

2020~2025

新课标 I、II 卷

(附高考适应性测试卷)

试题汇编

数 学



Code-Ster 汇编

目 录

- (一) 2018 新题型测试卷——文科数学
- (二) 2018 新题型测试卷——理科数学
- (三) 2020 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练[山东卷]
- (四) 2020 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练[海南卷]
- (五) 2020 新课标 I 卷
- (六) 2020 新课标 II 卷
- (七) 2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练
- (八) 2021 新课标 I 卷
- (九) 2021 新课标 II 卷
- (十) 2022 新课标 I 卷
- (十一) 2022 新课标 II 卷
- (十二) 2023 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练
- (十三) 2023 新课标 I 卷
- (十四) 2023 新课标 II 卷
- (十五) 2024 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练
- (十六) 2024 新课标 I 卷
- (十七) 2024 新课标 II 卷
- (十八) 2025 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练
- (十九) 2025 新课标 I 卷
- (二十) 2025 新课标 II 卷

2018 年新题型测试卷

文科数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内表示复数 $(1-i)(a+i)$ 的点位于第二象限, 则实数 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$
2. 四张连号的电影票, 小李从中随机抽出了两张, 则这两张票座位恰好相邻的概率是
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$
3. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本数据, 令 $f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$, 则 $f(x)$ 的最小值点为
A. 样本众数 B. 样本中位数 C. 样本标准差 D. 样本平均数
4. 在直角坐标系 xOy 中, 动点 A 在抛物线 $y^2 = x$ 上, 点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$, 则点 P 的轨迹方程是
A. $y^2 = x$ B. $y^2 = 2x$ C. $y^2 = 4x$ D. $y^2 = 8x$
5. 已知函数 $f(x) = \log_2 x + x - b$ 的零点在区间 $(0, 1]$ 上, 则 b 的取值范围为
A. $[-1, 0]$ B. $[0, 1]$ C. $[-\infty, 1]$ D. $[-1, +\infty)$
6. 设正数 m, n 满足 $\frac{4}{m} + \frac{9}{n} = 1$, 则 $m+n$ 的最小值为
A. 26 B. 25 C. 16 D. 9
7. 已知函数 $f(x) = (x-3)^2 - 1$, 平面图形 D 内的点 (m, n) 满足条件 $f(m) + f(n) < 0$, 且 $f(m) - f(n) > 0$, 则 D 的面积为
A. π B. 3 C. $\frac{\pi}{2}$ D. 1

8. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, E 为 DD_1 的中点, M 为直线 BD_1 上一点, N 为平面 AEC 内一点, 则 M, N 两点间距离的最小值为
- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

二、选择题: 本题共 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 4 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 设 α 是给定的平面, A, B 是不在 α 内的任意两点, 则
- A. 在 α 内存在直线与直线 AB 异面
 B. 在 α 内存在直线与直线 AB 相交
 C. 在 α 内存在直线与直线 AB 平行
 D. 存在过直线 AB 的平面与 α 垂直
 E. 存在过直线 AB 的平面与 α 平行
10. 对任意 $A, B \subseteq \mathbf{R}$, 记 $A \oplus B = \{x | x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$, 并称 $A \oplus B$ 为集合 A, B 的对称差。例如, 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \oplus B = \{1, 4\}$ 。下列命题中, 为真命题的是
- A. 若 $A, B \subseteq \mathbf{R}$ 且 $A \oplus B = B$, 则 $A = \emptyset$
 B. 若 $A, B \subseteq \mathbf{R}$ 且 $A \oplus B = \emptyset$, 则 $A = B$
 C. 若 $A, B \subseteq \mathbf{R}$ 且 $A \oplus B \subseteq A$, 则 $A \subseteq B$
 D. 存在 $A, B \subseteq \mathbf{R}$, 使得 $A \oplus B = \complement_{\mathbf{R}} A \oplus \complement_{\mathbf{R}} B$
 E. 存在 $A, B \subseteq \mathbf{R}$, 使得 $A \oplus B \neq B \oplus A$

三、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

11. 设 $f(x) = \ln \frac{a-x}{2+x}$ 为奇函数, 则 $a =$ _____.
12. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 a_3 = 2$, 则 $a_7 =$ _____.
13. 已知 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} =$ _____; $\cos 2\alpha =$ _____.
14. 设 $\triangle ABC$ 中 $AC = 1$, $AB = 2$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} =$ _____.
15. 10 名象棋选手进行单循环赛 (即每两名选手比赛一场). 规定两人对局胜者得 2 分, 平局各得 1 分, 负者得 0 分, 并按总得分由高到低进行排序. 比赛结束后, 10 名选手的得分各不相同, 且第二名的得分是最后五名选手得分之和的 $\frac{4}{5}$. 则第二名选手的得分是 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 90 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (15 分)

为了解某校学生参加社区服务的情况，采用按性别分层抽样的方法进行调查。已知该校共有学生 960 人，其中男生 560 人，从全校学生中抽取了容量为 n 的样本，得到一周参加社区服务时间的统计数据如下：

	超过 1 小时	不超过 1 小时
男	20	8
女	12	m

(1) 求 m ， n ；

(2) 能否有 95% 的把握认为该校学生一周参加社区服务时间是否超过 1 小时与性别有关？

(3) 从该校学生中随机调查 60 名学生，一周参加社区服务时间超过 1 小时的人数记为 X ，以样本中学生参加社区服务时间超过 1 小时的频率作为该事件发生的概率，求 X 的分布列和数学期望。

$$\text{附： } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \frac{P(K^2 \geq k)}{k} \quad \begin{array}{c|cc} 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}.$$

17. (15 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c 。已知 $a \sin(A+B) = c \sin \frac{B+C}{2}$ 。

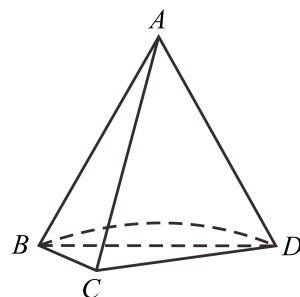
(1) 求 A ；

(2) 求 $\sin B \sin C$ 的取值范围；

(3) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，周长为 8，求 a 。

18. (15 分)

已知 A 是圆锥的顶点， BD 是圆锥底面的直径， C 是底面圆周上一点， $AC = BD = 2$ ， $BC = 1$ ，平面 ABC 和平面 ACD 将圆锥截去部分后的几何体如图所示。



(1) 求 AC 与底面所成的角；

(2) 求该几何体的体积；

(3) 求二面角 $A-CD-B$ 的余弦值。

19. (15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $A(-a, 0)$, $B(0, -b)$, P 为 C 上位于第一象限的

动点, PA 交 y 轴于点 E , PB 交 x 轴于点 F .

(1) 探究四边形 $AEFB$ 的面积是否为定值, 说明理由;

(2) 当 $\triangle PEF$ 的面积达到最大值时, 求点 P 的坐标.

20. (15 分)

对于函数 $f(x)$, 若 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点. 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$.

(1) 当 $a = 0$ 时,

(i) 求 $f(x)$ 的极值点;

(ii) 若存在 x_0 既是 $f(x)$ 的极值点, 也是 $f(x)$ 的不动点, 求 b 的值.

(2) 判断是否存在实数 a, b , 使得 $f(x)$ 有两个极值点, 且这两个极值点均为 $f(x)$ 的不动点? 判断并说明理由.

21. (15 分)

设三角形的边长为不相等的整数, 且最大边长为 n , 这些三角形的个数为 a_n .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 在 $1, 2, \dots, 100$ 中任取三个不同的整数, 求它们可以是一个三角形的三条边长的概率.

附: $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2018 年新题型测试卷

理科数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内表示复数 $(1-i)(a+i)$ 的点位于第二象限, 则实数 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$
2. 已知函数 $f(x) = \log_2 x + 3x - b$ 的零点在区间 $(0, 1]$ 上, 则 b 的取值范围为
A. $[-3, 0]$ B. $(-\infty, 3]$ C. $[0, 3]$ D. $[-3, +\infty)$
3. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本数据, 令 $f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$, 则 $f(x)$ 的最小值点为
A. 样本众数 B. 样本中位数 C. 样本标准差 D. 样本平均数
4. 在直角坐标系 xOy 中, 动点 A 在抛物线 $y^2 = x$ 上, 点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$, 则点 P 的轨迹方程是
A. $y^2 = x$ B. $y^2 = 2x$ C. $y^2 = 4x$ D. $y^2 = 8x$
5. 已知一种元件的使用寿命超过 1 年的概率为 0.8, 超过 2 年的概率为 0.6, 若一个这种元件使用到 1 年时还未失效, 则这个元件使用寿命超过 2 年的概率为
A. 0.75 B. 0.6 C. 0.52 D. 0.48
6. 设正数 m, n 满足 $\frac{4}{m} + \frac{9}{n} = 1$, 则 $m+n$ 的最小值为
A. 26 B. 25 C. 16 D. 9
7. 已知函数 $f(x) = (x-3)^2 - 1$, 平面图形 D 内的点 (m, n) 满足条件 $f(m) + f(n) < 0$, 且 $f(m) - f(n) > 0$, 则 D 的面积为
A. π B. 3 C. $\frac{\pi}{2}$ D. 1

8. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, E 为 DD_1 的中点, M 为直线 BD_1 上一点, N 为平面 AEC 内一点, 则 M, N 两点间距离的最小值为
- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

二、选择题: 本题共 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 4 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 设 α 是给定的平面, A, B 是不在 α 内的任意两点, 则
- A. 在 α 内存在直线与直线 AB 异面
 B. 在 α 内存在直线与直线 AB 相交
 C. 在 α 内存在直线与直线 AB 平行
 D. 存在过直线 AB 的平面与 α 垂直
 E. 存在过直线 AB 的平面与 α 平行
10. 对任意 $A, B \subseteq \mathbf{R}$, 记 $A \oplus B = \{x | x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$, 并称 $A \oplus B$ 为集合 A, B 的对称差。例如, 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \oplus B = \{1, 4\}$ 。下列命题中, 为真命题的是
- A. 若 $A, B \subseteq \mathbf{R}$ 且 $A \oplus B = B$, 则 $A = \emptyset$
 B. 若 $A, B \subseteq \mathbf{R}$ 且 $A \oplus B = \emptyset$, 则 $A = B$
 C. 若 $A, B \subseteq \mathbf{R}$ 且 $A \oplus B \subseteq A$, 则 $A \subseteq B$
 D. 存在 $A, B \subseteq \mathbf{R}$, 使得 $A \oplus B = \complement_{\mathbf{R}} A \oplus \complement_{\mathbf{R}} B$
 E. 存在 $A, B \subseteq \mathbf{R}$, 使得 $A \oplus B \neq B \oplus A$

三、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

11. 设 $f(x) = \ln \frac{a-x}{2+x}$ 为奇函数, 则 $a =$ _____。
12. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 a_3 = 2$, 则 $a_7 =$ _____。
13. 已知 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} =$ _____; $\cos 2\alpha =$ _____。
14. 设 $\triangle ABC$ 中 $AC = 1$, $AB = 2$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} =$ _____。
15. 10 名象棋选手进行单循环赛 (即每两名选手比赛一场)。规定两人对局胜者得 2 分, 平局各得 1 分, 负者得 0 分, 并按总得分由高到低进行排序。比赛结束后, 10 名选手的得分各不相同, 且第二名的得分是最后五名选手得分之和的 $\frac{4}{5}$ 。则第二名选手的得分是_____。

四、解答题：本题共 6 小题，共 90 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

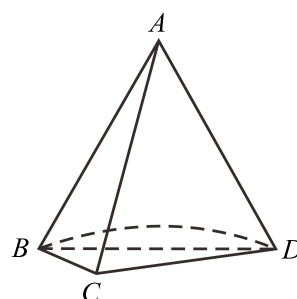
16. (15 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin(A+B) = c \sin \frac{B+C}{2}$.

- (1) 求 A ;
- (2) 求 $\sin B \sin C$ 的取值范围;
- (3) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 周长为 8, 求 a .

17. (15 分)

已知 A 是圆锥的顶点, BD 是圆锥底面的直径, C 是底面圆周上一点, $AC = BD = 2$, $BC = 1$, 平面 ABC 和平面 ACD 将圆锥截去部分后的几何体如图所示.



- (1) 求 AC 与底面所成的角;
- (2) 求该几何体的体积;
- (3) 求二面角 $A-CD-B$ 的余弦值.

18. (15 分)

为了解某校学生参加社区服务的情况, 采用按性别分层抽样的方法进行调查. 已知该校共有学生 960 人, 其中男生 560 人, 从全校学生中抽取了容量为 n 的样本, 得到一周参加社区服务时间的统计数据如下:

	超过 1 小时	不超过 1 小时
男	20	8
女	12	m

- (1) 求 m, n ;
- (2) 能否有 95% 的把握认为该校学生一周参加社区服务时间是否超过 1 小时与性别有关?
- (3) 从该校学生中随机调查 60 名学生, 一周参加社区服务时间超过 1 小时的人数记为 X , 以样本中学生参加社区服务时间超过 1 小时的频率作为该事件发生的概率, 求 X 的分布列和数学期望.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \frac{P(K^2 \geq k)}{k} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline 3.841 & 6.635 & 10.828 \\ \hline \end{array}.$$

19. (15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $A(-a, 0)$, $B(0, -b)$, P 为 C 上位于第一象限的

动点, PA 交 y 轴于点 E , PB 交 x 轴于点 F .

(1) 探究四边形 $AEFB$ 的面积是否为定值, 说明理由;

(2) 当 $\triangle PEF$ 的面积达到最大值时, 求点 P 的坐标.

20. (15 分)

对于函数 $f(x)$, 若 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点. 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$.

(1) 当 $a = 0$ 时,

(i) 求 $f(x)$ 的极值点;

(ii) 若存在 x_0 既是 $f(x)$ 的极值点, 也是 $f(x)$ 的不动点, 求 b 的值.

(2) 判断是否存在实数 a, b , 使得 $f(x)$ 有两个极值点, 且这两个极值点均为 $f(x)$ 的不动点? 判断并说明理由.

21. (15 分)

设三角形的边长为不相等的整数, 且最大边长为 n , 这些三角形的个数为 a_n .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 在 $1, 2, \dots, 100$ 中任取三个不同的整数, 求它们可以是一个三角形的三条边长的概率.

附: $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2020 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $B = \{(x, y) | y = x^2\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{(1, 1)\}$ B. $\{(-2, 4)\}$ C. $\{(1, 1), (-2, 4)\}$ D. $\emptyset$
2. 已知 $a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 是 $\frac{1-i}{1+i}$ 的共轭复数, 则 $a + b =$
A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1
3. 设向量 $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 1)$, 且 $(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b}) \perp \mathbf{c}$, 则 $\lambda =$
A. 3 B. 2 C. -2 D. -3
4. $(\frac{1}{x} - x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数是
A. -210 B. -120 C. 120 D. 210
5. 已知三棱锥 $S - ABC$ 中, $\angle SAB = \angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $SB = 4$, $SC = 2\sqrt{13}$, $AB = 2$, $BC = 6$, 则三棱锥 $S - ABC$ 的体积是
A. 4 B. 6 C. $4\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$
6. 已知点 A 为曲线 $y = x + \frac{4}{x}$ ($x > 0$) 上的动点, B 为圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 上的动点, 则 $|AB|$ 的最小值是
A. 3 B. 4 C. $3\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$
7. 设命题 p : 所有正方形都是平行四边形, 则 $\neg p$ 为
A. 所有正方形都不是平行四边形 B. 有的平行四边形不是正方形
C. 有的正方形不是平行四边形 D. 不是正方形的四边形不是平行四边形

8. 若 $a > b > c > 1$ 且 $ac < b^2$, 则

A. $\log_a b > \log_b c > \log_c a$

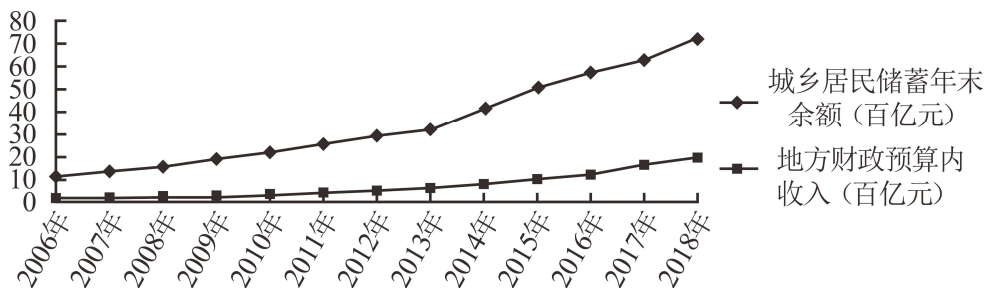
B. $\log_c b > \log_b a > \log_a c$

C. $\log_b c > \log_a b > \log_c a$

D. $\log_b a > \log_c b > \log_a c$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

9. 下图为某地区 2006 年~2018 年地方财政预算内收入、城乡居民储蓄年末余额折线图。



根据该折线图可知，该地区 2006 年~2018 年

A. 财政预算内收入、城乡居民储蓄年末余额均呈增长趋势

B. 财政预算内收入、城乡居民储蓄年末余额的逐年增长速度相同

C. 财政预算内收入年平均增长量高于城乡居民储蓄年末余额年平均增长量

D. 城乡居民储蓄年末余额与财政预算内收入的差额逐年增大

10. 已知双曲线 C 过点 $(3, \sqrt{2})$ 且渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则下列结论正确的是

A. C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

B. C 的离心率为 $\sqrt{3}$

C. 曲线 $y = e^{x-2} - 1$ 经过 C 的一个焦点

D. 直线 $x - \sqrt{2}y - 1 = 0$ 与 C 有两个公共点

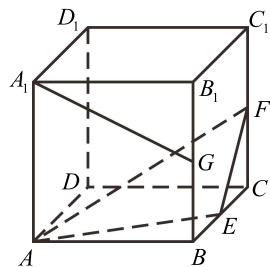
11. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点. 则

A. 直线 D_1D 与直线 AF 垂直

B. 直线 A_1G 与平面 AEF 平行

C. 平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{8}$

D. 点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等



12. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(x+1)$ 与 $f(x+2)$ 都为奇函数，则

- A. $f(x)$ 为奇函数
B. $f(x)$ 为周期函数
C. $f(x+3)$ 为奇函数
D. $f(x+4)$ 为偶函数

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某元宵灯谜竞猜节目，有 6 名守擂选手和 6 名复活选手，从复活选手中挑选 1 名选手为攻擂者，从守擂选手中挑选 1 名选手为守擂者，则攻擂者、守擂者的不同构成方式共有_____种.

14. 已知 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) - \sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{5}$ ，则 $\sin(\alpha + \frac{11\pi}{6}) =$ _____.

15. 直线 l 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 $F(1, 0)$ ，且与 C 交于 A ， B 两点，则 $p =$ _____, $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} =$ _____. (本题第一空 2 分，第二空 3 分.)

16. 半径为 2 的球面上有 A ， B ， C ， D 四点，且 AB ， AC ， AD 两两垂直，则 $\triangle ABC$ ， $\triangle ACD$ 与 $\triangle ADB$ 面积之和的最大值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在① $b_1 + b_3 = a_2$ ，② $a_4 = b_4$ ，③ $S_5 = -25$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的 k 存在，求 k 的值；若 k 不存在，说明理由。

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 是等比数列，_____, $b_1 = a_5$ ， $b_2 = 3$ ， $b_5 = -81$ ，是否存在 k ，使得 $S_k > S_{k+1}$ 且 $S_{k+1} < S_{k+2}$ ？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18. (12 分)

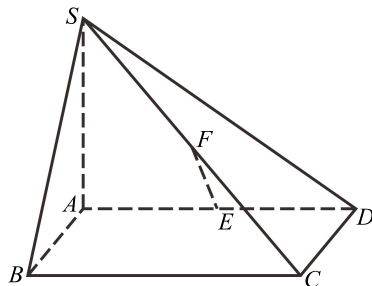
在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，点 D 在 BC 边上. 在平面 ABC 内，过 D 作 $DF \perp BC$ 且 $DF = AC$.

(1) 若 D 为 BC 的中点，且 $\triangle CDF$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积，求 $\angle ABC$ ；

(2) 若 $\angle ABC = 45^\circ$ ，且 $BD = 3CD$ ，求 $\cos \angle CFB$.

19. (12 分)

如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形. $SA \perp$ 平面 $ABCD$, E, F 分别为 AD, SC 的中点, EF 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° .



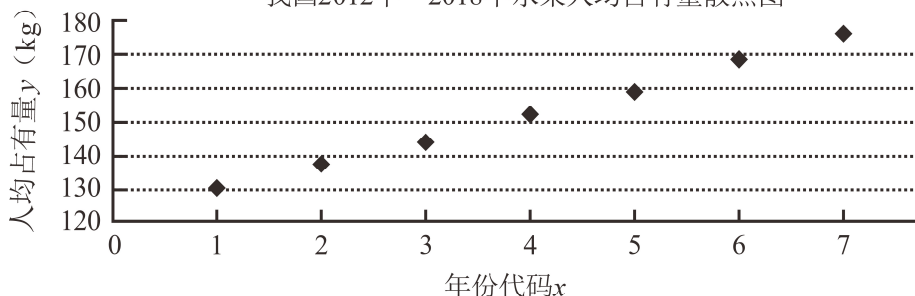
(1) 证明: EF 为异面直线 AD 与 SC 的公垂线;

(2) 若 $EF = \frac{1}{2}BC$, 求二面角 $B-SC-D$ 的余弦值.

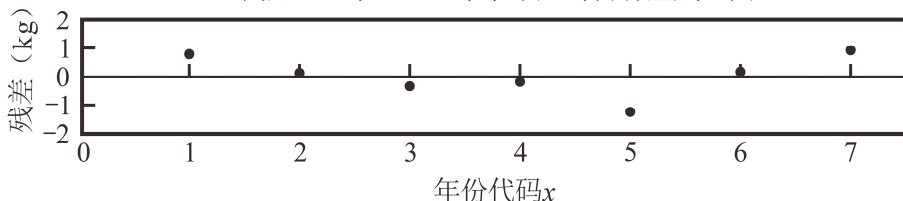
20. (12 分)

下面给出了根据我国 2012 年~2018 年水果人均占有量 y (单位: kg) 和年份代码 x 绘制的散点图和线性回归方程的残差图 (2012 年~2018 年的年份代码 x 分别为 1~7).

我国2012年~2018年水果人均占有量散点图



我国2012年~2018年水果人均占有量残差图



(1) 根据散点图分析 y 与 x 之间的相关关系;

(2) 根据散点图相应数据计算得 $\sum_{i=1}^7 y_i = 1074$, $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 4517$, 求 y 关于 x 的线性

回归方程;

(3) 根据线性回归方程的残差图, 分析线性回归方程的拟合效果.

(精确到 0.01)

附: 回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

21. (12 分)

设中心在原点，焦点在 x 轴上的椭圆 E 过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ． F 为 E 的右焦点， P 为 E 上一点， $PF \perp x$ 轴， $\odot F$ 的半径为 PF ．

(1) 求 E 和 $\odot F$ 的方程；

(2) 若直线 $l: y = k(x - \sqrt{3})$ ($k > 0$) 与 $\odot F$ 交于 A, B 两点，与 E 交于 C, D 两点，其中 A, C 在第一象限，是否存在 k 使 $|AC| = |BD|$ ？若存在，求 l 的方程；若不存在，说明理由．

22. (12 分)

函数 $f(x) = \frac{a+x}{1+x}$ ($x > 0$)，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 $\frac{11}{2}$ ．

(1) 求 a ；

(2) 讨论 $g(x) = x(f(x))^2$ 的单调性；

(3) 设 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = f(a_n)$ ，证明： $2^{n-2} |2 \ln a_n - \ln 7| < 1$ ．

2020 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{(x, y) | x \leq a\}$, $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, 若 $A \cap B$ 只含一个元素, 则
A. $a < -1$ B. $a > 1$ C. $a = 1$ D. $a = -1$
2. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a + 2i$ 是 $1 + bi$ 的共轭复数, 则 $a + b =$
A. 3 B. 1 C. -1 D. -3
3. 设向量 $a = (1, 1)$, $b = (-1, 3)$, $c = (2, 1)$, 且 $(a - \lambda b) \perp c$, 则 $\lambda =$
A. 3 B. 2 C. -2 D. -3
4. 已知点 A 为曲线 $y = x + \frac{4}{x} (x > 0)$ 上的动点, B 为圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 上的动点, 则 $|AB|$ 的最小值是
A. 3 B. 4 C. $3\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$
5. 已知三棱锥 $S - ABC$ 中, $\angle SAB = \angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $SB = 4$, $SC = 2\sqrt{13}$, $AB = 2$, $BC = 6$, 则三棱锥 $S - ABC$ 的体积是
A. 4 B. 6 C. $4\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$
6. $(2 + x)^{10}$ 的展开式各项的系数中最大的是
A. x^2 的系数 B. x^3 的系数 C. x^4 的系数 D. x^5 的系数
7. 某大学在校学生中, 理科生多于文科生, 女生多于男生, 则下述关于该大学在校学生的结论中, 一定成立的是
A. 理科男生多于文科女生 B. 文科女生多于文科男生
C. 理科女生多于文科男生 D. 理科女生多于理科男生

8. 若 $a > b > c > 1$ 且 $ac < b^2$, 则

A. $\log_a b > \log_b c > \log_c a$

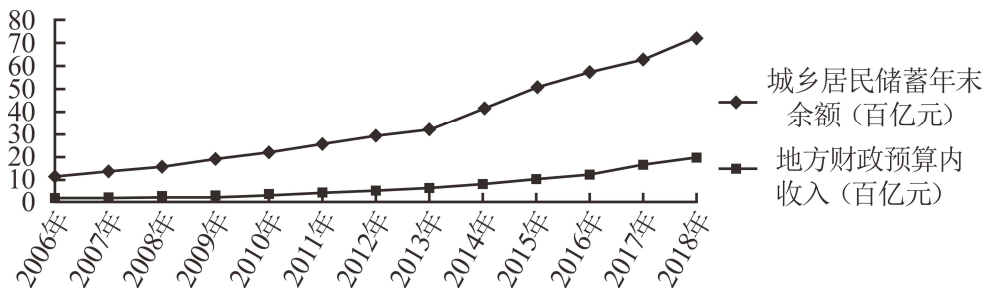
B. $\log_c b > \log_b a > \log_a c$

C. $\log_b c > \log_a b > \log_c a$

D. $\log_b a > \log_c b > \log_a c$

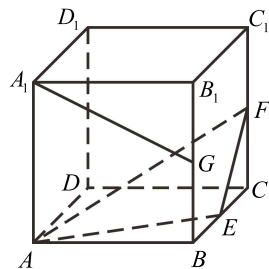
二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

9. 下图为某地区 2006 年~2018 年地方财政预算内收入、城乡居民储蓄年末余额折线图。



根据该折线图可知，该地区 2006 年~2018 年

- A. 财政预算内收入、城乡居民储蓄年末余额均呈增长趋势
- B. 财政预算内收入、城乡居民储蓄年末余额的逐年增长速度相同
- C. 财政预算内收入年平均增长量高于城乡居民储蓄年末余额年平均增长量
- D. 城乡居民储蓄年末余额与财政预算内收入的差额逐年增大
10. 位于数轴上 a_0 处的质点沿数轴匀速运动，经过 n 个单位时间，质点所处位置的坐标记为 a_n . 已知 $a_{10} = 4$, $a_9 a_{11} = -9$, 则质点初始位置的坐标 a_0 可以是
- A. -54 B. -46 C. 46 D. 54
11. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+1)$ 与 $f(x+2)$ 都为奇函数, 则
- A. $f(x)$ 为奇函数 B. $f(x)$ 为周期函数
- C. $f(x+3)$ 为奇函数 D. $f(x+4)$ 为偶函数
12. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点. 则
- A. 直线 D_1D 与直线 AF 垂直
- B. 直线 A_1G 与平面 AEF 平行
- C. 平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{8}$
- D. 点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点的直线 l 与 C 交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 8$, 则 l 的斜率为_____.

14. 已知 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) - \sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, 则 $\sin(\alpha + \frac{11\pi}{6}) =$ _____.

15. 某元宵灯谜竞猜节目, 有 6 名守擂选手和 6 名复活选手, 从复活选手中挑选 1 名选手为攻擂者, 从守擂选手中挑选 1 名选手为守擂者, 则攻擂者、守擂者的不同构成方式共有_____种.

16. 半径为 2 的球面上有 A, B, C, D 四点, 且 AB, AC, AD 两两垂直, 则 $\triangle ABC, \triangle ACD$ 与 $\triangle ADB$ 面积之和的最大值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

(1) 若 $a = 2b \sin A$, 求 B ;

(2) 若 BC 边上的高等于 a , 求 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 的最大值.

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + ax + b$.

(1) 设 $a = 2$, 直线 $3x - y + 5 = 0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条切线, 求 b ;

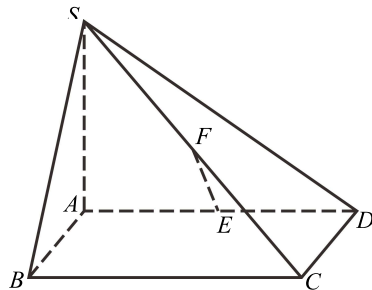
(2) 设 $b = -1$, $f(x)$ 有且仅有两个零点, 求 a 的取值范围.

19. (12 分)

如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形. $SA \perp$ 平面 $ABCD$, E, F 分别为 AD, SC 的中点, EF 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° .

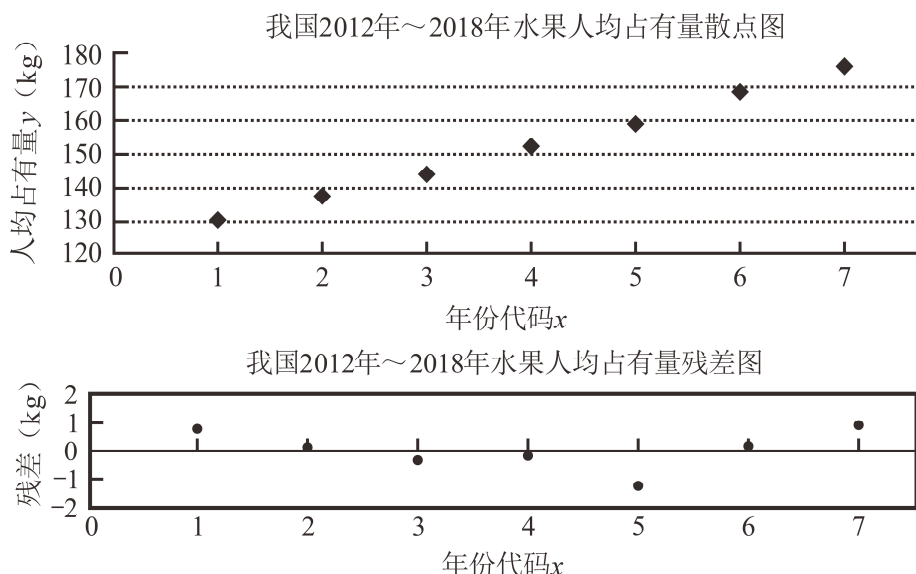
(1) 证明: EF 为异面直线 AD 与 SC 的公垂线;

(2) 若 $EF = \frac{1}{2}BC$, 求二面角 $B-SC-D$ 的余弦值.



20. (12 分)

下面给出了根据我国 2012 年~2018 年水果人均占有量 y (单位: kg) 和年份代码 x 绘制的散点图和线性回归方程的残差图 (2012 年~2018 年的年份代码 x 分别为 1~7).



(1) 根据散点图分析 y 与 x 之间的相关关系;

(2) 根据散点图相应数据计算得 $\sum_{i=1}^7 y_i = 1074$, $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 4517$, 求 y 关于 x 的线性

回归方程;

(3) 根据线性回归方程的残差图, 分析线性回归方程的拟合效果.
(精确到 0.01)

附: 回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

21. (12 分)

设中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆 E 过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. F 为 E 的右焦点, P 为 E 上一点, $PF \perp x$ 轴, $\odot F$ 的半径为 PF .

(1) 求 E 和 $\odot F$ 的方程;

(2) 若直线 $l: y = k(x - \sqrt{3})$ ($k > 0$) 与 $\odot F$ 交于 A, B 两点, 与 E 交于 C, D 两点, 其中 A, C 在第一象限, 是否存在 k 使 $|AC| = |BD|$? 若存在, 求 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

22. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项不为零, 前 n 项的和为 S_n , 满足 $2\sqrt{S_n} = a_n + c$.

(1) 证明: $c \leq 1$;

(2) 若 $c = 0$, 证明: $S_n \geq (n+1)^2$;

(3) 是否存在常数 c , 使得 $\{a_n\}$ 是等比数列? 若存在, 求出 c 的所有可能值; 若不存在, 说明理由.

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 2 < x < 4\}$, 则 $A \cup B =$
A. $\{x | 2 < x \leq 3\}$ B. $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 4\}$ D. $\{x | 1 < x < 4\}$
2. $\frac{2-i}{1+2i} =$
A. 1 B. -1 C. i D. -i
3. 6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者, 每名同学只去 1 个场馆, 甲场馆安排 1 名, 乙场馆安排 2 名, 丙场馆安排 3 名, 则不同的安排方法共有
A. 120 种 B. 90 种 C. 60 种 D. 30 种
4. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间。把地球看成一个球 (球心记为 O), 地球表面上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角, 点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面。在点 A 处放置一个日晷, 若晷面与赤道所在平面平行, 点 A 处的纬度为北纬 40° , 则晷针与点 A 处的水平面所成角为
A. 20° B. 40° C. 50° D. 90°



5. 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳, 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是
- A. 62% B. 56% C. 46% D. 42%
6. 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数, 世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段, 可以用指数模型: $I(t) = e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t (单位: 天) 的变化规律, 指数增长率 r 与 R_0 , T 近似满足 $R_0 = 1 + rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0 = 3.28$, $T = 6$. 据此, 在新冠肺炎疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 ($\ln 2 \approx 0.69$)
- A. 1.2 天 B. 1.8 天 C. 2.5 天 D. 3.5 天
7. 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是
- A. $(-2, 6)$ B. $(-6, 2)$ C. $(-2, 4)$ D. $(-4, 6)$
8. 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是
- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

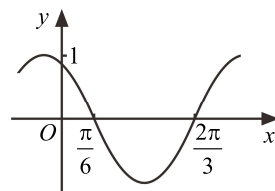
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$.

- A. 若 $m > n > 0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上
B. 若 $m = n > 0$, 则 C 是圆, 其半径为 $\sqrt{n}$
C. 若 $mn < 0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$
D. 若 $m = 0$, $n > 0$, 则 C 是两条直线

10. 右图是函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图像, 则 $\sin(\omega x + \varphi) =$

- A. $\sin(x + \frac{\pi}{3})$
B. $\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$
C. $\cos(2x + \frac{\pi}{6})$
D. $\cos(\frac{5\pi}{6} - 2x)$



11. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则

- A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$
C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$ D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

12. 信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量 X 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, n$, 且

$$P(X=i) = p_i > 0 (i=1, 2, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \text{定义 } X \text{ 的信息熵 } H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i.$$

- A. 若 $n=1$, 则 $H(X)=0$
B. 若 $n=2$, 则 $H(X)$ 随着 p_i 的增大而增大
C. 若 $p_i = \frac{1}{n} (i=1, 2, \dots, n)$, 则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大
D. 若 $n=2m$, 随机变量 Y 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, m$, 且 $P(Y=j) = p_j + p_{2m+1-j}$ ($j=1, 2, \dots, m$), 则 $H(X) \leq H(Y)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

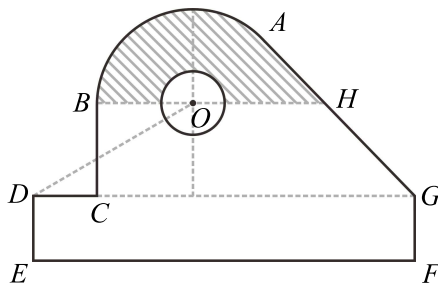
14. 将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零

件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC \perp DG$, 垂足为 C ,

$$\tan \angle ODC = \frac{3}{5}, \quad BH \parallel DG, \quad EF = 12 \text{ cm},$$

$DE = 2 \text{ cm}$, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm , 圆孔半径为 1 cm , 则图中阴影部分的面积为 $\underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$.



16. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2, $\angle BAD = 60^\circ$. 以 D_1 为球心, $\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在① $ac = \sqrt{3}$ ，② $c \sin A = 3$ ，③ $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由。

问题：是否存在 $\triangle ABC$ ，它的内角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ，且 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$ ， $C = \frac{\pi}{6}$ ，_____？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18. (12 分)

已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20$ ， $a_3 = 8$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0, m]$ ($m \in \mathbf{N}^*$) 中的项的个数，求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100} 。

19. (12 分)

为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 和 SO₂ 浓度（单位： $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ），得下表：

SO ₂	[0,50]	(50,150]	(150,475]
PM2.5			
[0,35]	32	18	4
(35,75]	6	8	12
(75,115]	3	7	10

(1) 估计事件“该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75，且 SO₂ 浓度不超过 150”的概率；

(2) 根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表：

SO ₂	[0,150]	(150,475]
PM2.5		
[0,75]		
(75,115]		

(3) 根据 (2) 中的列联表，判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO₂ 浓度有关？

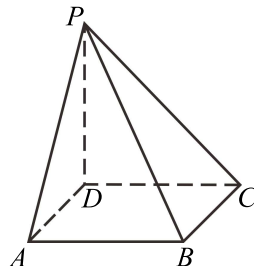
$$\text{附： } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \begin{array}{c|ccc} P(K^2 \geq k) & 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline k & 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}.$$

20. (12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l .

(1) 证明: $l \perp$ 平面 PDC ;

(2) 已知 $PD = AD = 1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



21. (12 分)

已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$.

(1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围.

22. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $A(2, 1)$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 点 M, N 在 C 上, 且 $AM \perp AN$, $AD \perp MN$, D 为垂足. 证明: 存在定点 Q , 使得 $|DQ|$ 为定值.

绝密★启用前

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

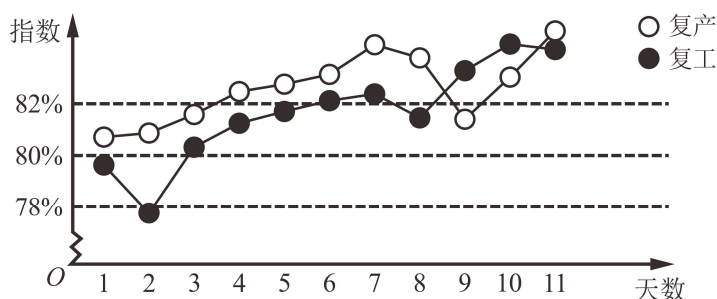
1. 设集合 $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{1, 8\}$ B. $\{2, 5\}$ C. $\{2, 3, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 5, 8\}$
2. $(1 + 2i)(2 + i) =$
A. $-5i$ B. $5i$ C. -5 D. 5
3. 若 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点, 则 $\overrightarrow{CB} =$
A. $2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$ B. $2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}$ C. $2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}$ D. $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$
4. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间。把地球看成一个球 (球心记为 O), 地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角, 点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面。在点 A 处放置一个日晷, 若晷面与赤道所在平面平行, 点 A 处的纬度为北纬 40° , 则晷针与点 A 处的水平面所成角为
A. 20° B. 40° C. 50° D. 90°



5. 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有96%的学生喜欢足球或游泳, 60%的学生喜欢足球, 82%的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是
- A. 62% B. 56% C. 46% D. 42%
6. 3名大学生利用假期到2个山村参加扶贫工作, 每名大学生只去1个村, 每个村至少1人, 则不同的分配方案共有
- A. 4种 B. 5种 C. 6种 D. 8种
7. 已知函数 $f(x) = \lg(x^2 - 4x - 5)$ 在 $(a, +\infty)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是
- A. $(-\infty, 1]$ B. $(-\infty, 2]$ C. $[2, +\infty)$ D. $[5, +\infty)$
8. 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $x f(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是
- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得5分, 有选错的得0分, 部分选对的得3分。

9. 我国新冠肺炎疫情进入常态化, 各地有序推进复工复产, 下面是某地连续11天复工复产指数折线图, 下列说法正确的是



- A. 这11天复工指数和复产指数均逐日增加
- B. 这11天期间, 复产指数增量大于复工指数的增量
- C. 第3天至第11天复工复产指数均超过80%
- D. 第9天至第11天复产指数增量大于复工指数的增量
10. 已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$.
- A. 若 $m > n > 0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上
- B. 若 $m = n > 0$, 则 C 是圆, 其半径为 $\sqrt{n}$
- C. 若 $mn < 0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$
- D. 若 $m = 0$, $n > 0$, 则 C 是两条直线

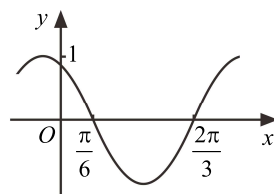
11. 右图是函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图像，则 $\sin(\omega x + \varphi) =$

A. $\sin(x + \frac{\pi}{3})$

B. $\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$

C. $\cos(2x + \frac{\pi}{6})$

D. $\cos(\frac{5\pi}{6} - 2x)$



12. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则

A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$

C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$

D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M , N 分别为棱 BB_1 , AB 的中点，则三棱锥 $A - NMD_1$ 的体积为_____.

14. 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点，且与 C 交于 A , B 两点，则 $|AB| =$ _____.

15. 将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为_____.

16. 某中学开展劳动实习，学生加工制作零件，零

件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB

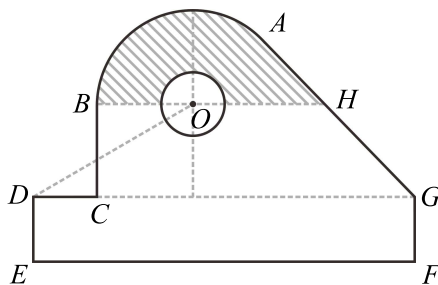
所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切

点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形

$DEFG$ 为矩形, $BC \perp DG$, 垂足为 C ,

$\tan \angle ODC = \frac{3}{5}$, $BH \parallel DG$, $EF = 12 \text{ cm}$,

$DE = 2 \text{ cm}$, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm , 圆孔半径为 1 cm , 则图中阴影部分的面积为_____ cm^2 .



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在① $ac = \sqrt{3}$ ，② $c \sin A = 3$ ，③ $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由。

问题：是否存在 $\triangle ABC$ ，它的内角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ，且 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$ ， $C = \frac{\pi}{6}$ ，_____？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18. (12 分)

已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20$ ， $a_3 = 8$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $a_1 a_2 - a_2 a_3 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n a_{n+1}$ 。

19. (12 分)

为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 和 SO₂ 浓度（单位： $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ），得下表：

SO ₂ PM2.5	[0,50]	(50,150]	(150,475]
[0,35]	32	18	4
(35,75]	6	8	12
(75,115]	3	7	10

(1) 估计事件“该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75，且 SO₂ 浓度不超过 150”的概率；

(2) 根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表：

SO ₂ PM2.5	[0,150]	(150,475]
[0,75]		
(75,115]		

(3) 根据 (2) 中的列联表，判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO₂ 浓度有关？

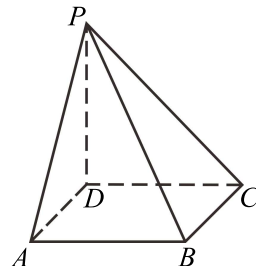
$$\text{附： } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \begin{array}{c|ccc} P(K^2 \geq k) & 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline k & 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}.$$

20. (12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l .

(1) 证明: $l \perp$ 平面 PDC ;

(2) 已知 $PD = AD = 1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 3)$, 点 A 为其左顶点, 且 AM 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 点 N 为 C 上任意一点, 求 $\triangle AMN$ 的面积的最大值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$.

(1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 M, N 均为 $\mathbf{R}$ 的子集, 且 $\complement_{\mathbf{R}} M \subseteq N$, 则 $M \cup (\complement_{\mathbf{R}} N) =$
A. $\emptyset$ B. M C. N D. $\mathbf{R}$
2. 在 3 张卡片上分别写上 3 位同学的学号后, 再把卡片随机分给这 3 位同学, 每人 1 张, 则恰有 1 位学生分到写有自己学号卡片的概率为
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
3. 关于 x 的方程 $x^2 + ax + b = 0$, 有下列四个命题:
甲: $x = 1$ 是该方程的根; 乙: $x = 3$ 是该方程的根;
丙: 该方程两根之和为 2; 丁: 该方程两根异号。
如果只有一个假命题, 则该命题是
A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁
4. 椭圆 $\frac{x^2}{m^2+1} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的焦点为 F_1, F_2 , 上顶点为 A , 若 $\angle F_1 A F_2 = \frac{\pi}{3}$, 则 $m =$
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
5. 已知单位向量 a, b 满足 $a \cdot b = 0$, 若向量 $c = \sqrt{7}a + \sqrt{2}b$, 则 $\sin \langle a, c \rangle =$
A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{9}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{9}$
6. $(1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^9$ 的展开式中 x^2 的系数是
A. 60 B. 80 C. 84 D. 120

7. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ 上三点 $A(2,2)$, B , C , 直线 AB , AC 是圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 则直线 BC 的方程为

A. $x + 2y + 1 = 0$

B. $3x + 6y + 4 = 0$

C. $2x + 6y + 3 = 0$

D. $x + 3y + 2 = 0$

8. 已知 $a < 5$ 且 $ae^5 = 5e^a$, $b < 4$ 且 $be^4 = 4e^b$, $c < 3$ 且 $ce^3 = 3e^c$, 则

A. $c < b < a$

B. $b < c < a$

C. $a < c < b$

D. $a < b < c$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = x \ln(1+x)$, 则

A. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增

B. $f(x)$ 有两个零点

C. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ 处切线的斜率为 $-1 - \ln 2$

D. $f(x)$ 是偶函数

10. 设 z_1, z_2, z_3 为复数, $z_1 \neq 0$. 下列命题中正确的是

A. 若 $|z_2| = |z_3|$, 则 $z_2 = \pm z_3$

B. 若 $z_1 z_2 = z_1 z_3$, 则 $z_2 = z_3$

C. 若 $\bar{z}_2 = z_3$, 则 $|z_1 z_2| = |z_1 z_3|$

D. 若 $z_1 z_2 = |z_1|^2$, 则 $z_1 = z_2$

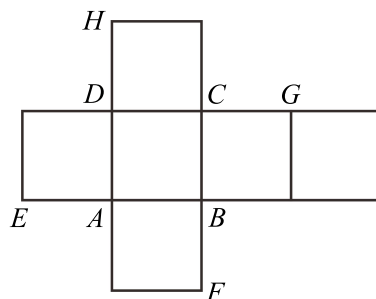
11. 右图是一个正方体的平面展开图, 则在该正方体中

A. $AE \parallel CD$

B. $CH \parallel BE$

C. $DG \perp BH$

D. $BG \perp DE$



12. 设函数 $f(x) = \frac{\cos 2x}{2 + \sin x \cos x}$, 则

A. $f(x) = f(x + \pi)$

B. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 单调递增

D. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 单调递减

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 圆台上、下底面的圆周都在一个直径为 10 的球面上，其上、下底面半径分别为 4 和 5，则该圆台的体积为_____.
14. 若正方形一条对角线所在直线的斜率为 2，则该正方形的两条邻边所在直线的斜率分别为_____, _____.
15. 写出一个最小正周期为 2 的奇函数 $f(x)=$ _____.
16. 对一个物理量做 n 次测量，并以测量结果的平均值作为该物理量的最后结果. 已知最后结果的误差 $\varepsilon_n \sim N(0, \frac{2}{n})$ ，为使误差 ε_n 在 $(-0.5, 0.5)$ 的概率不小于 0.954 5，至少要测量_____次（若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.954\ 5$ ）.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$.

(1) 证明：数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 为等比数列；

(2) 若 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{2}$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (12 分)

在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AD = BD = CD = 1$.

(1) 若 $AB = \frac{3}{2}$ ，求 BC ；

(2) 若 $AB = 2BC$ ，求 $\cos \angle BDC$.

19. (12 分)

一台设备由三个部件构成，假设在一天的运转中，部件 1，2，3 需要调整的概率分别为 0.1，0.2，0.3，各部件的状态相互独立.

(1) 求设备在一天的运转中，部件 1，2 中至少有 1 个需要调整的概率；

(2) 记设备在一天的运转中需要调整的部件个数为 X ，求 X 的分布列及数学期望.

20. (12 分)

北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用. 刻画空间的弯曲性是几何研究的重要内容: 用曲率刻画空间弯曲性, 规定: 多面体顶点的曲率等于 2π 与多面体在该点的面角之和的差 (多面体的面的内角叫做多面体的面角, 角度用弧度制), 多面体面上非顶点的曲率均为零, 多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和. 例如: 正四面体在每个顶点有 3 个面角, 每个面角是 $\frac{\pi}{3}$, 所以正四面体在各顶点的曲率为

$$2\pi - 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi, \text{ 故其总曲率为 } 4\pi.$$

(1) 求四棱锥的总曲率;

(2) 若多面体满足: 顶点数 - 棱数 + 面数 = 2, 证明: 这类多面体的总曲率是常数.



21. (12 分)

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 动点 B 在 C 上. 当

$BF \perp AF$ 时, $|AF| = |BF|$.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若 B 在第一象限, 证明: $\angle BFA = 2\angle BAF$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$, $g(x) = e^x + \sin x + \cos x$.

(1) 证明: 当 $x > -\frac{5\pi}{4}$ 时, $f(x) \geq 0$;

(2) 若 $g(x) \geq 2 + ax$, 求 a .

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
2. 已知 $z = 2 - i$, 则 $z(\bar{z} + i) =$
A. $6 - 2i$ B. $4 - 2i$ C. $6 + 2i$ D. $4 + 2i$
3. 已知圆锥的底面半径为 $\sqrt{2}$, 其侧面展开图为一个半圆, 则该圆锥的母线长为
A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$
4. 下列区间中, 函数 $f(x) = 7\sin(x - \frac{\pi}{6})$ 单调递增的区间是
A. $(0, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
5. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, 点 M 在 C 上, 则 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为
A. 13 B. 12 C. 9 D. 6
6. 若 $\tan \theta = -2$, 则 $\frac{\sin \theta(1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} =$
A. $-\frac{6}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{6}{5}$

7. 若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=e^x$ 的两条切线, 则

- A. $e^b < a$ B. $e^a < b$ C. $0 < a < e^b$ D. $0 < b < e^a$

8. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 从中有放回的随机取两次, 每次取 1 个球. 甲表示事件 “第一次取出的球的数字是 1”, 乙表示事件 “第二次取出的球的数字是 2”, 丙表示事件 “两次取出的球的数字之和是 8”, 丁表示事件 “两次取出的球的数字之和是 7”, 则

- A. 甲与丙相互独立 B. 甲与丁相互独立
C. 乙与丙相互独立 D. 丙与丁相互独立

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 由这组数据得到新样本数据 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 其中 $y_i = x_i + c (i=1, 2, \dots, n)$, c 为非零常数, 则

- A. 两组样本数据的样本平均数相同 B. 两组样本数据的样本中位数相同
C. 两组样本数据的样本标准差相同 D. 两组样本数据的样本极差相同

10. 已知 O 为坐标原点, 点 $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $P_2(\cos \beta, -\sin \beta)$, $P_3(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$, $A(1, 0)$, 则

- A. $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$ B. $|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$
C. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$ D. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$

11. 已知点 P 在圆 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$ 上, 点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, 则

- A. 点 P 到直线 AB 的距离小于 10 B. 点 P 到直线 AB 的距离大于 2
C. 当 $\angle PBA$ 最小时, $|PB| = 3\sqrt{2}$ D. 当 $\angle PBA$ 最大时, $|PB| = 3\sqrt{2}$

12. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 1$, 点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 1]$, 则

- A. 当 $\lambda = 1$ 时, $\triangle AB_1P$ 的周长为定值
B. 当 $\mu = 1$ 时, 三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值
C. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P , 使得 $A_1P \perp BP$
D. 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P , 使得 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数，则 $a =$ _____.

14. 已知 O 为坐标原点，抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F ， P 为 C 上一点， PF 与 x 轴垂直， Q 为 x 轴上一点，且 $PQ \perp OP$. 若 $|FQ| = 6$ ，则 C 的准线方程为 _____.

15. 函数 $f(x) = |2x - 1| - 2\ln x$ 的最小值为 _____.

16. 某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常 纸的某条对称轴把纸对折. 规格为 $20\text{ dm} \times 12\text{ dm}$ 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 $10\text{ dm} \times 12\text{ dm}$ ， $20\text{ dm} \times 6\text{ dm}$ 两种规格的图形，它们的面积之和 $S_1 = 240\text{ dm}^2$ ，对折 2 次共可以得到 $5\text{ dm} \times 12\text{ dm}$ ， $10\text{ dm} \times 6\text{ dm}$ ， $20\text{ dm} \times 3\text{ dm}$ 三种规格的图形，它们的面积之和 $S_2 = 180\text{ dm}^2$ ，以此类推. 则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为 _____；如果对折 n 次，那么 $\sum_{k=1}^n S_k =$ _____ dm^2 .

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & n \text{ 为奇数}, \\ a_n + 2, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

(1) 记 $b_n = a_{2n}$ ，写出 b_1 ， b_2 ，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

18. (12 分)

某学校组织“一带一路”知识竞赛，有 A，B 两类问题. 每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分.

已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

(1) 若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

(2) 为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

19. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b^2 = ac$, 点 D 在边 AC 上, $BD \sin \angle ABC = a \sin C$.

(1) 证明: $BD = b$;

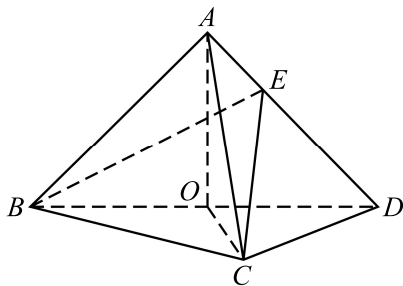
(2) 若 $AD = 2DC$, 求 $\cos \angle ABC$.

20. (12 分)

如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , $AB = AD$, O 为 BD 的中点.

(1) 证明: $OA \perp CD$;

(2) 若 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 E 在棱 AD 上, $DE = 2EA$, 且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45° , 求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.



21. (12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{17}, 0)$, $F_2(\sqrt{17}, 0)$, 点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 2$. 记 M 的轨迹为 C .

(1) 求 C 的方程;

(2) 设点 T 在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上, 过 T 的两条直线分别交 C 于 A, B 两点 and P, Q 两点, 且 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$, 求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b \ln a - a \ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

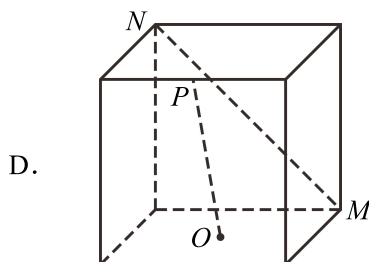
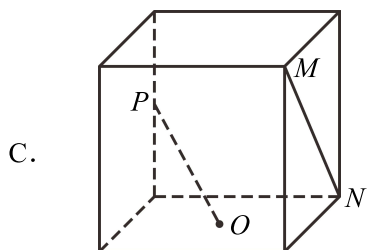
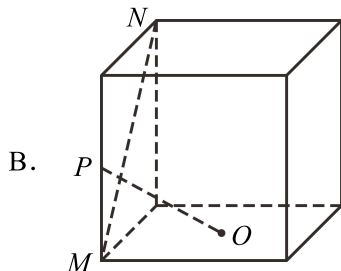
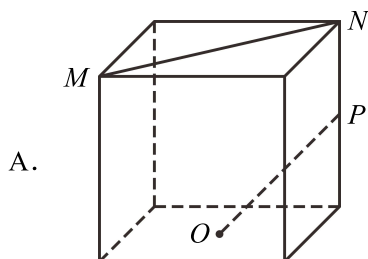
1. 在复平面内, 复数 $\frac{2-i}{1-3i}$ 对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 若全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$
A. $\{3\}$ B. $\{1, 6\}$ C. $\{5, 6\}$ D. $\{1, 3\}$
3. 若抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点到直线 $y = x + 1$ 的距离为 $\sqrt{2}$, 则 $p =$
A. 1 B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4
4. 北斗三号全球卫星导航系统是我国航天事业的重要成果。卫星导航系统中, 地球静止同步轨道卫星的轨道位于地球赤道所在平面, 轨道高度约为 36 000 km (轨道高度指卫星到地球表面的最短距离)。把地球看成一个球心为 O , 半径为 6 400 km 的球, 其上点 A 的纬度是指 OA 与赤道所在平面所成角的度数。地球表面上能直接观测到一颗地球静止同步轨道卫星的点的纬度的最大值记为 α , 该卫星信号覆盖的地球表面的面积 $S = 2\pi r^2(1 - \cos \alpha)$ (单位: km^2), 则 S 占地球表面积的百分比约为
A. 26% B. 34%
C. 42% D. 50%



5. 已知正四棱台的上、下底面边长分别为 2, 4, 侧棱长为 2, 则其体积为
- A. 56 B. $28\sqrt{2}$ C. $\frac{56}{3}$ D. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$
6. 某物理量的测量结果服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$, 则下列结论中不正确的是
- A. σ 越小, 该物理量一次测量结果落在 (9.9, 10.1) 内的概率越大
- B. 该物理量一次测量结果大于 10 的概率是 0.5
- C. 该物理量一次测量结果大于 10.01 的概率与小于 9.99 的概率相等
- D. 该物理量一次测量结果落在 (9.9, 10.2) 内的概率与落在 (10, 10.3) 内的概率相等
7. 设 $a = \log_5 2$, $b = \log_8 3$, $c = \frac{1}{2}$, 则
- A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $a < c < b$ D. $a < b < c$
8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(2x+1)$ 为奇函数, 则
- A. $f(-\frac{1}{2}) = 0$ B. $f(-1) = 0$ C. $f(2) = 0$ D. $f(4) = 0$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列统计量中可用于度量样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 离散程度的有
- A. $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的标准差 B. $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的中位数
- C. $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的极差 D. $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数
10. 如图，下列各正方体中， O 为下底面的中心， M , N 为顶点， P 为所在棱的中点，则满足 $MN \perp OP$ 的有



11. 已知直线 $l: ax + by - r^2 = 0$, 圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$, 点 $A(a, b)$. 下列命题中的真命题有
 A. 若 A 在 C 上, 则 l 与 C 相切
 B. 若 A 在 C 内, 则 l 与 C 相离
 C. 若 A 在 C 外, 则 l 与 C 相离
 D. 若 A 在 l 上, 则 l 与 C 相切
12. 设正整数 $n = a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + \cdots + a_{k-1} \times 2^{k-1} + a_k \times 2^k$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1, \cdots, k$, 记 $w(n) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$, 则
 A. $w(2n) = w(n)$
 B. $w(2n+3) = w(n) + 1$
 C. $w(8n+5) = w(4n+3)$
 D. $w(2^n - 1) = n$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 则 C 的两条渐近线方程分别为 _____, _____.
14. 写出一个具有性质①②③的函数 $f(x) =$ _____.
 ① $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$; ② 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$;
 ③ $f'(x)$ 是奇函数.
15. 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 2$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} =$ _____.
16. 设函数 $f(x) = |e^x - 1|$, $x_1 < 0, x_2 > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(x_1, f(x_1))$ 处的切线与在点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的切线相互垂直, 且分别交 y 轴于点 M, N , 则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

记 S_n 是公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $a_3 = S_5, a_2 a_4 = S_4$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 求使得 $S_n > a_n$ 的 n 的最小值.

18. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b = a + 1, c = a + 2$.

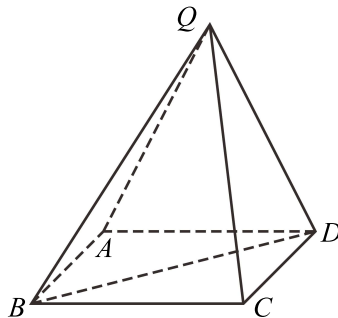
- (1) 若 $2 \sin C = 3 \sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
 (2) 是否存在正整数 a , 使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形? 若存在, 求 a ; 若不存在, 说明理由.

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $Q-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形,

$AD = 2, QC = 3, QA = QD = \sqrt{5}$.

- (1) 证明: 平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$;
 (2) 求二面角 $B-QD-A$ 的余弦值.



20. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 M, N 是 C 上两点, 直线 MN 与曲线 $x^2 + y^2 = b^2 (x > 0)$ 相切. 证明: M, N, F 三点共线的充要条件是 $|MN| = \sqrt{3}$.

21. (12 分)

假设开始时有一个微生物个体 (称为第 0 代), 该个体繁殖的若干个个体, 形成第 1 代, 第 1 代的每个个体繁殖的若干个个体, 形成第 2 代, …… . 假设每个个体繁殖的个体数相互独立且分布列相同, 记第 1 代微生物的个体总数为 X , X 的分布列为 $P(X=i) = p_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$.

(1) 若 $p_0 = 0.4, p_1 = 0.3, p_2 = 0.2, p_3 = 0.1$, 求 $E(X)$;

(2) 以 p 表示这种微生物最终消亡的概率. 已知 p 是关于 x 的方程

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$$

的最小正根. 证明: 当 $E(X) \leq 1$ 时, $p = 1$; 当 $E(X) > 1$ 时, $p < 1$;

(3) 说明 (2) 的结论的意义.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 从①②两组条件中选取一组作为已知条件, 证明: $f(x)$ 恰有一个零点.

$$\textcircled{1} \frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}, b > 2a;$$

$$\textcircled{2} 0 < a < \frac{1}{2}, b \leq 2a.$$

注: 如果选择两组条件分别解答, 按第一个解答计分.

绝密★启用前

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$, $N = \{x | 3x \geq 1\}$, 则 $M \cap N =$
- A. $\{x | 0 \leq x < 4\}$ B. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 2\}$
- C. $\{x | 3 \leq x < 16\}$ D. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 16\}$
2. 若 $i(1-z)=1$, 则 $z+\bar{z} =$
- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
3. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $BD=2DA$. 记 $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{m}$, $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{n}$, 则 $\overrightarrow{CB} =$
- A. $3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$ B. $-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$ C. $3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ D. $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$
4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题, 其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5 m 时, 相应水面的面积为 140.0 km^2 ; 水位为海拔 157.5 m 时, 相应水面的面积为 180.0 km^2 . 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台, 则该水库水位从海拔 148.5 m 上升到 157.5 m 时, 增加的水量约为 ($\sqrt{7} \approx 2.65$)
- A. $1.0 \times 10^9\text{ m}^3$ B. $1.2 \times 10^9\text{ m}^3$ C. $1.4 \times 10^9\text{ m}^3$ D. $1.6 \times 10^9\text{ m}^3$
5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 则这 2 个数互质的概率为
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

6. 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) + b$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T . 若 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 且 $y = f(x)$

的图像关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 2)$ 中心对称, 则 $f(\frac{\pi}{2}) =$

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

7. 设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\ln 0.9$, 则

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l , 其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为 36π , 且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是

- A. $[18, \frac{81}{4}]$ B. $[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}]$ C. $[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}]$ D. $[18, 27]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 则

- A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90°
B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45°
D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, 则

- A. $f(x)$ 有两个极值点 B. $f(x)$ 有三个零点
C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心 D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

11. 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上, 过点 $B(0, -1)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 则

- A. C 的准线为 $y = -1$ B. 直线 AB 与 C 相切
C. $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$ D. $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f(\frac{3}{2} - 2x)$, $g(2 + x)$ 均为偶函数, 则

- A. $f(0) = 0$ B. $f(-\frac{1}{2}) = 0$ C. $f(-1) = f(4)$ D. $g(-1) = g(2)$

20. (12 分)

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了100例（称为病例组），同时从未患该疾病的人群中随机调查了100人（称为对照组）得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

(2) 从该地的人群中任选一人， A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”， B 表示事件“选到的人患有该疾病”， $\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R 。

(i) 证明： $R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$ ；

(ii) 利用该调查数据，给出 $P(A|B)$ ， $P(A|\bar{B})$ 的估计值，并利用(i)的结果给出 R 的估计值。

$$\text{附： } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \begin{array}{c|ccc} P(K^2 \geq k) & 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline k & 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}$$

21. (12 分)

已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1)$ 上，直线 l 交 C 于 P ， Q 两点，直线 AP ， AQ 的斜率之和为0。

(1) 求 l 的斜率；

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$ ，求 $\triangle PAQ$ 的面积。

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值。

(1) 求 a ；

(2) 证明：存在直线 $y = b$ ，其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列。

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 1, 2, 4\}$, $B = \{x \mid |x-1| \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{-1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{-1, 4\}$
2. $(2+2i)(1-2i) =$
 A. $-2+4i$ B. $-2-4i$ C. $6+2i$ D. $6-2i$
3. 图1是中国古代建筑中的举架结构, AA' , BB' , CC' , DD' 是桁, 相邻桁的水平距离称为步, 垂直距离称为举。图2是某古代建筑屋顶截面的示意图。其中 DD_1 , CC_1 , BB_1 , AA_1 是举, OD_1 , DC_1 , CB_1 , BA_1 是相等的步, 相邻桁的举步之比分别为 $\frac{DD_1}{OD_1} = 0.5$, $\frac{CC_1}{DC_1} = k_1$, $\frac{BB_1}{CB_1} = k_2$, $\frac{AA_1}{BA_1} = k_3$ 。已知 k_1 , k_2 , k_3 成公差为 0.1 的等差数列, 且直线 OA 的斜率为 0.725, 则 $k_3 =$

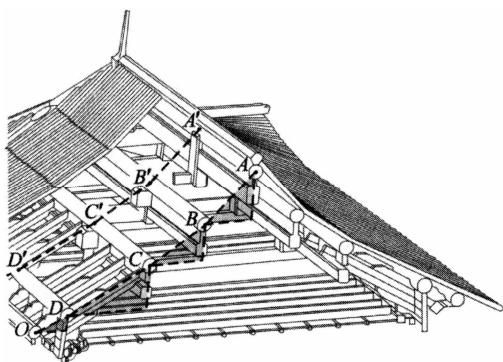


图1

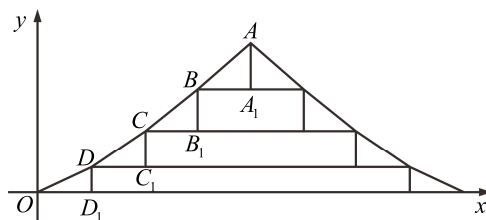


图2

- A. 0.75 B. 0.8 C. 0.85 D. 0.9

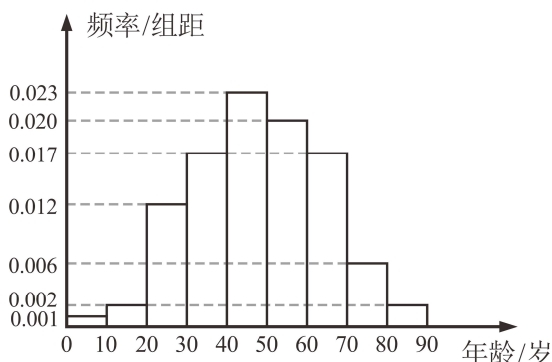
4. 已知向量 $\mathbf{a} = (3, 4)$, $\mathbf{b} = (1, 0)$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$, 若 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$, 则 $t =$
- A. -6 B. -5 C. 5 D. 6
5. 甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学站成一排参加文艺汇演, 若甲不站在两端, 丙和丁相邻, 则不同的排列方式共有
- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 48 种
6. 若 $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \sin \beta$, 则
- A. $\tan(\alpha - \beta) = 1$ B. $\tan(\alpha + \beta) = 1$ C. $\tan(\alpha - \beta) = -1$ D. $\tan(\alpha + \beta) = -1$
7. 已知正三棱台的高为 1, 上、下底面边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$, 其顶点都在同一球面上, 则该球的表面积为
- A. 100π B. 128π C. 144π D. 192π
8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$
- A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图像关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 中心对称, 则
- A. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{5\pi}{12})$ 单调递减
- B. $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12})$ 有两个极值点
- C. 直线 $x = \frac{7\pi}{6}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴
- D. 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线
10. 已知 O 为坐标原点, 过抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 焦点 F 的直线与 C 交于 A, B 两点, 其中 A 在第一象限, 点 $M(p, 0)$. 若 $|AF| = |AM|$, 则
- A. 直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{6}$ B. $|OB| = |OF|$
- C. $|AB| > 4|OF|$ D. $\angle OAM + \angle OBM < 180^\circ$

19. (12 分)

在某地区进行流行病学调查，随机调查了100位某种疾病患者的年龄，得到如下的样本数据的频率分布直方图：



(1) 估计该地区这种疾病患者的平均年龄（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

(2) 估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间 $[20, 70)$ 的概率；

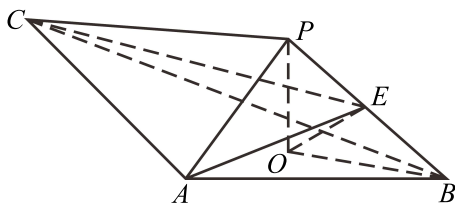
(3) 已知该地区这种疾病的患病率为0.1%，该地区年龄位于区间 $[40, 50)$ 的人口占该地区总人口的16%．从该地区中任选一人，若此人的年龄位于区间 $[40, 50)$ ，求此人患这种疾病的概率（以样本数据中患者的年龄位于各区间的频率作为患者的年龄位于该区间的概率，精确到0.0001）．

20. (12 分)

如图， PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高， $PA=PB$ ， $AB \perp AC$ ， E 为 PB 的中点．

(1) 证明： $OE \parallel$ 平面 PAC ；

(2) 若 $\angle ABO = \angle CBO = 30^\circ$ ， $PO = 3$ ， $PA = 5$ ，求二面角 $C-AE-B$ 的正弦值．



21. (12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(2, 0)$ ，渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$ ．

(1) 求 C 的方程；

(2) 过 F 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点，点 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ 在 C 上，且 $x_1 > x_2 > 0$ ， $y_1 > 0$ ．过 P 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与过 Q 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交于点 M ．从下面①②③中选取两个作为条件，证明另一个成立．

① M 在 AB 上；② $PQ \parallel AB$ ；③ $|MA| = |MB|$ ．

注：若选择不同的组合分别作答，则按第一个解答计分．

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x>0$ 时, $f(x)<-1$, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z=1+i$, 则 $z^2-i=$
A. i B. $-i$ C. 1 D. -1
2. 设集合 $A=\{2,3,a^2-2a-3\}$, $B=\{0,3\}$, $C=\{2,a\}$. 若 $B\subseteq A$, $A\cap C=\{2\}$, 则 $a=$
A. -3 B. -1 C. 1 D. 3
3. 甲、乙、丙、丁四名教师带领学生参加校园植树活动, 教师随机分成三组, 每组至少一人, 则甲、乙在同一组的概率为
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
4. 平面向量 a 与 b 相互垂直, 已知 $a=(6,-8)$, $|b|=5$, 且 b 与向量 $(1,0)$ 的夹角是钝角, 则 $b=$
A. $(-3,-4)$ B. $(4,3)$ C. $(-4,3)$ D. $(-4,-3)$
5. 已知点 A , B , C 为椭圆 D 的三个顶点, 若 $\triangle ABC$ 是正三角形, 则 D 的离心率是
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. 三棱锥 $A-BCD$ 中, $AC\perp$ 平面 BCD , $BD\perp CD$. 若 $AB=3$, $BD=1$, 则该三棱锥体积的最大值为
A. 2 B. $\frac{4}{3}$ C. 1 D. $\frac{2}{3}$
7. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 的导函数存在, 且 $f'(x)<g'(x)$, 则当 $x\in(a,b)$ 时
A. $f(x)<g(x)$ B. $f(x)>g(x)$
C. $f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$ D. $f(x)+g(b)<g(x)+f(b)$
8. 已知 a , b , c 满足 $a=\log_5(2^b+3^b)$, $c=\log_3(5^b-2^b)$, 则
A. $|a-c|\geq|b-c|$, $|a-b|\geq|b-c|$ B. $|a-c|\geq|b-c|$, $|a-b|\leq|b-c|$
C. $|a-c|\leq|b-c|$, $|a-b|\geq|b-c|$ D. $|a-c|\leq|b-c|$, $|a-b|\leq|b-c|$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x)$, $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 单调递减, 则

- A. $f(f(1)) < f(f(2))$ B. $f(g(1)) < f(g(2))$
C. $g(f(1)) < g(f(2))$ D. $g(g(1)) < g(g(2))$

10. 已知平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$, B, D 是 l 上两点, 直线 $AB \subset \alpha$ 且 $AB \cap l = B$, 直线 $CD \subset \beta$ 且 $CD \cap l = D$. 下列结论中, 错误的有

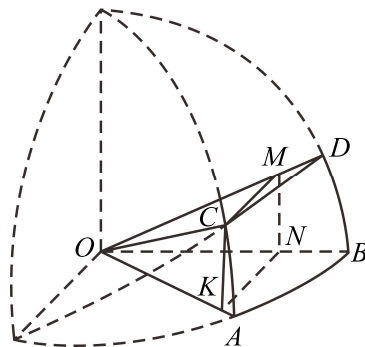
- A. 若 $AB \perp l$, $CD \perp l$, 且 $AB = CD$, 则 $ABCD$ 是平行四边形
 B. 若 M 是 AB 中点, N 是 CD 中点, 则 $MN \parallel AC$
 C. 若 $\alpha \perp \beta$, $AB \perp l$, $AC \perp l$, 则 CD 在 α 上的投影是 BD
 D. 直线 AB , CD 所成角的大小与二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小相等

11. 质点 P 和 Q 在以坐标原点 O 为圆心, 半径为 1 的 $\odot O$ 上逆时针作匀速圆周运动, 同时出发. P 的角速度大小为 2 rad/s , 起点为 $\odot O$ 与 x 轴正半轴的交点; Q 的角速度大小为 5 rad/s , 起点为射线 $y = -\sqrt{3}x (x \geq 0)$ 与 $\odot O$ 的交点. 则当 Q 与 P 重合时, Q 的坐标可以为

- A. $(\cos \frac{2\pi}{9}, \sin \frac{2\pi}{9})$ B. $(-\cos \frac{5\pi}{9}, -\sin \frac{5\pi}{9})$
C. $(\cos \frac{\pi}{9}, -\sin \frac{\pi}{9})$ D. $(-\cos \frac{\pi}{9}, \sin \frac{\pi}{9})$

12. 下图改编自李约瑟所著的《中国科学技术史》，用于说明元代数学家郭守敬在编制《授时历》时所做的天文计算. 图中的 $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BD}$, $\widehat{CD}$ 都是以 O 为圆心的圆弧, $CMNK$ 是为计算所做的矩形, 其中 M , N , K 分别在线段 OD , OB , OA 上, $MN \perp OB$, $KN \perp OB$. 记 $\alpha = \angle AOB$, $\beta = \angle AOC$, $\gamma = \angle BOD$, $\delta = \angle COD$, 则

- A. $\sin \beta = \sin \gamma \cos \delta$
 B. $\cos \beta = \cos \gamma \cos \delta$
 C. $\sin \alpha = \frac{\sin \delta}{\cos \beta}$
 D. $\cos \alpha = \frac{\cos \gamma \cos \delta}{\cos \beta}$



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某工厂生产的产品的质量指标服从正态分布 $N(100, \sigma^2)$. 质量指标介于 99 至 101 之间的产品为良品，为使这种产品的良品率达到 95.45%，则需调整生产工艺，使得 σ 至多为_____。（若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P\{|X - \mu| < 2\sigma\} = 0.9545$ ）
14. 若 P ， Q 分别是抛物线 $x^2 = y$ 与圆 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 上的点，则 $|PQ|$ 的最小值为_____.
15. 数学家祖冲之曾给出圆周率 π 的两个近似值：“约率” $\frac{22}{7}$ 与“密率” $\frac{355}{113}$. 它们可用“调日法”得到：称小于 3.1415926 的近似值为弱率，大于 3.1415927 的近似值为强率，由 $\frac{3}{1} < \pi < \frac{4}{1}$ ，取 3 为弱率，4 为强率，得 $a_1 = \frac{3+4}{1+1} = \frac{7}{2}$ ，故 a_1 为强率，与上一次的弱率 3 计算得 $a_2 = \frac{3+7}{1+2} = \frac{10}{3}$ ，故 a_2 为强率，继续计算，……. 若某次得到的近似值为强率，与上一次的弱率继续计算得到新的近似值；若某次得到的近似值为弱率，与上一次的强率继续计算得到新的近似值，依此类推. 已知 $a_m = \frac{22}{7}$ ，则 $m =$ _____； $a_8 =$ _____.
16. 右图为一个开关阵列，每个开关只有“开”和“关”两种状态，按其中一个开关 1 次，将导致自身和所有相邻的开关改变状态. 例如，按 $(2, 2)$ 将导致 $(1, 2)$ ， $(2, 1)$ ， $(2, 2)$ ， $(2, 3)$ ， $(3, 2)$ 改变状态. 如果要求只改变 $(1, 1)$ 的状态，则需按开关的最少次数为_____.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

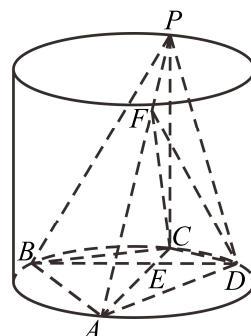
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

如图，四边形 $ABCD$ 是圆柱底面的内接四边形， AC 是圆柱的底面直径， PC 是圆柱的母线， E 是 AC 与 BD 的交点， $AB = AD$ ， $\angle BAD = 60^\circ$.

(1) 记圆柱的体积为 V_1 ，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 V_2 ，求 $\frac{V_1}{V_2}$ ；

(2) 设点 F 在线段 AP 上， $PA = 4PF$ ， $PC = 4CE$ ，求二面角 $F-CD-P$ 的余弦值.



18. (12 分)

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 单调, 其中 ω 为正整数, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 且

$$f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3}).$$

(1) 求 $y = f(x)$ 图像的一条对称轴;

(2) 若 $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 φ .

19. (12 分)

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $a_1 = 1$, $a_n = T_{n-1}$ ($n \geq 2$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 m 为整数, 且对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $m \geq \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n}$, 求 m 的最小值.

20. (12 分)

一个池塘里的鱼的数目记为 N , 从池塘里捞出 200 尾鱼, 并给鱼作上标识, 然后把鱼放回池塘里, 过一小段时间后再从池塘里捞出 500 尾鱼, X 表示捞出的 500 尾鱼中有标识的鱼的数目.

(1) 若 $N = 5000$, 求 X 的数学期望;

(2) 已知捞出的 500 尾鱼中 15 尾有标识, 试给出 N 的估计值 (以使得 $P(X = 15)$ 最大的 N 的值作为 N 的估计值).

21. (12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 过点 $A(4\sqrt{2}, 3)$, 且焦距为 10.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知点 $B(4\sqrt{2}, -3)$, $D(2\sqrt{2}, 0)$, E 为线段 AB 上一点, 且直线 DE 交 C 于 G ,

H 两点. 证明: $\frac{|GD|}{|GE|} = \frac{|HD|}{|HE|}$.

22. (12 分)

椭圆曲线加密算法运用于区块链.

椭圆曲线 $C = \{(x, y) | y^2 = x^3 + ax + b, 4a^3 + 27b^2 \neq 0\}$. $P \in C$ 关于 x 轴的对称点记为 $\tilde{P}$. C 在点 $P(x, y) (y \neq 0)$ 处的切线是指曲线 $y = \pm\sqrt{x^3 + ax + b}$ 在点 P 处的切线. 定义 “ $\oplus$ ” 运算满足: ①若 $P \in C$, $Q \in C$, 且直线 PQ 与 C 有第三个交点 R , 则 $P \oplus Q = \tilde{R}$; ②若 $P \in C$, $Q \in C$, 且 PQ 为 C 的切线, 切点为 P , 则 $P \oplus Q = \tilde{P}$; ③若 $P \in C$, 规定 $P \oplus \tilde{P} = 0^*$, 且 $P \oplus 0^* = 0^* \oplus P = P$.

(1) 当 $4a^3 + 27b^2 = 0$ 时, 讨论函数 $h(x) = x^3 + ax + b$ 零点的个数;

(2) 已知 “ $\oplus$ ” 运算满足交换律、结合律, 若 $P \in C$, $Q \in C$, 且 PQ 为 C 的切线, 切点为 P , 证明: $P \oplus P = \tilde{Q}$;

(3) 已知 $P(x_1, y_1) \in C$, $Q(x_2, y_2) \in C$, 且直线 PQ 与 C 有第三个交点, 求 $P \oplus Q$ 的坐标.

参考公式: $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$
A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$
2. 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$, 则 $z - \bar{z} =$
A. $-i$ B. i C. 0 D. 1
3. 已知向量 $\boldsymbol{a} = (1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1)$. 若 $(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b})$, 则
A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda \mu = 1$ D. $\lambda \mu = -1$
4. 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减, 则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$ C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$
5. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 . 若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$, 则 $a =$
A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$
6. 过点 $(0, -2)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α , 则 $\sin \alpha =$
A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 则

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) =$

- A. $\frac{7}{9}$
- B. $\frac{1}{9}$
- C. $-\frac{1}{9}$
- D. $-\frac{7}{9}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 有一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_6$, 其中 x_1 是最小值, x_6 是最大值, 则

- A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的平均数
- B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的中位数
- C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的标准差
- D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的极差

10. 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级

$L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}$, 其中常数 $p_0 (p_0 > 0)$ 是听觉下限阈值, p 是实际声压. 下表为不同

声源的声压级:

声源	与声源的距离 /m	声压级 /dB
燃油汽车	10	60 ~ 90
混合动力汽车	10	50 ~ 60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1, p_2, p_3 , 则

- A. $p_1 \geq p_2$
- B. $p_2 > 10p_3$
- C. $p_3 = 100p_0$
- D. $p_1 \leq 100p_2$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则

- A. $f(0) = 0$
- B. $f(1) = 0$
- C. $f(x)$ 是偶函数
- D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12. 下列物体中，能够被整体放入棱长为1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有
- A. 直径为0.99m的球体
 - B. 所有棱长均为1.4m的四面体
 - C. 底面直径为0.01m，高为1.8m的圆柱体
 - D. 底面直径为1.2m，高为0.01m的圆柱体

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 某学校开设了4门体育类选修课和4门艺术类选修课，学生需从这8门课中选修2门或3门课，并且每类选修课至少选修1门，则不同的选课方案共有_____种（用数字作答）.
14. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $A_1B_1=1$ ， $AA_1=\sqrt{2}$ ，则该棱台的体积为_____.
15. 已知函数 $f(x)=\cos \omega x-1$ ($\omega>0$) 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有3个零点，则 ω 的取值范围是_____.
16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的左、右焦点分别为 F_1 ， F_2 . 点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上， $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$ ， $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$ ，则 C 的离心率为_____.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

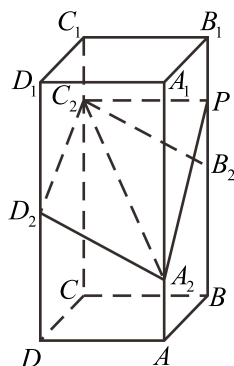
已知在 $\triangle ABC$ 中， $A+B=3C$ ， $2\sin(A-C)=\sin B$.

- (1) 求 $\sin A$;
- (2) 设 $AB=5$ ，求 AB 边上的高.

18. (12分)

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $AA_1=4$. 点 A_2 ， B_2 ， C_2 ， D_2 分别在棱 AA_1 ， BB_1 ， CC_1 ， DD_1 上， $AA_2=1$ ， $BB_2=DD_2=2$ ， $CC_2=3$.

- (1) 证明： $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;
- (2) 点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时，求 B_2P .



19. (12 分)

已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

20. (12 分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$. 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n , T_n 分别为数列 $\{a_n\}$,

$\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, $S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

21. (12 分)

甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选, 第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i$,

$i = 1, 2, \dots, n$, 则 $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n q_i$. 记第 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次

数为 Y , 求 $E(Y)$.

22. (12 分)

在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0, \frac{1}{2})$ 的距离, 记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内, $(1+3i)(3-i)$ 对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 设集合 $A = \{0, -a\}$, $B = \{1, a-2, 2a-2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$
A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1
3. 某学校为了解学生参加体育运动的情况, 用比例分配的分层随机抽样方法作抽样调查, 拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生, 已知该校初中部和高中部分别有 400 名和 200 名学生, 则不同的抽样结果共有
A. $C_{400}^{45} \cdot C_{200}^{15}$ 种 B. $C_{400}^{20} \cdot C_{200}^{40}$ 种 C. $C_{400}^{30} \cdot C_{200}^{30}$ 种 D. $C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}$ 种
4. 若 $f(x) = (x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则 $a =$
A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1
5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y = x + m$ 与 C 交于 A, B 两点, 若 $\triangle F_1AB$ 面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍, 则 $m =$
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

6. 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 单调递增, 则 a 的最小值为

- A. e^2 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}

7. 已知 α 为锐角, $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} =$

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$ C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

8. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = -5$, $S_6 = 21S_2$, 则 $S_8 =$

- A. 120 B. 85 C. -85 D. 120

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知圆锥的顶点为 P , 底面圆心为 O , AB 为底面直径, $\angle APB = 120^\circ$, $PA = 2$, 点 C 在底面圆周上, 且二面角 $P-AC-O$ 为 45° , 则

- A. 该圆锥的体积为 π
B. 该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$
C. $AC = 2\sqrt{2}$
D. $\triangle PAC$ 的面积为 $\sqrt{3}$

10. 设 O 为坐标原点, 直线 $y = -\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 且与 C 交于 M, N 两点, l 为 C 的准线, 则

- A. $p = 2$
B. $|MN| = \frac{8}{3}$
C. 以 MN 为直径的圆与 l 相切
D. $\triangle OMN$ 为等腰三角形

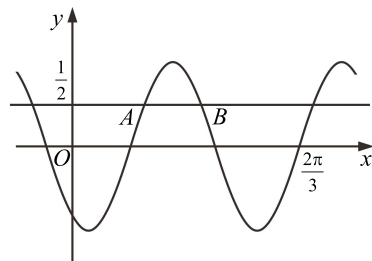
11. 若函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} (a \neq 0)$ 既有极大值也有极小值, 则

- A. $bc > 0$ B. $ab > 0$ C. $b^2 + 8ac > 0$ D. $ac < 0$

12. 在信道内传输 0, 1 信号, 信号的传输相互独立. 发送 0 时, 收到 1 的概率为 α ($0 < \alpha < 1$), 收到 0 的概率为 $1 - \alpha$; 发送 1 时, 收到 0 的概率为 β ($0 < \beta < 1$), 收到 1 的概率为 $1 - \beta$. 考虑两种传输方案: 单次传输和三次传输. 单次传输是指每个信号只发送 1 次; 三次传输是指每个信号重复发送 3 次. 收到的信号需要译码, 译码规则如下: 单次传输时, 收到的信号即为译码; 三次传输时, 收到的信号中出现次数多的即为译码 (例如, 若依次收到 1, 0, 1, 则译码为 1).
- A. 采用单次传输方案, 若依次发送 1, 0, 1, 则依次收到 1, 0, 1 的概率为 $(1 - \alpha)(1 - \beta)^2$
- B. 采用三次传输方案, 若发送 1, 则依次收到 1, 0, 1 的概率为 $\beta(1 - \beta)^2$
- C. 采用三次传输方案, 若发送 1, 则译码为 1 的概率为 $\beta(1 - \beta)^2 + (1 - \beta)^3$
- D. 当 $0 < \alpha < 0.5$ 时, 若发送 0, 则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |2\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 则 $|\mathbf{b}| =$ _____.
14. 底面边长为 4 的正四棱锥被平行于其底面的平面所截, 截去一个底面边长为 2, 高为 3 的正四棱锥, 所得棱台的体积为 _____.
15. 已知直线 $x - my + 1 = 0$ 与 $\odot C: (x - 1)^2 + y^2 = 4$ 交于 A , B 两点, 写出满足 “ $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{8}{5}$ ” 的 m 的一个值 _____.
16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 如图, A , B 是直线 $y = \frac{1}{2}$ 与曲线 $y = f(x)$ 的两个交点, 若 $|AB| = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(\pi) =$ _____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\triangle ABC$ 面积为 $\sqrt{3}$ ， D 为 BC 的中点，且 $AD=1$ 。

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$ ，求 $\tan B$ ；

(2) 若 $b^2 + c^2 = 8$ ，求 b, c 。

18. (12 分)

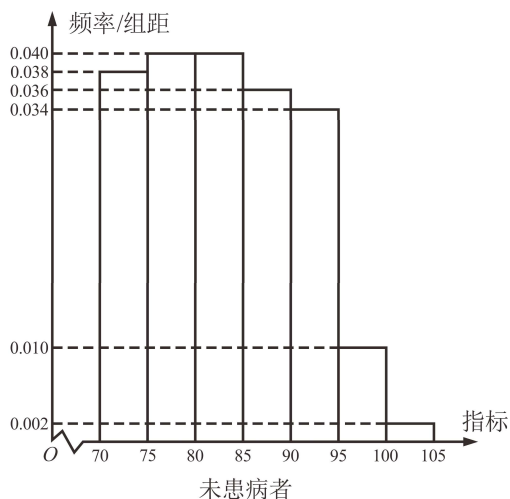
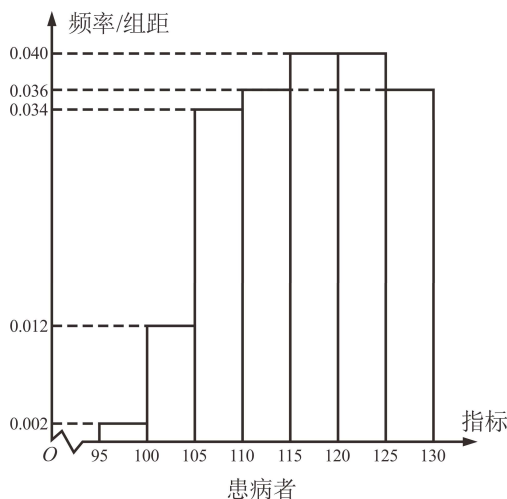
已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $b_n = \begin{cases} a_n - 6, & n \text{ 为奇数}, \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$ 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和， $S_4 = 32, T_3 = 16$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：当 $n > 5$ 时， $T_n > S_n$ 。

19. (12 分)

某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异，经过大量调查，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图：



利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 c ，将该指标大于 c 的人判定为阳性，小于或等于 c 的人判定为阴性。此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率，记为 $p(c)$ ；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为 $q(c)$ 。假设数据在组内均匀分布。以事件发生的频率作为相应事件发生的概率。

(1) 当漏诊率 $p(c) = 0.5\%$ 时，求临界值 c 和误诊率 $q(c)$ ；

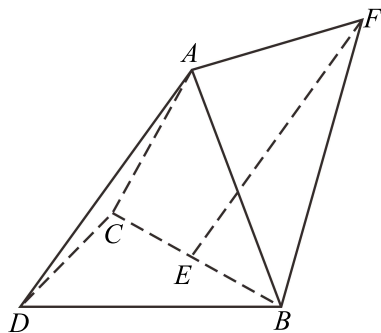
(2) 设函数 $f(c) = p(c) + q(c)$ 。当 $c \in [95, 105]$ 时，求 $f(c)$ 的解析式，并求 $f(c)$ 在区间 $[95, 105]$ 的最小值。

20. (12 分)

如图，三棱锥 $A-BCD$ 中， $DA=DB=DC$ ， $BD \perp CD$ ， $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$ ， E 为 BC 的中点.

(1) 证明： $BC \perp DA$ ；

(2) 点 F 满足 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$ ，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.



21. (12 分)

已知双曲线 C 的中心为坐标原点，左焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$ ，离心率为 $\sqrt{5}$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 记 C 的左、右顶点分别为 A_1 ， A_2 ，过点 $(-4, 0)$ 的直线与 C 的左支交于 M ， N 两点， M 在第二象限，直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P ，证明：点 P 在定直线上.

22. (12 分)

(1) 证明：当 $0 < x < 1$ 时， $x - x^2 < \sin x < x$ ；

(2) 已知函数 $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$ ，若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 样本数据 16，24，14，10，20，30，12，14，40 的中位数为
A. 14 B. 16 C. 18 D. 20
2. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，则 $a =$
A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
3. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_3 + a_7 = 6$ ， $a_{12} = 17$ ，则 $S_{16} =$
A. 120 B. 140 C. 160 D. 180
4. 设 α ， β 是两个平面， m ， l 是两条直线，则下列命题为真命题的是
A. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $m \parallel \alpha$ ， $l \parallel \beta$ ，则 $m \perp l$
B. 若 $m \subset \alpha$ ， $l \subset \beta$ ， $m \parallel l$ ，则 $\alpha \parallel \beta$
C. 若 $\alpha \cap \beta = m$ ， $l \parallel \alpha$ ， $l \parallel \beta$ ，则 $m \parallel l$
D. 若 $m \perp \alpha$ ， $l \perp \beta$ ， $m \parallel l$ ，则 $\alpha \perp \beta$
5. 甲、乙、丙等 5 人站成一排，且甲不在两端，乙和丙之间恰有 2 人，则不同排法共有
A. 20 种 B. 16 种 C. 12 种 D. 8 种
6. 已知 Q 为直线 $l: x + 2y + 1 = 0$ 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{QP} = (1, -3)$ ，记 P 的轨迹为 E ，则
A. E 是一个半径为 $\sqrt{5}$ 的圆 B. E 是一条与 l 相交的直线
C. E 上的点到 l 的距离均为 $\sqrt{5}$ D. E 是两条平行直线

7. 已知 $\theta \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$, $\tan 2\theta = -4 \tan(\theta + \frac{\pi}{4})$, 则 $\frac{1 + \sin 2\theta}{2 \cos^2 \theta + \sin 2\theta} =$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

8. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过坐标原点的直线与 C 交于 A, B 两点, $|F_1B| = 2|F_1A|$, $\overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 4a^2$, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{3\pi}{4}) + \cos(2x + \frac{3\pi}{4})$, 则

- A. 函数 $f(x - \frac{\pi}{4})$ 为偶函数
 B. 曲线 $y = f(x)$ 的对称轴为 $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$
 C. $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 单调递增
 D. $f(x)$ 的最小值为 -2

10. 已知复数 z, w 均不为 0, 则

- A. $z^2 = |z|^2$ B. $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2}$
 C. $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$ D. $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(\frac{1}{2}) \neq 0$, 若 $f(x+y) + f(x)f(y) = 4xy$, 则

- A. $f(-\frac{1}{2}) = 0$ B. $f(\frac{1}{2}) = -2$
 C. 函数 $f(x - \frac{1}{2})$ 是偶函数 D. 函数 $f(x + \frac{1}{2})$ 是减函数

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知集合 $A = \{-2, 0, 2, 4\}$, $B = \{x | |x - 3| \leq m\}$, 若 $A \cap B = A$, 则 m 的最小值为_____.

13. 已知轴截面为正三角形的圆锥 MM' 的高与球 O 的直径相等, 则圆锥 MM' 的体积与球 O 的体积的比值是_____, 圆锥 MM' 的表面积与球 O 的表面积的比值是_____.

14. 以 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数. 设 $0 < a < b < c < 1$, 已知 $b \geq 2a$ 或 $a + b \leq 1$, 则 $\max\{b - a, c - b, 1 - c\}$ 的最小值为_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 + ax + 2$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线与直线 $2x + 3y = 0$ 垂直.

(1) 求 a ;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

16. (15 分)

盒中有标记数字 1, 2, 3, 4 的小球各 2 个, 随机一次取出 3 个小球.

(1) 求取出的 3 个小球上的数字两两不同的概率;

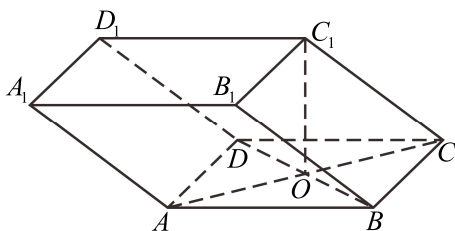
(2) 记取出的 3 个小球上的最小数字为 X , 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

17. (15 分)

如图, 平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, O 为 AC 与 BD 的交点, $AA_1 = 2$, $\angle C_1CB = \angle C_1CD$, $\angle C_1CO = 45^\circ$.

(1) 证明: $C_1O \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求二面角 $B - AA_1 - D$ 的正弦值.



18. (17 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 过 F 与 l 垂直的直线交 C 于 D, E 两点, 其中 B, D 在 x 轴上方, M, N 分别为 AB, DE 的中点.

(1) 证明: 直线 MN 过定点;

(2) 设 G 为直线 AE 与直线 BD 的交点, 求 $\triangle GMN$ 面积的最小值.

19. (17 分)

离散对数在密码学中有重要的应用. 设 p 是素数, 集合 $X = \{1, 2, \dots, p-1\}$, 若 $u, v \in X$, $m \in \mathbf{N}$, 记 $u \otimes v$ 为 uv 除以 p 的余数, $u^{m, \otimes}$ 为 u^m 除以 p 的余数; 设 $a \in X$, $1, a, a^{2, \otimes}, \dots, a^{p-2, \otimes}$ 两两不同, 若 $a^{n, \otimes} = b$ ($n \in \{0, 1, \dots, p-2\}$), 则称 n 是以 a 为底 b 的离散对数, 记为 $n = \log(p)_a b$.

(1) 若 $p=11$, $a=2$, 求 $a^{p-1, \otimes}$;

(2) 对 $m_1, m_2 \in \{0, 1, \dots, p-2\}$, 记 $m_1 \oplus m_2$ 为 $m_1 + m_2$ 除以 $p-1$ 的余数 (当 $m_1 + m_2$ 能被 $p-1$ 整除时, $m_1 \oplus m_2 = 0$). 证明: $\log(p)_a(b \otimes c) = \log(p)_a b \oplus \log(p)_a c$, 其中 $b, c \in X$;

(3) 已知 $n = \log(p)_a b$. 对 $x \in X$, $k \in \{1, 2, \dots, p-2\}$, 令 $y_1 = a^{k, \otimes}$, $y_2 = x \otimes b^{k, \otimes}$. 证明: $x = y_2 \otimes y_1^{n(p-2, \otimes)}$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$
2. 若 $\frac{z}{z-1} = 1+i$, 则 $z =$
A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1-i$ D. $1+i$
3. 已知向量 $\boldsymbol{a} = (0, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, x)$, 若 $\boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a})$, 则 $x =$
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
4. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = m$, $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$
A. $-3m$ B. $-\frac{m}{3}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $3m$
5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等, 侧面积相等, 且它们的高均为 $\sqrt{3}$, 则圆锥的体积为
A. $2\sqrt{3}\pi$ B. $3\sqrt{3}\pi$ C. $6\sqrt{3}\pi$ D. $9\sqrt{3}\pi$
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$ C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$

7. 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 的交点个数为

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时 $f(x) = x$, 则下列结论中一定正确的是

- A. $f(10) > 100$ B. $f(20) > 1000$ C. $f(10) < 1000$ D. $f(20) < 10\,000$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 随着“一带一路”国际合作的深入, 某茶叶种植区多措并举推动茶叶出口. 为了解推动出口后的亩收入(单位: 万元)情况, 从该种植区抽取样本, 得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x} = 2.1$, 样本方差 $s^2 = 0.01$. 已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8, 0.1^2)$, 假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\bar{x}, s^2)$, 则(若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(Z < \mu + \sigma) \approx 0.8413$)

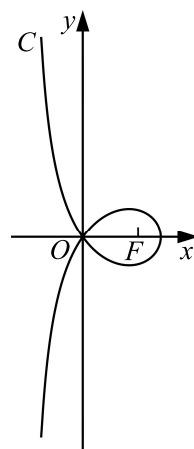
- A. $P(X > 2) > 0.2$ B. $P(X > 2) < 0.2$
C. $P(Y > 2) > 0.5$ D. $P(Y > 2) < 0.8$

10. 设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$, 则

- A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点 B. 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(x^2)$
C. 当 $1 < x < 2$ 时, $-4 < f(2x-1) < 0$ D. 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(2-x) > f(x)$

11. 设计一条美丽的丝带, 其造型  可以看作图中的曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O , 且 C 上的点满足: 横坐标大于 -2 ; 到点 $F(2, 0)$ 的距离与到定直线 $x = a$ ($a < 0$) 的距离之积为 4. 则

- A. $a = -2$
B. 点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上
C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1
D. 当点 (x_0, y_0) 在 C 上时, $y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点. 若 $|F_1A| = 13, |AB| = 10$, 则 C 的离心率为_____.
13. 若曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线, 则 $a =$ _____.
14. 甲、乙两人各有四张卡片, 每张卡片上标有一个数字, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8. 两人进行四轮比赛. 在每轮比赛中, 两人各自从自己持有的卡片中随机选一张, 并比较所选卡片上数字的大小, 数字大的人得 1 分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置此轮所选的卡片 (弃置的卡片在此后的轮次中不能使用). 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\sin C = \sqrt{2} \cos B$, $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$, 求 c .

16. (15 分)

已知 $A(0, 3)$ 和 $P(3, \frac{3}{2})$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上两点.

(1) 求 C 的离心率;

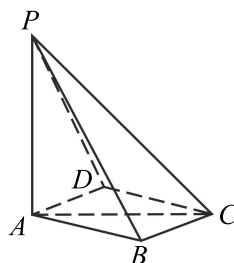
(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle APB$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

17. (15 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AC = 2$, $BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

(1) 若 $AD \perp PB$, 证明: $AD \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若 $AD \perp DC$, 且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD .



18. (17 分)

已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$.

(1) 若 $b = 0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;

(2) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形;

(3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 b 的取值范围.

19. (17 分)

设 m 为正整数, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列, 若从中删去两项 a_i 和 a_j ($i < j$) 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列.

(1) 写出所有的 (i, j) , $1 \leq i < j \leq 6$, 使得数列 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 是 (i, j) -可分数列;

(2) 当 $m \geq 3$ 时, 证明: 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列;

(3) 从 $1, 2, \dots, 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j ($i < j$), 记数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列的概率为 P_m , 证明: $P_m > \frac{1}{8}$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知 $z = -1 - i$ ，则 $|z| =$
A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
- 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$ ；命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$ 。则
A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题
- 已知向量 a, b 满足 $|a| = 1, |a + 2b| = 2$ ，且 $(b - 2a) \perp b$ ，则 $|b| =$
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1
- 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并整理得下表：

亩产量	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)	[1050,1100)	[1100,1150)	[1150,1200)
频数	6	12	18	30	24	10

根据表中数据，下列结论中正确的是

- 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 kg
- 100 块稻田中亩产量低于 1100 kg 的稻田所占比例超过 80%
- 100 块稻田亩产量的极差介于 200 kg 至 300 kg 之间
- 100 块稻田亩产量的平均值介于 900 kg 至 1000 kg 之间

5. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16 (y > 0)$ ，从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP' ， P' 为垂足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 (y > 0)$
 C. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1 (y > 0)$ D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1 (y > 0)$

6. 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$ ， $g(x) = \cos x + 2ax$ ．当 $x \in (-1, 1)$ 时，曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点．则 $a =$

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

7. 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$ ， $AB = 6$ ， $A_1B_1 = 2$ ，则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

8. 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$ ．若 $f(x) \geq 0$ ，则 $a^2 + b^2$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ ，下列说法中正确的有

- A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点
 B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值
 C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期
 D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

10. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 l ， P 为 C 上动点．过 P 作 $\odot A: x^2 + (y-4)^2 = 1$ 的一条切线， Q 为切点．过 P 作 l 的垂线，垂足为 B ．则

- A. l 与 $\odot A$ 相切 B. 当 P, A, B 三点共线时， $|PQ| = \sqrt{15}$
 C. 当 $|PB| = 2$ 时， $PA \perp AB$ D. 满足 $|PA| = |PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

11. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则
- A. 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点
 - B. 当 $a < 0$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
 - C. 存在 a, b , 使得 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称轴
 - D. 存在 a , 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_3 + a_4 = 7$, $3a_2 + a_5 = 5$, 则 $S_{10} =$ _____.
13. 已知 α 为第一象限角, β 为第三象限角, $\tan \alpha + \tan \beta = 4$, $\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.
14. 在右图的 4×4 的方格表中选 4 个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有_____种选法. 在所有符合上述要求的选法中, 选中方格中的 4 个数之和的最大值是_____.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2$, $\sqrt{2}b \sin C = c \sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. (15 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax - a^3$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

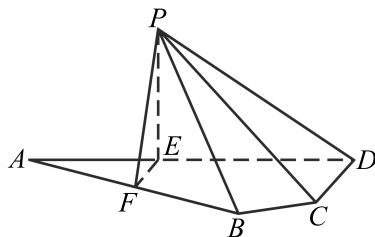
(2) 若 $f(x)$ 有极小值, 且极小值小于 0, 求 a 的取值范围.

17. (15 分)

如图，平面四边形 $ABCD$ 中， $AB=8$ ， $CD=3$ ， $AD=5\sqrt{3}$ ， $\angle ADC=90^\circ$ ， $\angle BAD=30^\circ$ ，点 E ， F 满足 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ．将 $\triangle AEF$ 沿 EF 翻折至 $\triangle PEF$ ，使得 $PC=4\sqrt{3}$ ．

(1) 证明： $EF \perp PD$ ；

(2) 求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值．



18. (17 分)

某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成．比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成绩为 0 分；若至少投中 1 次，则该队进入第二阶段．第二阶段由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投篮投中得 5 分，未投中得 0 分，该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和．

某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p ，乙每次投中的概率为 q ，各次投中与否相互独立．

(1) 若 $p=0.4$ ， $q=0.5$ ，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率；

(2) 假设 $0 < p < q$ ．

(i) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

(ii) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

19. (17 分)

已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = m (m > 0)$ ，点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上， k 为常数， $0 < k < 1$ ．按照如下方式依次构造点 $P_n (n=2, 3, \dots)$ ：过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} ，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点．记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) ．

(1) 若 $k = \frac{1}{2}$ ，求 x_2 ， y_2 ；

(2) 证明：数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

(3) 设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积．证明：对任意正整数 n ， $S_n = S_{n+1}$ ．

2025 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$ ， $B = \{0, 1, 4\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $\{0\}$ B. $\{1\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 4\}$
2. 函数 $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ 的最小正周期是
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π
3. $|2 - 4i| =$
A. 2 B. 4 C. $2\sqrt{5}$ D. 6
4. 已知向量 $\mathbf{a} = (0, 1)$ ， $\mathbf{b} = (1, 0)$ ，则 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) =$
A. 2 B. 1 C. 0 D. -1
5. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程为
A. $y = \pm x$ B. $y = \pm 2x$ C. $y = \pm 3x$ D. $y = \pm 4x$
6. 底面直径和母线长均为 2 的圆锥的体积为
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. π C. 2π D. 3π
7. 在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 8$ ， $AC = 10$ ， $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为
A. 6 B. 8 C. 24 D. 48
8. 已知函数 $f(x) = x|x - a| - 2a^2$ 。若当 $x > 2$ 时， $f(x) > 0$ ，则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 1]$ B. $[-2, 1]$ C. $[-1, 2]$ D. $[-1, +\infty)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $F(2,0)$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点， M 是 C 上的点， O 为坐标原点。则

- A. $p = 4$
- B. $|MF| \geq |OF|$
- C. 以 M 为圆心且过 F 的圆与 C 的准线相切
- D. 当 $\angle OFM = 120^\circ$ 时， $\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

10. 在人工神经网络中，单个神经元输入与输出的函数关系可以称为激励函数。双曲正切函数是一种激励函数。定义双曲正弦函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ，双曲余弦函数

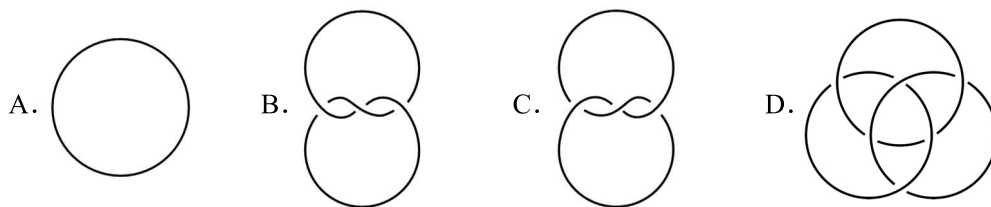
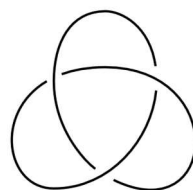
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，双曲正切函数 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ 。则

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，双曲正切函数 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ 。则

- A. 双曲正弦函数是增函数
- B. 双曲余弦函数是增函数
- C. 双曲正切函数是增函数

D. $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

11. 下面四个绳结中，不能无损伤地变为右图中的绳结的有



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ ，若 $f(\ln 2)f(\ln 4) = 8$ ，则 $a =$ _____.

13. 有 8 张卡片，分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 现从这 8 张卡片中随机抽出 3 张，则抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为_____.

14. 已知曲线 $C: y = x^3 - \frac{2}{x}$, 两条直线 l_1, l_2 均过坐标原点 O , l_1 和 C 交于 M, N 两点, l_2 和 C 交于 P, Q 两点. 若 $\triangle OPM$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 则 $\triangle MNQ$ 的面积为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

为考察某种药物 A 对预防疾病 B 的效果，进行了动物（单位：只）试验，得到如下列联表：

药物	疾病		合计
	未患病	患病	
未服用	100	80	s
服用	150	70	220
合计	250	t	400

- (1) 求 s, t ;
- (2) 记未服用药物 A 的动物患疾病 B 的概率为 p , 给出 p 的估计值;
- (3) 根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，能否认为药物 A 对预防疾病 B 有效？

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $\frac{P(\chi^2 \geq k)}{k}$

0.050	0.010	0.001
3.841	6.635	10.828

16. (15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$.

- (1) 证明：数列 $\{1 - \frac{1}{a_n}\}$ 为等比数列；
- (2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (3) 令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 证明： $b_n < b_{n+1} < 1$.

17. (15 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} - x$.

- (1) 设 $a = 1$, $b = -2$, 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 2 的切线方程；
- (2) 若 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，求 b 的取值范围.

18. (17 分)

已知椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$ ， $F_2(1,0)$ 。

(1) 求 C 的方程；

(2) 已知点 $M_0(1,4)$ ，证明：线段 F_1M_0 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点；

(3) 设 M 是坐标平面上的动点，且线段 F_1M 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点，证明 M 的轨迹为圆，并求该圆的方程。

19. (17 分)

设平面四边形 $ABCD$ 中， $AB = AC = CD = 1$ ， $\angle ADC = 30^\circ$ ， $\angle DAB = 120^\circ$ ，将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折至 $\triangle ACP$ ，其中 P 为动点。

(1) 设 $PC \perp AB$ ，三棱锥 $P-ABC$ 的各个顶点都在球 O 的球面上。

(i) 证明：平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ；

(ii) 求球 O 的半径；

(2) 求二面角 $A-CP-B$ 的余弦值的最小值。

绝密★启用前

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. $(1+5i)i$ 的虚部为

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 6

2. 已知集合 $U = \{x | x \text{ 是小于 } 9 \text{ 的正整数}\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, 则 $\complement_U A$ 中元素的个数为

- A. 0 B. 3 C. 5 D. 8

3. 已知双曲线 C 的虚轴长为实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{2}$

4. 已知点 $(a, 0)$ ($a > 0$) 是函数 $y = 2 \tan(x - \frac{\pi}{3})$ 的图像的一个对称中心, 则 a 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 5 - 2x$, 则

$$f(-\frac{3}{4}) =$$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小与方向，测出的结果在航海学中称为视风风速. 视风风速对应的向量是真风风速对应的向量与船行风风速对应的向量之和，其中船行风风速对应的向量与船速对应的向量大小相等、方向相反. 图1给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系. 已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图2所示（线段长度代表速度大小，单位：m/s），则该时刻的真风为

级数	名称	风速大小 (单位：m/s)
2	轻风	1.6 ~ 3.3
3	微风	3.4 ~ 5.4
4	和风	5.5 ~ 7.9
5	劲风	8.0 ~ 10.7

图1

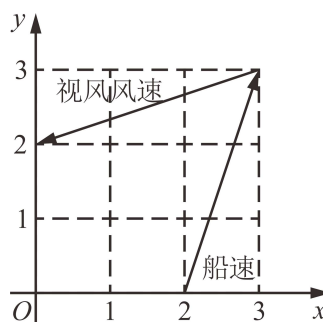


图2

- A. 轻风 B. 微风 C. 和风 D. 劲风
7. 已知圆 $x^2 + (y+2)^2 = r^2$ ($r > 0$) 上到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离为1的点有且仅有2个，则 r 的取值范围是
- A. (0,1) B. (1,3) C. (3,+∞) D. (0,+∞)
8. 已知 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$ ，则 x ， y ， z 的大小关系不可能是
- A. $x > y > z$ B. $x > z > y$ C. $y > x > z$ D. $y > z > x$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， D 为 BC 中点，则
- A. $AD \perp A_1C$ B. $B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1D
- C. $AD \parallel A_1B_1$ D. $CC_1 \parallel$ 平面 AA_1D
10. 已知抛物线 $C: y^2 = 6x$ 的焦点为 F ，过 F 的一条直线交 C 于 A ， B 两点，过 A 作直线 $l: x = -\frac{3}{2}$ 的垂线，垂足为 D ，过 F 且与直线 AB 垂直的直线交 l 于点 E ，则
- A. $|AD| = |AF|$ B. $|AE| = |AB|$ C. $|AB| \geq 6$ D. $|AE| \cdot |BE| \geq 18$

17. (15 分)

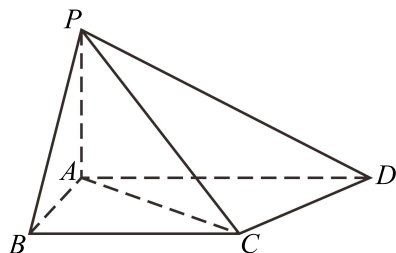
如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $BC \parallel AD$.

(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;

(2) 设 $PA = AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, $AD = 1 + \sqrt{3}$,
且点 P, B, C, D 均在球 O 的球面上.

(i) 证明: 点 O 在平面 $ABCD$ 内;

(ii) 求直线 AC 与 PO 所成角的余弦值.



18. (17 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 下顶点为 A , 右顶点为 B ,

$|AB| = \sqrt{10}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知动点 P 不在 y 轴上, 点 R 在射线 AP 上, 且满足 $|AP| \cdot |AR| = 3$.

(i) 设 $P(m, n)$, 求 R 的坐标 (用 m, n 表示);

(ii) 设 O 为坐标原点, Q 是 C 上的动点, 直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍,
求 $|PQ|$ 的最大值.

19. (17 分)

(1) 求函数 $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 的最大值;

(2) 给定 $\theta \in (0, \pi)$ 和 $a \in \mathbf{R}$, 证明: 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta$;

(3) 设 $b \in \mathbf{R}$, 若存在 $\varphi \in \mathbf{R}$ 使得 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 b 的最小值.

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 样本数据 2, 8, 14, 16, 20 的平均数为
A. 8 B. 9 C. 12 D. 18
2. 已知 $z=1+i$, 则 $\frac{1}{z-1} =$
A. $-i$ B. i C. -1 D. 1
3. 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$, $B=\{x|x^3=x\}$, 则 $A\cap B =$
A. $\{0,1,2\}$ B. $\{1,2,8\}$ C. $\{2,8\}$ D. $\{0,1\}$
4. 不等式 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$ 的解集是
A. $\{x|-2 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x|x \leq -2\}$
C. $\{x|-2 \leq x < 1\}$ D. $\{x|x > 1\}$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=2$, $AC=1+\sqrt{3}$, $AB=\sqrt{6}$, 则 $A =$
A. 45° B. 60° C. 120° D. 135°
6. 设抛物线 $C:y^2=2px (p>0)$ 的焦点为 F , 点 A 在 C 上, 过 A 作 C 的准线的垂线, 垂足为 B . 若直线 BF 的方程为 $y=-2x+2$, 则 $|AF| =$
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

7. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_3 = 6$, $S_5 = -5$, 则 $S_6 =$

- A. -20 B. -15 C. -10 D. -5

8. 已知 $0 < \alpha < \pi$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, q 为 $\{a_n\}$ 的公比, $q > 0$. 若 $S_3 = 7$, $a_3 = 1$, 则

- A. $q = \frac{1}{2}$ B. $a_5 = \frac{1}{9}$ C. $S_5 = 8$ D. $a_n + S_n = 8$

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$, 则

- A. $f(0) = 0$ B. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$

- C. $f(x) \geq 2$ 当且仅当 $x \geq \sqrt{3}$ D. $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 左、右顶点分别为 $A_1,$

A_2 , 以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 且 $\angle NA_1M = \frac{5\pi}{6}$, 则

- A. $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$

- B. $|MA_1| = 2|MA_2|$

- C. C 的离心率为 $\sqrt{13}$

- D. 当 $a = \sqrt{2}$ 时, 四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 已知平面向量 $\mathbf{a} = (x, 1)$, $\mathbf{b} = (x-1, 2x)$, 若 $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, 则 $|\mathbf{a}| =$ _____.

13. 若 $x = 2$ 是函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点, 则 $f(0) =$ _____.

14. 一个底面半径为 4 cm, 高为 9 cm 的封闭圆柱形容器 (容器壁厚度忽略不计) 内有两个半径相等的铁球, 则铁球半径的最大值为_____cm.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($0 \leq \varphi < \pi$), $f(0) = \frac{1}{2}$.

(1) 求 φ ;

(2) 设函数 $g(x) = f(x) + f(x - \frac{\pi}{6})$, 求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

16. (15 分)

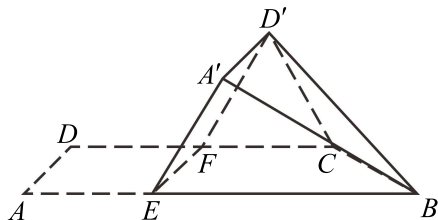
已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 长轴长为 4.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $(0, -2)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 求 $|AB|$.

17. (15 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, F 为 CD 中点, E 在 AB 上, $EF \parallel AD$, $AB = 3AD$, $CD = 2AD$. 将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$, 使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 60° .



(1) 证明: $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$;

(2) 求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成的二面角的正弦值.

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$, 其中 $0 < k < \frac{1}{3}$.

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点;

(2) 设 x_1, x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的极值点和零点.

(i) 设函数 $g(t) = f(x_1 + t) - f(x_1 - t)$, 证明: $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 单调递减;

(ii) 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小, 并证明你的结论.

19. (17 分)

甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得1分，负者得0分．设每个球甲胜的概率为 p ($\frac{1}{2} < p < 1$)，乙胜的概率为 q ， $p + q = 1$ ，且各球的胜负相互独立．对正整数 $k \geq 2$ ，记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得2分的概率， q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得2分的概率．

(1) 求 p_3 ， p_4 (用 p 表示)；

(2) 若 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$ ，求 p ；

(3) 证明：对任意正整数 m ， $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$ ．

