

2026 年全国中学生数学奥林匹克竞赛(预赛)

暨 2026 年全国高中 数学联合竞赛 模拟试题 (A 卷)

命题人: 刘蒋巍(《竞赛数学全栈元智能体》《竞赛数学命题与解题全栈智能体》开发者, 发表中考数学压轴题研究、高中数学联赛、大学生数学竞赛、考研数学命题研究文章数十篇, 出版《中高考数学命题技术研究》《中考数学解题策略》《学会编题》等书籍 20 余本)

说明: 本试卷共 11 题, 满分 120 分。填空题每小题 8 分, 共 64 分; 解答题第 9 题 16 分, 第 10、11 题各 20 分。

一、填空题(本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3=9, S_6=36$, 则 $a_7+a_8+a_9=$ _____。
2. 设集合 $A=\{1,2,3,\dots,120\}$, $B=\{a^3+3^a \mid a \in A\}$, 则 $A \cup B$ 的元素个数为_____。
3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点与抛物线 $y^2=12x$ 的焦点重合, 则实数 $m=$ _____。
4. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $g(x)=(x-2)f(x)$, $h(x)=f(x)+2x$ 。若 $g(x)$ 为奇函数, $h(x)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 的最大值为_____。
5. 已知复数 z 满足 $|z|=1$, 且 $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|=\sqrt{3}$, 则 z^{2026} 的实部为_____。
6. 设 Γ 为任意六棱柱 (底面为六边形, 侧棱平行且相等)。在 Γ 的 18 条棱中随机选取两条不同的棱 l_1, l_2 , 将事件“ l_1 所在直线与 l_2 所在直线平行”发生的概率记为 $P(\Gamma)$, 则 $P(\Gamma)$ 的所有可能值为_____。
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, AC=3, \angle BAC=120^\circ$, 点 D 在边 BC 上, 且 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为_____。
8. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n} (n \geq 1)$, 则 $[a_{2026}]=([x]$ 表示不超过 x 的最大整数)_____。

二、解答题(本大题共 3 小题, 共 56 分)

9.(16 分)在平面直角坐标系 xOy 中, 点集

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y^2 = 4x + 4|x|\}.$$

若 Γ 中的 3 个不同的点 M, P, Q 满足: M 为 PQ 的中点, 且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -4$, 求点 M 的坐标。

10. (20 分)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+n$ ($n \geq 1$)。(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;(2)设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。11. (20 分) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 满足对任意实数 x, y , 都有

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

(1)求 $f(0)$ 的值;(2)证明:存在常数 a 使得

$$f(x) = \cos(ax) \text{ 或 } f(x) = \cosh(ax);$$

(3)若 $f(1)=2$, 求 $f(2026)$ 的值(用指数形式表示)。

参考解答与评分标准

一、填空题(每题 8 分, 只设 8 分和 0 分)

1. 答案: 45

解: 等差数列中,

$$S_3=3a_1+3d=9 \Rightarrow a_1+d=3。$$

$$S_6=6a_1+15d=36 \Rightarrow 2a_1+5d=12。$$

解方程组得 $a_1=1, d=2$ 。

$$\text{则 } a_7+a_8+a_9=3a_8=3(a_1+7d)=3(1+14)=45。$$

2. 答案: 237

解: 函数 $h(a)=a^3+3^a$ 在 $a \geq 1$ 时严格递增,

故 B 中元素互不相同, $|B|=120$ 。

解不等式 $a^3+3^a \leq 120$:

$$a=1: 1+3=4; a=2: 8+9=17;$$

$$a=3: 27+27=54; a=4: 64+81=145 > 120。$$

所以 $A \cap B = \{4, 17, 54\}$, 共 3 个元素。

$$\text{因此 } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 120 + 120 - 3 = 237。$$

3. 答案: 4

解: 抛物线 $y^2=12x$ 的焦点为 $(3,0)$ 。双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点为 $(\sqrt{m+5}, 0)$ 。

$$\text{由条件得 } \sqrt{m+5}=3 \Rightarrow m+5=9 \Rightarrow m=4。$$

4. 答案: 1

解: 由奇偶性: $g(-x)=-g(x) \Rightarrow (-x-2)f(-x)=-(x-2)f(x),$

$$h(-x)=h(x) \Rightarrow f(-x)+2(-x)=f(x)+2x \Rightarrow f(-x)=f(x)+4x。$$

代入第一式:

$$(-x-2)[f(x)+4x]=-(x-2)f(x)。$$

$$\text{左边} = -(x+2)f(x)-4x(x+2),$$

$$\text{右边} = -(x-2)f(x)。$$

移项: $-(x+2)f(x)+(x-2)f(x)=4x(x+2)\Rightarrow -4f(x)=4x(x+2)\Rightarrow f(x)=-x(x+2) = -(x+1)^2+1$ 。

最大值 1 (当 $x=-1$ 时取得)。

5. 答案: $\frac{1}{2}$

解: 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, 则

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = \sqrt{\frac{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta}{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{2+2\cos\theta}{2-2\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{3}$$

所以 $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=3\Rightarrow 1+\cos\theta=3-3\cos\theta\Rightarrow 4\cos\theta=2\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}$ 。

故 $z^{2026}=\cos(2026\theta)+i\sin(2026\theta)$, 实部为 $\cos(2026\theta)$ 。

由 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 得 $\theta=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$,

所以 $2026\theta\equiv 2026\cdot\frac{\pi}{3}\pmod{2\pi}$ 。

$2026\equiv 1\pmod{3}$,

故 $2026\theta\equiv \frac{\pi}{3}\pmod{2\pi}$ 或 $-\frac{\pi}{3}$,

余弦值均为 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 。因此实部为 $\frac{1}{2}$ 。

6. 答案: $\frac{7}{51}, \frac{25}{153}, \frac{29}{153}, \frac{11}{51}$

解: 六棱柱有 18 条棱: 底面 6 条, 顶面 6 条, 侧棱 6 条。

侧棱之间互相平行: $\binom{6}{2}=15$ 对。

底面与顶面平行且对应的棱: 6 对。

设底面多边形中, 平行边组数为 $m(m=0,1,2,3)$ 。

每增加一组对边平行, 则:

底面内部增加 1 对平行棱;

顶面内部增加 1 对平行棱;

底面该组对边分别与顶面另一组对边产生 2 对交叉平行(如 $AB\parallel C'D'$ 和 $A'B'\parallel CD$)。故共增加 $4m$ 对。

总平行对数 $N=15+6+4m=21+4m$ 。

总棱对数 $\binom{18}{2}=153$, 所以概率 $P(\Gamma)=\frac{21+4m}{153}$ 。

分别取 $m=0,1,2,3$ 得:

$$m=0 \text{ 时: } \frac{21}{153} = \frac{7}{51}$$

$$m=1 \text{ 时: } \frac{25}{153}$$

$$m=2 \text{ 时: } \frac{29}{153}$$

$$m=3 \text{ 时: } \frac{33}{153} = \frac{11}{51}。$$

7. 答案: $\frac{17}{3}$

解: 由 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$ 得 D 分 BC 为 $2:1$, 故 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ 。

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}。$$

则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \right) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{2}{3}|\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{2}{3}|\overrightarrow{AC}|^2.\end{aligned}$$

$$\text{代入 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -3, |\overrightarrow{AB}|^2 = 4, |\overrightarrow{AC}|^2 = 9$$

$$-\frac{1}{3}(-3) - \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 9 = 1 - \frac{4}{3} + 6 = 7 - \frac{4}{3} = \frac{17}{3}$$

8. 答案: 63

解: 由 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ 两边平方得

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}.$$

因为 $1/a_n^2 > 0$, 所以 $a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2$, 累加得

$$a_n^2 > a_1^2 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1.$$

$$\text{又由 } a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} < a_n^2 + 2 + \frac{1}{2n-1}$$

(因为 $a_n^2 > 2n-1$), 累加得

$$a_n^2 < 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{2k-1} \right) = 2n-1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k-1}$$

当 $n=2026$ 时,

$$\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4049}.$$

利用积分放缩:

$$\sum_{k=2}^{2025} \frac{1}{2k-1} < \int_1^{2025} \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln(4049) \approx \frac{1}{2} \times 8.307 = 4.1535.$$

加上第一项 1 得总和 < 5.1535 。

故 $a_{2026}^2 < 2 \cdot 2026 - 1 + 5.1535 = 4051 + 5.1535 = 4056.1535$,

所以 $a_{2026} < \sqrt{4056.1535} \approx 63.69$ 。

又 $a_{2026}^2 > 4051$, 所以 $a_{2026} > \sqrt{4051} \approx 63.65$ 。

因此 $63.65 < a_{2026} < 63.69$,

故 $[a_{2026}] = 63$ 。

二、解答题(分步给分)

9. (16 分)

解:

当 $x \geq 0$ 时, $\Gamma: y^2 = 8x$ (抛物线);

当 $x < 0$ 时, $\Gamma: y = 0$ (x 轴负半轴)。

因 M 为 PQ 中点且 $M \in \Gamma$, 三点不同,

可分析得 P 在 x 轴负半轴, Q 在上, M 在上。

设 $P(a, 0), a < 0, Q(2t^2, 4t)$ (由 $y^2 = 8x$ 可设 $x = 2t^2, y = 4t$), 则 $M\left(\frac{a+2t^2}{2}, 2t\right)$ 。

由题意得 $(2t)^2 = 8 \cdot \frac{a+2t^2}{2} \Rightarrow 4t^2 = 4a + 8t^2 \Rightarrow a = -t^2$ 。

于是 $P(-t^2, 0), Q(2t^2, 4t)$ 。

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (-t^2)(2t^2) + 0 = -2t^4$ 。

$$\text{令 } -2t^4 = -4 \Rightarrow t^4 = 2 \Rightarrow t^2 = \sqrt{2}, t = \pm \sqrt[4]{2}.$$

$$\text{中点 } M\left(\frac{-t^2+2t^2}{2}, 2t\right) = \left(\frac{t^2}{2}, 2t\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 2\sqrt[4]{2}\right).$$

$$\text{故 } M \text{ 坐标为 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt[4]{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt[4]{2}\right).$$

评分标准:

正确写出 Γ 的分段表达式: 4 分

合理设参数并得到 $a = -t^2$ 关系: 6 分

计算数量积得 $t^4 = 2$: 4 分

求出 M 坐标: 2 分

10. (20 分)

解:

(1) 由 $a_{n+1} = 2a_n + n$, 两边除以 2^{n+1} :

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}.$$

$$\text{令 } b_n = \frac{a_n}{2^n}, \text{ 则 } b_{n+1} = b_n + \frac{n}{2^{n+1}},$$

$$\text{且 } b_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}.$$

累加得

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k}.$$

已知 $\sum_{k=1}^m \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{m+2}{2^m}$ (可证)。

取 $m = n-1$: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$ 。

于是

$$b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \right) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{n+1}{2^n} = \frac{3}{2} - \frac{n+1}{2^n}$$

$$\text{故 } a_n = 2^n b_n = \frac{3}{2} \cdot 2^n - (n+1) = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1.$$

(2) $b_n = \frac{3}{2} - \frac{n+1}{2^n}$, 则

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k = \frac{3}{2}n - \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^k}.$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^k} = \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{n+3}{2^n}$$

因此

$$S_n = \frac{3}{2}n - 3 + \frac{n+3}{2^n}.$$

评分标准:

正确构造 b_n 并写出递推: 4 分

正确求和得到 b_n 表达式: 6 分

得到 a_n 通项: 2 分

正确计算 S_n : 8 分 (其中拆项 2 分, 公式应用 4 分, 最终表达式 2 分)

11. (20 分)

解:

(1) 令 $x=y=0$, 得

$$f(0)+f(0)=2f(0)^2 \Rightarrow 2f(0)=2f(0)^2$$

$$\Rightarrow f(0)=0 \text{ 或 } 1.$$

若 $f(0)=0$, 令 $y=0$ 得

$$f(x)+f(x)=2f(x)f(0)=0 \Rightarrow f(x)=0,$$

为平凡解。通常考虑非平凡, 故取 $f(0)=1$ 。

(2) 证明:

由 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 且 f 连续。

令 $x=0$ 得 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)=2f(y)$

$\Rightarrow f(-y)=f(y)$, 即 f 为偶函数。

令 $y=x$ 得 $f(2x)+1=2f(x)^2$

$\Rightarrow f(2x)=2f(x)^2-1$ 。

令 $y=2x$ 得

$$f(3x)+f(-x)=2f(x)f(2x)\Rightarrow f(3x)+f(x)=2f(x)(2f(x)^2-1)\Rightarrow f(3x)=4f(x)^3-3f(x)。$$

类似可证 $f(nx)$ 可用 $f(x)$ 的切比雪夫多项式表示。

定义 $g(x)=\arccos f(x)$ (若 $|f(x)|\leq 1$) 或 $g(x)=\operatorname{arccosh} f(x)$ (若 $f(x)\geq 1$),

可证 g 满足柯西方程 $g(x+y)=g(x)+g(y)$, 从而 $g(x)=ax$,

故 $f(x)=\cos(ax)$ 或 $f(x)=\cosh(ax)$ 。

(详细证明利用函数方程与连续性, 此处略)

(4) 由 $f(1)=2>1$ 得 $f(x)=\cosh(ax)$,

(5) 且 $\cosh a=2$ 。

$$\text{解 } \frac{e^a+e^{-a}}{2}=2 \Rightarrow e^{2a}-4e^a+1=0 \Rightarrow e^a=2+\sqrt{3} \text{ (负根舍去)}。$$

所以 $a=\ln(2+\sqrt{3})$,

$$f(x)=\cosh(ax)=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}=\frac{(2+\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^{-x}}{2}$$

因此

$$f(2026)=\frac{(2+\sqrt{3})^{2026}+(2+\sqrt{3})^{-2026}}{2}。$$

评分标准:

- (1) 正确得出 $f(0)=1$ (并说明平凡解可排除):4 分
- (2) 证明思路清晰, 利用偶性及递推, 引用达朗贝尔方程结论:8 分
- (3) 正确解出 $e^a=2+\sqrt{3}$ 并写出最终表达式:8 分 总分: 120 分

说明:

填空题每空 8 分, 与标准答案完全一致得满分, 否则 0 分。

解答题按步骤给分, 不要求与参考答案完全一致, 合理即可。