

2026 年 4 月高三核心素养评估

数 学

注意事项：

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.若 $\frac{z-1}{z+1} = i$, 则复数 $z =$

- A.1 B.-1 C.i D.-i

2.若样本数据 2,3,6,8, t 的第 40 百分位数为 4,则实数 t 的值为

- A.3 B.4 C.5 D.6

3.若函数 $f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的图象与 x 轴的两个相邻交点的横坐标分别为 x_1, x_2 ,

且 $|x_1 - x_2| = \pi$, 则 $f(x_1 + x_2) =$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 若抛物线上一点 M 满足 $|MF| = 2$, $\angle OFM = 60^\circ$, 则 $p =$

- A.2 B.3 C.4 D.5

5.在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 P 在正方体的棱上运动,则三棱锥 $P-A_1C_1D$ 的体积的取值范围是

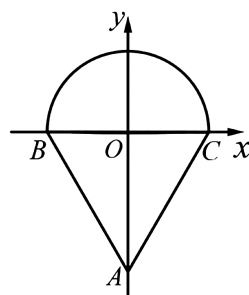
- A. $(0, \frac{4}{3}]$ B. $(0, \frac{8}{3}]$ C. $[\frac{4}{3}, \frac{8}{3}]$ D. $(0, 2]$

6.若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)+x$, 则 $f(2026)=$

- A.1012 B.1013 C.1014 D.1015

7.如图, $\triangle ABC$ 为边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形, 若曲线 $y=\sqrt{3-x^2}$ 上的动点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda \overrightarrow{AB}+\mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda+2\mu$ 的最大值为

- A.4 B. $\frac{7}{2}$ C.3 D. $\frac{5}{2}$



8.已知函数 $f(x)=\begin{cases} a^x-12, & 0 < x < 4 \\ \log_a x, & x \geq 4 \end{cases}$ ($a > 1$), 若对于任意 $x > 0$, $f(x) \leq 2\sqrt{x}$, 则实数 a 的取值范围为

- A. $[\frac{1}{e}, 2]$ B. $(1, e^{\frac{1}{e}}]$ C. $(1, \sqrt{2}]$ D. $[\sqrt{2}, 2]$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每个小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9.记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_3=2a_2-6$, $S_6=-18$, 则

- A. $a_2 < 0$ B. $a_5 > 0$
C. $S_9 = 0$ D. 当 $n=4$ 或 5 时, S_n 最大

10.已知在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA=AB=2$, Q 为平面 $ABCD$ 内一点, 则

- A. 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{8}{3}$
B. 当 $AQ=2$ 时, $\triangle PAQ$ 面积的最小值为 $\sqrt{2}$
C. 当 $\overrightarrow{AQ}=\lambda \overrightarrow{AD}$ ($0 < \lambda < 1$) 时, 存在 λ 使 $PQ \perp QC$
D. 当 $\angle QPD=45^\circ$ 时, 点 Q 的轨迹为抛物线

11.一颗质地均匀的正方体骰子, 六个面上分别标有点数 $1, 2, 3, 4, 5, 6$, 现随机将骰子抛掷 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 次, 各次抛掷结果相互独立. 记随机变量 X 表示向上的点数的最大值, $X=i$ 的概率为 $P(X=i)$, 则

- A. 事件“ $X=3$ ”与“ $X=4$ ”为对立事件
B. 当 $n=3$ 时, $P(X=3)=\frac{19}{216}$
C. $P(X=2)=(\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{6})^n$
D. 若 X 的数学期望不小于 5 , 则抛掷次数 n 的最小值为 5

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $b - a \cos C = a \sin C$ ，且 $b = 2, a = \sqrt{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的解的个数为_____.

13. 曲线 $y = x^2 - \ln x$ 上的点到直线 $y = x - 2$ 距离的最小值为_____.

14. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $x + \sqrt{3}y = 0$. $P_n(x_n, y_n)$ 是双曲线 C 上所有同时满足 $x_n \in \mathbb{N}^*, y_n \in \mathbb{N}^*$ 的点，且数列 $\{x_n\}$ 单调递增，则点 P_2 的坐标为_____， $\triangle OP_n P_{n+1}$ 的面积 $S =$ _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $a_1 = 2, S_n = a_{n+1} - 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$ ，证明数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n < \frac{1}{3}$.

16. (15 分)

甲、乙两人进行排球发球练习，总共发 3 个球（分 3 次发，每次发 1 个球），若某次发球成功，则该次发球者得 2 分，对方得 0 分，发球者继续发下一次球；若某次发球不成功，则该次发球者得 0 分，对方得 2 分，对方发下一次球. 已知甲每次发球成功的概率为 $\frac{2}{3}$ ，乙每次发球成功的概率为 $\frac{1}{2}$ ，且第一次发球者为乙，每次发球是否成功相互独立.

(1) 在前两个球发完后，求甲共得 2 分的概率；

(2) 设甲这次发球练习的总得分为 X ，求 X 的分布列与数学期望.

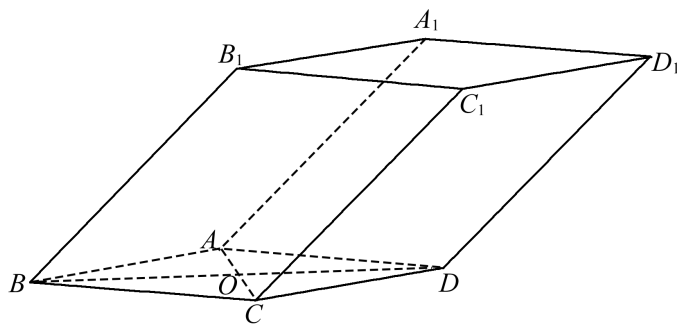
17. (15 分)

如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形, AC 与 BD 交于点 O , B_1 在底面 $ABCD$ 的投影为 O , F 为 B_1C_1 中点,其中 $AB=AC=BC=AB_1=2$.

(1)证明:平面 $CFD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2)求平面 FDD_1 与平面 ADD_1 夹角的余弦值;

(3)求多面体 $ACDFB_1$ 的体积.



18. (17 分)

已知曲线 E 上任意一点到点 $F(1,0)$ 的距离与到直线 $l: x=4$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$.

(1)求 E 的方程;

(2)设直线 n 经过 F 交 E 于 A, B 两点,过点 A, B 分别作直线 l 的垂线,垂足分别为 C, D .

(i)若四边形 $ABDC$ 的周长为 12,求直线 n 的方程;

(ii)设直线 AD 与 BC 交于点 P ,记 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的面积之和为 S ,求 S 的取值范围.

19. (17 分)

已知函数 $f(x) = xe^x$ 和 $g(x) = x \ln x$,直线 $y = t$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有四个不同的交点.

(1)求 t 的取值范围;

(2)求与这两条曲线都相切的直线的条数;

(3)从左到右四个交点的横坐标分别记为 x_1, x_2, x_3, x_4 ,是否存在 t ,使得 x_3, x_2, x_4, x_1

依次成等比数列? 请说明理由.(注: $\ln 2 > 0.69, \frac{1}{e} < 0.37$)

山东名校考试联盟

高三年级数学核心素养评估参考答案 2026.4

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	A	B	B	B	D	A

7. 【解析】

方法一：由题意得， $A(0, -3), B(-\sqrt{3}, 0), C(\sqrt{3}, 0), P(\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$ ，

因为 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ ，所以 $(\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta + 3) = \lambda(-\sqrt{3}, 3) + \mu(\sqrt{3}, 3) = (-\sqrt{3}\lambda + \sqrt{3}\mu, 3\lambda + 3\mu)$ ，

$$\text{得} \begin{cases} \sqrt{3}\cos\theta = -\sqrt{3}\lambda + \sqrt{3}\mu \\ \sqrt{3}\sin\theta + 3 = 3\lambda + 3\mu \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta + 3}{6} \\ \mu = \frac{\sqrt{3}\sin\theta + 3\cos\theta + 3}{6} \end{cases},$$

$$\text{所以 } \lambda + 2\mu = \frac{3\sqrt{3}\sin\theta + 3\cos\theta + 9}{6} = \frac{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta + 3}{2} = \frac{2\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) + 3}{2},$$

所以 $\lambda + 2\mu$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$ 。

方法二：取 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ，则 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + 2\mu\overrightarrow{AD}$ ，

利用等和线的知识得，如图 $\lambda + 2\mu = \frac{|AQ|}{|AD|} = \frac{|AQ|}{\sqrt{3}}$ ，

下面求 $|AQ|$ ：

由几何知识得，直线 PQ 方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ ，即 $x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$ ，

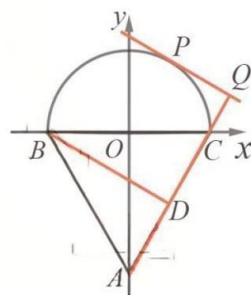
$$\text{所以 } |AQ| = \frac{|-3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } \lambda + 2\mu = \frac{|AQ|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{2}.$$

当 $a > 1$ 时，因为对于任意 $x > 0, f(x) \leq 2\sqrt{x}$ 恒成立，需要满足

$$\begin{cases} a^4 - 12 \leq 2\sqrt{4} \\ \log_a x \leq 2\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 2 \\ \ln a \geq \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} (*) \end{cases} \text{ 所以 } \ln a \geq \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)_{\max}$$

令 $g(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ ， $g'(x) = \frac{2 - \ln x}{4x\sqrt{x}}$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0, e^2)$ 上单调递增，在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $g_{\max}(x) = g(e^2) = \frac{1}{e}$ ，所以 $\ln a \geq \frac{1}{e}$ ，所以 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ ，所以实数 a 的取值范围为 $[e^{\frac{1}{e}}, 2]$ 。



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每个小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11
答案	AC	BD	BC

11. 【解析】【解析】对于 A：互斥事件；

对于 B：出现 1 次 3 点，共有 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 种可能；出现 2 次 3 点，共有 $3 \times 2 = 6$ 种可能；出现 3 次 3 点，共有 1 种可能。所以 $P(X=3) = \frac{12+6+1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{19}{216}$ ；

对于 C：方法一：掷 n 次骰子出现一次 2 点，其余全是 1 点有 C_n^1 种可能，出现两次 2 点其余全是 1 点有 C_n^2 种可能，以此类推， n 次全是 2 点有 C_n^n 种可能，所以 $P(X=2) = \frac{C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n}{6^n} = (\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{6})^n$ 。

方法二：若最大数为 m ，则 n 次中均不超过 m 的概率为 $(\frac{m}{6})^n$ ， n 次中均不超过 $(m-1)$ 的概率为 $(\frac{m-1}{6})^n$ ，所以 $P(X=m) = (\frac{m}{6})^n - (\frac{m-1}{6})^n$ 。

对于 D： $X=1,2,3,4,5,6$ ， $P(X=1) = (\frac{1}{6})^n$ ，若 $m \geq 2$ ，则点数 m 出现 1 次共有 $C_n^1(m-1)^{n-1}$ ，

点数 m 出现 2 次共有 $C_n^2(m-1)^{n-2}$ 种可能，以此类推，若点数 m 出现 i 次共有 $C_n^i(m-1)^i$ ，

所以 $P(X=m) = \frac{C_n^1(m-1)^{n-1} + C_n^2(m-1)^{n-2} + \cdots + C_n^n}{6^n} = (\frac{m}{6})^n - (\frac{m-1}{6})^n$ ；

同 C，则 $E(X) = \sum_{m=1}^6 m((\frac{m}{6})^n - (\frac{m-1}{6})^n) = 6 - \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{6^n} \geq 5$ ，

所以 $1 \geq \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{6^n} = (\frac{1}{6})^n + (\frac{2}{6})^n + (\frac{3}{6})^n + (\frac{4}{6})^n + (\frac{5}{6})^n$ ，令

$f(n) = (\frac{1}{6})^n + (\frac{2}{6})^n + (\frac{3}{6})^n + (\frac{4}{6})^n + (\frac{5}{6})^n$ ，显然 $f(n)$ 单调递减，又因为 $f(3) = \frac{25}{24} > 1$ ， $f(4) = \frac{979}{1296} < 1$ ，

所以 n 的最小值为 4。

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 2； 13. $\sqrt{2}$ ； 14. $(7, 4), \frac{1}{2}$ 。（第 1 个空 2 分，第 2 个空 3 分）

14. 【解析】双曲线 C 的方程为 $x^2 - 3y^2 = 1$ ，

因为点 $P_n(x_n, y_n)$ ($x_n, y_n \in \mathbb{N}^*$) 在双曲线 C 上，所以 $x_n^2 - 3y_n^2 = 1$ ，即 $x_n^2 = 3y_n^2 + 1$ ，

由于 $x_n, y_n \in \mathbb{N}^*$ ， $x_n^2 = 3y_n^2 + 1 \geq 4$ ，即 $x_1^2 \geq 4$ ，故 $x_1 \geq 2$ ，

当 $x_1 = 2$ 时， $y_1 = 1$ ，符合题意，所以 $P_1(2, 1)$ ；

$$x^2 - 3y^2 = 1 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y) = 1,$$

因为 $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$, 所以 $x_1 = 2, y_1 = 1$,

又因为 $(2 - \sqrt{3})^2(2 + \sqrt{3})^2 = (7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) = 1$, 所以 $x_2 = 7, y_2 = 4$, 所以 $P_2(7, 4) \dots$

$$\text{所以 } (x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1})(x_{n+1} + \sqrt{3}y_{n+1}) = (x_n - \sqrt{3}y_n)(2 - \sqrt{3})(x_n + \sqrt{3}y_n)(2 + \sqrt{3}),$$

$$= [(2x_n + 3y_n) - \sqrt{3}(x_n + 2y_n)][(2x_n + 3y_n) + \sqrt{3}(x_n + 2y_n)]$$

$$\text{所以 } x_{n+1} = 2x_n + 3y_n, \quad y_{n+1} = x_n + 2y_n,$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{OP_n} = (x_n, y_n), \quad \overrightarrow{OP_{n+1}} = (x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OP_n P_{n+1}} = \frac{1}{2} |x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n| = \frac{1}{2} |x_n(x_n + 2y_n) - y_n(2x_n + 3y_n)| = \frac{1}{2} |x_n^2 - 3y_n^2| = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $(7, 4); \frac{1}{2}.$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 【解析】(1) 当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1 = a_2 - 2$, 因为 $a_1 = 2$, 所以 $a_2 = 4$, 2 分

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = a_{n+1} - 2, \quad S_{n-1} = a_n - 2,$$

$$\text{两式相减得, } a_n = S_n - S_{n-1} = a_{n+1} - a_n, \text{ 所以 } a_{n+1} = 2a_n, \text{ 4 分}$$

又因为 $a_2 = 2a_1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 5 分

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$ 6 分

$$(2) \text{ 因为 } b_n = \frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}, \text{ 所以 } b_n = \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}, \text{ 9 分}$$

$$\text{所以, } T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{1}{2^1+1} - \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{2^3+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}+1} \text{ 12 分}$$

$$\text{又因为 } \frac{1}{2^{n+1}+1} > 0, \text{ 所以 } T_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}+1} < \frac{1}{3}. \text{ 13 分}$$

16. 【解析】(1) 设 A_i = “第 i ($i=1, 2, 3$) 个球甲发球成功”, B_i = “第 i ($i=1, 2, 3$) 个球乙发球成功”,
 C = “在前两个球发完后, 甲共得 2 分”,

则 $C = B_1 \overline{B_2} \cup \overline{B_1} A_2$, 且 B_1 与 $\overline{B_2}$ 相互独立, $\overline{B_1}$ 与 A_2 相互独立, $B_1 \overline{B_2}$ 与 $\overline{B_1} A_2$ 互斥,

$$\text{所以 } P(C) = P(B_1 \overline{B_2} \cup \overline{B_1} A_2) = P(B_1 \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{12}. \text{ 4 分}$$

(2) X 的可能取值为 0, 2, 4, 6.

$$P(X=0) = P(B_1 B_2 B_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \text{ 6 分}$$

$$P(X=2) = P(B_1 B_2 \overline{B_3}) + P(B_1 \overline{B_2} A_3) + P(\overline{B_1} A_2 B_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}, \text{ 8 分}$$

$$P(X=4)=P(\overline{B_1}\overline{B_2}A_3)+P(\overline{B_1}A_2\overline{B_3})+P(\overline{B_1}A_2A_3)=(\frac{1}{2})^2\times\frac{2}{3}+(\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{13}{36}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$P(X=6)=P(\overline{B_1}A_2A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

X 的分布列为:

X	0	2	4	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{2}{9}$

$\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

$$\text{故 } E(X)=0\times\frac{1}{8}+2\times\frac{7}{24}+4\times\frac{13}{36}+6\times\frac{2}{9}=\frac{121}{36}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

17. 【解析】(1) 取 CD 中点 E , 连接 B_1O , FE , OE , 因为 $OE\parallel BC\parallel B_1F$, 且 $OE=\frac{1}{2}BC=B_1F$,

所以四边形 B_1OEF 为平行四边形, 所以 $B_1O\parallel FE$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因为 $B_1O\perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $FE\perp$ 平面 $ABCD$,

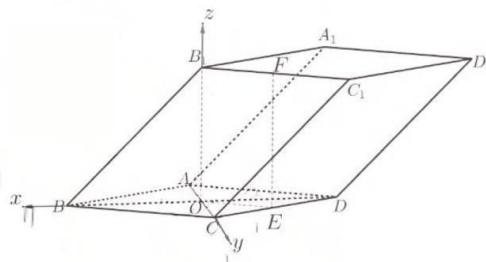
又因为 $FE\subset$ 平面 CFD , 所以平面 $CFD\perp$ 平面 $ABCD$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 得以 O 为原点建系如图: $A(0,-1,0)$, $B(\sqrt{3},0,0)$,

$C(0,1,0)$, $D(-\sqrt{3},0,0)$, $B_1(0,0,\sqrt{3})$, 设 $C_1(x,y,z)$, 因为 $B_1C_1=\overline{BC}$

所以 $(x,y,z-\sqrt{3})=(-\sqrt{3},1,0)$, 则 $C_1(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$, 所以

$$F(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}),$$



$$\text{则 } \overrightarrow{FD}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-\sqrt{3}), \overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BB_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}), \overrightarrow{AD}=(-\sqrt{3},1,0). \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

设面 FDD_1 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$, 面 ADD_1 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$, 所以 $\begin{cases} \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{FD}=0 \\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DD_1}=0 \end{cases}$,

$$\text{则 } \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1-\sqrt{3}z_1=0 \\ -\sqrt{3}x_1+\sqrt{3}z_1=0 \end{cases} \text{ 令 } x_1=1, \text{ 所以 } y_1=-3\sqrt{3}, z_1=1, \text{ 则 } \overrightarrow{n_1}=(1,-3\sqrt{3},1), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{同理 } \overrightarrow{n_2}=(1,\sqrt{3},1), \text{ 所以 } \cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\frac{1-9+1}{\sqrt{29}\sqrt{5}}=-\frac{7\sqrt{145}}{145}.$$

$$\text{所以平面 } FDD_1 \text{ 与平面 } ADD_1 \text{ 夹角的余弦值为 } \frac{7\sqrt{145}}{145}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(3) 方法一: 因为 $V_{ACDFB_1}=V_{B_1-ACD}+V_{B_1-FCD}$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$AB=AC=BC=AB_1=2, \text{ 所以 } AO=1, \text{ 则 } B_1O=\sqrt{3},$$

所以 $V_{B_1-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} BO = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 1$ 12 分

过 O 作 $OK \perp CD$ 于 K , 由 (1) 得平面 $CFD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 CFD 交平面 $ABCD$ 于 CD , 所以 $OK \perp$ 平面 CFD , 因为 $OK = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $V_{B_1-FCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle FCD} OK = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$, 14 分

所以 $V_{ACDFB_1} = V_{B_1-ACD} + V_{B_1-FCD} = \frac{3}{2}$ 15 分

方法二: 因为 $B_1F \parallel AD$, 所以 B_1, F, D, A 四点共面, 则多面体 $ACDFB_1$ 为四棱锥 $C-ADFB_1$, 11 分

因为 $\overrightarrow{AB_1} = (0, 1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$, 设面 $ADFB_1$ 的法向量为 $\vec{n}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, 所以 $\begin{cases} \vec{n}_3 \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \\ \vec{n}_3 \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases}$,

则 $\begin{cases} y_3 + \sqrt{3}z_3 = 0 \\ -\sqrt{3}x_3 + y_3 = 0 \end{cases}$, 令 $x_3 = 1$, 则 $y_3 = \sqrt{3}, z_3 = -1$, 所以 $\vec{n}_3 = (1, \sqrt{3}, 1)$, 12 分

因为 $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$, 所以点 C 到面 $ADFB_1$ 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_3|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$. 因为 $\cos \angle B_1AD = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{1}{4}$, 所

以 $\sin \angle B_1AD = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 则 $S_{\triangle DAB_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2}$,

所以平行四边形 ADC_1B_1 的面积为 $\sqrt{15}$, 所以四边形 $ADFB_1$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ 14 分

所以 $V_{ACDFB_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{3}{2}$ 15 分

18. 【解析】(1) 设曲线 E 上一点的坐标为 (x, y) , 则 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x-4|$, 2 分

平方后整理得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 故 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) (i) 设直线 n 的方程为 $x = my + 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$ 5 分

由韦达定理可知, $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}$, $y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}$ 6 分

则 $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = \frac{8}{3m^2 + 4}$, $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}$,

$|AB| = \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_2| = \frac{12(m^2 + 1)}{3m^2 + 4}$ 7 分

四边形 $ABDC$ 的周长为

$$|AB|+|AC|+|BD|+|CD|=\sqrt{1+m^2}|x_1-y_2|+4-x_1+4-x_2+|x_1-y_2|$$

$$=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|+8-(x_1+x_2)+|y_1-y_2|=\frac{36m^2+36+12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=12$$

解得 $m=0$, 则直线 n 的方程为 $x=1$. 9 分

(ii) 又 $C(4, y_1)$, $D(4, y_2)$, 直线 AD 的方程为 $y-y_2=\frac{y_2-y_1}{4-x_1}(x-4)$, 10 分

当 $x=\frac{5}{2}$ 时,

$$y=y_2+\frac{y_2-y_1}{4-x_1}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{2(4-x_1)\cdot y_2-3(y_2-y_1)}{2(4-x_1)}$$

$$=\frac{2(3-my_1)\cdot y_2-3(y_2-y_1)}{2(4-x_1)}=\frac{3(y_1+y_2)-2my_1y_2}{2(4-x_1)}=\frac{3(-\frac{6m}{3m^2+4})-2m(-\frac{9}{3m^2+4})}{2(4-x_1)}=0.$$

故点 $P(\frac{5}{2}, 0)$ 在直线 AD 上, 12 分

同理可证, 点 $P(\frac{5}{2}, 0)$ 也在直线 BC 上.

所以当直线 n 变化时, AD 与 BC 相交于定点 $P(\frac{5}{2}, 0)$. 13 分

$$\text{故 } S=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}(4-x_F)|x_1-y_2|=\frac{3}{2}|x_1-y_2|=\frac{18\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}. \quad 15 \text{ 分}$$

$$\text{令 } t=\sqrt{m^2+1}\geq 1, \text{ 则 } S=\frac{18t}{3t^2+1}=\frac{18}{3t+\frac{1}{t}}.$$

由函数 $y=3t+\frac{1}{t}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增可知 $0 < S \leq \frac{9}{2}$.

因此 S 的取值范围为 $\left(0, \frac{9}{2}\right]$. 17 分

19. 【解析】(1) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域分别为 $(-\infty, +\infty)$ 和 $(0, +\infty)$. 1 分

又 $f'(x)=(x+1)e^x$, $g'(x)=\ln x+1$. 2 分

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增;

$g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 单调递增. 3 分

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow +\infty$.

又 $f(-1)=g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$, 直线 $y=t$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有四个不同的交点,

则 t 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$. 4 分

(2) 函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线分别为 $y-x_1e^{x_1}=(x_1+1)e^{x_1}(x-x_1)$ 和

$y-x_2\ln x_2=(\ln x_2+1)(x-x_2)$, 即 $y=(x_1+1)e^{x_1}x-x_1^2e^{x_1}$ 和 $y=(\ln x_2+1)x-x_2$ 6 分

由题意可得 $(x_1+1)e^{x_1}=\ln x_2+1$, $x_1^2e^{x_1}=x_2$ 7 分

由于 $x_1 \neq 0$, 消去 x_2 可得 $x_1+1+2\ln|x_1|=(x_1+1)e^{x_1}$, 即 $(x_1+1)(e^{x_1}-1)-2\ln|x_1|=0$ 8 分

令 $h(x)=(x+1)(e^x-1)-2\ln|x|, x \neq 0$, 由 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 和 $(\ln(-x))'=\frac{1}{x}$ 可知 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$,

则 $h'(x)=\frac{x+2}{x}(xe^x-1)$.

当 $0 < x < 1$ 时, $e^x-1 > 0$, $\ln|x| < 0$, 则 $h(x)=(x+1)(e^x-1)-2\ln|x| > 0$;

当 $x \geq 1$ 时, $h'(x)=\frac{x+2}{x}(xe^x-1) > 0$, 则 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $h(x) \geq h(1)=2(e-1) > 0$.

当 $x < 0$ 时, $xe^x-1 < 0$, 当 $x < -2$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $-2 < x < 0$ 时, $h'(x) > 0$.

故 $h(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递增, 而 $h(-1)=0$, $h(-2) < h(-1)=0$,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$. 由零点存在定理, 存在 $x_0 \in (-\infty, -2)$, 使得 $h(x_0)=0$.

故 $h(x)$ 存在两个零点 x_0 和 -1 , 则与这两条曲线都相切的直线的条数为 2. 10 分

(3) 由 (1) 可知 $x_1e^{x_1}=x_2e^{x_2}=x_3\ln x_3=x_4\ln x_4=t$ 且 $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < \frac{1}{e} < x_4 < 1$.

再由 $x_1e^{x_1}=x_3\ln x_3=\ln x_3 \cdot e^{\ln x_3}$ 可知 $f(x_1)=f(\ln x_3)$, 而 $x_1, \ln x_3 < -1$,

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上递减, 因此 $x_1=\ln x_3$ 11 分

同理可得 $x_2=\ln x_4$.

又 $x_3\ln x_3=x_4\ln x_4$, 于是 $x_1x_3=x_2x_4$. 从而有 $\frac{x_2}{x_3}=\frac{x_1}{x_4}$ 12 分

要使 x_3, x_2, x_4, x_1 依次成等比数列, 只需保证 $\frac{x_2}{x_3}=\frac{x_4}{x_2}$, 即 $x_2^2=x_3x_4$ 13 分

利用 $x_1=\ln x_3, x_2=\ln x_4$ 可得 $x_3=e^{x_1}, x_4=e^{x_2}$, 则 $x_2^2=x_3x_4=e^{x_1+x_2}$, 故 $x_1=2\ln(-x_2)-x_2$.

于是 $x_2e^{x_2}=x_1e^{x_1}=(2\ln(-x_2)-x_2)e^{2\ln(-x_2)-x_2}=x_2^2\frac{2\ln(-x_2)-x_2}{e^{x_2}}$, 即 $\frac{e^{2x_2}}{x_2}+x_2-2\ln(-x_2)=0$.

令 $u=-x_2 \in (0, 1)$, 则 $u+2\ln u+\frac{1}{ue^{2u}}=0$ 14 分

令 $F(u)=u+2\ln u+\frac{1}{ue^{2u}}$, 则 $F'(u)=\frac{u^2+2u-e^{-2u}(2u+1)}{u^2}$.

令 $G(u)=u^2+2u-e^{-2u}(2u+1)$, 则 $G'(u)=4te^{-2u}+2u+2 > 0$. 则 $G(u)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增.

又 $G(0)=-1 < 0, G(1)=3-\frac{3}{e^2} > 0$, 故存在 $u_0 \in (0, 1)$ 使得 $G(u_0)=0$.

于是 $F(u)$ 在 $(0, u_0)$ 上单调递减, 在 $(u_0, 1)$ 上单调递增.

又 $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 2\ln 2 + \frac{2}{e} < 0.5 - 2 \times 0.69 + 2 \times 0.37 = -0.14 < 0$, 则 $F(u_0) < F(\frac{1}{2}) < 0$.

而 $F(1) = 1 + \frac{1}{e^2} > 0$, $F(\frac{1}{e^4}) = \frac{1}{e^4} - 8 + e^{4 - \frac{2}{e^4}} > -8 + e^3 > 0$,

故 $F(u)$ 在 $(0, 1)$ 上存在两个零点 u_1, u_2 且 $0 < u_1 < \frac{1}{2} < u_2 < 1$ 15 分

当 $x_2 = -u_2 \in (-1, -\frac{1}{2})$ 时, 由 $\frac{e^{2x_2}}{x_2} + x_2 - 2\ln(-x_2) = 0$ 可知 $x_2 - 2\ln(-x_2) = \frac{e^{2x_2}}{-x_2} = e^{2x_2 - \ln(-x_2)}$.

两边同时减去 $2x_2 - \ln(-x_2)$ 整理得 $e^{\ln(-x_2)} - \ln(-x_2) = e^{2x_2 - \ln(-x_2)} - [2x_2 - \ln(-x_2)]$.

令 $H(x) = e^x - x$, 则 $H'(x) = e^x - 1$, 故 $H(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减.

因为 $H(\ln(-x_2)) = H(2x_2 - \ln(-x_2))$,

而 $\ln(-x_2) < 0$, 由 $y = 2x - \ln(-x)$ 在 $(-1, -\frac{1}{2})$ 单调递增可知 $y(x_2) < y(-\frac{1}{2}) = -1 + \ln 2 < 0$,

即 $2x_2 - \ln(-x_2) < 0$, 故 $\ln(-x_2) = 2x_2 - \ln(-x_2)$, 则 $\ln(-x_2) = x_2$.

再由 $x_1 = 2\ln(-x_2) - x_2$ 可知 $x_1 = x_2$, 与 $x_1 \neq x_2$ 矛盾. 16 分

所以区间 $(-1, 0)$ 上满足题意的 x_2 是唯一的, 即 $x_2 = -u_1$, 此时 $t = x_2 e^{x_2}$ 的值也是唯一的.

故存在唯一的 t , 使得 x_3, x_2, x_4, x_1 依次成等比数列. 17 分

注: 未证明 t 的唯一性扣 1 分.