

2026 年 5 月“山海杯”线上测试

数 学

本试卷共 4 页，19 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

- 注意事项：**1. 答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | 3 > |1 - 2x|\}$ ，则 $A \cap \mathbf{N} =$
- A. $\{-1, 0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1\}$
2. 已知不共线的向量 $\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{b}|$ ，若 $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $\lambda =$
- A. -1 B. -2 C. -3 D. -4
3. 已知 $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{2}$ ，则 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} =$
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. 已知一棱台的上底面是边长为 1 的正三角形，下底面面积为 $\sqrt{3}$ ，高为 2，则其体积为
- A. $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$
5. 若复平面内 z ， $z + 1 + 2i$ ， $z - 2 + i$ ， w 对应的四点恰为正方形的四个顶点，则 $w - z =$
- A. $-1 + 3i$ B. $1 + 3i$ C. $3 - i$ D. $3 + i$
6. 设函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $g(x) = 2f(x - 1) + 3$ 的最大值为 6，曲线 $y = f(x + 1)$ 的图像关于点 $(1, 1)$ 中心对称，则 $g(x)$ 的最小值为
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

7. 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $A(x_0, y_0)$ 作两条直线 l_1, l_2 , 且 l_1, l_2 与 C 均仅有唯一公共点 A . 若 l_1, l_2 分别与 y 轴交于点 P, Q , 且 $|PQ| \neq 0$, 则 $|y_0|$ 与 $|PQ|$ 之比为
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
8. 甲、乙二人进行多轮速记比赛, 每轮比赛甲获胜的概率为 $p (0 < p < 1)$, 乙获胜的概率为 $q = 1 - p$, 每轮比赛的结果相互独立. 若有人连续两轮获胜或比赛的轮数达到 1025 次, 比赛结束. 记比赛结束时的轮数为 X , 则 X 的数学期望最接近于
- A. $\frac{1+2pq}{1-pq}$ B. $\frac{2+pq}{1-pq}$ C. $\frac{1+pq}{1-pq}$ D. $\frac{3-pq}{1-pq}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设函数 $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2}$, 则
- A. $f(x)$ 为奇函数
- B. $(0, \pi)$ 是 $f(x)$ 的一个单调区间
- C. $f(x)$ 有且仅有两个极值点
- D. $-\frac{1}{\pi} \leq f(x) \leq \frac{1}{\pi}$
10. 记 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 已知 $AC = 2$, $AB = m$, 则
- A. 若 $m = 1$, 则 $BC^2 = 5 - 4\cos A$
- B. 若 $m = 1$, 则 $R \geq 1$
- C. 若对任意 A , 均有 $R > 1$, 则 $m > 2$
- D. 若存在 A , 使得 $R = 1$, 则 $m < 2$
11. 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 平面 $AB_1C_1 \perp$ 平面 A_1BC , $AB \perp AC$, $AB = AC = 2$, 棱 AA_1 与底面 ABC 所成角为 60° , 记点 A_1 在底面 ABC 的投影为点 O , 则
- A. 棱 AA_1 的最大值为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
- B. 点 O 的轨迹是完整的椭圆
- C. 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积大于 $\sqrt{6}$
- D. 点 A_1, A, B, C 所在球面的半径不超过 $\frac{\sqrt{42}}{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x^2) = \cos x$ ，记 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 导数，则 $f'(1) =$ _____.

13. 若 $(x - \frac{a}{x})^{2026}$ 展开式的系数和等于 $(x + a)^2$ 展开式的二项式系数和，则 $a =$ _____.

14. 记双曲线 $E: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线 l 交 E 的右支于点 P ，交左支于点 Q ， $|PQ| = |PF_2|$ ，则 $|PF_2|^2 + |F_1F_2|^2$ 取最小值时， $b^2 =$ _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

某商队运送一批货物的过程中，“一路顺风”的概率为 $\frac{1}{2}$ ，“有惊无险”的概率为 $\frac{1}{3}$ ，“一波三折”的概率为 $\frac{1}{6}$. 若“一路顺风”则所有的货物均完好，若“有惊无险”则有 10% 的货物损坏，若“一波三折”则有 20% 的货物损坏. 在某次商队运送完毕后进行抽样检测.

(1) 从货物中随机抽取一件，求该货物为损坏货物的概率；

(2) 从货物中有放回地抽取三件，求三次抽取的货物均完好的概率；

(3) 从货物中有放回地抽取三件，在三次抽取的货物均完好的条件下，求商队“一路顺风”的概率.

16. (15 分)

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $S_{n+1} = 4a_n + 2$ ， $a_1 = 2$.

(1) 证明：数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 为等差数列；

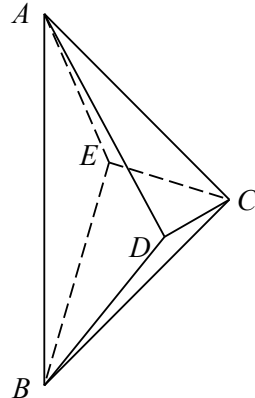
(2) 对于任意的正整数 i ，在 a_i 与 a_{i+1} 之间插入 i 个 1，所得的新数列为 $\{b_n\}$ ，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_{2n^2+3n} .

17. (15 分)

如图, 三棱锥 $D-ABC$, $E-ABC$ 的体积相等, $CD \parallel$ 平面 ABE .

(1) 证明: $CE \parallel$ 平面 ABD ;

(2) 若 $AB \perp CD$, $AB \perp CE$, $AB = \sqrt{2}AC = \sqrt{2}BC = 4$, 六面体 $ABDCE$ 的体积为 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$, 二面角 $A-CD-E$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求 CD .



18. (17 分)

设正三角形 ABC 的三个顶点均在椭圆 $E: x^2 + \frac{y^2}{\lambda} = 1 (0 < \lambda < 1)$ 上, 且 BC 的斜率为 -1 .

(1) 求 AB 的斜率与 AC 的斜率之积;

(2) 若 A 为 E 的上顶点, 求 $|AB|$;

(3) 记 O 为坐标原点, 若 $OA \parallel BC$, 求 λ .

19. (17 分)

设函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{3-x} + m \sin \pi x$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2}, \ln \frac{3}{5} + m)$ 处的切线经过点 $(2, \ln 3)$.

(1) 求 m ;

(2) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形;

(3) 记函数 $g(x) = f(x) - ax - b$, 若存在 a, b , 对于任意 $0 \leq x \leq 2$, 均有 $|g(x)| \leq t$, 求 t 的最小值.