

数 学 试 题

2026.04

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共 58 分)

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 z 在复平面内对应的点为 $(1, -2)$, 则 zi 的虚部为
A. -2 B. 1 C. i D. $2i$
2. $e^a > e^b$ 是 $\lg a > \lg b$ 的
A. 充要条件 B. 充分不必要条件 C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知函数 $f(x) = \sqrt[3]{x} + a^x - a^{-x} (a > 1)$, 若 $m = f(-3)$, $p = f\left(\frac{1}{3}\right)$, $q = f(\ln 3)$, 则
A. $m < p < q$ B. $m < q < p$ C. $q < p < m$ D. $p < q < m$
4. 已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $A(2, -1)$, $B(4, -3)$, $C(8, 2)$, $\vec{m} = (n, -2)$, 若 $\vec{BD} \perp \vec{m}$, 则 n 的值为
A. $-\frac{4}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. -7 D. 7
5. 若 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中二项式系数和为 256, 则二项式展开式中第 3 项系数为
A. 112 B. 224 C. 56 D. 28
6. 甲、乙、丙等 5 人被安排到 A, B, C 三个社区做志愿者, 每人随机选择一个社区, 且这三个社区都有人去, 则甲和乙不去同一个社区的概率为
A. $\frac{19}{25}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{2}{3}$
7. 过曲线 $C: y = x^3 - 2ax + b$ 外一点 $A(-1, 1)$ 做 C 的切线恰好可做两条, 则
A. $2a - b = 1$ B. $a - b = 0$ C. $a + b = 0$ D. $2a + b = 1$
8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比大于 1, $a_3 = 8$, $a_2 + a_4 = 20$. 则下列判断正确的是
A. 任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 有 $a_n \geq 3$
B. 数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot b_n + \frac{n+1}{a_n}$, 则 $b_n + \frac{2n}{a_n} = 3n$
C. $m \in \mathbf{N}^*$, $\{a_n\}$ 在区间 $(0, m]$ 中项的个数记为 b_m , 则 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{100} = 480$
D. 任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) < \lambda$, 则整数 λ 的最小值为 4

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.

全部选对得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知 A, B, C 是概率均不为 0 随机事件,下列说法正确的是

A. 若 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, 则事件 A 与 B 为对立事件

B. 若 $P(A|B) = P(B|A)$, 则 $P(A) = P(B)$

C. 若 $P(A) = P(B)$, 则 $P(\overline{AB}) = P(\overline{AB})$

D. 若 $P(A) = \frac{1}{6}, P(B|\overline{A}) = \frac{3}{5}$, 则 $P(A+B) = \frac{2}{3}$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对应的边分别是 a, b, c , 且 $a(\sin A - \sin B) = (b+c)(\sin C - \sin B)$, 下列结论正确的有

A. $\angle C = \frac{\pi}{6}$

B. 若 $c = \sqrt{10}, a = 2\sqrt{3}$, 则满足条件的 $\triangle ABC$ 有 2 个

C. 如 $c = 2, M$ 为 AB 中点, 则 $|CM|$ 最大值为 $\sqrt{3}$

D. 若 $\cos 3A + \cos 2A = 0$ 有两解 $A_1, A_2 (A_1 \neq A_2)$, 则 $\cos A_1 + \cos A_2 = \frac{1}{2}$

11. 正三棱锥 $P-ABC$ 中, 点 A_1, B_1, C_1 分别是侧棱 PA, PB, PC 的中点, $2A_1A = AB = 6$, 则下列结论中正确的有

A. $PB \perp$ 平面 AB_1C_1

B. 过 AC 的平面截该三棱锥所得截面三角形周长的最小值为 $6\sqrt{3} + 6$

C. 棱长为 $\frac{5}{2}$ 的正四面体可以在棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 内随意转动

D. 在三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 中, 若一质点从 A 出发, 每次等可能地沿着三棱台的棱向相邻的另一个顶点运动, 设在 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 次运动后质点仍停留在下底面 ABC 的概率为 P_n , 则 $P_n = \frac{3^n + 1}{2 \cdot 3^n}$.

第二部分(非选择题 共 92 分)

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 一组数据 19、5、4、13、 a 、 b 、1、2、16、3 的第 60% 分位数为 9 (其中 $a, b \in (5, 13)$), 则 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 最小值为 _____.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边与单位圆 O 相交于点 A , 把角 α 按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后与单位圆 O 相交于点 $B\left(\frac{24}{25}, \frac{-7}{25}\right)$, 则 $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} =$ _____.

14. 焦点在 x 轴上的椭圆 C_1 与双曲线 C_2 有公共左、右焦点 F_1, F_2 , 点 M 是 C_1 与 C_2 的公共点且 $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$, 点 N 在 x 轴上, 满足 $\overrightarrow{MN} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{MF_1}}{|\overrightarrow{MF_1}|} + \frac{\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_2}|} \right)$, 若 $t \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MF_1} + 2 \overrightarrow{MF_2} (t \in \mathbf{R})$, 则 C_1 与 C_2 的离心率之积为 _____.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1$, S_1 与 $(S_4 - 1)$ 的等比中项为 3, 且 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} \lg\left(\frac{n+3}{n+1}\right), & n \text{ 为奇数} \\ 2^{a_n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

16. (15 分) 在一次元宵节三角函数公式竞答决赛活动中, 甲、乙两人角逐冠军. 规则如下: ①共 5 次竞答机会, 每次竞答两人均从 A, B 两个箱子中选择一个公式回答, 答完放回; ②甲答对 A, B 箱中一个公式的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$; 乙答对 A, B 箱中一个公式的概率均为 $\frac{2}{3}$; ③每答对 A 箱中一个公式得 20 分, 每答对 B 箱中一个公式得 30 分; ④5 次竞答后总得分最高者获得冠军.

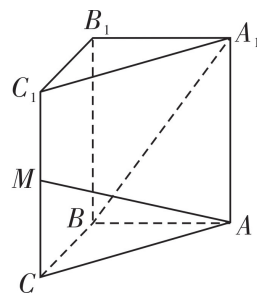
(1) 规定甲前两次都从 A 箱中选择, 后三次都从 B 箱中选择, 五次竞答完成后, 求甲总分得分至少 110 分的概率.

(2) 若前两次甲、乙均从 B 箱中选择公式, 两次竞答后甲得总分 60 分, 乙得总分 30 分. 后三次竞答在即, 深思熟虑后甲决定后三次都在 A 箱子中选择公式竞答, 乙决定后三次仍然都在 B 箱子中选择公式竞答, 请问最终冠军最有可能是谁?

17. (15 分) 如图, 在三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中, 平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 ABC , 平面 $CAA_1C_1 \perp$ 平面 ABC .

(1) 求证: $AA_1 \perp$ 平面 ABC

(2) 若 $CA = 2, CB = 1, AA_1 = \sqrt{6}, \angle ABC = 90^\circ$, M 是线段 CC_1 上一点且 $AM \perp BA_1$, 线段 AC 与过 A, M, B, A_1 四点的球面是否有公共点 N ? 若有公共点 N , 求直线 A_1N 与平面 ABC 所成角的正弦值.



18. (17 分) 已知点 D 为圆 $x^2 + y^2 = 9$ 上一动点, 过点 D 作 x 轴的垂线, 垂足为 A , 点 B 满足 $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$, 设点 B 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 已知点 $E(0, 1)$ 、 $F(0, -1)$, S 为直线 $y = 2$ 上的动点, 连接 SE 交曲线 C 于 G , 连接 SF 交曲线 C 于 H .

(i) 证明直线 GH 过定点 M ;

(ii) 若线段 EG 上存在点 R , 有 $\frac{SE}{SG} = \frac{RE}{RG}$, 连接 RM 与 FS 交于点 N , 求证: $\frac{SH}{SF} = \frac{NH}{NF}$.

19. (17 分) 已知函数 $g(x) = e^x - ax - 2a - \frac{1}{x}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $g(x)$ 仅有一个零点时, 求 a 的取值范围;

(2) 函数 $f(x) = x \cdot g(x)$, 且 $a > \frac{1}{2e}$.

(i) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(ii) 若存在 $x_1 < x_2 < x_3$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 证明: $x_3 - x_1 < 4a$.

2026 届高三 4 月模拟考试

数学试题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
选项	B	C	A	D	A	A	D	C	CD	BCD	ABD

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. B 【解析】 $z = 1 - 2i, \therefore zi = (1 - 2i)i = 2 + i, \therefore zi$ 的虚部为 1, 选 B.

2. C 【解析】当 $\lg a > \lg b$ 时, $a > b$ 成立, 当 $e^a > e^b$ 时, $\lg a > \lg b$ 不一定成立, 故 $e^a > e^b$ 是 $\lg a > \lg b$ 的必要不充分条件, 选 C.

3. A 【解析】易知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上增函数, $\ln 3 > \frac{1}{3} > -3, \therefore q > p > m$, 选 A.

4. D 【解析】设 $D(x, y)$, 则 $\begin{cases} 2 + 8 = x + 4 \\ -1 + 2 = -3 + y \end{cases} \therefore \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}, \therefore D(6, 4), \therefore \overrightarrow{BD} = (2, 7), \text{而 } \vec{m} = (n, -2), \overrightarrow{BD} \cdot \vec{m} = 2n - 14 = 0, \therefore n = 7, \text{选 D.}$

5. A 【解析】由 $2^n = 256$ 得 $n = 8, \therefore T_3 = C_8^2 (\sqrt[3]{x})^6 \left(-\frac{2}{x}\right)^2, \therefore$ 第 3 项系数为 $4C_8^2 = 112$, 选 A.

6. A 【解析】先求甲、乙两人分在同一社区的概率 P_0 . 分两种情况: ① A、B、C 3 个社区人数为 1、1、3 结构. 甲乙分在同一社区方法数: $C_3^1 C_3^3 = 18$ 种; ② A、B、C 3 个社区人数为 1、2、2 结构. 甲乙分在同一社区方法数: $C_3^1 C_2^1 C_3^2 = 18$ 种, 而当不考虑任何条件时, 满足题意分法总数为: $\frac{C_5^3 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} A_3^3 + \frac{C_5^2 C_3^2 C_1^1}{A_2^2} A_3^3 = 150, \therefore P_0 = \frac{18 + 18}{150} = \frac{36}{150} = \frac{6}{25} \therefore P = \frac{19}{25}$.

7. D 【解析】设切点为 $P(x_0, y_0)$, 据题意: 这样的切点有两个, 即关于 x_0 的方程有且仅有两根. $\therefore y|_{x=x_0} = 3x_0^2 - 2a, \therefore y = (3x_0^2 - 2a)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = (3x_0^2 - 2a)(x - x_0) + (x_0^3 - 2ax_0 + b)$, 为过切点 $P(x_0, y_0)$ 的切线, 又 $A(-1, 1)$ 在此切线上, $\therefore 1 = (3x_0^2 - 2a)(-1 - x_0) + (x_0^3 - 2ax_0 + b) \Rightarrow -2x_0^3 - 3x_0^2 + 2a + b - 1 = 0 \Rightarrow 2a + b = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 1$, 令 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$, 又 $A(-1, 1)$ 不在曲线 C 上, $\Rightarrow 2a + b \neq 2$, 由 $f(x)$ 的图像可知 $2a + b = 1$, 选 D.

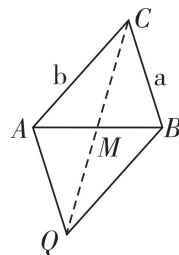
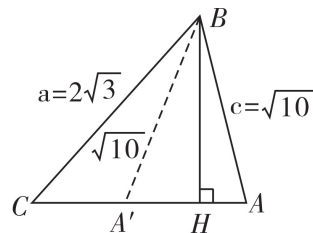
8. C 【解析】设公比为 q , 则 $q > 1, \therefore a_2 + a_4 = 20, a_3 = 8, \therefore \frac{8}{q} + 8q = 20, \therefore q = 2$ 或 $\frac{1}{2}, \therefore q = 2, \therefore a_n = a_3 \cdot q^{n-3} = 8 \cdot 2^{n-3} = 2^n. \therefore a_1 = 2$, 故 A 错误; 对于 B, $\therefore b_{n+1} = \frac{n+1}{n} b_n + \frac{n+1}{2^n}, \therefore \frac{b_{n+1}}{n+1} = \frac{b_n}{n} + \frac{1}{2^n}$ 且 $\frac{b_1}{1} = 1, \therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{b_n}{n} = \frac{b_1}{1} + \left(\frac{b_2}{2} - \frac{b_1}{1}\right) + \cdots + \left(\frac{b_n}{n} - \frac{b_{n-1}}{n-1}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, 又 $\therefore b_1 = 1, \therefore b_n = 2n$

$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) (n \in \mathbf{N}^*)$, $\therefore b_n + \frac{2n}{a_n} = 2n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{2n}{2^n} = 2n$, 故 B 错误; 对于 C, $b_1 = 0, b_2 = b_3 = 1, b_4 = b_5 = \dots = b_7 = 2, b_8 = b_9 = \dots = b_{15} = 3, b_{16} = b_{17} = \dots = b_{31} = 4, b_{32} = b_{33} = \dots = b_{63} = 5, b_{64} = b_{65} = \dots = b_{100} = 6$, $\therefore b_1 + b_2 + \dots + b_{100} = 0 + 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 16 + 5 \times 32 + 6 \times 37 = 480$, $\therefore$ C 正确; 对于 D, 令 $f(n) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$, 易知 $\{f(n)\}$ 单增, $f(1) = \frac{3}{2}, f(2) = \frac{15}{8}, f(3) = \frac{135}{64} > 2$, 当 $n \geq 3$ 时, $f(n) > 2$. 又 $\therefore \ln f(n) = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$, 而 $\ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2^n}$, $\therefore \ln f(n) < \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$, $\therefore f(n) < e$, $\therefore \forall n \in \mathbf{N}^*, f(n) < e$, $\therefore \lambda_{\min} = 3$, 故 D 错误.

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分.

9. CD 【解析】对于 A, $P(AB) = 0 \Rightarrow A, B$ 互斥, 不能 $\Rightarrow A, B$ 对立, A 错; 对 B 得: $\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = 0$ 或 $P(A) = P(B)$, 故 B 错, 故选 CD; 对 C, $P(A) = P(\bar{A}B) + P(AB), P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB)$, 若 $P(A) = P(B)$ 则 $P(\bar{A}B) = P(\bar{A}B)$; 对 D, $P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$, 而 $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2}$, 所以 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(\bar{A}B) = \frac{2}{3}$.

10. BCD 【解析】由题意得: $a^2 + b^2 - c^2 = ab \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$, 故 A 错; 对 B: 过点 B 作 $BH \perp AC$, 则 $BH = 3$, 在 CH 上存在点 A, 使 $BA = \sqrt{10}$. 且 $BH < BA' < BC$, 故 $\triangle ABC$ 有两个. ($\triangle ABC, \triangle A'BC$); 对 C: 已知 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ 且 $c = 2$, $\therefore a^2 + b^2 = 4 + ab$ —①, 延长 CM 至 Q , 使 $CM = MQ$. 设 $CM = d$, 则 $CQ = 2d$, 连 AQ, BQ 易知四边形 $AQBC$ 为平行四边形. 由 $|QC|^2 + |AB|^2 = 2(|CB|^2 + |CA|^2)$, 得 $4d^2 + 4 = 2(a^2 + b^2)$, 由①得: $a^2 + b^2 = 4 + ab \leq 4 + \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 8$, $\therefore 4d^2 + 4 = 2(a^2 + b^2) \leq 16 \Rightarrow 0 < d \leq \sqrt{3}$, 即 $|CM|_{\max} = \sqrt{3}$, 故 C 对; 对 D: 由 $\cos 3A + \cos 2A = 0$ 得



$$2\cos \frac{5A}{2} \cos \frac{A}{2} = 0, \text{ 又 } \cos A < \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{5A}{2} < \frac{5}{3}\pi \\ 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{3} \end{cases}, \text{ 故 } \frac{5A}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2}, \text{ 或 } \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A =$$

$$\frac{\pi}{5} \text{ 或 } A = \frac{3}{5}\pi \text{ 或 } A = \pi (\text{舍}), \therefore A_1 = \frac{\pi}{5}, A_2 = \frac{3}{5}\pi, \therefore \cos A_1 + \cos A_2 = 2\cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5} =$$

$$\frac{2\cos \frac{2}{5}\pi (2\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5})}{2\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{2\cos \frac{2}{5}\pi \cdot \sin \frac{2}{5}\pi}{2\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{4}{5}\pi}{2\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2}, \text{ 故 D 对; 综上, 选 BCD.}$$

11. ABD 【解析】易知 $P-ABC$ 为正四面体, $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 均为等边三角形, 又 A' 、 B' 均

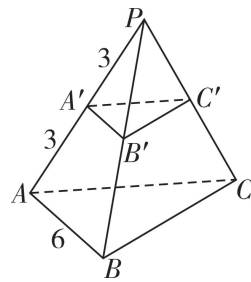
为中点 $\Rightarrow \begin{cases} AB' \perp PB \\ CB' \perp PB \\ AB' \cap CB' = B' \end{cases} \Rightarrow PB \perp \text{平面 } AB'C$, 故 A 对. 由①知 $AB' \perp PB$, 故 AB'

是 A 到 PB 最短距离, $CB' \perp PB$, 故 CB' 也是 C 到 PB 最短距离, $\therefore \triangle ACB'$ 是所有截面中周长最短的且 $l_{\text{周}} = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 6 = 6 + 6\sqrt{3}$, 故 B 对. 对 C: 假设 C

成立, 则该正四面体应有一个外接球能在三棱台内任意转动. 那么该外接球直径 $2R = \frac{5\sqrt{6}}{4}$, 又而此

三棱台内能放下的球直径不大于 $\sqrt{6}$, 显然 $\frac{5\sqrt{6}}{4} > \sqrt{6}$, 故放不下, 故 C 错. 对 D: 据题意 $P_1 = \frac{2}{3}, P_{n+1}$

$= \frac{2}{3}P_n + (1 - P_n) \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow P_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n$, 故 D 对.



三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. $9\sqrt{2}$

【解析】对 10 个数先排序: 1、2、3、4、5、 a 、 b 、13、16、19。据题意, $\frac{a+b}{2} = 9 \Rightarrow a+b = 18$,

由 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$, $\therefore \sqrt{a^2+b^2} \geq 9\sqrt{2}$.

13. $\frac{7}{24}$

【解析】设 $A(\cos\theta, \sin\theta)$, $B\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{24}{25} \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{7}{25} \end{cases}$, $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{7}{24}$, 又

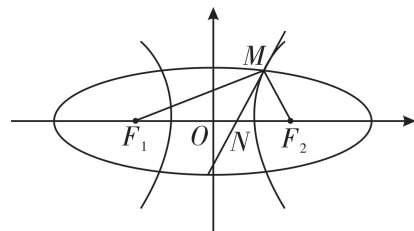
$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = -\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{24}$.

14. $\frac{7}{3}$

【解析】据题意: F_1 、 N 、 F_2 三点共线, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{t}\overrightarrow{MF_1} + \frac{2}{t}\overrightarrow{MF_2}$, $\therefore \frac{1}{t} + \frac{2}{t} = 1 \Rightarrow$

$t = 3 \Rightarrow |MF_1| : |MF_2| = 2 : 1$, 设 $|MF_2| = m$, 则 $|MF_1| = 2m$, 由椭圆第一定义: $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, 由双曲线第二定义: $|MF_1| - |MF_2| = 2a \Rightarrow$

$\begin{cases} 3m = 2a \\ m = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}m \\ a = \frac{1}{2}m \end{cases}$. 在 $\triangle MF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $\cos 120^\circ =$



$\frac{(2m)^2 + m^2 - 4m^2}{2 \cdot 2m \cdot m} \Rightarrow c^2 = \frac{7}{4}m^2$, 设椭圆, 双曲线离心率分别为 e_1 、 e_2 , 那么 $e_1 e_2 = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c^2}{a \cdot a} = \frac{\frac{7m^2}{4}}{\frac{3m^2}{3}} = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow e_1 e_2 = \frac{7}{3}$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.

15. (13 分)

解:(1)易得 $S_4=10$, 设等差数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 d , 因为 $a_1=S_1=1$, 所以 $\frac{S_4}{4}-\frac{S_1}{1}=3d$, 即 $\frac{10}{4}-1=3d, d=\frac{1}{2}$,
所以 $\frac{S_n}{n}=1+\frac{1}{2}(n-1)$, 即 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$, 4 分
当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n$,
当 $n=1$ 时, $a_1=1$, 满足上式, 所以 $a_n=n$ 6 分
(2)由(1)知 $b_n=\begin{cases} \lg\left(\frac{n+3}{n+1}\right), n \text{ 为奇数} \\ 2^n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则 $T_{2n}=(b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2n})$
 $=\left(\lg\frac{4}{2}+\lg\frac{6}{4}+\lg\frac{8}{6}+\cdots+\lg\frac{2n+2}{2n}\right)+(2^2+2^4+2^6+\cdots+2^{2n})=\lg(n+1)+\frac{4(1-4^n)}{1-4}=\lg(n+1)+\frac{4}{3}(4^n-1)$
所以数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 $T_{2n}=\lg(n+1)+\frac{4}{3}(4^n-1)$ 13 分

16. (15 分)

解:(1)甲至少 110 分有三种情况:前两次甲得 40 分,后三次甲得 90 分;前两次甲得 20 分,后三次甲得 90 分;故概率为 $\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+c_2^1\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{15}{128}$ 6 分
(1)后三次甲选 A 袋,甲五次总得分 X 可能为 60、80、100、120, $P(X=60)=c_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$;
 $P(X=80)=c_3^1\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}, P(X=100)=c_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{64}, P(X=120)=c_3^3\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$,
随机变量 X 的分布列为:

X	60	80	100	120
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

$E(X)=60\times\frac{1}{64}+80\times\frac{9}{64}+100\times\frac{27}{64}+120\times\frac{27}{64}=105$ 分. 10 分
后三次乙选 B 袋,乙五次总得分 Y 可能为 30、60、90、120,
 $P(Y=30)=c_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}; P(Y=60)=c_3^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9} P(Y=90)=c_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$
 $P(Y=120)=c_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$, 随机变量 Y 的分布列为:

Y	30	60	90	120
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

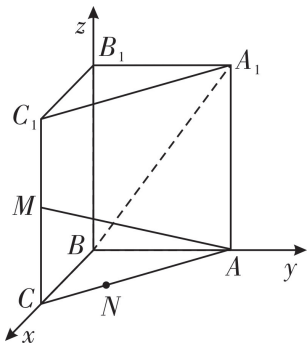
$E(Y)=30\times\frac{1}{27}+60\times\frac{2}{9}+90\times\frac{4}{9}+120\times\frac{8}{27}=90$ 分, 14 分
所以 $E(X)>E(Y)$, 故甲获得冠军的可能性更大. 15 分

17. (15 分)

解:(1)平面 ABC 内取一点 P ,作 $PE \perp AB$ 于点 E ,作 $PF \perp AC$ 于点 F .

$\because$ 平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 ABC ,平面 $AA_1B_1B \cap$ 平面 $ABC = AB$, $PE \subset$ 平面 ABC , $PE \perp AB$,
 $PE \perp$ 平面 AA_1B_1B . 又 $AA_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B ,所以 $PE \perp AA_1$ 3 分
同理 $PF \perp AA_1$, $PE \cap PF = P$,所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC 5 分

(2)假设线段 AC 上与过 A 、 M 、 B 、 A_1 四点的球面有公共点 N 点,以 B 为原点,分别
以 BC 、 BA 、 B_1B 所在直线为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系则 $BA_1 = (0, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ 设
 $M(1, 0, z)$, 则 $\overrightarrow{AM} = (1, 0, z)$



$\therefore \overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{AM} = -3 + \sqrt{6}z = 0, \therefore z = \frac{\sqrt{6}}{2}A(0, \sqrt{3}, 0), M\left(1, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), E_1 = (0, 0, \sqrt{6}),$

$A_1 = (0, \sqrt{3}, \sqrt{6})$

设球心 $H = (a, b, c)$, 半径 r , 其中 $c = \frac{\sqrt{6}}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 则球心 $H = \left(a, \frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 10 分

由 $|HB_1| = |HM|$ 得 $a^2 + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = (a-1)^2 + \frac{3}{4}$, 解得 $a = -\frac{1}{4}$ 10 分

则球心 $H = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, 半径 $r = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{37}}{4}$

设 $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AC} = \lambda(1, -\sqrt{3}, 0)$, 则 $N(\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda, 0)$

$\therefore \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\lambda\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{37}{16}$, 解得 $\lambda = \frac{5}{8}$ 或 $\lambda = 0$,

$\therefore$ 存在点 N 满足题意. 12 分

设 A_1N 与平面 ABC 所成角为 θ ,

①当 $\lambda = \frac{5}{8}$ 时, 则 $N\left(\frac{5}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}, 0\right)$

易求得 $\overrightarrow{NA_1} = \left(-\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$, 平面 ABC 法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$

则 $\sin\theta = |\cos \langle \overrightarrow{NA_1}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{NA_1} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{NA_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4\sqrt{6}}{11}$ 14 分

②当 $\lambda = 0$ 时, 点 N 即点 A , 由(1)知 $A_1A \perp$ 平面 ABC , 故 $\sin\theta = 1$.

综合①②可知, 直线 A_1N 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{6}}{11}$ 或者 1. 15 分

18. (17 分)

解:(1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 4 分

(2) (i) 设点 $S(t, 2)$, 当 $t \neq 0$ 时, 则 $SE: y - 1 = \frac{1}{t} \cdot x$ 联立 $\begin{cases} y = \frac{1}{t}x + 1 \\ x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases}$ 可得 $(t^2 + 9)x^2 + 18tx = 0$

因为 $E(0, 1)$, $\therefore G\left(\frac{-18t}{t^2 + 9}, \frac{t^2 - 9}{t^2 + 9}\right)$, 同理可得: $H\left(\frac{54t}{t^2 + 81}, \frac{81 - t^2}{t^2 + 81}\right)$, 6 分

$$\therefore k_{GH} = \frac{\frac{t^2-9}{t^2+9} - \frac{81-t^2}{t^2+81}}{-18t - \frac{54t}{t^2+81}} = \frac{27-t^2}{36t}, \therefore GH: y = \frac{27-t^2}{36t}x + \frac{1}{2}, \text{故 } GH \text{ 过定点 } \left(0, \frac{1}{2}\right). \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

当 $t=0$ 时, 易得 GH 过定点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

综上: GH 过定点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

(ii) 证明: 若 $\frac{SE}{SG} = \frac{RE}{RG}$, 不妨设 $G(x_1, y_1)$, 设 $\overrightarrow{SG} = m \overrightarrow{SE}$, 设 $S(t, 2)$, $\therefore \begin{cases} x_1 - t = -mt \\ y_1 - 2 = -m \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} x_1 = t(1-m) \\ y_1 - m = 2(1-m) \end{cases} \dots\dots\dots \textcircled{1} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{RG} = -m \overrightarrow{RE}, \therefore R\left(\frac{x_1}{1+m}, \frac{y_1+m}{1+m}\right) \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

已知 $x_1^2 + 9y_1^2 = 9$, $\therefore x_1^2 + 9(y_1^2 - m^2) = 9(1-m^2)$ 代入 $\textcircled{1}$ 可得: $t(1-m)x_1 + 9(y_1+m) \cdot 2(1-m) = 9(1-m^2)$

$$\therefore tx_1 + 18(y_1+m) = 9(1+m) \therefore \frac{t}{9} \frac{x_1}{1+m} + 2 \frac{y_1+m}{1+m} = 1 \text{ 即 } \frac{t}{9}x_R + 2y_R = 1 \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

故点 R 在直线 $\frac{t}{9}x + 2y = 1$ 上, 过 $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$. 同理, 若线段 HF 上存在点 N' , 使得 $\frac{SH}{SF} = \frac{N'H}{N'F}$,

可证点 N' 也在直线 $\frac{t}{9}x + 2y = 1$ 上, 又 $\because RM$ 与 FH 交点唯一确定, 所以 N' 与 N 重合. $\therefore \frac{SH}{SF} = \frac{NH}{NF} \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

19. (17 分)

解: (1) 由 $g(x) = 0$ 得: $a = \frac{e^x - \frac{1}{x}}{x+2} (x \neq 0)$,

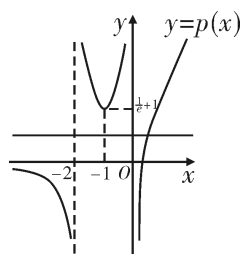
$$\text{令 } p(x) = \frac{e^x - \frac{1}{x}}{x+2}, \text{ 则 } p(x)' = \frac{(x+1)\left(e^x + \frac{2}{x^2}\right)}{(x+2)^2}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$\therefore p(x)$ 的递减区间为 $(-\infty, -2), (-2, -1)$, 递增区间为 $(-1, 0), (0, +\infty)$,

且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -2^-} p(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -2^+} p(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} p(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = -\infty,$

$\therefore$ 函数 $y = p(x)$ 与 $y = a$ 的图象如图, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

故当 $g(x)$ 仅有一个零点时, a 的取值范围为 $\left[0, \frac{1}{e} + 1\right)$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$



(2) (i) $f(x) = xe^x - ax^2 - 2ax - 1 (x \neq 0)$,

$$\therefore f(x)' = (x+1)(e^x - 2a) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

① 当 $\frac{1}{2e} < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的递减区间为 $(-1, \ln 2a)$;

递增区间为 $(-\infty, -1), (\ln 2a, 0), (0, +\infty)$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

② 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的递减区间为 $(-1, 0)$;

递增区间为 $(-\infty, -1), (0, +\infty)$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

③当 $a > \frac{1}{2}$, $f(x)$ 的递减区间为 $(-1, 0), (0, \ln 2a)$;

递增区间为 $(-\infty, -1), (\ln 2a, +\infty)$ 10 分

(ii) 由 (i) 知 $x_1 < -1 < x_2 < \ln 2a < x_3$, 设 $q(x) = f(x) - f(-2-x)$,

其中 $-1 < x < \ln 2a$,

则 $q'(x) = (x+1)(e^x - 2a) + (-2-x+1)(e^{-2-x} - 2a) =$

$$(x+1)(e^x - e^{-2-x}) = (x+1) \frac{(e^{x+1} - 1)(e^{x+1} + 1)}{e^{x+2}} > 0$$

$\therefore q(x)$ 在 $(-1, \ln 2a)$ 单调递增,

$\therefore -1 < x_2 < \ln 2a, \therefore q(x_2) > q(-1) = 0$, 即 $f(x_2) > f(-2-x_2)$,

$\therefore f(x_1) = f(x_2), \therefore f(x_1) > f(-2-x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递增且 $x_1 < -1, -2-x_2 < -1$,

$\therefore x_1 > -2-x_2$, 即 $x_1 + x_2 > -2$ ① 13 分

再设 $r(x) = f(x) - f(2\ln 2a - x)$, 其中 $-1 < x < \ln 2a$,

$$\text{则 } r'(x) = (x+1)(e^x - 2a) + (2\ln 2a - x + 1)(e^{2\ln 2a - x} - 2a) = (e^x - 2a) \left[x + 1 + \frac{2a(x - 2\ln 2a - 1)}{e^x} \right].$$

$\therefore -1 < x < \ln 2a, \therefore x - 2\ln 2a - 1 < -(\ln 2a + 1) < 0$ 且 $e^x < 2a$

$$\therefore x + 1 + \frac{2a(x - 2\ln 2a - 1)}{e^x} < x + 1 + \frac{2a(x - 2\ln 2a - 1)}{2a} = 2(x - \ln 2a) < 0$$

$\therefore r'(x) > 0, \therefore r(x)$ 在 $(-1, \ln 2a)$ 单调递增,

$\therefore -1 < x_2 < \ln 2a, \therefore r(x_2) < r(\ln 2a) = 0$, 即 $f(x_2) < f(2\ln 2a - x_2)$,

$\therefore f(x_2) = f(x_3), \therefore f(x_3) < f(2\ln 2a - x_2), \therefore f(x)$ 在 $(\ln 2a, +\infty)$ 单调递增

且 $x_3 > \ln 2a, 2\ln 2a - x_2 > \ln 2a, \therefore x_3 < 2\ln 2a - x_2$, 即 $x_2 + x_3 < 2\ln 2a$ ② 16 分

由 ①、② 得: $x_3 - x_1 < 2\ln 2a + 2$

$\therefore \ln 2a \leq 2a - 1, \therefore x_3 - x_1 < 4a$ 17 分