

## 2026 火山寒假高二数学结课测试卷

## 参考答案与试题解析

## 一. 填空题（共 15 小题）

1. 已知函数  $f(x) = 2xf'(e) + \ln x$ , 则  $f(e) = \underline{-1}$ .

【分析】求导, 得  $f'(x) = 2f'(e) + \frac{1}{x}$ , 令  $x=e$ , 可求得  $f'(e) = -\frac{1}{e}$ , 于是可得到  $f(x)$  的解析式, 继而

可求得  $f(e)$  的值.

【解答】解:  $\because f(x) = 2xf'(e) + \ln x$ ,

$$\therefore f'(x) = 2f'(e) + \frac{1}{x},$$

$$\therefore f'(e) = 2f'(e) + \frac{1}{e},$$

$$\text{解得 } f'(e) = -\frac{1}{e},$$

$$\therefore f(x) = -\frac{2x}{e} + \ln x,$$

$$\therefore f(e) = -2 + 1 = -1,$$

故答案为:  $-1$ .

【点评】本题考查导数的应用, 求得  $f'(e) = -\frac{1}{e}$  是关键, 考查运算求解能力, 属于中档题.

2. 函数  $y = \frac{e^x}{x}$  的极小值为  $\underline{e}$ .

【分析】求出函数的导函数, 通过导函数为 0, 判断导函数的符号, 然后求解函数的极小值即可.

【解答】解: 函数  $y = \frac{e^x}{x}$ , 可得  $y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ , 令  $y' = 0$ , 可得  $x=1$ ,

当  $x < 1$  ( $x \neq 0$ ) 时,  $y' < 0$ , 函数是减函数; 当  $x > 1$  时,  $y' > 0$ , 函数是增函数;

$x=1$  时函数取得极小值为:  $e$ .

故答案为:  $e$ .

【点评】本题考查函数的极值的求法, 考查计算能力.

3. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  的奇函数, 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $xf'(x) < f(x)$ , 则不等式  $2f(1-x) + (x-1)f(2) < 0$  的解集为  $\underline{(-\infty, -1) \cup (1, 3)}$ .

【分析】令  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ , 由题意可得  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  为定义域上的偶函数, 且在  $(-\infty, 0)$  上单调递增,

在  $(0, +\infty)$  上单调递减; 分  $1-x > 0$  与  $1-x < 0$  两类讨论, 将不等式  $2f(1-x) + (x-1)f(2) < 0$  等价转化为  $g(1-x) < g(2)$  与  $g(1-x) > g(2)$ , 分别解之即可.

【解答】解：令  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ,

∵ 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $xf'(x) < f(x)$ ,

∴ 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$ ,

∴  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减; ①

又  $f(x)$  为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  的奇函数,

∴  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  为偶函数,

∴  $g(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增; ②

又不等式  $2f(1-x) + (x-1)f(2) < 0$ , 即  $2f(1-x) < (1-x)f(2)$ , (\*)

∴ 当  $1-x > 0$ , 即  $x < 1$  时, (\*) 式可化为  $\frac{f(1-x)}{1-x} < \frac{f(2)}{2}$ , 即  $g(1-x) < g(2)$ , 由①得  $1-x > 2$ , 解得  $x < -1$ ;

当  $1-x < 0$ , 即  $x > 1$  时, (\*) 式可化为  $\frac{f(1-x)}{1-x} > \frac{f(2)}{2}$ , 即  $g(1-x) > g(2) = g(-2)$ , 由②得  $1-x > -2$ , 解得  $1 < x < 3$ ;

综上所述, 不等式  $2f(1-x) + (x-1)f(2) < 0$  的解集为:  $(-\infty, -1) \cup (1, 3)$ .

故答案为:  $(-\infty, -1) \cup (1, 3)$ .

【点评】本题考查了利用条件构造函数和用导数判断函数的单调性, 利用函数的单调性和奇偶性的关系对不等式进行等价转化, 考查化归思想与运算能力, 属于难题.

4. 若把英语单词 “pear” 的字母顺序写错了, 则可能出现的错误有 23 种.

【分析】利用概率与统计的知识, 可以直接解出.

【解答】解: 根据题意, *pear* 有四个不同字母, 其不同的排列有  $A_4^4 = 24$  种,

而正确的排列只有一种, 故可能出现的错误有  $24 - 1 = 23$  种,

故答案为: 23.

【点评】本题考查了统计与概率, 学生的逻辑推理能力, 数学运算能力, 属于基础题.

5. 某校周五的课程表设计中, 要求安排 8 节课 (上午 4 节, 下午 4 节), 分别安排语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史各一节, 其中生物只能安排在第一节或最后一节, 数学和英语在安排时必须相邻 (注: 上午的最后一节与下午的第一节不记作相邻), 则周五的课程顺序的编排方法共有 4800 种. (结果用数值表示)

【分析】分 3 步进行分析: ①分析生物的排法数目, ②分析数学英语相邻的排法的数目, ③将剩下的 5 门课程全排列, 由分步计数原理计算可得答案.

【解答】解: 根据题意, 分 3 步进行分析:

①生物只能安排在第一节或最后一节, 上午、下午有 4 节符合要求, 则生物课的排法有 4 种,

②数学和英语在安排时必须相邻，将数学、英语看成一个整体，有 5 个位置可选，则有  $5 \times A_2^2 = 10$  种情况，

③将剩下的 5 门课程全排列，有  $A_5^5 = 120$  种情况，

则有  $4 \times 10 \times 120 = 4800$  种不同的排法；

故答案为：4800.

【点评】本题考查排列组合的应用，涉及分步计数原理的应用，属于基础题.

6. 在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中，选取 5 人参加义务献血，若要求男、女教师都有，则选取方式的种数为 120. (结果用数值表示)

【分析】利用间接法，从所有 9 人中任选 5 人的选法中，去掉 5 人全是女教师的选法，即为所求的结果.

【解答】解：不按性别，从 9 人中任选 5 人的选法数为： $C_9^5 = 126$ ,

5 人全是女教师的选法数为： $C_6^5 = 6$ ,

故男、女教师都有选取方式的种数为： $126 - 6 = 120$ .

故答案为：120.

【点评】本题考查组合的应用题，本题采用了间接法求解，属于基础题.

7. 甲、乙、丙、丁 4 名同学被随机地分到 A、B、C 三个社区参加社会实践，要求每个社区至少有一名同学，则甲、乙两人被分在同一个社区的情况有 6 种.

【分析】由已知可得四个人分成 3 组，即 1, 1, 2 三组，其中 2 人组就是甲乙，然后根据排列组合公式即可求解.

【解答】解：由已知可得四个人分成 3 组，即 1, 1, 2 三组，

则甲、乙两人被分在同一个社区的情况有  $\frac{C_2^1 C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 6$ ,

故答案为：6.

【点评】本题考查了排列组合数的性质，考查了学生的运算能力，属于基础题.

8. 从 2, 3, 4, 5, 6, 7 任取三个不同的数字，组成无重复数字三位数，要求个位数最大，百位数最小，则这样的三位数的个数为 20 (用数字作答).

【分析】根据题意，先从 2, 3, 4, 5, 6, 7 任取三个不同的数字，再将选出的 3 个中最大的放在个位，最小的放在百位，由分步计数原理计算可得答案.

【解答】解：根据题意，从 2, 3, 4, 5, 6, 7 任取三个不同的数字，有  $C_6^3 = 20$  种取法，

将选出的 3 个中最大的放在个位，最小的放在百位，有 1 种安排方法，

则可以有  $20 \times 1 = 20$  个符合题意的三位数，

故答案为：20.

【点评】本题考查排列组合的应用，注意题目的限制条件，属于基础题.

9. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两个端点异色，如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法总数为 420 .

【分析】依次对四棱锥的五个顶点上色，注意分类讨论即可.

【解答】解：第一步：点  $A$  上色，5 种方法，

第二步：点  $B$  上色，4 种方法，

第三步：点  $C$  上色，3 种方法，

第四步：点  $D$  上色，

若与点  $B$  相同，则有 1 种方法，

若与点  $B$  不同，则有 2 种方法，

第五步：点  $E$  上色，

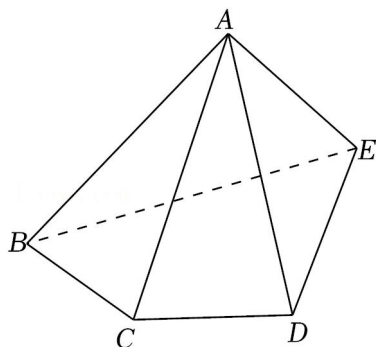
若点  $D$  与点  $B$  相同，则有 3 种方法，

若点  $D$  与点  $B$  不同，则有 2 种方法，

故不同的染色方法总数为

$$5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 420,$$

故答案为：420.



【点评】本题考查了分步乘法计数原理与分类加法计数原理的应用，是中档题.

10. 已知函数  $f(x) = e^x(3x - 1) - ax + a$ ，其中  $a < 1$ ，若存在唯一的整数  $x_0$ ，使得  $f(x_0) < 0$ ，则实数  $a$  的取值范围是  $[\frac{2}{e}, 1)$  .

【分析】设  $g(x) = e^x(3x - 1)$ ， $y = ax - a$ ，问题转化为存在唯一的整数  $x_0$  使得  $g(x_0)$  在直线  $y = ax - a$  的下方，求导数可得函数的极值，数形结合可得  $-a > g(0) = -1$  且  $g(-1) = -4e^{-1} \geq -a - a$ ，解关于  $a$  的不等式组可得.

【解答】解：设  $g(x) = e^x(3x - 1)$ ， $y = ax - a$ ，

由题意知，函数  $y = g(x)$  在直线  $y = ax - a$  下方的图象中只有一个点的横坐标为整数，

$$g'(x) = e^x(3x + 2), \text{ 当 } x < -\frac{2}{3} \text{ 时, } g'(x) < 0,$$

∴当  $x > -\frac{2}{3}$  时,  $g'(x) > 0$ .

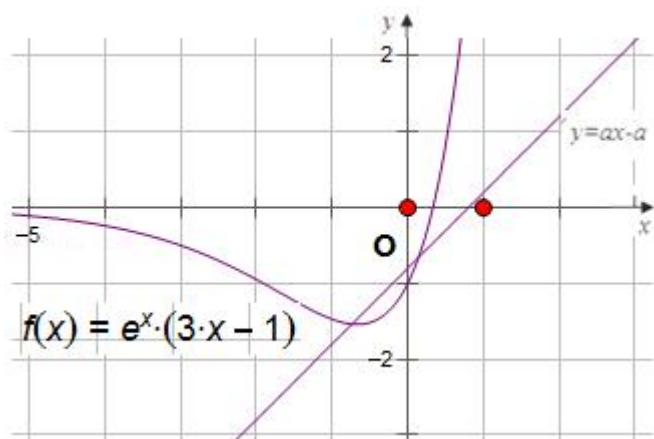
所以, 函数  $y=g(x)$  的最小值为  $g(-\frac{2}{3}) = e^{-\frac{2}{3}}$ .

又  $g(0) = -1$ ,  $g(1) = e > 0$ ,

直线  $y=ax-a$  恒过定点  $(1, 0)$  且斜率为  $a$ ,

故  $-a > g(0) = -1$  且  $g(-1) = -4e^{-1} \geq -a-a$ , 解得  $\frac{2}{e} \leq a < 1$ .

故答案为:  $[\frac{2}{e}, 1)$ .



**【点评】** 本题考查导数和极值, 涉及数形结合和转化的思想, 属中档题.

11. 若二次函数  $f(x) = 2x^2 + 3$  的图象与曲线  $C: g(x) = ae^x + 3$  ( $a > 0$ ) 存在公切线, 则实数  $a$  的取值范围是  $(0, \frac{8}{e^2}]$ .

**【分析】** 设公切线与  $f(x)$ 、 $g(x)$  的切点坐标, 由导数的几何意义, 斜率公式化简, 分离出  $a$  后构造函数, 利用导数判断单调性, 求出最值即可求解.

**【解答】** 解: 由  $f(x) = 2x^2 + 3$ , 可得  $f'(x) = 4x$ ,

由  $g(x) = ae^x + 3$ , 可得  $g'(x) = ae^x$ ,

设公切线与  $f(x) = 2x^2 + 3$  的图象相切于点  $(x_1, 2x_1^2 + 3)$ ,

与  $g(x) = ae^x + 3$  的图象相切于点  $(x_2, ae^{x_2} + 3)$ ,

$$\text{所以 } 4x_1 = ae^{x_2} = \frac{ae^{x_2} + 3 - (2x_1^2 + 3)}{x_2 - x_1} = \frac{ae^{x_2} - 2x_1^2}{x_2 - x_1}, \text{ 即 } 2x_1 = \frac{2x_1^2 - x_1^2}{x_2 - x_1},$$

可得  $x_1 = 0$  或  $2x_2 = x_1 + 2$ ,

因为  $4x_1 = ae^{x_2}$ ,  $a > 0$ , 则  $x_1 > 0$ ,  $2x_2 = x_1 + 2 > 2$ , 即  $x_2 > 1$ ,

$$a = \frac{4x_1}{e^{x_2}} = \frac{4(2x_2-2)}{e^{x_2}} = \frac{8(x_2-1)}{e^{x_2}}, \quad x_2 > 1,$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{8(x-1)}{e^x}, \quad x > 1, \text{ 可得 } h'(x) = \frac{8e^x - 8e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{16-8x}{e^x},$$

由  $h'(x) > 0$  可得  $1 < x < 2$ ; 由  $h'(x) < 0$  可得  $x > 2$ ,

所以  $h(x) = \frac{8(x-1)}{e^x}$  在  $(1, 2)$  上单调递增, 在  $(2, +\infty)$  上单调递减,

$$\text{所以 } h(x)_{\max} = h(2) = \frac{8 \times (2-1)}{e^2} = \frac{8}{e^2},$$

所以实数  $a$  的取值范围是  $(0, \frac{8}{e^2}]$ ,

故答案为:  $(0, \frac{8}{e^2}]$ .

**【点评】** 本题考查了利用导数研究函数的切线方程, 考查了转化思想和函数思想, 属中档题.

12. 若关于  $x$  的不等式  $e^{x-1} - a > a \ln x$  对于任意的  $x \in (0, +\infty)$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是  $(0, 1)$ .

**【分析】** 问题转化为  $xe^x > \ln aex \cdot e^{\ln aex}$ , 设  $h(x) = xe^x$ , 根据函数的单调性得到  $a < \frac{e^{x-1}}{x}$ , 设  $\varphi(x) = \frac{e^{x-1}}{x}$ ,

求出函数的最小值, 求出  $a$  的取值范围即可.

**【解答】** 解: 由题意知,  $a > 0$ , 将原不等式变形可得  $e^{x-1} > a(\ln ax + 1)$ ,

即  $xe^x > aex \ln aex = \ln aex \cdot e^{\ln aex}$ ,

设  $h(x) = xe^x$ , 则  $h'(x) = (x+1)e^x$ ,

当  $\ln aex < 0$  时, 原不等式显然成立;

当  $\ln aex \geq 0$  时,  $\because h(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增,

$$\therefore x > \ln aex \Rightarrow a < \frac{e^{x-1}}{x},$$

$$\text{设 } \varphi(x) = \frac{e^{x-1}}{x}, \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2},$$

$\therefore \varphi(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore \varphi(x)$  的最小值为  $\varphi(1) = 1$ ,

故  $0 < a < 1$ ,

故答案为:  $(0, 1)$ .

**【点评】** 本题考查恒成立问题的求解方法, 考查化归与转化思想, 训练了利用导数求最值, 属难题.

13. 现有 7 人排队接种新冠疫苗, 若要求甲在乙的前面, 乙在丙的前面, 且丙丁相邻, 则有 240 种不同的排队方法. (用数字作答)

**【分析】** 将丙丁捆绑作为 1 个人, 7 个人 7 个位置变成 6 个位置, 再结合先选后排的原理, 即可求解.

【解答】解：将丙丁捆绑作为 1 个人，7 个人 7 个位置变成 6 个位置，从中选 3 个位置安置甲乙丙（丁），其他 3 个任意排列，

故共有  $A_2^2 C_6^3 A_3^3 = 240$  种.

故答案为：240.

【点评】本题主要考查了排列，组合及简单计数问题，考查计算能力，属于基础题.

14. 甲、乙、丙、丁、戊五位妈妈相约各带一个小孩去观看郁金香花展，她们选择骑共享电动车出行，每辆电动车只能带一个孩子，但是孩子们都表示不坐自己妈妈的车，则她们坐车不同的搭配方式有 44 .

【分析】由排列、组合及简单计数问题分类讨论各小孩选择坐车情况即可得解.

【解答】解：①当甲的小孩先选择坐车，共有 4 种不同选择，不妨坐乙的车，

②在乙的小孩选择坐车的前提下，当选择坐甲的车，则丙、丁、戊的小孩共有 2 种不同选择，当选择坐丙、丁、戊的车，丙、丁、戊的小孩共  $3 \times 3 = 9$  种不同选择，

即共有  $2 + 9 = 11$  种不同选择，

综合①②得：她们坐车不同的搭配方式有  $4 \times 11 = 44$  种，

故答案为：44.

【点评】本题考查排列、组合及简单计数问题，属中档题.

15. 6 个相同的小球放入 4 个不同的盒子，每个盒子至少一个小球，则有 10 种不同的放法；6 个各不相同的小球放入 4 个不同的盒子，每个盒子至少一个小球，则有 1560 种不同的放法.

【分析】对于第一空：用挡板法分析：将 6 个相同的小球排成一排，有 5 个空位，在其中任选 3 个，插入挡板，由组合数公式计算即可得答案.

对于第二空：分 2 步进行分析：先把 6 个小球分组，再将分好的 4 组全排列，放入四个盒子中，由分步计数原理计算可得答案.

【解答】解：根据题意，对于第一空：6 个相同的小球排成一排，有 5 个空位，在其中任选 3 个，插入挡板，可以将 6 个小球分成 4 组，分别放入四个盒子即可，

则有  $C_5^3 = 10$  种放法，

对于第二空：分 2 步进行分析：

先把 6 个小球分组，若分为 2、2、1、1 的四组，有  $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^1 C_1^1}{A_2^2 A_2^2} = 45$  种分组方法，

若分为 3、1、1、1 的四组，有  $C_6^3 = 20$  种分组方法，

则有  $45 + 20 = 65$  种分组方法，

将分好的 4 组全排列，放入四个盒子中，有  $A_4^4 = 24$  种放法，

则有  $65 \times 24 = 1560$  种放法，

故答案为：10，1560.

【点评】本题考查排列组合的应用，注意区分两个问题，属于基础题.

## 二. 解答题（共6小题）

16. 已知函数  $f(x) = \frac{x^2}{e^x} + x^2 - \frac{1}{3}x^3$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调递减区间；

(2) 求函数  $f(x)$  在  $[-1, 3]$  上的最大值和最小值.

【分析】(1) 求出函数的导数，求出极值点，利用导函数的符号判断函数的单调性，求解单调区间即可.

(2) 结合 (1) 的结果，求解端点值，以及函数的极值，即可得到函数的最值.

【解答】解：(1) 由题意可得  $f'(x) = (2x - x^2) \left( \frac{1}{e^x} + 1 \right)$ ，令  $f'(x) = 0$ ，可得  $x = 0$  或  $x = 2$ ，

当  $x < 0$  时， $f'(x) < 0$ . 函数是减函数，

当  $0 < x < 2$  时， $f'(x) > 0$ ，函数是增函数，

当  $x > 2$  时， $f'(x) < 0$ . 函数是减函数，

所以，函数的单调增区间：(0, 2)，

单调减区间是：(−∞, 0)，(2, +∞).

(2) 由 (1) 可知  $x = 0$  时，函数取得极小值： $f(0) = 0$ ， $x = 2$  时，函数取得极大值， $f(2) = \frac{4}{e^2} + \frac{4}{3}$ .

$$f(-1) = e + \frac{4}{3}, f(3) = \frac{9}{e^3},$$

所以函数的最大值为： $e + \frac{4}{3}$ ，最小值为 0.

【点评】本题考查函数的导数的应用，函数的单调性以及函数的最值的求法，考查分析问题解决问题的能力，是中档题.

17. 已知函数  $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^{2+x} - 1$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 已知点  $P(1, b)$  为曲线  $y = f(x)$  上一点，若该曲线在点  $P$  处的切线方程为  $x - y + m = 0$  ( $b, m \in \mathbb{R}$ )，求  $a, b, m$  的值；

(2) 讨论函数  $f(x)$  的单调性；

(3) 若  $f(x)$  在区间 (0, 3) 上有唯一的极值点  $x_0$ ，求  $a$  的取值范围.

【分析】(1) 对  $f(x)$  求导，由  $f'(1) = 1$  可求得  $a$  的值，由  $f(1) = b$  可求得  $b$  的值，将点  $P$  的坐标代入切线方程即可求得  $m$  的值；

(2) 对  $f(x)$  求导，再对  $a$  分类讨论，利用导数与函数单调性的关系求解即可；

(3) 令  $g(x) = -ax^2 + x + 1$ , 由已知可得  $g(x)$  在  $(0, 3)$  上存在唯一零点, 且在该零点两侧  $g(x)$  的符号不一致, 对  $a$  分类讨论, 即可求得满足题意的  $a$  的取值范围.

**【解答】**解: (1)  $f'(x) = \frac{1}{x} - ax + 1 = -\frac{ax^2 - x - 1}{x}$ ,

由题意知  $f'(1) = -a + 2 = 1$ , 所以  $a = 1$ ,

所以  $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ , 所以  $f(1) = -\frac{1}{2} + 1 - 1 = b$ , 所以  $b = -\frac{1}{2}$ ,

将点  $(1, -\frac{1}{2})$  代入方程  $x - y + m = 0$ , 得  $m = -\frac{3}{2}$ , 所以  $a = 1, b = -\frac{1}{2}, m = -\frac{3}{2}$ .

(2) 由题意知函数的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = -\frac{ax^2 - x - 1}{x}$ ,

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) > 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

当  $a < 0$  时, 因为方程  $ax^2 - x - 1 = 0$  的判别式  $\Delta = 1 + 4a > 0$ , 该方程的两根分别为  $\frac{1 - \sqrt{4a+1}}{2a} < 0, \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2a} > 0$ ,

令  $f'(x) = -\frac{ax^2 - x - 1}{x} > 0$ , 得  $0 < x < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2a}$ , 令  $f'(x) = -\frac{ax^2 - x - 1}{x} < 0$ , 得  $x > \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2a}$ ,

所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2a})$  上单调递增, 在  $(\frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2a}, +\infty)$  上单调递减.

(3) 由 (1) 知  $f'(x) = \frac{-ax^2 + x + 1}{x}$ , 令  $g(x) = -ax^2 + x + 1$ ,

因为  $f(x)$  在区间  $(0, 3)$  上有唯一的极值点  $x_0$ ,

所以  $f'(x)$  在  $(0, 3)$  上存在唯一零点, 即  $g(x)$  在  $(0, 3)$  上存在唯一零点, 且在该零点两侧  $g(x)$  的符号不一致,

当  $a \leq 0$  时, 由 (2) 知,  $f(x)$  在  $(0, 3)$  上单调递增,  $f(x)$  无极值点,

当  $a > 0$ , 因为  $g(0) = 1 > 0$ ,  $g(x)$  的对称轴为直线  $x = \frac{1}{2a} > 0$ ,  $f'(x)$  在  $(0, 3)$  上存在唯一零点,

必有  $g(3) = -9a + 4 < 0$ , 解得  $a > \frac{4}{9}$ , 所以  $a$  的取值范围为  $(\frac{4}{9}, +\infty)$ .

**【点评】**本题主要考查导数的几何意义, 利用导数研究函数的单调性与极值, 考查方程思想与分类讨论思想的运用, 考查运算求解能力, 属于难题.

18. 已知函数  $f(x) = e^{x+1} + (1-a)x + b$ .

(1) 若曲线  $y = f(x)$  在  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y = ex$ , 求实数  $a, b$  的值;

(2) 若不等式  $f(x) \geq 0$  恒成立, 求  $\frac{b}{a}$  的最小值.

**【分析】**(1) 根据题意可知  $f(0) = 0, f'(0) = e$ , 从而求出  $a, b$  的值.

(2) 不等式  $f(x) \geq 0$  恒成立, 即  $f(x)_{\min} \geq 0$  即可, 求出函数  $f(x)$  的导函数, 分  $1-a > 0, 1-a = 0, 1-a < 0$  三种情况讨论, 求出函数  $f(x)$  的最小值, 从而求出结果.

**【解答】**解: (1) 由题意可知  $f(0) = 0$ ,

$$\therefore e+b=0, \therefore b=-e,$$

$$\text{又} \because f(x) = e^{x+1} + 1 - a,$$

$$\therefore f(0) = e + 1 - a = e,$$

$$\therefore a=1.$$

(2) 函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f'(x) = e^{x+1} + 1 - a$ ,

①当  $1-a > 0$ , 即  $a < 1$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增,

因为当  $x < -1$  时,  $f(x) < 1 + (1-a)x + b \leq (1-a)x + |b| + 1$ ,

所以取  $x_0 = -1 - \frac{|b|+1}{1-a} < -1$ , 则  $f(x_0) < 0$ , 不符合题意;

②当  $1-a=0$ , 即  $a=1$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增,

若不等式  $f(x) = e^{x+1} + b \geq 0$  恒成立, 则  $b \geq 0$ ,

所以  $\frac{b}{a} \geq 0$ , 即  $\frac{b}{a}$  的最小值为 0;

③当  $1-a < 0$ , 即  $a > 1$  时,

令  $f'(x) > 0$ , 解得  $x > \ln(a-1) - 1$ , 令  $f'(x) < 0$ , 解得  $x < \ln(a-1) - 1$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln(a-1) - 1)$  上单调递减, 在  $(\ln(a-1) - 1, +\infty)$  上单调递增,

若不等式  $f(x) \geq 0$  恒成立, 则  $f(\ln(a-1) - 1) = 2(a-1) + (1-a)\ln(a-1) + b \geq 0$ ,

即  $b \geq 2(1-a) + (a-1)\ln(a-1)$ , 所以  $\frac{b}{a} \geq \frac{2(1-a) + (a-1)\ln(a-1)}{a}$ ,

设  $a-1=t$  ( $t > 0$ ), 则  $\frac{2(1-a) + (a-1)\ln(a-1)}{a} = \frac{t(1\ln t - 2)}{t+1}$ ,

设  $g(t) = \frac{t(1\ln t - 2)}{t+1}$  ( $t > 0$ ), 则  $g'(t) = \frac{t+1\ln t - 1}{(t+1)^2}$ ,

注意到  $h(t) = t+1\ln t - 1$  为增函数,  $h(1) = 0$ ,

所以当  $t \in (0, 1)$  时,  $g'(t) < 0$ ,  $g(t)$  单调递减; 当  $t \in (1, +\infty)$  时,  $g'(t) > 0$ ,  $g(t)$  单调递增,

所以  $g(t) \geq g(1) = -1$ , 此时  $a=2$ , 即  $\frac{b}{a}$  的最小值为 -1;

综上所述,  $\frac{b}{a}$  的最小值为 -1.

**【点评】** 本题主要考查了导数的几何意义, 考查了利用导数研究函数的单调性和最值, 同时考查了不等式的恒成立问题, 属于难题.

19. 已知函数  $f(x) = x \ln x + ae^x$ .

(I) 若曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, ae)$  处的切线方程为  $y=2x+b$ , 求实数  $a, b$  的值;

(II) 若函数  $g(x) = f(x) - 2ae^x$  有两个极值点, 求实数  $a$  的取值范围.

**【分析】** (I) 利用函数的导数求解切线方程, 比较系数, 即可求解  $a, b$ .

(II) 求出导函数，通过函数  $g(x)$  有两个极值点，转化为直线  $y=a$  和  $y=\frac{\ln x+1}{e^x}$  的图象在  $(0, +\infty)$  内有 2 个交点. 设  $h(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$ ，通过函数的导数判断函数的单调性求解函数的最值，推出  $a$  的范围即可.

**【解答】**解：(I)  $\because f(x)=ae^x+\ln x+1, \therefore f'(1)=ae+1$ ,

$\therefore$  曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, ae)$  处的切线方程为  $y-ae=(ae+1)(x-1)$ , 即  $y=(ae+1)x-1$ ,

又切线方程为  $y=2x+b, \therefore \begin{cases} ae+1=2, \\ b=-1, \end{cases}$  即  $a=\frac{1}{e}, b=-1$ .

(II)  $\because g(x)=x\ln x-ae^x, \therefore g'(x)=\ln x+1-ae^x$ ,

令  $g'(x)=0$ , 得  $a=\frac{\ln x+1}{e^x}$ ,

函数  $g(x)$  有两个极值点，等价于直线  $y=a$  和  $y=\frac{\ln x+1}{e^x}$  的图象在  $(0, +\infty)$  内有 2 个交点.

设  $h(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$ , 则  $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}$ .

再令  $p(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$ , 则  $p'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$ ,

当  $x>0$  时,  $p'(x)<0, \therefore p(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 又  $p(1)=0$ ,

$\therefore$  当  $x \in (0, 1)$  时,  $p(x)>0$ , 即  $h'(x)>0, h(x)$  单调递增;

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $p(x)<0$ , 即  $h'(x)<0, h(x)$  单调递减.  $\therefore h(x)_{\max}=h(1)=\frac{1}{e}$ .

而当  $x \rightarrow 0$  时,  $h(x) \rightarrow -\infty$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow 0$ ,

故要使直线  $y=a$  和  $h(x)$  的图象在  $(0, +\infty)$  内有 2 个交点, 需  $0<a<\frac{1}{e}$ , 即  $a \in (0, \frac{1}{e})$ .

**【点评】** 本题考查函数的导数的应用, 考查分析问题解决问题的能力, 二次导函数以及构造法的应用, 是难题.

20. 已知函数  $f(x)=(x-2)e^x$ .

(1) 若  $a \in (0, +\infty)$ , 讨论  $f(x)$  在  $(0, a)$  上的单调性;

(2) 若函数  $g(x)=f(x)-m(x-1)^2$  在  $[1, 2]$  上的最大值小于  $\frac{2e}{3}$ , 求  $m$  的取值范围.

**【分析】**(1) 求出函数的导数, 解关于导函数的不等式, 通过讨论  $a$  的范围, 求出函数的单调区间即可;

(2) 求出函数  $g(x)$  的导数, 通过讨论  $m$  的范围, 求出函数的单调区间, 结合函数的单调性求出  $g(x)$  在  $[1, 2]$  上的最大值, 得到关于  $m$  的不等式, 求出  $m$  的取值范围即可.

**【解答】**解：(1)  $f(x)=(x-2)e^x$ , 则  $f'(x)=(x-1)e^x$ ,

令  $f'(x)>0$ , 解得:  $x>1$ , 令  $f'(x)<0$ , 解得:  $x<1$ ,

故  $f(x)$  在  $(0, 1)$  递减, 在  $(1, +\infty)$  递增,

①  $0<a \leq 1$  时,  $f(x)$  在  $(0, a)$  递减,

②  $a > 1$  时,  $f(x)$  在  $(0, 1)$  递减, 在  $(1, a)$  递增;

$$(2) g(x) = f(x) - m(x-1)^2 = (x-2)e^x - m(x-1)^2,$$

$$g'(x) = (x-1)(e^x - 2m),$$

①  $m \leq 0$  时,  $e^x - 2m > 0$ , 令  $g'(x) = 0$ , 解得:  $x = 1$ ,

故  $g(x)$  在  $(0, 1)$  递减, 在  $(1, +\infty)$  递增,

故  $g(x)$  在  $[1, 2]$  递增,  $g(x)_{\max} = g(2) = -m \geq 0$ , 不合题意;

②  $0 < m \leq \frac{e}{2}$  时,  $\ln 2m \leq 1$ ,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  单调递增,  $g(x)_{\max} = g(2) = -m$ ,

$$\text{故} \begin{cases} -\frac{e}{2} \leq -m < 0 \\ -m < -\frac{2e}{3} \end{cases}, \text{无解, 不合题意}$$

③  $\frac{e}{2} < m < \frac{e^2}{2}$  时,  $1 < \ln 2m < 2$ ,

令  $g'(x) > 0$ , 解得:  $x > \ln 2m$  或  $x < 1$ ,

令  $g'(x) < 0$ , 解得:  $1 < x < \ln 2m$ ,

故  $g(x)$  在  $[1, \ln 2m)$  递减, 在  $(\ln 2m, 2]$  递增,

故  $g(x)_{\max} = g(1)$  或  $g(2)$ ,

若  $g(1)$  是最大值, 则  $g(1) = -e < -\frac{2e}{3}$ ,

此时  $g(2) = -m \leq -e$ , 则  $m \geq e$ , 故  $e \leq m < \frac{e^2}{2}$ ;

若  $g(2)$  是最大值, 则  $-e < g(2) = -m < -\frac{2e}{3}$ , 故  $\frac{2e}{3} < m < e$ ,

故  $\frac{2e}{3} < m < \frac{e^2}{2}$ ;

④  $m \geq \frac{e^2}{2}$  时,  $\ln 2m \geq 2$ ,

故  $g(x)$  在  $[1, 2]$  单调递减,  $g(x)_{\max} = g(1) = -e < -\frac{2e}{3}$ , 符合题意;

综上:  $m$  的取值范围是  $(\frac{2e}{3}, +\infty)$ .

**【点评】** 本题考查了函数的单调性, 最值问题, 考查导数的应用以及分类讨论思想, 转化思想, 是中档题.

21. 已知函数  $f(x) = \frac{x^2}{2} + (a-3)x + a \ln x$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), 在定义域上有两个极值点  $x_1, x_2$  且  $x_1 < x_2$ .

(1) 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 求证:  $f(x_1) + f(x_2) + 5 > 0$ .

**【分析】** (1) 由已知得  $f'(x) = x + (a-3) + \frac{a}{x} = 0$  在  $(0, +\infty)$  上有两个根  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 即  $x^2 + (a-3)x + a = 0$

$x+a=0$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不相等的根  $x_1, x_2$ , 进而得  $a$  所满足条件:

(2) 由 (1) 可知,  $x_1, x_2$  ( $0 < x_1 < x_2$ ) 是方程  $x^2 + (a-3)x + a = 0$  的两个不等实根, 所以  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3-a \\ x_1 x_2 = a \end{cases}$ , 其

中  $0 < a < 1$ ,  $f(x_1) + f(x_2) =alna - \frac{a^2}{2} + 2a - \frac{9}{2}$ , 令  $g(a) =alna - \frac{a^2}{2} + 2a - \frac{9}{2}$ , 其中  $0 < a < 1$ , 利用  $g'(a) =lna - a + 3$ , 再令  $h(a) =lna - a + 3$ , 进而可得存在常数  $t \in (e^{-3}, 1)$ , 使得  $h(t) = 0$ , 再计算可证.

【解答】(1) 解: 因为函数  $f(x) = \frac{x^2}{2} + (a-3)x + alnx$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), 在定义域上有两个极值点  $x_1, x_2$  且  $x_1 < x_2$ ,

所以  $f'(x) = x + (a-3) + \frac{a}{x} = 0$  在  $(0, +\infty)$  上有两个根  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ ,

即  $x^2 + (a-3)x + a = 0$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不相等的根  $x_1, x_2$ ,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{a-3}{2} > 0 \\ \Delta = (a-3)^2 - 4a > 0 \\ a > 0 \end{cases}, \text{解得 } 0 < a < 1,$$

当  $0 < a < 1$  时, 若  $0 < x < x_1$  或  $x > x_2$ ,

$x^2 + (a-3)x + a > 0$ ,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, x_1)$  上和  $(x_2, +\infty)$  单调递增,

若  $x_1 < x < x_2$ ,  $x^2 + (a-3)x + a < 0$ ,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(x_1, x_2)$  单调递减,

故函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ ,

实数  $a$  的取值范围是  $(0, 1)$ ;

(2) 证明: 由 (1) 可知,  $x_1, x_2$  ( $0 < x_1 < x_2$ ) 是方程  $x^2 + (a-3)x + a = 0$  的两个不等实根,

$$\text{所以} \begin{cases} x_1 + x_2 = 3-a \\ x_1 x_2 = a \end{cases}, \text{其中 } 0 < a < 1,$$

$$\text{故: } f(x_1) + f(x_2) = \frac{x_1^2}{2} + (a-3)x_1 + alnx_1 + \frac{x_2^2}{2} + (a-3)x_2 + alnx_2$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} - x_1 x_2 + (a-3)(x_1 + x_2) + alnx_1 x_2$$

$$= \frac{(3-a)^2}{2} - a + (a-3)(3-a) +alna =alna - \frac{a^2}{2} + 2a - \frac{9}{2},$$

$$\text{令 } g(a) =alna - \frac{a^2}{2} + 2a - \frac{9}{2}, \text{其中 } 0 < a < 1, \text{故 } g'(a) =lna - a + 3,$$

$$\text{令 } h(a) =lna - a + 3, h'(a) = \frac{1}{a} - 1 > 0, h(a) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递增},$$

由于  $h(e^{-3}) = -2e^{-3} < 0$ ,  $h(1) = 2 > 0$ , 所以存在常数  $t \in (e^{-3}, 1)$ , 使得  $h(t) = 0$ ,

即  $lnt - t + 3 = 0$ ,  $lnt = t - 3$ , 且当  $a \in (0, t)$  时,  $h(a) = g'(a) < 0$ ,  $g(a)$  在  $(0, t)$  上单调递减,

当  $a \in (t, 1)$  时,  $h(a) = g'(a) > 0$ ,  $g(a)$  在  $(t, 1)$  上单调递增,

所以当  $0 < a < 1$  时,  $g(a) \geq g(t) = t \ln t - \frac{t^2}{2} + 2t - \frac{9}{2} = t(t-3) - \frac{t^2}{2} + 2t - \frac{9}{2} = \frac{t^2}{2} - t - \frac{9}{2}$ ,

又  $t \in (e^{-3}, 1)$ ,  $\frac{t^2}{2} - t - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(t-1)^2 - 5 > -5$ ,

所以  $g(a) > -5$ , 即  $g(a) + 5 > 0$ ,

故  $f(x_1) + f(x_2) + 5 > 0$  得证.

**【点评】** 本题考查利用函数有两个极值点时参数的取值范围问题, 以及利用导数证明不等式问题, 属难题.