}$, $B=\{-4,1,3,5\}$, 则 $A\cap B=$（　）

(A) $\{-4,1\}$　(B) $\{1,5\}$　(C) $\{3,5\}$　(D) $\{1,3\}$

2. 若 $z=1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^3$, 则 $|z|=$（　）

(A) 0　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

3. 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一, 它的形状可视为一个正四棱锥, 以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积, 则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　）

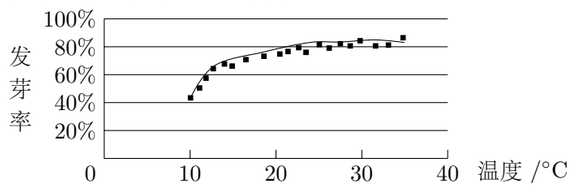


(A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

4. 设 O 为正方形 $ABCD$ 的中心, 在 O, A, B, C, D 中任取 3 点, 则取到的 3 点共线的概率为（　）

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

5. 某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x (单位: °C) 的关系, 在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验, 由实验数据 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,20)$ 得到下面的散点图:



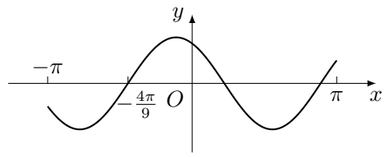
由此散点图, 在 10 °C 至 40 °C 之间, 下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是（　）

(A) $y=a+bx$　(B) $y=a+bx^2$　(C) $y=a+b\mathrm{e}^x$　(D) $y=a+b\ln x$

6. 已知圆 $x^2+y^2-6x=0$, 过点 $(1,2)$ 的直线被该圆所截得的弦的长度的最小值为（　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

7. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如下图, 则 $f(x)$ 的最小正周期为（　）

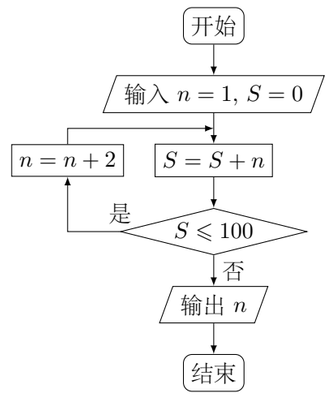


(A) $\dfrac{10\pi}{9}$　(B) $\dfrac{7\pi}{6}$　(C) $\dfrac{4\pi}{3}$　(D) $\dfrac{3\pi}{2}$

8. 设 $a\log_3 4=2$, 则 $4^{-a}=$（　）

(A) $\dfrac{1}{16}$　(B) $\dfrac{1}{9}$　(C) $\dfrac{1}{8}$　(D) $\dfrac{1}{6}$

9. 执行下面的程序框图, 则输出的 $n=$（　）



(A) 17　(B) 19　(C) 21　(D) 23

10. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1+a_2+a_3=1$, $a_2+a_3+a_4=2$, 则 $a_6+a_7+a_8=$（　）

(A) 12　(B) 24　(C) 30　(D) 32

11. 设 F_1, F_2 是双曲线 C: $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 两个焦点, O 为坐标原点, 点 P 在 C 上且 $|OP|=2$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为（　）

(A) $\dfrac{7}{2}$　(B) 3　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 2

12. 已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点, $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 若 $\odot O_1$ 的面积为 4π, $AB=BC=AC=OO_1$, 则球 O 的表面积为（　）

(A) 64π　(B) 48π　(C) 36π　(D) 32π

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0\\ x-y-1\geqslant 0\\ y+1\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+7y$ 的最大值为_____.

14. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(m+1,2m-4)$, 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$_____.

15. 曲线 $y=\ln x+x+1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为_____.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$, 前 16 项和为 540, 则 $a_1=$_____.

三、解答题

17. 某厂接受了一项加工业务, 加工出来的产品 (单位: 件) 按标准分为 A, B, C, D 四个等级. 加工业务约定: 对于 A 级品、B 级品、C 级品, 厂家每件分别收取加工费 90 元, 50 元, 20 元; 对于 D 级品, 厂家每件要赔偿原料损失费 50 元. 该厂有甲、乙两个分厂可承接加工业务. 甲分厂加工成本费为 25 元/件, 乙分厂加工成本费为 20 元/件. 厂家为决定由哪个分厂承接加工业务, 在两个分厂各试加工了 100 件这种产品, 并统计了这些产品的等级, 整理如下:

甲分厂产品等级的频数分布表

等级	A	B	C	D
频数	40	20	20	20

乙分厂产品等级的频数分布表

等级	A	B	C	D
频数	28	17	34	21

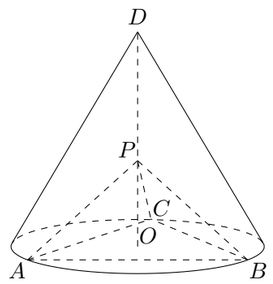
(1) 分别估计甲、乙两分厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率;
(2) 分别求甲、乙两分厂加工出来的 100 件产品的平均利润, 以平均利润为依据, 厂家应选哪个分厂承接加工业务?

18. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $B=150°$.
(1) 若 $a=\sqrt{3}c$, $b=2\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
(2) 若 $\sin A+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求 C.

19. 如图, D 为圆锥的顶点, O 是圆锥底面的圆心, $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形, P 为 DO 上一点, $\angle APC=90^\circ$.

(1) 证明: 平面 $PAB\perp$ 平面 PAC;

(2) 设 $DO=\sqrt{2}$, 圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$, 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.



20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+2)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

21. 已知 A, B 分别为椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>1)$ 的左, 右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$, P 为直线 $x=6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D.

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^k t\\ y=\sin^k t\end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$.

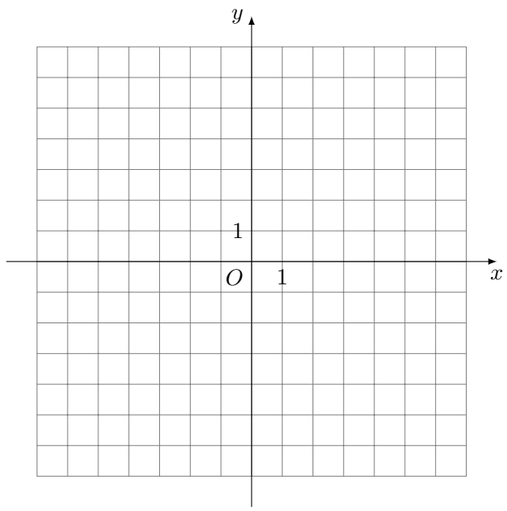
(1) 当 $k=1$ 时, C_1 是什么曲线?

(2) 当 $k=4$ 时, 求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

23. 已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.



2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$, $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{1,2\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ （ ）

(A) $\{-2,3\}$　(B) $\{-2,2,3\}$

(C) $\{-2,-1,0,3\}$　(D) $\{-2,-1,0,2,3\}$

2. 若 α 为第四象限角, 则 （ ）

(A) $\cos 2\alpha>0$　(B) $\cos 2\alpha<0$　(C) $\sin 2\alpha>0$　(D) $\sin 2\alpha<0$

3. 在新冠肺炎疫情防控期间, 某超市开通网上销售业务, 每天能完成 1200 份订单的配货, 由于订单量大幅增加, 导致订单积压. 为解决困难, 许多志愿者踊跃报名参加配货工作. 已知该超市某日积压 500 份订单未配货, 预计第二天的新订单超过 1600 份的概率为 0.05. 志愿者每人每天能完成 50 份订单的配货, 为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95, 则至少需要志愿者 （ ）

(A) 10 名　(B) 18 名　(C) 24 名　(D) 32 名

4. 北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所, 分上、中、下三层, 上层中心有一块圆形石板 (称为天心石), 环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环, 向外每环依次增加 9 块, 下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块, 向外每环依次也增加 9 块, 已知每层环数相同, 且下层比中层多 729 块, 则三层共有扇面形石板 (不含天心石) （ ）



(A) 3699 块　(B) 3474 块　(C) 3402 块　(D) 3339 块

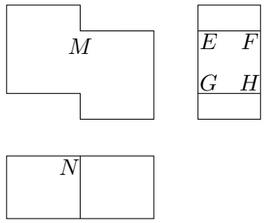
5. 若过点 $(2,1)$ 的圆与两坐标轴都相切, 则圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　(D) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

6. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{m+n}=a_m a_n$. 若 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$, 则 $k=$ （ ）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

7. 如图是一个多面体的三视图, 这个多面体某条棱的一个端点在正视图中对应的点为 M, 在俯视图中对应的点为 N, 则该端点在侧视图中对应的点为 （ ）



(A) E　(B) F　(C) G　(D) H

8. 设 O 为坐标原点, 直线 $x=a$ 与双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D, E 两点. 若 $\triangle ODE$ 的面积为 8, 则 C 的焦距的最小值为 （ ）

(A) 4　(B) 8　(C) 16　(D) 32

9. 设函数 $f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|$, 则 $f(x)$ （ ）

(A) 是偶函数, 且在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增

(B) 是奇函数, 且在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递减

(C) 是偶函数, 且在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递增

(D) 是奇函数, 且在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递减

10. 已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形, 且其顶点都在球 O 的球面上. 若球 O 的表面积为 16π, 则 O 到平面 ABC 的距离为 （ ）

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) 1　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11. 若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$, 则 （ ）

(A) $\ln(y-x+1)>0$　(B) $\ln(y-x+1)<0$

(C) $\ln|x-y|>0$　(D) $\ln|x-y|<0$

12. $0-1$ 周期序列在通信技术中有着重要应用. 若序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 满足 $a_i\in\{0,1\}$ $(i=1,2,\cdots)$, 且存在正整数 m, 使得 $a_{i+m}=a_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 成立, 则称其为 $0-1$ 周期序列, 并称满足 $a_{i+m}=a_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 的最小正整数 m 为这个序列的周期. 对于周期为 m 的 $0-1$ 序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $C(k)=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}$ $(k=1,2,\cdots,m-1)$ 是描述其性质的重要指标, 下列周期为 5 的 $0-1$ 序列中, 满足 $C(k)\leqslant\dfrac{1}{5}$ $(k=1,2,3,4)$ 的序列是( )

(A) $11010\cdots$　(B) $11011\cdots$　(C) $10001\cdots$　(D) $11001\cdots$

二、填空题

13. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°, $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直, 则 $k=$_____.

14. 4 名同学到 3 个小区参加垃圾分类宣传活动, 每名同学只去 1 个小区, 每个小区至少安排 1 名同学, 则不同的安排方法共有_____种.

15. 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=2$, $z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$, 则 $|z_1-z_2|=$_____.

16. 设有下列四个命题:

p_1: 两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内;

p_2: 过空间中任意三点有且仅有一个平面;

p_3: 若空间两条直线不相交, 则这两条直线平行;

p_4: 若直线 $l\subset$ 平面 α, 直线 $m\perp$ 平面 α, 则 $m\perp l$.

则下述命题中所有真命题的序号是_____.

① $p_1\wedge p_4$;　② $p_1\wedge p_2$;　③ $\neg p_2\vee p_3$;　④ $\neg p_3\vee\neg p_4$.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 中, $\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=\sin B\sin C$.

(1) 求 A;

(2) 若 $BC=3$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

18. 某沙漠地区经过治理, 生态系统得到很大改善, 野生动物数量有所增加. 为调查该地区某种野生动物数量, 将其分成面积相近的 200 个地块, 从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区, 调查得到样本数据 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,20)$, 其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积 (单位: 公顷) 和这种野生动物的数量, 并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{20}x_i=60$, $\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=1200$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2=80$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2=9000$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=800$.

(1) 求该地区这种野生动物数量的估计值 (这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物数量的平均数乘以地块数);

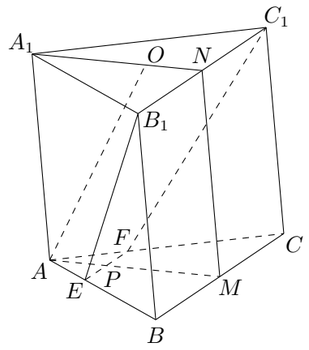
(2) 求样本 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,20)$ 的相关系数 (精确到 0.01);

(3) 根据现有统计资料, 各地块间植物覆盖面积差异很大. 为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计, 请给出一种你认为更合理的抽样方法, 并说明理由.

附: 相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$, $\sqrt{2}\approx1.414$.

19. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合, C_1 的中心与 C_2 的顶点重合. 过 F 且与 x 轴垂直的直线交 C_1 于 A, B 两点, 交 C_2 于 C, D 两点, 且 $|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$.
(1) 求 C_1 的离心率;
(2) 设 M 是 C_1 与 C_2 的公共点, 若 $|MF|=5$, 求 C_1 与 C_2 的标准方程.

20. 如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形, 侧面 BB_1C_1C 是矩形, M, N 分别为 BC, B_1C_1 的中点, P 为 AM 上一点, 过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E, 交 AC 于 F.
(1) 证明: $AA_1 /\!/ MN$, 且平面 $A_1AMN \perp$ 平面 EB_1C_1F;
(2) 设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心, 若 $AO /\!/$ 平面 EB_1C_1F, 且 $AO=AB$, 求直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值.



21. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x\sin 2x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 的单调性;
(2) 证明: $|f(x)|\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$;
(3) 设 $n\in\mathbf{N}^*$, 证明: $\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\sin^2 2^n x\leqslant\dfrac{3^n}{4^n}$.

22. 已知曲线 C_1, C_2 的参数方程分别为 C_1: $\begin{cases}x=4\cos^2\theta\\ y=4\sin^2\theta\end{cases}$ (θ 为参数), C_2: $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$ (t 为参数).
(1) 将 C_1, C_2 的参数方程化为普通方程;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 设 C_1, C_2 的交点为 P, 求圆心在极轴上, 且经过极点和 P 的圆的极坐标方程.

23. 已知函数 $f(x)=|x-a^2|+|x-2a+1|$.
(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集;
(2) 若 $f(x)\geqslant 4$, 求 a 的取值范围.

2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x|<3, x\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\,|\,|x|>1, x\in\mathbf{Z}\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

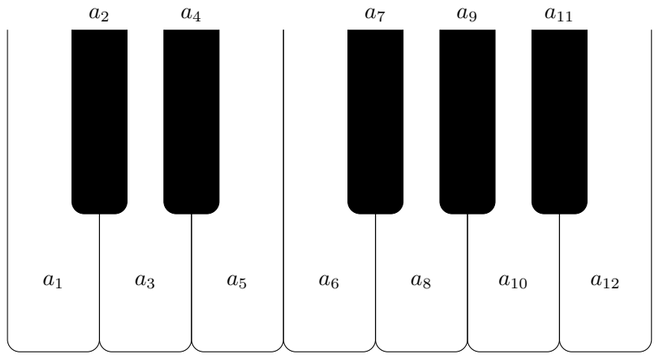
(A) $\varnothing$　　(B) $\{-3,-2,2,3\}$

(C) $\{-2,0,2\}$　　(D) $\{-2,2\}$

2. $(1-\mathrm{i})^4=$ （　）

(A) -4　　(B) 4　　(C) $-4\mathrm{i}$　　(D) $4\mathrm{i}$

3. 如图, 将钢琴上的 12 个键依次记为 $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$. 设 $1\leqslant i<j<k\leqslant 12$. 若 $k-j=3$ 且 $j-i=4$, 则称 a_i, a_j, a_k 为原位大三和弦; 若 $k-j=4$ 且 $j-i=3$, 则称 a_i, a_j, a_k 为原位小三和弦. 用这 12 个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为 （　）



(A) 5　　(B) 8　　(C) 10　　(D) 15

4. 在新冠肺炎疫情防控期间, 某超市开通网上销售业务, 每天能完成 1200 份订单的配货, 由于订单量大幅增加, 导致订单积压. 为解决困难, 许多志愿者踊跃报名参加配货工作. 已知该超市某日积压 500 份订单未配货, 预计第二天的新订单超过 1600 份的概率为 0.05, 志愿者每人每天能完成 50 份订单的配货, 为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95, 则至少需要志愿者 （　）

(A) 10 名　　(B) 18 名　　(C) 24 名　　(D) 32 名

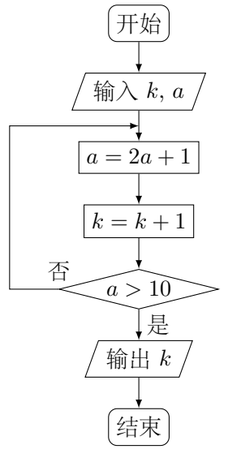
5. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, 则在下列向量中, 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的是 （　）

(A) $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　　(B) $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　(C) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$　　(D) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

6. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_5-a_3=12$, $a_6-a_4=24$, 则 $\dfrac{S_n}{a_n}=$ （　）

(A) 2^n-1　　(B) $2-2^{1-n}$　　(C) $2-2^{n-1}$　　(D) $2^{1-n}-1$

7. 执行下面的程序框图, 若输入的 $k=0$, $a=0$, 则输出的 k 为 （　）



(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

8. 若过点 $(2,1)$ 的圆与两坐标轴都相切, 则圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　(C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　(D) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

9. 设 O 为坐标原点, 直线 $x=a$ 与双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D, E 两点. 若 $\triangle ODE$ 的面积为 8, 则 C 的焦距的最小值为 （　）

(A) 4　　(B) 8　　(C) 16　　(D) 32

10. 设函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$, 则 $f(x)$ （　）

(A) 是奇函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递增

(B) 是奇函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

(C) 是偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递增

(D) 是偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

11. 已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形, 且其顶点都在球 O 的球面上. 若球 O 的表面积为 16π, 则 O 到平面 ABC 的距离为 （　）

(A) $\sqrt{3}$　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) 1　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12. 若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$, 则 （　）

(A) $\ln(y-x+1)>0$　　(B) $\ln(y-x+1)<0$

(C) $\ln|x-y|>0$　　(D) $\ln|x-y|<0$

二、填空题

13. 若 $\sin x=-\dfrac{2}{3}$, 则 $\cos 2x=$_____.

14. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=-2$, $a_2+a_6=2$, 则 $S_{10}=$_____.

15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant -1\\ x-y\geqslant -1\\ 2x-y\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最大值是_____.

16. 设有下列四个命题:

p_1: 两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内;

p_2: 过空间中任意三点有且仅有一个平面;

p_3: 若空间两条直线不相交, 则这两条直线平行;

p_4: 若直线 $l\subset$ 平面 α, 直线 $m\perp$ 平面 α, 则 $m\perp l$.

则下述命题中所有真命题的序号是_____.

① $p_1\wedge p_4$;　② $p_1\wedge p_2$;　③ $\neg p_2\vee p_3$;　④ $\neg p_3\vee\neg p_4$.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\dfrac{5}{4}$.

(1) 求 A;

(2) 若 $b-c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$, 证明: $\triangle ABC$ 是直角三角形.

18. 某沙漠地区经过治理, 生态系统得到很大改善, 野生动物数量有所增加. 为调查该地区某种野生动物的数量, 将其分成面积相近的 200 个地块, 从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区, 调查得到样本数据 (x_i,y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$, 其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积 (单位: 公顷) 和这种野生动物的数量, 并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{20}x_i=60$, $\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=1200$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2=80$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2=9000$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=800$.

(1) 求该地区这种野生动物数量的估计值 (这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物数量的平均数乘以地块数);

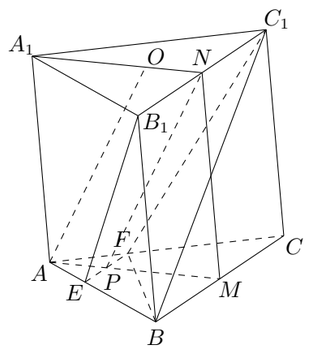
(2) 求样本 (x_i,y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$ 的相关系数 (精确到 0.01);

(3) 根据现有统计资料, 各地块间植物覆盖面积差异很大. 为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计, 请给出一种你认为更合理的抽样方法, 并说明理由.

附: 相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$, $\sqrt{2}\approx 1.414$.

19. 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合, C_1 的中心与 C_2 的顶点重合. 过 F 且与 x 轴重直的直线交 C_1 于 A, B 两点, 交 C_2 于 C, D 两点, 且 $|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$.
(1) 求 C_1 的离心率;
(2) 若 C_1 的四个顶点到 C_2 的准线距离之和为 12, 求 C_1 与 C_2 的标准方程.

20. 如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形, 侧面 BB_1C_1C 是矩形, M, N 分别为 BC, B_1C_1 的中点, P 为 AM 上一点. 过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E, 交 AC 于 F.
(1) 证明: $AA_1 /\!\!/ MN$, 且平面 $A_1AMN \perp$ 平面 EB_1C_1F;
(2) 设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心, 若 $AO=AB=6$, $AO /\!\!/$ 平面 EB_1C_1F, 且 $\angle MPN=\dfrac{\pi}{3}$, 求四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的体积.



21. 已知函数 $f(x)=2\ln x+1$.
(1) 若 $f(x)\leqslant 2x+c$, 求 c 的取值范围;
(2) 设 $a>0$ 时, 讨论函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的单调性.

22. 已知曲线 C_1, C_2 的参数方程分别为 C_1: $\begin{cases}x=4\cos^2\theta\\ y=4\sin^2\theta\end{cases}$ (θ 为参数), C_2: $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$ (t 为参数).
(1) 将 C_1, C_2 的参数方程化为普通方程;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 设 C_1, C_2 的交点为 P, 求圆心在极轴上, 且经过极点和 P 的圆的极坐标方程.

23. 已知函数 $f(x)=|x-a^2|+|x-2a+1|$.
(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集;
(2) 若 $f(x)\geqslant 4$, 求 a 的取值范围.

2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{N}^*,y\geqslant x\}$, $B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

2. 复数 $\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}$ 的虚部是 （ ）

(A) $-\dfrac{3}{10}$ (B) $-\dfrac{1}{10}$ (C) $\dfrac{1}{10}$ (D) $\dfrac{3}{10}$

3. 在一组样本数据中, 1, 2, 3, 4 出现的频率分别为 p_1, p_2, p_3, p_4, 且 $\sum\limits_{i=1}^{4}p_i=1$, 则下面四种情形中, 对应样本的标准差最大的一组是 （ ）

(A) $p_1=p_4=0.1$, $p_2=p_3=0.4$ (B) $p_1=p_4=0.4$, $p_2=p_3=0.1$

(C) $p_1=p_4=0.2$, $p_2=p_3=0.3$ (D) $p_1=p_4=0.3$, $p_2=p_3=0.2$

4. Logistic 模型是常用数学模型之一, 可应用于流行病学领城. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位: 天) 的 Logistic 模型: $I(t)=\dfrac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$, 其中 K 为最大确诊病例数. 当 $I(t^*)=0.95K$ 时, 标志着已初步遏制疫情, 则 t^* 约为 ($\ln 19\approx 3$) （ ）

(A) 60 (B) 63 (C) 66 (D) 69

5. 设 O 为坐标原点, 直线 $x=2$ 与抛物线 C: $y^2=2px$ ($p>0$) 交于 D, E 两点. 若 $OD\perp OE$, 则 C 的焦点坐标为 （ ）

(A) $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ (B) $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ (C) $(1,0)$ (D) $(2,0)$

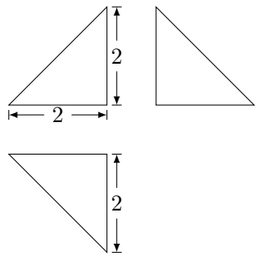
6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=6$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$, 则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=$ （ ）

(A) $-\dfrac{31}{35}$ (B) $-\dfrac{19}{35}$ (C) $\dfrac{17}{35}$ (D) $\dfrac{19}{35}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C=\dfrac{2}{3}$, $AC=4$, $BC=3$, 则 $\cos B=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{9}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

8. 下图为某几何体的三视图, 则该几何体的表面积是 （ ）



(A) $6+4\sqrt{2}$ (B) $4+4\sqrt{2}$ (C) $6+2\sqrt{3}$ (D) $4+2\sqrt{3}$

9. 已知 $2\tan\theta-\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=7$, 则 $\tan\theta=$ （ ）

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

10. 若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $x^2+y^2=\dfrac{1}{5}$ 都相切, 则 l 的方程为 （ ）

(A) $y=2x+1$ (B) $y=2x+\dfrac{1}{2}$ (C) $y=\dfrac{1}{2}x+1$ (D) $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

11. 设双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率为 $\sqrt{5}$. P 是 C 上一点, 且 $F_1P\perp F_2P$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4, 则 $a=$ （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

12. 已知 $5^5<8^4$, $13^4<8^5$. 设 $a=\log_5 3$, $b=\log_8 5$, $c=\log_{13}8$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$ (B) $b<a<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 0\\2x-y\geqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为_____.

14. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项是_____. (用数字作答)

15. 已知圆锥的底面半径为 1, 母线长为 3, 则该圆锥内半径最大的球的体积为_____.

16. 关于函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题:

① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称;

② $f(x)$ 的图象关于原点对称;

③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称;

④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是_____.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1) 计算 a_2, a_3, 猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;

(2) 求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次, 整理数据得到下表 (单位: 天):

空气质量等级 \ 锻炼人次	$[0,200]$	$(200,400]$	$(400,600]$
1 (优)	2	16	25
2 (良)	5	10	12
3 (轻度污染)	6	7	8
4 (中度污染)	7	2	0

(1) 分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率;

(2) 求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);

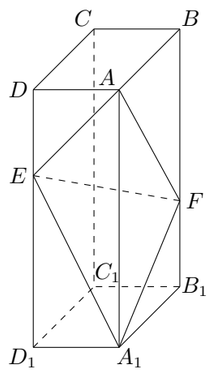
(3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2, 则称这天“空气质量好”; 若某天的空气质量等级为 3 或 4, 则称这天“空气质量不好”. 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表, 判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次 $\leqslant 400$	人次 >400
空气质量好		
空气质量不好		

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上, 且 $2DE=ED_1$, $BF=2FB_1$.
(1) 证明: 点 C_1 在平面 AEF 内;
(2) 若 $AB=2$, $AD=1$, $AA_1=3$, 求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值.



20. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1$ $(0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, A, B 分别为 C 的左、右顶点.
(1) 求 C 的方程;
(2) 若点 P 在 C 上, 点 Q 在直线 $x=6$ 上, 且 $|BP|=|BQ|$, $BP\perp BQ$, 求 $\triangle APQ$ 的面积.

21. 设函数 $f(x)=x^3+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与 y 轴垂直.
(1) 求 b;
(2) 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点, 证明: $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-t-t^2\\ y=2-3t+t^2\end{cases}$ (t 为参数且 $t\neq 1$), C 与坐标轴交于 A, B 两点.
(1) 求 $|AB|$;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求直线 AB 的极坐标方程.

23. 设 a, b, $c\in\mathbf{R}$, $a+b+c=0$, $abc=1$.
(1) 证明: $ab+bc+ca<0$;
(2) 用 $\max\{a,b,c\}$ 表示 a, b, c 中的最大值, 证明: $\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.

2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,5,7,11\}$, $B=\{x\mid 3<x<15\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 （ ）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

2. 若 $\overline{z}(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$, 则 $z=$ （ ）

(A) $1-\mathrm{i}$　(B) $1+\mathrm{i}$　(C) $-\mathrm{i}$　(D) i

3. 设一组样本数据 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的方差为 0.01, 则数据 $10x_1$, $10x_2$, $\cdots$, $10x_n$ 的方差为 （ ）

(A) 0.01　(B) 0.1　(C) 1　(D) 10

4. Logistic 模型是常用数学模型之一, 可应用于流行病学领域. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位: 天) 的 Logistic 模型: $I(t)=\dfrac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$, 其中 K 为最大确诊病例数. 当 $I(t^*)=0.95K$ 时, 标志着已初步遏制疫情, 则 t^* 约为 ($\ln 19\approx 3$) （ ）

(A) 60　(B) 63　(C) 66　(D) 69

5. 已知 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$, 则 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. 在平面内, A, B 是两个定点, C 是动点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1$, 则点 C 的轨迹为 （ ）

(A) 圆　(B) 椭圆　(C) 抛物线　(D) 直线

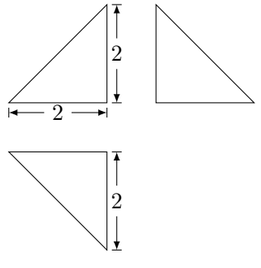
7. 设 O 为坐标原点, 直线 $x=2$ 与抛物线 C: $y^2=2px$ ($p>0$) 交于 D, E 两点. 若 $OD\perp OE$, 则 C 的焦点坐标为 （ ）

(A) $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$　(B) $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$　(C) $(1,0)$　(D) $(2,0)$

8. 点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 距离的最大值为 （ ）

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

9. 下图为某几何体的三视图, 则该几何体的表面积是 （ ）



(A) $6+4\sqrt{2}$　(B) $4+4\sqrt{2}$　(C) $6+2\sqrt{3}$　(D) $4+2\sqrt{3}$

10. 设 $a=\log_3 2$, $b=\log_5 3$, $c=\dfrac{2}{3}$, 则 （ ）

(A) $a<c<b$　(B) $a<b<c$　(C) $b<c<a$　(D) $c<a<b$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C=\dfrac{2}{3}$, $AC=4$, $BC=3$, 则 $\tan B=$ （ ）

(A) $\sqrt{5}$　(B) $2\sqrt{5}$　(C) $4\sqrt{5}$　(D) $8\sqrt{5}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$, 则 （ ）

(A) $f(x)$ 的最小值为 2

(B) $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

(C) $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称

(D) $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 0\\ 2x-y\geqslant 0\\ x\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为_____.

14. 设双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的一条渐近线为 $y=\sqrt{2}x$, 则 C 的离心率为_____.

15. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+a}$. 若 $f'(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{4}$, 则 $a=$_____.

16. 已知圆锥的底面半径为 1, 母线长为 3, 则该圆锥内半径最大的球的体积为_____.

三、解答题

17. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=4$, $a_3-a_1=8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$, 求 m.

18. 某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次, 整理数据得到下表 (单位: 天):

空气质量等级 \ 锻炼人次	$[0,200]$	$(200,400]$	$(400,600]$
1 (优)	2	16	25
2 (良)	5	10	12
3 (轻度污染)	6	7	8
4 (中度污染)	7	2	0

(1) 分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率;

(2) 求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);

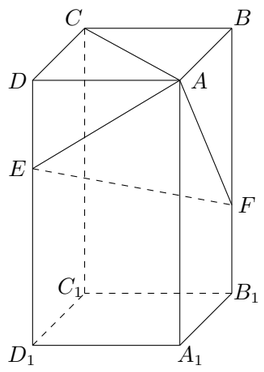
(3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2, 则称这天“空气质量好”; 若某天的空气质量等级为 3 或 4, 则称这天“空气质量不好”. 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表, 判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次 $\leqslant 400$	人次 >400
空气质量好		
空气质量不好		

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上, 且 $2DE=ED_1$, $BF=2FB_1$. 证明:
(1) 当 $AB=BC$ 时, $EF\perp AC$;
(2) 点 C_1 在平面 AEF 内.



20. 已知函数 $f(x)=x^3-kx+k^2$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x)$ 有三个零点, 求 k 的取值范围.

21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1$ $(0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, A, B 分别为 C 的左、右顶点.
(1) 求 C 的方程;
(2) 若点 P 在 C 上, 点 Q 在直线 $x=6$ 上, 且 $|BP|=|BQ|$, $BP\perp BQ$, 求 $\triangle APQ$ 的面积.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-t-t^2\\ y=2-3t+t^2\end{cases}$ (t 为参数且 $t\neq 1$), C 与坐标轴交于 A, B 两点.
(1) 求 $|AB|$;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求直线 AB 的极坐标方程.

23. 设 a, b, $c\in\mathbf{R}$, $a+b+c=0$, $abc=1$.
(1) 证明: $ab+bc+ca<0$;
(2) 用 $\max\{a,b,c\}$ 表示 a, b, c 中的最大值, 证明: $\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.

2020 年普通高等学校招生考试 (上海卷)

数学试卷

一、选择题

1. 若集合 $A=\{1,2,4\}$, $B=\{2,4,5\}$, 则 $A\cap B=$_____.

2. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n-1}=$_____.

3. 若复数 $z=1-2\mathrm{i}$ (其中 i 为虚数单位), 则 $|z|=$_____.

4. 函数 $f(x)=x^3$ 的反函数为_____.

5. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x+2y-3\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=y-2x$ 的最大值为_____.

6. 设 a, b, c, $d\in\mathbf{R}$, 若行列式 $\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 2 & c & d\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}=6$, 则行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=$_____.

7. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 若 1, 2, a, b 这四个数的中位数为 3, 平均数为 4, 则 $ab=$_____.

8. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n, 若 $a_1+a_{10}=a_9$, 则 $\dfrac{S_9}{a_{10}}=$_____.

9. 从 6 人中选出 4 人去值班, 每人值班一天, 若第一天安排 1 人, 第二天安排 1 人, 第三天安排 2 人, 则不同安排方法的种数为_____. (结果用数值表示)

10. 已知椭圆 Γ: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F, 点 P 位于第二象限且在 Γ 上, 联结 PF 并延长, 交 Γ 于点 $Q(x_A,y_Q)$, 点 $Q'(x_{Q'},y_{Q'})$ 也在 Γ 上, 且 $y_Q+y_{Q'}=0$. 若 $FQ'\perp FP$, 则直线 PQ 的方程为_____.

11. 设 $a\in\mathbf{R}$, 若存在定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 既满足"对任意 $x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)$ 的值为 x_0^2 或 x_0"又满足"关于 x 的方程 $f(x)=a$ 无实数解", 则 a 取值范围是_____.

12. 已知 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_k$ 是平面内两两互不相等的向量, 若 $|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2|=1$, 且 $|\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{b}_j|\in\{1,2\}$ (其中 $i=1,2$, $j=1,2,\cdots,k$), 则 k 最大值为_____.

二、选择题

13. 若 a, $b\in\mathbf{R}$, 则下列不等式中, 恒成立的是 (　　)

(A) $a^2+b^2\leqslant 2ab$　　(B) $a^2+b^2\geqslant -2ab$

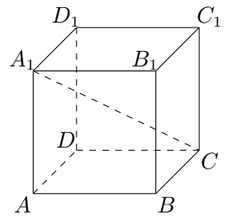
(C) $a+b\geqslant 2\sqrt{|ab|}$　　(D) $a+b\geqslant -2\sqrt{|ab|}$

14. 直线 $3x+4y+1=0$ 的一个参数方程可以为 (　　)

(A) $\begin{cases}x=1+3t\\ y=-1+4t\end{cases}$ (t 为参数)　　(B) $\begin{cases}x=1-3t\\ y=-1+4t\end{cases}$ (t 为参数)

(C) $\begin{cases}x=1-4t\\ y=-1-3t\end{cases}$ (t 为参数)　　(D) $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-1-3t\end{cases}$ (t 为参数)

15. 在如图所示的棱长为 10 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 一条平行于 A_1C 的直线与正方体的表面交于 P, Q 两点, 其中 P 在侧面 ADD_1A_1 上, 且到 A_1D_1 的距离为 3, 到 AA_1 的距离为 2, 则点 Q 所在的面是 (　　)



(A) $ABCD$　　(B) ABB_1A_1　　(C) BCC_1B_1　　(D) CDD_1C_1

16. 对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$, 考察以下性质:

p: 存在非零实数 a, 使得 $f(x+a)<f(x)+f(a)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立;

q_1: $y=f(x)$ 单调递减, 且 $f(x)$ 恒大于 0;

q_2: $y=f(x)$ 单调递增, 且存在 $x_0<0$, 使得 $f(x_0)=0$.

关于上述性质, 以下判断正确的是 (　　)

(A) q_1, q_2 都是 p 的充分条件　　(B) q_1, q_2 中仅 q_1 是 p 的充分条件

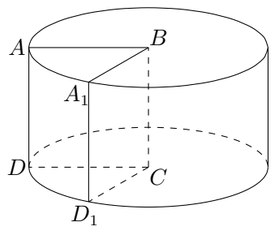
(C) q_1, q_2 中仅 q_2 是 p 的充分条件　　(D) q_1, q_2 都不是 p 的充分条件

三、解答题

17. 如图所示, 边长为 1 的正方形 $ABCD$ 绕 BC 边旋转后形成一个圆柱.

(1) 求该圆柱表面积 S;

(2) 正方形 $ABCD$ 绕 BC 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 到 A_1BCD_1, 求 AD_1 与平面 $ABCD$ 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



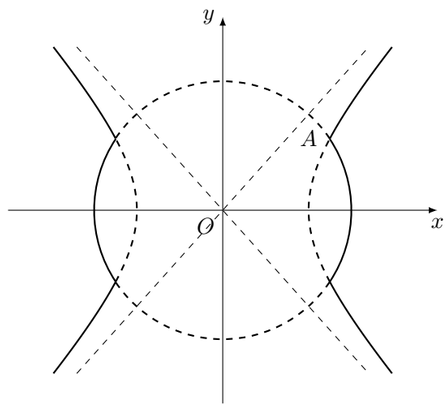
18. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x$ ($\omega>0$).

(1) 若函数 $y=f(x)$ 的周期为 4π, 求 ω 及此时 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的解集;

(2) 若 $\omega=1$, 设 $g(x)=f^2(x)+\sqrt{3}f(-x)\cdot f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 求函数 $y=g(x)$ 值域.

19. 在研究某市交通情况时, 道路密度是指该路段上一定时间内通过的车辆数量除以时间, 车辆密度是指该路段一定时间内通过的车辆数除以该路段的长度. 现定义交通流量为 $v=\dfrac{q}{x}$, 其中 x 为道路密度, q 为车辆密度. 据调查某路段的交通流量有如下规律: $v=\begin{cases}100-135\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{80}{x}}, & 0<x<40\\ -k(x-40)+85, & 40\leqslant x\leqslant 80\end{cases}$, (其中 $k>0$).
(1) 当交通流量大于 95 时, 求道路密度 x 的取值范围;
(2) 若道路密度 $x=80$ 时, 测得交通流量 $v=50$, 求车辆密度 q 的最大值.

20. 设 $b>0$. 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(x_A,y_A)$ 是双曲线 C_1: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和圆 C_2: $x^2+y^2=4+b^2$ 在第一象限内的交点, 曲线 Γ 由 C_1 中满足 $|x|\geqslant|x_A|$ 的部分和 C_2 中满足 $|x|\geqslant|x_A|$ 的部分构成.
(1) 若 $x_A=\sqrt{6}$, 求 b 的值;
(2) 若 $b=\sqrt{5}$, F_1, F_2 分别为 Γ 与 x 轴的左、右两个交点, 第一象限内的点 P 也在 Γ 上, 且 $|PF_1|=8$, 求 $\angle F_1PF_2$ 的大小;
(3) 过点 $S\left(0,\dfrac{b^2}{2}+2\right)$ 作斜率为 $-\dfrac{b}{2}$ 的直线 l. 若 l 与 Γ 恰有两个不同的公共点, 记为 M、N, 用 b 表示 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$, 并求当 b 变化时, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围.



21. 对于至少有三项的有穷实数数列 $\{a_n\}$, 若 $|a_2-a_1|\leqslant|a_3-a_1|\leqslant\cdots\leqslant|a_m-a_1|$ (其中 m 为 $\{a_n\}$ 的项数), 则称具有性质 P.
(1) 分别判断数列 3, 2, 5, 1 与数列 4, 3, 2, 5, 1 是否具有性质 P, 并说明理由;
(2) 已知首项为 1, 公比为 q, 项数为 10 的等比数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P, 求 q 的取值范围;
(3) 给定正整数 $m\geqslant 4$. 设数列 $\{a_n\}$ 是 1, 2, $\cdots$, m 的一个排列, 项数为 $m-1$ 的数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_k=a_{k-1}$ ($k=1,2,\cdots,m-1$), 且 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都具有性质 P, 求所有满足条件的数列 $\{a_n\}$.

2020 年普通高等学校招生考试（天津卷）

数学试卷

一、填空题

1. 设全集 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{-3,0,2,3\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$（　）

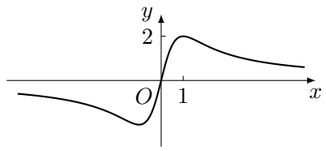
(A) $\{-3,3\}$　(B) $\{0,2\}$　(C) $\{-1,1\}$　(D) $\{-3,-2,-1,1,3\}$

2. 设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a>1$”是“$a^2>a$”的（　）

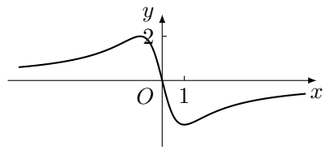
(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件　(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 函数 $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$ 的图象大致为（　）

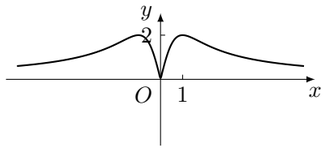
(A)



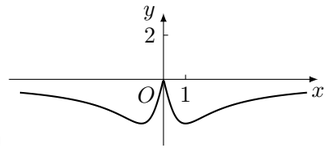
(B)



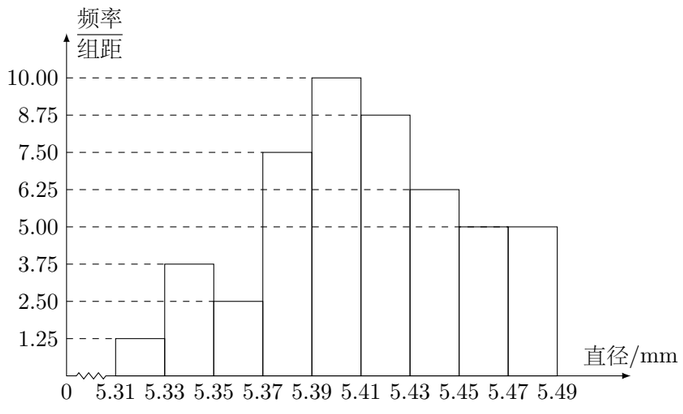
(C)



(D)



4. 从一批零件中抽取 80 个，测量其直径（单位：mm），将所得数据分为 9 组：$[5.31,5.33)$，$[5.33,5.35)$，$\cdots$，$[5.45,5.47)$，$[5.47,5.49]$，并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取的零件中，直径落在区间 $[5.43,5.47)$ 内的个数为（　）



(A) 10　(B) 18　(C) 20　(D) 36

5. 若棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　）

(A) 12π　(B) 24π　(C) 36π　(D) 144π

6. 设 $a=3^{0.7}$，$b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-0.8}$，$c=\log_{0.7}0.8$，则 a，b，c 的大小关系为（　）

(A) $a<b<c$　(B) $b<a<c$　(C) $b<c<a$　(D) $c<a<b$

7. 设双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$，过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点和点 $(0,b)$ 的直线为 l. 若 C 的一条渐近线与 l 平行，另一条渐近线与 l 垂直，则双曲线 C 的方程为（　）

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$　(D) $x^2-y^2=1$

8. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. 给出下列结论：

① $f(x)$ 的最小正周期为 2π；

② $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值；

③ 把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，可得到函数 $y=f(x)$ 的图象.

其中所有正确结论的序号是（　）

(A) ①　(B) ①③　(C) ②③　(D) ①②③

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$. 若函数 $g(x)=f(x)-|kx^2-2x|$ $(k\in\mathbf{R})$ 恰有 4 个零点，则 k 的取值范围是（　）

(A) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$　(B) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(0,2\sqrt{2}\right)$

(C) $(-\infty,0)\cup\left(0,2\sqrt{2}\right)$　(D) $(-\infty,0)\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$

二、填空题

10. i 是虚数单位，复数 $\dfrac{8-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=$_____.

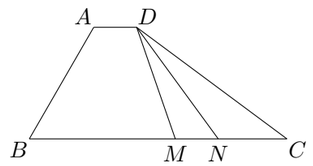
11. 在 $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式中，x^2 的系数是_____.

12. 已知直线 $x-\sqrt{3}y+8=0$ 和圆 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相交于 A，B 两点. 若 $|AB|=6$，则 r 的值为_____.

13. 已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{3}$. 假定两球是否落入盒子互不影响，则甲、乙两球都落入盒子的概率为_____；甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为_____.

14. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $ab=1$，则 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{8}{a+b}$ 的最小值为_____.

15. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^\circ$，$AB=3$，$BC=6$，且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3}{2}$，则实数 λ 的值为，若 M，N 是线段 BC 上的动点，且 $\left|\overrightarrow{MN}\right|=1$，则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为_____.



三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知 $a=2\sqrt{2}$，$b=5$，$c=\sqrt{13}$.

(1) 求角 C 的大小；

(2) 求 $\sin A$ 的值；

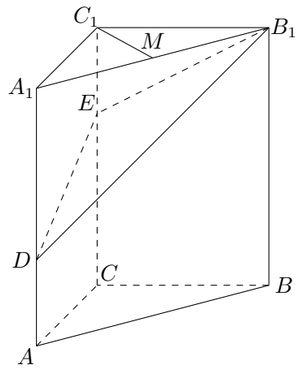
(3) 求 $\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

17. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，$AC=BC=2$，$CC_1=3$，点 D，E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上，且 $AD=1$，$CE=2$，M 为棱 A_1B_1 的中点.

(1) 求证：$C_1M\perp B_1D$；

(2) 求二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值；

(3) 求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值.



18. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个顶点为 $A\,(0,-3)$, 右焦点为 F, 且 $|OA|=|OF|$, 其中 O 为原点.

(1) 求椭圆方程;

(2) 已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$, 点 B 在椭圆上 (B 异于椭圆的顶点), 直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P, 且 P 为线段 AB 的中点. 求直线 AB 的方程.

19. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1=b_1=1$, $a_5=5\,(a_4-a_3)$, $b_5=4\,(b_4-b_3)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 求证: $S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(3) 对任意的正整数 n, 设 $c_n=\begin{cases}\dfrac{(3a_n-2)\,b_n}{a_na_{n+2}}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

20. 已知函数 $f\,(x)=x^3+k\ln x\ (k\in\mathbf{R})$, $f'\,(x)$ 为 $f\,(x)$ 的导函数.

(1) 当 $k=6$ 时,

① 求曲线 $y=f\,(x)$ 在点 $(1,f\,(1))$ 处的切线方程;

② 求函数 $g\,(x)=f\,(x)-f'\,(x)+\dfrac{9}{x}$ 的单调区间和极值;

(2) 当 $k\geqslant -3$ 时, 求证: 对任意的 x_1, $x_2\in[1,+\infty)$, 且 $x_1>x_2$, 有 $\dfrac{f'\,(x_1)+f'\,(x_2)}{2}>\dfrac{f\,(x_1)-f\,(x_2)}{x_1-x_2}$.

2020 年普通高等学校招生考试（新高考 I）

数学试卷

一、单选题

1. 设集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x\mid 2<x<4\}$, 则 $A\cup B=$ （ ）

(A) $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$　(B) $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$

(C) $\{x\mid 1\leqslant x<4\}$　(D) $\{x\mid 1<x<4\}$

2. $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) 1　(B) -1　(C) i　(D) $-\mathrm{i}$

3. 6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者, 每名同学只去 1 个场馆, 甲场馆安排 1 名, 乙场馆安排 2 名, 丙场馆安排 3 名, 则不同的安排方法共有（ ）

(A) 120 种　(B) 90 种　(C) 60 种　(D) 30 种

4. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球 (球心记为 O), 地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角, 点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面. 在点 A 处放置一个日晷, 若晷面与赤道所在平面平行, 点 A 处的纬度为北纬 $40°$, 则晷针与点 A 处的水平面所成角为 （ ）



(A) $20°$　(B) $40°$　(C) $50°$　(D) $90°$

5. 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳, 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 （ ）

(A) 62%　(B) 56%　(C) 46%　(D) 42%

6. 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数, 世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段, 可以用指数模型: $I(t)=\mathrm{e}^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t (单位: 天) 的变化规律, 指数增长率 r 与 R_0, T 近似满足 $R_0=1+rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$, $T=6$. 据此, 在新冠肺炎疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 $(\ln 2\approx 0.69)$ （ ）

(A) 1.2 天　(B) 1.8 天　(C) 2.5 天　(D) 3.5 天

7. 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点, 则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 （ ）

(A) $(-2,6)$　(B) $(-6,2)$　(C) $(-2,4)$　(D) $(-4,6)$

8. 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减, 且 $f(2)=0$, 则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,1]\cup[3,+\infty)$　(B) $[-3,-1]\cup[0,1]$

(C) $[-1,0]\cup[1,+\infty)$　(D) $[-1,0]\cup[1,3]$

二、多选题

9. 已知曲线 C: $mx^2+ny^2=1$ （ ）

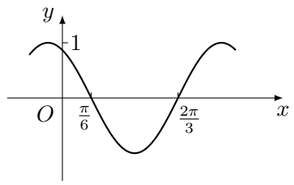
(A) 若 $m>n>0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上

(B) 若 $m=n>0$, 则 C 是圆, 其半径为 $\sqrt{n}$

(C) 若 $mn<0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$

(D) 若 $m=0$, $n>0$, 则 C 是两条直线

10. 下图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象, 则 $\sin(\omega x+\varphi)=$ （ ）



(A) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　(B) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

(C) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　(D) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$

11. 已知 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=1$, 则 （ ）

(A) $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$　(B) $2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$

(C) $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$　(D) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

12. 信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量 X 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,n$, 且 $P(X=i)=p_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$, 定义 X 的信息熵 $H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$. （ ）

(A) 若 $n=1$, 则 $H(X)=0$

(B) 若 $n=2$, 则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大

(C) 若 $p_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大

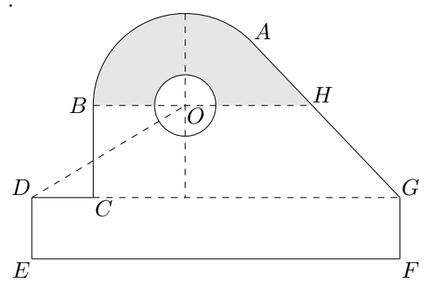
(D) 若 $n=2m$, 随机变量 Y 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,m$, 且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}$ $(j=1,2,\cdots,m)$, 则 $H(X)\leqslant H(Y)$

三、填空题

13. 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$_____.

14. 将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为_____.

15. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC\perp DG$, 垂足为 C, $\tan\angle ODC=\dfrac{3}{5}$, $BH\parallel DG$, $EF=12$ cm, $DE=2$ cm, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm, 圆孔半径为 1 cm, 则图中阴影部分的面积为_____cm^2.



16. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2, $\angle BAD=60°$. 以 D_1 为球心, $\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为_____.

四、解答题

17. 在① $ac=\sqrt{3}$, ② $c\sin A=3$, ③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$, $C=\dfrac{\pi}{6}$?

18. 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20$, $a_3=8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0,m]$ $(m\in\mathbf{N}^*)$ 中的项的个数, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100}.

19. 为加强环境保护, 治理空气污染, 环境监测部门对某市空气质量进行调研, 随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 和 SO_2 浓度 (单位: $\mu g/m^3$), 得下表:

PM2.5 \ SO_2	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
$[0,35]$	32	18	4
$(35,75]$	6	8	12
$(75,115]$	3	7	10

(1) 估计事件"该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75, 且 SO_2 浓度不超过 150"的概率;

(2) 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表:

PM2.5 \ SO_2	$[0,150]$	$(150,475]$
$[0,75]$		
$(75,115]$		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关?

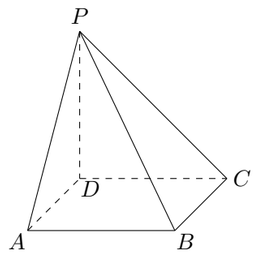
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

(1) 证明: $l\perp$ 平面 PDC;

(2) 已知 $PD=AD=1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



22. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $A(2,1)$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 点 M, N 在 C 上, 且 $AM\perp AN$, $AD\perp MN$, D 垂足. 证明: 存在定点 Q, 使得 $|DQ|$ 为定值.

21. 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

(1) 当 $a=e$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若 $f(x)\geqslant 1$, 求 a 的取值范围.

2020 年普通高等学校招生考试（新高考 II）

数学试卷

一、单选题

1. 设集合 $A=\{2,3,5,7\}$, $B=\{1,2,3,5,8\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{1,3,5,7\}$　(B) $\{2,3\}$

(C) $\{2,3,5\}$　(D) $\{1,2,3,5,7,8\}$

2. $(1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=$ （ ）

(A) $4+5\mathrm{i}$　(B) $5\mathrm{i}$　(C) $-5\mathrm{i}$　(D) $2+3\mathrm{i}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 边上的中点, 则 $\overrightarrow{CB}=$ （ ）

(A) $2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}$　(B) $\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}$　(C) $2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$　(D) $\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CA}$

4. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球 (球心记为 O), 地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角, 点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面. 在点 A 处放置一个日晷, 若晷面与赤道所在平面平行, 点 A 处的纬度为北纬 $40°$, 则晷针与点 A 处的水平面所成角为 （ ）



(A) $20°$　(B) $40°$　(C) $50°$　(D) $90°$

5. 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳, 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 （ ）

(A) 62%　(B) 56%　(C) 46%　(D) 42%

6. 要安排 3 名学生到 2 个乡村做志愿者, 每名学生只能选择去一个村, 每个村里至少有一名志愿者, 则不同的安排方法共有 （ ）

(A) 2 种　(B) 3 种　(C) 6 种　(D) 8 种

7. 已知函数 $f(x)=\lg(x^2-4x-5)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $(2,+\infty)$　(B) $[2,+\infty)$　(C) $(5,+\infty)$　(D) $[5,+\infty)$

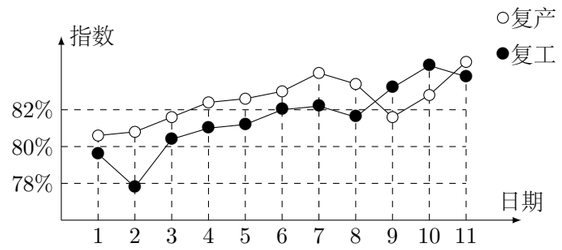
8. 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减, 且 $f(2)=0$, 则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,1]\cup[3,+\infty)$　(B) $[-3,-1]\cup[0,1]$

(C) $[-1,0]\cup[1,+\infty)$　(D) $[-1,0]\cup[1,3]$

二、多选题

9. 我国新冠肺炎疫情进入常态化, 各地有序推进复工复产, 下面是某地连续 11 天复工复产指数折线图, 下列说法正确的是 （ ）



(A) 这 11 天复工指数和复产指数均逐日增加

(B) 这 11 天期间, 复产指数增量大于复工指数的增量

(C) 第 3 天至第 11 天复工复产指数均超过 80%

(D) 第 9 天至第 11 天复产指数增量大于复工指数的增量

10. 已知曲线 C: $mx^2+ny^2=1$ （ ）

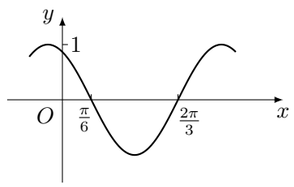
(A) 若 $m>n>0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上

(B) 若 $m=n>0$, 则 C 是圆, 其半径为 $\sqrt{n}$

(C) 若 $mn<0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$

(D) 若 $m=0$, $n>0$, 则 C 是两条直线

11. 下图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象, 则 $\sin(\omega x+\varphi)=$ （ ）



(A) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　(B) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

(C) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　(D) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$

12. 已知 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=1$, 则 （ ）

(A) $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$　(B) $2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$

(C) $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$　(D) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

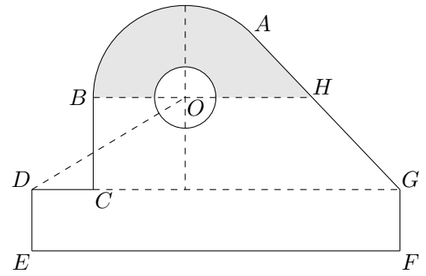
三、填空题

13. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M, N 分别为 BB_1, AB 的中点, 则三棱锥 $A-NMD_1$ 的体积为_____.

14. 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$_____.

15. 将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为_____.

16. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC\perp DG$, 垂足为 C, $\tan\angle ODC=\dfrac{3}{5}$, $BH\parallel DG$, $EF=12$ cm, $DE=2$ cm, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm, 圆孔半径为 1 cm, 则图中阴影部分的面积为_____cm^2.



四、解答题

17. 在① $ac=\sqrt{3}$, ② $c\sin A=3$, ③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$, $C=\dfrac{\pi}{6}$, ?

18. 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20$, $a_3=8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$.

19. 为加强环境保护, 治理空气污染, 环境监测部门对某市空气质量进行调研, 随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 和 SO_2 浓度 (单位: $\mu g/m^3$), 得下表:

PM2.5 \ SO_2	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
$[0,35]$	32	18	4
$(35,75]$	6	8	12
$(75,115]$	3	7	10

(1) 估计事件"该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75, 且 SO_2 浓度不超过 150"的概率;

(2) 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表:

PM2.5 \ SO_2	$[0,150]$	$(150,475]$
$[0,75]$		
$(75,115]$		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关?

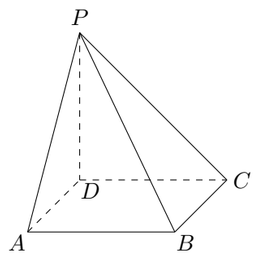
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

(1) 证明: $l\perp$ 平面 PDC;

(2) 已知 $PD=AD=1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $M(2,3)$, 点 A 为其左顶点, 且 AM 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 C 方程;

(2) 点 N 为椭圆上任意一点, 求 $\triangle AMN$ 的面积的最大值.

22. 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

(1) 当 $a=e$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若 $f(x)\geqslant 1$, 求 a 的取值范围.

2020 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $P=\{x\mid 1<x<4\}$, $Q=\{2<x<3\}$, 则 $P\cap Q=$ （　）

(A) $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$　(B) $\{x\mid 2<x<3\}$

(C) $\{x\mid 3\leqslant x<4\}$　(D) $\{x\mid 1<x<4\}$

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 若 $a-1+(a-2)\,\mathrm{i}$ (i 为虚数单位) 是实数, 则 $a=$ （　）

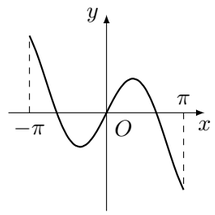
(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) -2

3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-3y+1\leqslant 0\\ x+y-3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的取值范围是 （　）

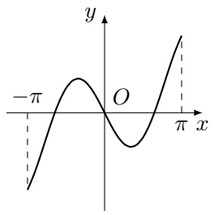
(A) $(-\infty,4]$　(B) $[4,+\infty)$　(C) $[5,+\infty)$　(D) $(-\infty,+\infty)$

4. 函数 $y=x\cos x+\sin x$ 在区间 $[-\pi,+\pi]$ 的图象大致为 （　）

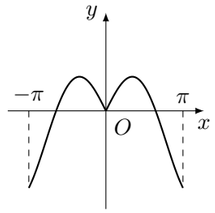
(A)



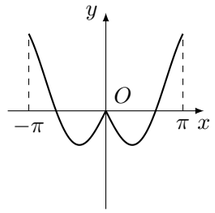
(B)



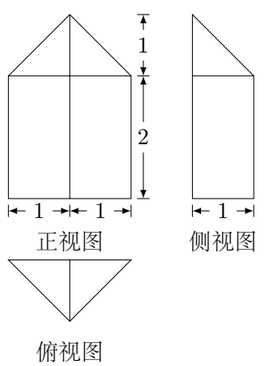
(C)



(D)



5. 某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该几何体的体积 (单位: cm^3) 是 （　）



(A) $\dfrac{7}{3}$　(B) $\dfrac{14}{3}$　(C) 3　(D) 6

6. 已知空间中不过同一点的三条直线 m, n, l, 则“m, n, l 在同一平面”是“m, n, l 两两相交”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n, 公差 $d\neq 0$, $\dfrac{a_1}{d}\leqslant 1$. 记 $b_1=S_2$, $b_{n+1}=S_{2n+2}-S_{2n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 下列等式不可能成立的是 （　）

(A) $2a_4=a_2+a_6$　(B) $2b_4=b_2+b_6$

(C) $a_4^2=a_2a_8$　(D) $b_4^2=b_2b_8$

8. 已知点 $O(0,0)$, $A(-2,0)$, $B(2,0)$. 设点 P 满足 $|PA|-|PB|=2$, 且 P 为函数 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 图象上的点, 则 $|OP|=$ （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$　(B) $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$　(C) $\sqrt{7}$　(D) $\sqrt{10}$

9. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq 0$, 若 $(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geqslant 0$ 在 $x\geqslant 0$ 上恒成立, 则 （　）

(A) $a<0$　(B) $a>0$　(C) $b<0$　(D) $b>0$

10. 设集合 S, T, $S\subseteq\mathbf{N}^*$, $T\subseteq\mathbf{N}^*$, S, T 中至少有两个元素, 且 S, T 满足:
① 对于任意 x, $y\in S$, 若 $x\neq y$, 都有 $xy\in T$;
② 对于任意 x, $y\in T$, 若 $x<y$, 则 $\dfrac{y}{x}\in S$.
下列命题正确的是 （　）

(A) 若 S 有 4 个元素, 则 $S\cup T$ 有 7 个元素

(B) 若 S 有 4 个元素, 则 $S\cup T$ 有 6 个元素

(C) 若 S 有 3 个元素, 则 $S\cup T$ 有 4 个元素

(D) 若 S 有 3 个元素, 则 $S\cup T$ 有 5 个元素

二、填空题

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, 则 $S_3=$_____.

12. 设 $(1+2x)^5=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4+a_6x^5$, 则 $a_5=$_____; $a_1+a_2+a_3=$_____.

13. 已知 $\tan\theta=2$, 则 $\cos 2\theta=$_____; $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=$_____.

14. 已知圆锥展开图的侧面积为 2π, 且为半圆, 则底面半径为_____.

15. 设直线 l: $y=kx+b$ ($k>0$), 圆 C_1: $x^2+y^2=1$, C_2: $(x-4)^2+y^2=1$, 若直线 l 与 C_1, C_2 都相切, 则 $k=$_____; $b=$_____.

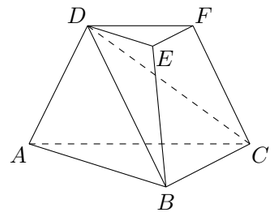
16. 一个盒子里有 1 个红 1 个绿 2 个黄四个相同的球, 每次拿一个, 不放回, 拿出红球即停, 设拿出黄球的个数为 ξ, 则 $P(\xi=0)=$_____; $E(\xi)=$_____.

17. 设 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量, 满足 $|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 则 $\cos^2\theta$ 的最小值为_____.

三、解答题

18. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $2b\sin A=\sqrt{3}a$.
(1) 求角 B;
(2) 求 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围.

19. 如图, 三棱台 $DEF-ABC$ 中, 面 $ADFC\perp$ 面 ABC, $\angle ACB=\angle ACD=45^\circ$, $DC=2BC$.
(1) 证明: $EF\perp DB$;
(2) 求 DF 与面 DBC 所成角的正弦值.



20. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 中, $a_1=b_1=c_1=1$, $c_n=a_{n+1}-a_n$, $c_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}\cdot c_n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

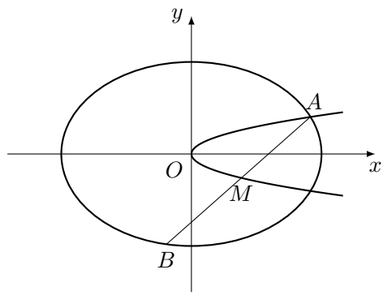
(1) 若数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且公比 $q>0$, 且 $b_1+b_2=6b_3$, 求 q 与 a_n 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且公差 $d>0$, 证明: $c_1+c_2+\cdots+c_n<1+\dfrac{1}{d}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

21. 如图, 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$, 抛物线 $C_2:y^2=2px\,(p>0)$, 点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点, 过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B, 交抛物线 C_2 于 M (B, M 不同于 A).

(1) 若 $p=\dfrac{1}{16}$, 求抛物线 C_2 的焦点坐标;

(2) 若存在不过原点的直线 l 使 M 为线段 AB 的中点, 求 p 的最大值.



22. 已知 $1<a\leqslant 2$, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-a$, 其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 证明: 函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点;

(2) 记 x_0 为函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点, 证明:

① $\sqrt{a-1}\leqslant x_0\leqslant\sqrt{2(a-1)}$;

② $x_0f(\mathrm{e}^{x_0})\geqslant(\mathrm{e}-1)(a-1)a$.

2021 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 设 $2(z+\overline{z})+3(z-\overline{z})=4+6\mathrm{i}$, 则 $z=$ （　）

(A) $1-2\mathrm{i}$　(B) $1+2\mathrm{i}$　(C) $1+\mathrm{i}$　(D) $1-\mathrm{i}$

2. 已知集合 $S=\{s\,|\,s=2n+1, n\in\mathbf{Z}\}$, $T=\{t\,|\,t=4n+1, n\in\mathbf{Z}\}$, 则 $S\cap T=$ （　）

(A) $\varnothing$　(B) S　(C) T　(D) $\mathbf{Z}$

3. 已知命题 p: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x<1$; 命题 q: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{|x|}\geqslant 1$, 则下列命题中为真命题的是 （　）

(A) $p\wedge q$　(B) $\neg p\wedge q$　(C) $p\wedge\neg q$　(D) $\neg(p\vee q)$

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中是奇函数的是 （　）

(A) $f(x-1)-1$　(B) $f(x-1)+1$

(C) $f(x+1)-1$　(D) $f(x+1)+1$

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成角为 （　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分配到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 则不同的分配方案共有 （　）

(A) 60 种　(B) 120 种　(C) 240 种　(D) 480 种

7. 把函数 $y=f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图像, 则 $f(x)=$ （　）

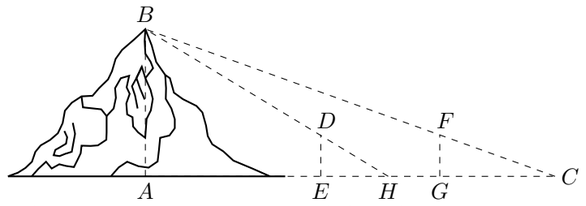
(A) $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{7\pi}{12}\right)$　(B) $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)$

(C) $\sin\left(2x-\dfrac{7\pi}{12}\right)$　(D) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

8. 在区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 中各随机取 1 个数, 则两数之和大于 $\dfrac{7}{4}$ 的概率为（　）

(A) $\dfrac{7}{9}$　(B) $\dfrac{23}{32}$　(C) $\dfrac{9}{32}$　(D) $\dfrac{2}{9}$

9. 魏晋时期刘徽编写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量海岛的高. 如图, 点 E, H, G 在水平线 AC 上, DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度, 称为“表高”, EG 称为“表距”, GC 和 EH 都称为“表目距”, GC 与 EH 的差称为“表目距的差”, 则海岛的高 $AB=$ （　）



(A) $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表高}$　(B) $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-\text{表高}$

(C) $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表距}$　(D) $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-\text{表距}$

10. 设 $a\neq 0$, 若 $x=a$ 是函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则（　）

(A) $a<b$　(B) $a>b$　(C) $ab<a^2$　(D) $ab>a^2$

11. 设 B 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的上顶点, 若 C 上任意一点 P 都满足 $|PB|\leqslant 2b$, 则 C 的离心率的取值范围是 （　）

(A) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　(B) $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　(C) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　(D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

12. 设 $a=2\ln 1.01$, $b=\ln 1.02$, $c=\sqrt{1.04}-1$, 则 （　）

(A) $a<b<c$　(B) $b<c<a$　(C) $b<a<c$　(D) $c<a<b$

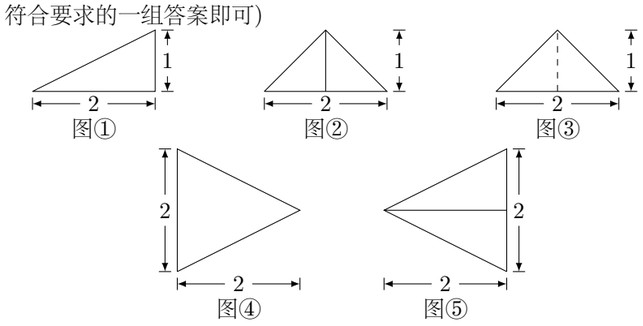
二、填空题

13. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{m}-y^2=1$ $(m>0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x+my=0$, 则 C 的焦距为_____.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$, $\boldsymbol{b}=(3,4)$, $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\lambda=$_____.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 面积为 $\sqrt{3}$, $B=60^\circ$, $a^2+c^2=3ac$, 则 $b=$_____.

16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图. 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____. (写出符合要求的一组答案即可)



三、解答题

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均值分别记为 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$, 样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2.

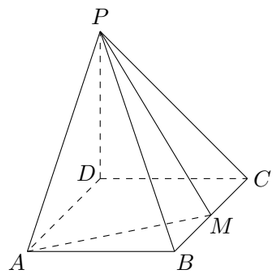
(1) 求 $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_1^2, s_2^2;

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果 $\overline{y}-\overline{x}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $PD=DC=1$, M 为 BC 的中点, 且 $PB\perp AM$.

(1) 求 BC;

(2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值.



19. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 设函数 $f(x)=\ln(a-x)$, 已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

(1) 求 a;

(2) 设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$, 证明: $g(x)<1$.

21. 已知抛物线 C: $x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 且 F 与圆 M: $x^2+(y+4)^2=1$ 上的点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p;

(2) 若点 P 在圆 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

22. 在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$, 半径为 1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;

(2) 过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.

23. 已知函数 $f(x)=|x-a|+|x+3|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 6$ 的解集;

(2) 若 $f(x)>-a$, 求 a 的取值范围.

2021 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $M=\{1,2\}$, $N=\{3,4\}$, 则 $\complement_U(M\cup N)=$ （ ）

(A) $\{5\}$ (B) $\{1,2\}$ (C) $\{3,4\}$ (D) $\{1,2,3,4\}$

2. 设 $\mathrm{i}z=4+3\mathrm{i}$, 则 $z=$ （ ）

(A) $-3-4\mathrm{i}$ (B) $-3+4\mathrm{i}$ (C) $3-4\mathrm{i}$ (D) $3+4\mathrm{i}$

3. 已知命题 p: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x<1$; 命题 q: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{|x|}\geqslant 1$, 则下列命题中为真命题的是 （ ）

(A) $p\wedge q$ (B) $\neg p\wedge q$ (C) $p\wedge\neg q$ (D) $\neg(p\vee q)$

4. 函数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}+\cos\dfrac{x}{3}$ 的最小正周期和最大值分别是 （ ）

(A) 3π 和 $\sqrt{2}$ (B) 3π 和 2 (C) 6π 和 $\sqrt{2}$ (D) 6π 和 2

5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 4\\ x-y\leqslant 2\\ y\leqslant 3\end{cases}$, 则 $z=3x+y$ 的最小值为 （ ）

(A) 18 (B) 10 (C) 6 (D) 4

6. $\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\cos^2\dfrac{5\pi}{12}=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 随机取一个数, 则取到的数小于 $\dfrac{1}{3}$ 的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{4}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{6}$

8. 下列函数中最小值为 4 的是 （ ）

(A) $y=x^2+2x+4$ (B) $y=|\sin x|+\dfrac{4}{|\sin x|}$

(C) $y=2^x+2^{2-x}$ (D) $y=\ln x+\dfrac{4}{\ln x}$

9. 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中是奇函数的是 （ ）

(A) $f(x-1)-1$ (B) $f(x-1)+1$

(C) $f(x+1)-1$ (D) $f(x+1)+1$

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{6}$

11. 设 B 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 的上顶点, 点 P 在 C 上, 则 $|PB|$ 的最大值是 （ ）

(A) $\dfrac{5}{2}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

12. 设 $a\neq 0$, 若 $x=a$ 是函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 （ ）

(A) $a<b$ (B) $a>b$ (C) $ab<a^2$ (D) $ab>a^2$

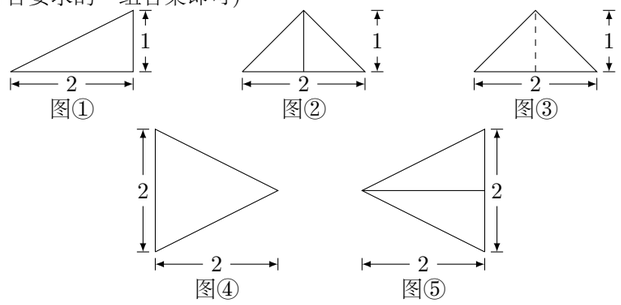
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,5)$, $\boldsymbol{b}=(\lambda,4)$, 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $\lambda=$_____.

14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点到直线 $x+2y-8=0$ 的距离为_____.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 面积为 $\sqrt{3}$, $B=60^\circ$, $a^2+c^2=3ac$, 则 $b=$_____.

16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图. 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____. (写出符合要求的一组答案即可)



三、解答题

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均值分别记为 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$, 样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2.

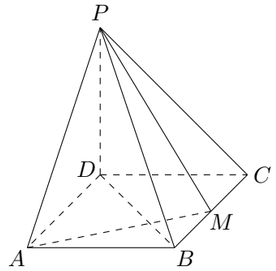
(1) 求 $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_1^2, s_2^2;

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果 $\overline{y}-\overline{x}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, M 为 BC 的中点, 且 $PB\perp AM$.

(1) 证明: 平面 $PAM\perp$ 平面 PBD;

(2) 若 $PD=DC=1$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



19. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{na_n}{3}$. 已知 a_1, $3a_2$, $9a_3$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明 $T_n<\dfrac{S_n}{2}$.

20. 已知抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2.
(1) 求 C 的方程;
(2) 已知 O 为坐标原点, 点 P 在 C 上, 点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$, 求直线 OQ 斜率的最大值.

21. 设函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 求曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标.

22. 在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$, 半径为 1.
(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;
(2) 过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.

23. 已知函数 $f(x)=|x-a|+|x+3|$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 6$ 的解集;
(2) 若 $f(x)>-a$, 求 a 的取值范围.

2021 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

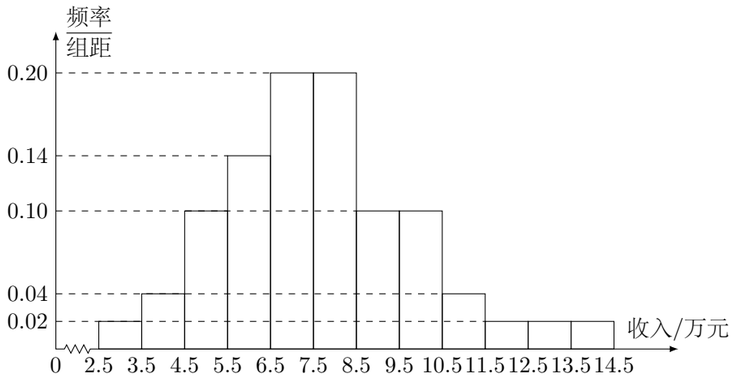
一、选择题

1. 设集合 $M=\{x|0<x<4\}$, $N=\left\{x|\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\right\}$, 则 $M\cap N=$　　(　)

(A) $\left\{x|0<x\leqslant\frac{1}{3}\right\}$　(B) $\left\{x|\frac{1}{3}\leqslant x<4\right\}$

(C) $\{x|4\leqslant x<5\}$　(D) $\{x|0<x\leqslant 5\}$

2. 为了解某地农村经济情况, 对该地农户家庭年收入进行抽样调查, 将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图:



根据此频率分布直方图, 下面结论中不正确的是　　(　)

(A) 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%

(B) 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%

(C) 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元

(D) 估计该地有一半以上的农户, 其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间

3. 已知 $(1-\mathrm{i})^2z=3+2\mathrm{i}$, 则 $z=$　　(　)

(A) $-1-\frac{3}{2}\mathrm{i}$　(B) $-1+\frac{3}{2}\mathrm{i}$　(C) $-\frac{3}{2}+\mathrm{i}$　(D) $-\frac{3}{2}-\mathrm{i}$

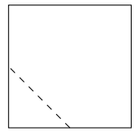
4. 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L=5+\lg V$. 已知某同学视力的五分记录分的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据约为 ($\sqrt[10]{10}\approx 1.259$)　　(　)

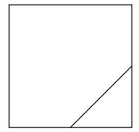
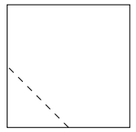
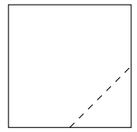
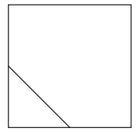
(A) 1.5　(B) 1.2　(C) 0.8　(D) 0.6

5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点, P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, $|PF_1|=3|PF_2|$, 则 C 的离心率为　　(　)

(A) $\frac{\sqrt{7}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{13}}{2}$　(C) $\sqrt{7}$　(D) $\sqrt{13}$

6. 在一个正方体中, 过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G. 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后, 所得多面体的三视图中, 正视图如图所示, 则相应的侧视图是　　(　)


正视图

(A)  　(B)  　(C)  　(D) 

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 前 n 项和为 S_n. 设甲: $q>0$, 乙: $\{S_n\}$ 是递增数列, 则　　(　)

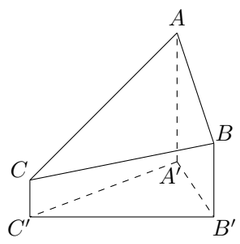
(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 2020 年 12 月 8 日, 中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86 (单位: m), 三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一. 如图是三角高程测量法的一个示意图, 现有 A, B, C 三点, 且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B'=45^\circ$, $\angle A'B'C'=60^\circ$. 由 C 点测得 B 点的仰角为 15°, BB' 与 CC' 的差为 100; 由 B 点测得 A 点的仰角为 45°, 则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA'-CC'$ 约为 ($\sqrt{3}\approx 1.732$)(　)



(A) 346　(B) 373　(C) 446　(D) 473

9. 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$, 则 $\tan\alpha=$　　(　)

(A) $\frac{\sqrt{15}}{15}$　(B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　(C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

10. 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为　　(　)

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{4}{5}$

11. 已知 A, B, C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点, 且 $AC\perp BC$, $AC=BC=1$, 则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为　　(　)

(A) $\frac{\sqrt{2}}{12}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{12}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{12}$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x\in[1,2]$ 时, $f(x)=ax^2+b$. 若 $f(0)+f(3)=6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right)=$　　(　)

(A) $-\frac{9}{4}$　(B) $-\frac{3}{2}$　(C) $\frac{7}{4}$　(D) $\frac{5}{2}$

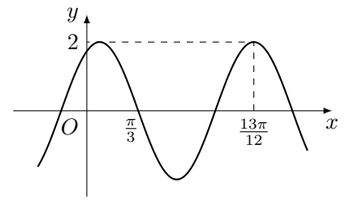
二、填空题

13. 曲线 $y=\frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程为_____.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,0)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 则 $k=$_____.

15. 已知 F_1, F_2 为椭圆 C: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点, P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ|=|F_1F_2|$, 则四边形 PF_1QF_2 的面积为_____.

16. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示, 则满足条件 $\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)>0$ 的最小正整数 x 为_____.



三、解答题

17. 甲、乙两台机床生产同种产品, 产品质量分为一级品和二级品, 为了比较两台机床产品的质量, 分别用两台机床各生产了 200 件产品, 产品的质量情况统计如下表:

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

(1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?

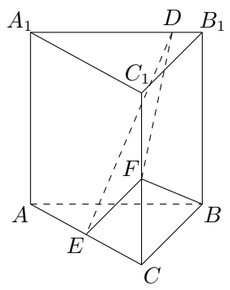
(2) 能否有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

附: $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 从下面①②③中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.
①数列 $\{a_n\}$ 是等差数列: ②数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列; ③ $a_2 = 3a_1$.

19. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB = BC = 2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$.
(1) 证明: $BF \perp DE$;
(2) 当 B_1D 为何值时, 面 BB_1C_1C 与面 DEF 所成的二面角正弦值最小?

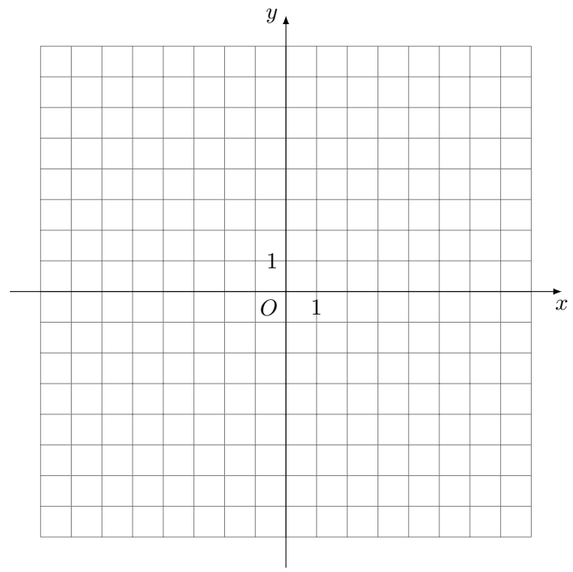


20. 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 直线 l: $x = 1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 已知点 $M(2, 0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.
(1) 求 C, $\odot M$ 的方程;
(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切. 判断 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

21. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \dfrac{x^a}{a^x}$ $(x > 0)$.
(1) 若 $a = 2$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$.
(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;
(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1, 0)$, M 为 C 上的动点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$, 写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程, 并判断 C 与 C_1 是否有公共点.

23. 已知函数 $f(x) = |x - 2|$, $g(x) = |2x + 3| - |2x - 1|$.
(1) 画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像;
(2) 若 $f(x + a) \geqslant g(x)$, 求 a 的取值范围.



2021 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

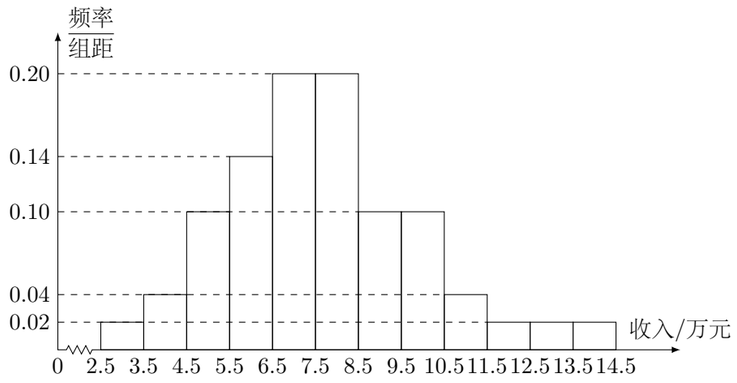
文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{1,3,5,7,9\}$, $N=\{x|2x>7\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{7,9\}$ (B) $\{5,7,9\}$ (C) $\{3,5,7,9\}$ (D) $\{1,3,5,7,9\}$

2. 为了解某地农村经济情况, 对该地农户家庭年收入进行抽样调查, 将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图:



根据此频率分布直方图, 下面结论中不正确的是 （ ）

(A) 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%

(B) 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%

(C) 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元

(D) 估计该地有一半以上的农户, 其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间

3. 已知 $(1-\mathrm{i})^2z=3+2\mathrm{i}$, 则 $z=$ （ ）

(A) $-1-\frac{3}{2}\mathrm{i}$ (B) $-1+\frac{3}{2}\mathrm{i}$ (C) $-\frac{3}{2}+\mathrm{i}$ (D) $-\frac{3}{2}-\mathrm{i}$

4. 下列函数中是增函数的为 （ ）

(A) $f(x)=-x$ (B) $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ (C) $f(x)=x^2$ (D) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

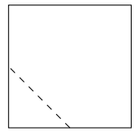
5. 点 $(3,0)$ 到双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的一条渐近线的距离为 （ ）

(A) $\frac{9}{5}$ (B) $\frac{8}{5}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

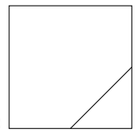
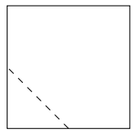
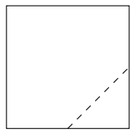
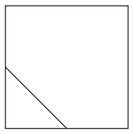
6. 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L=5+\lg V$. 已知某同学视力的五分记录分的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据约为 ($\sqrt[10]{10}\approx1.259$) （ ）

(A) 1.5 (B) 1.2 (C) 0.8 (D) 0.6

7. 在一个正方体中, 过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G. 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后, 所得多面体的三视图中, 正视图如图所示, 则相应的侧视图是 （ ）



正视图

(A)  (B)  (C)  (D) 

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B=120^\circ$, $AC=\sqrt{19}$, $AB=2$, 则 $BC=$ （ ）

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) 3

9. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_2=4$, $S_4=6$, 则 $S_6=$ （ ）

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

10. 将 3 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为 （ ）

(A) 0.3 (B) 0.5 (C) 0.6 (D) 0.8

11. 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$, 则 $\tan\alpha=$ （ ）

(A) $\frac{\sqrt{15}}{15}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

12. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且 $f(1+x)=f(-x)$. 若 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$, $f\left(\frac{5}{3}\right)=$ （ ）

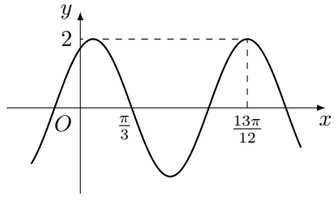
(A) $-\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

二、填空题

13. 若向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=5$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$_____.

14. 已知一个圆锥的底面半径为 6, 其体积为 30π, 则该圆锥的侧面积为_____.

15. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示, 则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$_____.



16. 已知 F_1, F_2 为椭圆 C: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点, P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ|=|F_1F_2|$, 则四边形 PF_1QF_2 的面积为_____.

三、解答题

17. 甲、乙两台机床生产同种产品, 产品质量分为一级品和二级品, 为了比较两台机床产品的质量, 分别用两台机床各生产了 200 件产品, 产品的质量情况统计如下表:

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

(1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?

(2) 能否有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

附: $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

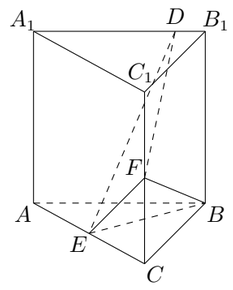
$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $a_n>0$, $a_2=3a_1$, 且数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列.

19. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB=BC=2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, $BF\perp A_1B_1$.

(1) 求三棱锥 $F-EBC$ 的体积;

(2) 已知 D 为棱 A_1B_1 上的点, 证明: $BF\perp DE$.



20. 设函数 $f(x)=a^2x^2+ax-3\ln x+1$. 其中 $a>0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴没有公共点, 求 a 的取值范围.

21. 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 直线 l: $x=1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP\perp OQ$. 已知点 $M(2,0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 C, $\odot M$ 的方程;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切. 判断 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$.

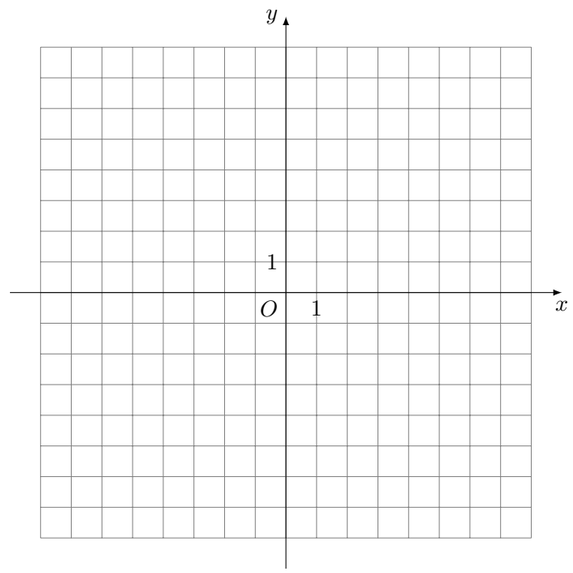
(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1,0)$, M 为 C 上的动点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\overrightarrow{AM}$, 写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程, 并判断 C 与 C_1 是否有公共点.

23. 已知函数 $f(x)=|x-2|$, $g(x)=|2x+3|-|2x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像;

(2) 若 $f(x+a)\geqslant g(x)$, 求 a 的取值范围.



2021 年普通高等学校招生考试 (上海卷)

数学试卷

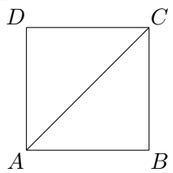
一、选择题

1. 已知 $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 2 + 3\mathrm{i}$, 则 $z_1 + z_2 =$_____.

2. 已知 $A = \{x|2x \leqslant 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$_____.

3. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, 则该圆的圆心坐标为_____.

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 3, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$_____.



5. 已知 $f(x) = \dfrac{3}{x} + 2$, 则 $f^{-1}(1) =$_____.

6. 已知二项式 $(x + a)^5$ 展开式中, x^2 项的系数为 80, 则 $a =$_____.

7. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ 2x - y - 2 \geqslant 0 \\ 3x + 2y - 8 \geqslant 0 \end{cases}$, 则 $z = x - y$ 的最大值为_____.

8. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $b_n = a_{2n}$, a_n 的各项和为 9, 则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为_____.

9. 已知圆柱的底面半径为 1, 高为 2, AB 为上底面圆的一条直径, C 为下底面圆周上的一个动点, 则 $\triangle ABC$ 的面积的取值范围为_____.

10. 已知花博会有四个不同的场馆 A、B、C、D. 甲、乙两人每人选 2 个去参观, 则他们的选择中, 恰有个场馆相同的概率为_____.

11. 已知抛物线: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$, 若第一象限的 A、B 两点在抛物线上, 焦点为 F, $|AF| = 2$, $|BF| = 4$, $|AB| = 3$, 则直线 AB 的斜率为_____.

12. 已知 $a_i \in \mathbf{N}^*$ $(i = 1, 2, \cdots, 9)$, 对任意的 $k \in \mathbf{N}^*$ $(2 \leqslant k \leqslant 8)$, $a_k = a_{k-1} + 1$ 或 $a_k = a_{k-1} - 1$ 有且仅有一个成立, 且 $a_1 = 6$, $a_9 = 9$, 则 $a_1 + \cdots + a_9$ 的最小值为_____.

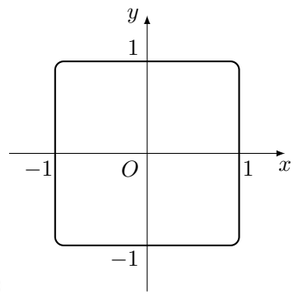
二、选择题

13. 下列函数中, 既是奇函数又是减函数的是 (　　)

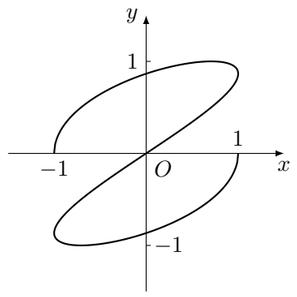
(A) $y = -3x$　　(B) $y = x$　　(C) $y = \log_3 x$　　(D) $y = 3^x$

14. 已知参数方程 $\begin{cases} x = 3t - 4t^3 \\ y = 2t\sqrt{1 - t^2} \end{cases}$, $t \in [-1, 1]$. 下列选项的图中, 符合该方程的是 (　　)

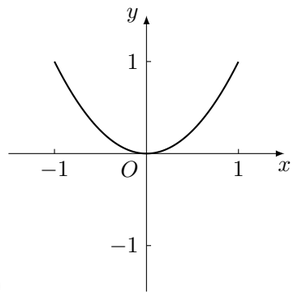
(A)



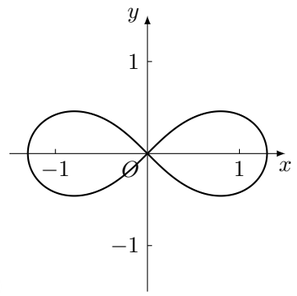
(B)



(C)



(D)



15. 已知 $f(x) = 3\sin x + 2$, 对任意的 $x_1 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, 都存在 $x_2 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, 使得 $f(x) = 2f(x + \theta) + 2$ 成立, 则下列选项中, θ 可能的值为 (　　)

(A) $\dfrac{3\pi}{5}$　　(B) $\dfrac{4\pi}{5}$　　(C) $\dfrac{6\pi}{5}$　　(D) $\dfrac{7\pi}{5}$

16. 已知 x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 同时俩足: ① $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$, $x_3 < y_3$; ② $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$; ③ $x_1y_1 + x_3y_3 = 2x_2y_2$, 则下列选项中恒成立的是 (　　)

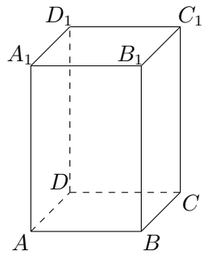
(A) $2x_2 < x_1 + x_3$ (B) $2x_2 > x_1 + x_3$ (C) $x_2^2 < x_3x_3$　　(D) $x_2^2 > x_1x_3$

三、解答题

17. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB = BC = 2$, $AA_1 = 3$.

(1) 若点 P 是棱 A_1D_1 上的动点, 求三棱锥 $C - PAD$ 的体积;

(2) 求直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 的夹角大小.



18. 已知在 $\triangle ABC$ 中, A、B、C 所对边分别为 a、b、c, 且 $a = 3$, $b = 2c$.

(1) 若 $A = \dfrac{2\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $2\sin B - \sin C = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

19. 已知某企业今年 (2021 年) 第一季度的营业额为 1.1 亿元, 以后每个季度的营业额比上个季度增加 0.05 亿元, 该企业第一季度的利润为 0.16 亿, 以后每季度比前一季度增 4%.

(1) 求 2021 年起前 20 季度营业额的总和;

(2) 请问哪一季度的利润首次超过该季度营业额的 18%.

20. 已知椭圆 Γ: $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$, F_1, F_2 是其左右焦点, 直线 l 过点 $P(m,0)$ ($m\leqslant -\sqrt{2}$), 交椭圆于 A、B 两点, 且 A、B 在 x 轴上方, 点 A 在线段 BP 上.

(1) 若 B 是上顶点, $\left|\overrightarrow{BF}\right|=\left|\overrightarrow{PF_1}\right|$, 求 m 的值;

(2) 若 $\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_2A}=\dfrac{1}{3}$, 且原点 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$, 求直线 l 的方程;

(3) 证明: 对于任意 $m<-\sqrt{2}$, 使 $\overrightarrow{F_1A}\parallel\overrightarrow{F_2B}$ 的直线有且仅有一条.

21. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 若对任意的 x_1, $x_2\in\mathbf{R}$, $x_1-x_2\in S$, 均有 $f(x_2)-f(x_1)\in S$, 则称 $f(x)$ 是在 S 关联的.

(1) 判断和证明 $f(x)=2x+1$ 是否是在 $[0,+\infty)$ 关联? 是否在 $[0,1]$ 关联?

(2) $f(x)$ 是在 $\{3\}$ 关联, 当 $x\in[0,3)$ 时, $f(x)=x^2-2x$, 解不等式 $2\leqslant f(x)\leqslant 3$;

(3) 证明: "$f(x)$ 是在 $\{1\}$ 关联, 并且在 $[0,+\infty)$ 关联"当且仅当"$f(x)$ 是在 $[1,2]$ 关联的".

2021 年普通高等学校招生考试（新高考 I）

数学试卷

一、单选题

1. 设集合 $A=\{x|-2<x<4\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{2\}$　(B) $\{2,3\}$　(C) $\{3,4\}$　(D) $\{2,3,4\}$

2. 已知 $z=2-\mathrm{i}$, 则 $z(\overline{z}+\mathrm{i})=$ （　）

(A) $6-2\mathrm{i}$　(B) $4-2\mathrm{i}$　(C) $6+2\mathrm{i}$　(D) $4+2\mathrm{i}$

3. 已知圆锥的底面半径为 $\sqrt{2}$, 其侧面展开图为一个半圆, 则该圆锥的母线长为 （　）

(A) 2　(B) $2\sqrt{2}$　(C) 4　(D) $4\sqrt{2}$

4. 下列区间中, 函数 $f(x)=7\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 单调递增的区间是 （　）

(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$　(B) $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$　(C) $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$　(D) $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$

5. 已知 F_1, F_2 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点, 点 M 在 C 上, 则 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为 （　）

(A) 13　(B) 12　(C) 9　(D) 6

6. 若 $\tan\theta=-2$, 则 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$ （　）

(A) $-\dfrac{6}{5}$　(B) $-\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{6}{5}$

7. 若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线, 则 （　）

(A) $\mathrm{e}^b<a$　(B) $\mathrm{e}^a<b$　(C) $0<a<\mathrm{e}^b$　(D) $0<b<\mathrm{e}^a$

8. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 从中有放回的随机取两次, 每次取 1 个球. 甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”, 乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”, 丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”, 丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”, 则 （　）

(A) 甲与丙相互独立　(B) 甲与丁相互独立

(C) 乙与丙相互独立　(D) 丙与丁相互独立

二、多选题

9. 有一组样本数据 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 由这组数据得到新样本数据 y_1, y_2, $\cdots$, y_n, 其中 $y_i=x_i+c$ $(i=1,2,\cdots,n)$, c 为非零常数, 则 （　）

(A) 两组样本数据的样本平均数相同　(B) 两组样本数据的样本中位数相同

(C) 两组样本数据的样本标准差相同　(D) 两组样本数据的样本极差相同

10. 已知 O 为坐标原点, 点 $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$, $P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$, $A(1,0)$, 则 （　）

(A) $\left|\overrightarrow{OP_1}\right|=\left|\overrightarrow{OP_2}\right|$　(B) $\left|\overrightarrow{AP_1}\right|=\left|\overrightarrow{AP_2}\right|$

(C) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$　(D) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

11. 已知点 P 在圆 $(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 上, 点 $A(4,0)$, $B(0,2)$, 则 （　）

(A) 点 P 到直线 AB 的距离小于 10　(B) 点 P 到直线 AB 的距离大于 2

(C) 当 $\angle PBA$ 最小时, $|PB|=3\sqrt{2}$　(D) 当 $\angle PBA$ 最大时, $|PB|=3\sqrt{2}$

12. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AA_1=1$, 点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$, 其中 $\lambda\in[0,1]$, $\mu\in[0,1]$, 则 （　）

(A) 当 $\lambda=1$ 时, $\triangle AB_1P$ 的周长为定值

(B) 当 $\mu=1$ 时, 三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

(C) 当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P, 使得 $A_1P\perp BP$

(D) 当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P, 使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P

三、填空题

13. 已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 是偶函数, 则 $a=$_____.

14. 已知 O 为坐标原点, 抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, P 为 C 上一点, PF 与 x 轴垂直, Q 为 x 轴上一点, 且 $PQ\perp OP$. 若 $|FQ|=6$, 则 C 的准线方程为_____.

15. 函数 $f(x)=|2x-1|-2\ln x$ 的最小值为_____.

16. 某校学生在研究民间剪纸艺术时, 发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折. 规格为 20 dm × 12 dm 的长方形纸, 对折 1 次共可以得到 10 dm × 12 dm, 20 dm × 6 dm 两种规格的图形, 它们的面积之和 $S_1=240\ \mathrm{dm}^2$, 对折 2 次共可以得到 5 dm × 12 dm, 10 dm × 6 dm, 20 dm × 3 dm 三种规格的图形, 它们的面积之和 $S_2=180\ \mathrm{dm}^2$, 以此类推. 则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为_____; 如果对折 n 次, 那么 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=$_____$\mathrm{dm}^2$.

四、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{为奇数}\\ a_n+2, & n\text{为偶数}\end{cases}$.

(1) 记 $b_n=a_{2n}$, 写出 b_1, b_2, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

18. 某学校组织“一带一路”知识竞赛, 有 A, B 两类问题. 每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答, 若回答错误则该同学比赛结束; 若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答, 无论回答正确与否, 该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分, 否则得 0 分; B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分, 否则得 0 分. 已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8, 能正确回答 B 类问题的概率为 0.6, 且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

(1) 若小明先回答 A 类问题, 记 X 为小明的累计得分, 求 X 的分布列;

(2) 为使累计得分的期望最大, 小明应选择先回答哪类问题? 并说明理由.

19. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $b^2=ac$, 点 D 在边 AC 上, $BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

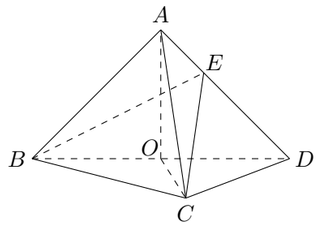
(1) 证明: $BD=b$;

(2) 若 $AD=2DC$, 求 $\cos\angle ABC$.

20. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD, $AB=AD$, O 为 BC 的中点.

(1) 证明: $OA\perp CD$;

(2) 若 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 E 在棱 AD 上, $DE=2EA$, 且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45°, 求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.



21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$, $F_2(\sqrt{17},0)$, 点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$. 记 M 的轨迹为 C.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设点 T 在直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上, 过 T 的两条直线分别交 C 于 A, B 两点和 P, Q 两点, 且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$, 求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

22. 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b\ln a-a\ln b=a-b$, 证明: $2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$.

2021 年普通高等学校招生考试（浙江卷）

数学试卷

一、单选题

1. 设集合 $A=\{x|x\geqslant 1\}$, $B=\{x|-1<x<2\}$, 则 $A\cap B=$ （　）

(A) $\{x|x>-1\}$　(B) $\{x|x\geqslant 1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　(D) $\{x|1\leqslant x<2\}$

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$, $(1+a\mathrm{i})\mathrm{i}=3+\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 $a=$ （　）

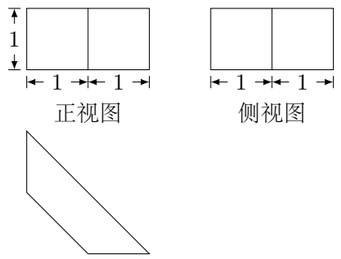
(A) -1　(B) 1　(C) -3　(D) 3

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 则“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的 （　）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积 (单位: cm^3) 是 （　）

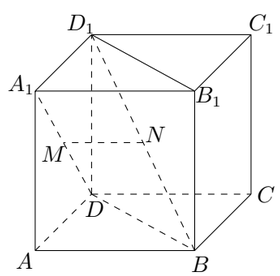


(A) $\dfrac{3}{2}$　(B) 3　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(D) $3\sqrt{2}$

5. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x-y\leqslant 0\\ 2x+3y-1\leqslant 0\end{cases}$, 则 $z=x-\dfrac{1}{2}y$ 的最小值是 （　）

(A) -2　(B) $-\dfrac{3}{2}$　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{10}$

6. 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, M, N 分别是 A_1D, D_1B 的中点, 则 （　）



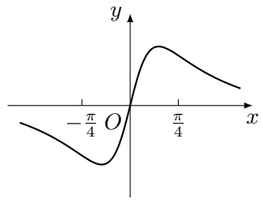
(A) 直线 A_1D 与直线 D_1B 垂直, 直线 $MN\parallel$ 平面 $ABCD$

(B) 直线 A_1D 与直线 D_1B 平行, 直线 $MN\perp$ 平面 BDD_1B_1

(C) 直线 A_1D 与直线 D_1B 相交, 直线 $MN\parallel$ 平面 $ABCD$

(D) 直线 A_1D 与直线 D_1B 异面, 直线 $MN\perp$ 平面 BDD_1B_1

7. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{4}$, $g(x)=\sin x$, 则图象为如图的函数可能是 （　）



(A) $y=f(x)+g(x)-\dfrac{1}{4}$　(B) $y=f(x)-g(x)-\dfrac{1}{4}$

(C) $y=f(x)g(x)$　(D) $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$

8. 已知 α, β, γ 是互不相同的锐角, 则在 $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\gamma\cos\alpha$ 三个值中, 大于 $\dfrac{1}{2}$ 的个数的最大值是 （　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

9. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, $ab>0$, 函数 $f(x)=ax^2+b$ ($x\in\mathbf{R}$). 若 $f(s-t)$, $f(s)$, $f(s+t)$ 成等比数列, 则平面上点 (s,t) 的轨迹是 （　）

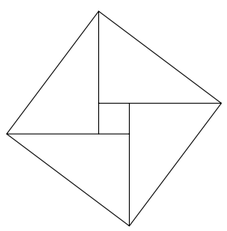
(A) 直线和圆　(B) 直线和椭圆　(C) 直线和双曲线　(D) 直线和抛物线

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$ ($n\in\mathbf{N}^*$). 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 （　）

(A) $\dfrac{1}{2}<S_{100}<3$　(B) $3<S_{100}<4$　(C) $4<S_{100}<\dfrac{9}{2}$　(D) $\dfrac{9}{2}<S_{100}<5$

二、填空题

11. 我国古代数学家赵爽用弦图给出了勾股定理的证明. 弦图是由四个全等的直角三角形和中间的一个小正方形拼成的一个大正方形 (如图所示). 若直角三角形直角边的长分别是 3, 4, 记大正方形的面积为 S_1, 小正方形的面积为 S_2, 则 $\dfrac{S_1}{S_2}=$_____.



12. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x>2\\ |x-3|+a, & x\leqslant 2\end{cases}$. 若 $f\left[(f\left(\sqrt{6}\right)\right)=3$, 则 $a=$_____.

13. 已知多项式 $(x-1)^3+(x+1)^4=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$, 则 $a_1=$_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=60^\circ$, $AB=2$, M 是 BC 的中点, $AM=2\sqrt{3}$, 则 $AC=$_____, $\cos\angle MAC=$_____.

15. 袋中有 4 个红球, m 个黄球, n 个绿球. 现从中任取两个球, 记取出的红球数为 ξ, 若取出的两个球都是红球的概率为 $\dfrac{1}{6}$, 一红一黄的概率为 $\dfrac{1}{3}$, 则 $m-n=$_____, $E(\xi)=$_____.

16. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$), 焦点 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ ($c>0$), 若过 F_1 的直线和圆 $\left(x-\dfrac{1}{2}c\right)^2+y^2=c^2$ 相切, 与椭圆在第一象限交于点 P, 且 $PF_2\perp x$ 轴, 则该直线的斜率是_____, 椭圆的离心率是_____.

17. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ($\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$) 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$. 记向量 $\boldsymbol{d}$ 在 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影分别为 x, y, $\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影为 z, 则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值是_____.

三、解答题

18. 设函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ ($x\in\mathbf{R}$).

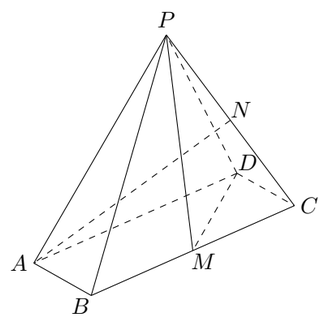
(1) 求函数 $y=\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^2$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $y=f(x)f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=1$, $BC=4$, $PA=\sqrt{15}$, M, N 分别为 BC, PC 的中点, $PD\perp DC$, $PM\perp MD$.

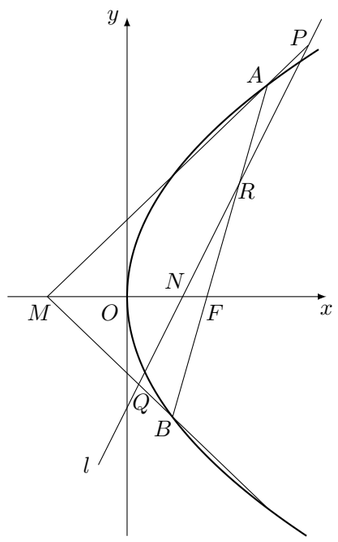
(1) 证明: $AB\perp PM$;

(2) 求直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=-\dfrac{9}{4}$, 且 $4S_{n+1}=3S_n-9$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $3b_n+(n-4)a_n=0$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 若 $T_n\leqslant\lambda b_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

21. 如图, 已知 F 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, M 是抛物线的准线与 x 轴的交点, 且 $|MF|=2$.
(1) 求抛物线方程;
(2) 设过点 F 的直线交抛物线与 A、B 两点, 斜率为 2 的直线 l 与直线 MA, MB, AB, x 轴依次交于点 P, Q, R, N, 且 $|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$, 求直线 l 在 x 轴上截距的范围.



22. 设 a, b 为实数, 且 $a>1$, 函数 $f(x)=a^x-bx+\mathrm{e}^2$ $(x\in\mathbf{R})$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若对任意 $b>2\mathrm{e}^2$, 函数 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围;
(3) 当 $a=\mathrm{e}$ 时, 证明: 对任意 $b>\mathrm{e}^4$, 函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2, 满足 $x_2>\dfrac{b\ln b}{2\mathrm{e}^2}x_1+\dfrac{\mathrm{e}^2}{b}$.
(注: $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数)