

数学试卷

考生须知：

1. 本试卷分试题卷和答题卷两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 请用黑色字迹的钢笔或签字笔在答题卡指定的区域（黑色边框）内作答，超出答题区域的作答无效！
3. 考试结束，只需上交答题卡。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 数据 2, 3, 3, 5, 6, 7, 8, 10 的第 70 百分位数为 ()
A. 3 B. 5 C. 6 D. 7
2. 若 $z = \frac{2+i}{1-i}$ (i 为虚数单位)，则 $|z| =$ ()
A. $\frac{5}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$
3. 设 $f(x) = (a+b)\cos^2 x + (a-b)\sin^2 x$ ，若 $\{f(x) | x \in \mathbf{R}\} = \{2\}$ ，则 ()
A. $a=1$ 且 $b=1$ B. $a=2$ 且 $b=0$
C. $a=0$ 且 $b=2$ D. $a=1$ 且 $b=-1$
4. 我国国旗的标准尺寸有五种通用规格（用“长×宽”表示），其中长与宽之比均为 3:2.

规格	一号	二号	三号	四号	五号
尺寸（单位：cm）	288×192	240×160	192×128	144×96	96×64

根据上表，可以判断五种规格国旗的 ()

- A. 周长构成等差数列 B. 周长构成等比数列
C. 面积构成等差数列 D. 面积构成等比数列
5. 设直线 $y = kx - k + 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 交于 M, N 两点，则当 $|MN|$ 取最小值时， $k =$ ()
A. 1 B. 2 C. -1 D. -2
6. 设函数 $y = \sqrt{3}\sin(4x + \varphi) + \cos(4x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称，则 $\varphi =$ ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

7. 已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}|=2|\mathbf{b}|=2$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$, 设 $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, 且 $2x + y = 1$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. 1 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

8. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 点 $A(2, 0)$ 和 $B(0, 1)$ 均为椭圆 C 的顶点, 点 M, N

在椭圆 C 上. 若 $MN \parallel AB$, 则四边形 $ABMN$ 面积的最大值为 ()

- A. $4\sqrt{2}$ B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. 2

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=5$, $BC=4$, $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, 则 ()

- A. $\sin \angle BAC = \frac{3}{4}$ B. $\triangle ABC$ 的面积为 6

- C. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = 3$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 16$

10. 已知函数 $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + ax$, 则 ()

- A. $\exists a \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 是增函数

- B. $\forall a \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 是奇函数

- C. 若 $f(x)$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 = -3$

- D. 过点 $(0, m)$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线恰有 3 条, 则 $-2 < m < 0$

11. 选取正方体表面上两个不同的点 P, Q , 定义第 k 次操作 $\Gamma_k(\theta)$ 为“将正方体绕直线 PQ 旋转 θ 角”. 则经过下列操作, 正方体可能与自身重合的有 ()

- A. $\Gamma_1(90^\circ), \Gamma_2(180^\circ)$ B. $\Gamma_1(40^\circ), \Gamma_2(40^\circ), \Gamma_3(40^\circ)$

- C. $\Gamma_1(90^\circ), \Gamma_2(60^\circ)$ D. $\Gamma_1(75^\circ), \Gamma_2(15^\circ), \Gamma_3(60^\circ)$

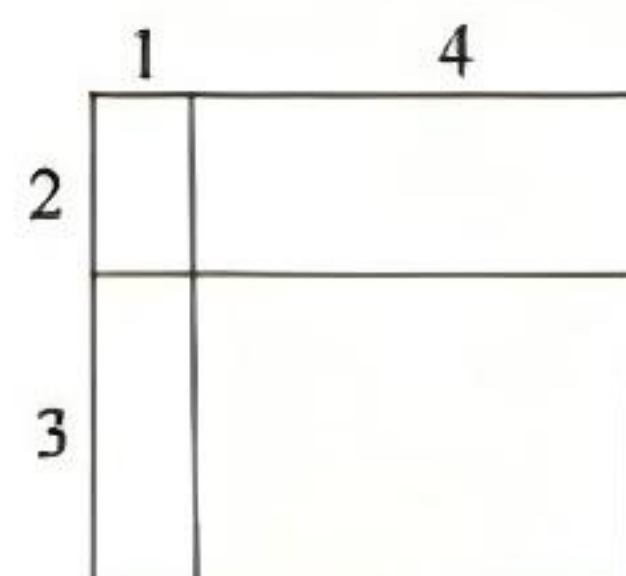
三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 10^{-x}, & x < 1, \\ \lg x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-2)) =$ _____.

13. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 F , 过原点 O 的直线交 E 于 P, Q

两点, 且 $PF \perp QF$. 若直线 PQ 的斜率为 $\sqrt{3}$, 则双曲线 E 的离心率为_____.

14. 一个边长为 5 的正方形被分割成四个不同的小矩形 (如图), 现用红蓝两种颜色对小矩形的边进行染色. 若要使每个小矩形均有 2 条红色边和 2 条蓝色边, 则不同染色的方法数为_____.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. (13 分)

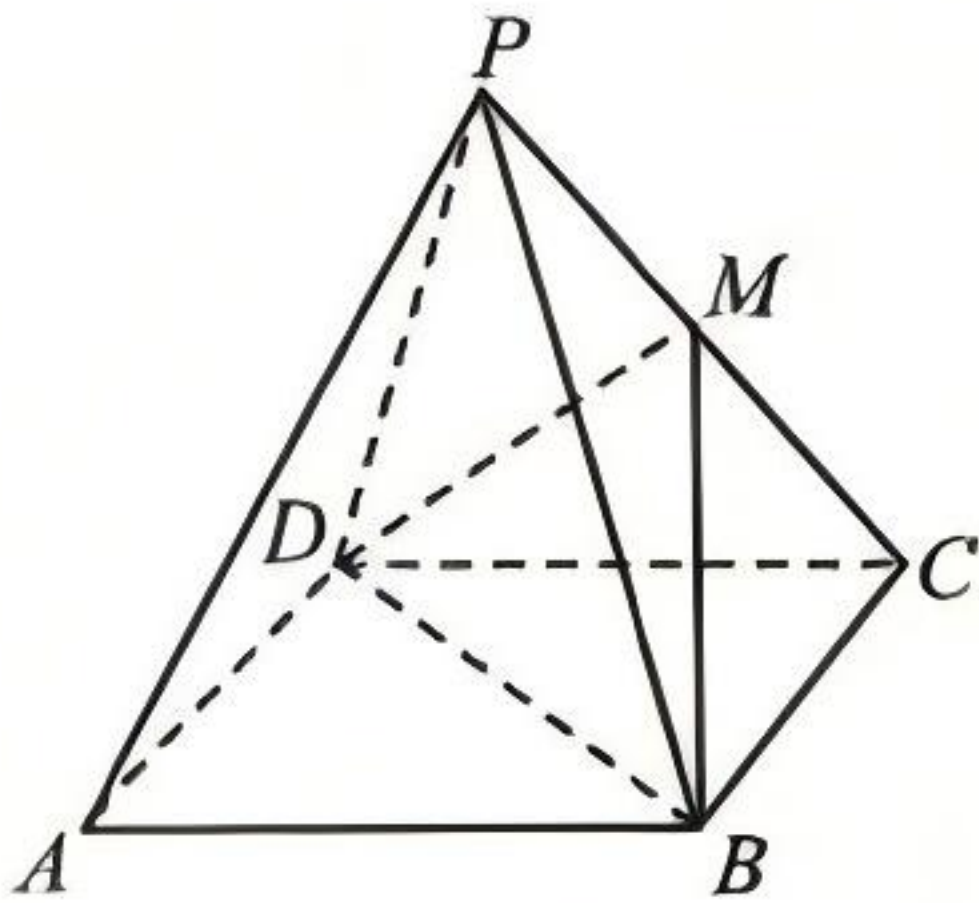
设公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = a_{n+1} - 2$.

- (1) 求 q 和 a_1 ;
- (2) 求 S_n .

16. (15 分)

如图，正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长均为 2，点 M 是棱 PC 的中点.

- (1) 证明： $PC \perp$ 平面 BDM ;
- (2) 设点 Q 在棱 AB 上，求平面 PDQ 与平面 BDM 所成角的余弦值的最大值.



(第 16 题)

17. (15 分)

某公交车每 10 分钟发一班车，但由于交通状况，实际到达某一固定站点的时间间隔不稳定．为了研究乘客的等待时间，随机记录了 50 名乘客的等待时间，数据整理如下表（单位：分钟）：

等待时间	$[0, 5)$	$[5, 10)$	$[10, 15)$	$[15, 20)$
频数	20	14	10	6

- (1) 估计这 50 名乘客的平均等待时间（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）;
- (2) 记乘客等待时间为 X ，随机变量 X 服从指数分布，且 X 取值不超过 x 的概率为 $P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{10}}$ ($x \geq 0$)，其中 e 是自然对数的底数.
 - (i) 证明：对于任意的 $s, t > 0$ ，有 $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$;
 - (ii) 如果小明已经等公交车等了 5 分钟，记他还需要等待的时间为 Y (单位：分钟). 他利用人工智能辅助决定：若 $0 \leq Y \leq 10$ ，则坐公交车（费用 2 元）；若 $Y > 10$ ，则打车（费用 20 元）. 求小明的交通费用的均值.

18. (17 分)

已知抛物线 $\Gamma: y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点为 F , 顶点为 O , 点 $A(4, 4)$ 在 Γ 上.

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 已知点 $M(t^2, 2t)$ ($t>0$) 在 Γ 上, 过 M 且斜率为2的直线交 OA 于点 Q , 令 $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{QP}$.

(i) 求点 P 的坐标 (用 t 表示);

(ii) 设直线 OP 与 Γ 的另一个交点为 N , 焦点 F 到直线 MN 的距离是否存在最大值?

若存在求其最大值. 若不存在, 请说明理由.

19. (17 分)

(1) 已知 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 证明: $\sin x < x < \tan x$;

(2) 设 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 若 $\tan x - x > \lambda(x - \sin x)$ 恒成立, 求正整数 λ 的最大值;

(3) 求证: $\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{\tan \frac{\pi}{4^k}} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{4^k}} \right) > 2\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$

数学试卷参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	B	A	C	B	D	B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分.

9. BC 10. ACD 11. ABD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 2 13. $\sqrt{3} + 1$ 14. 82

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (1) 当 $n \geq 2$ 时, $\begin{cases} S_n = a_{n+1} - 2, \\ S_{n-1} = a_n - 2, \end{cases}$ 两式相减得 $a_{n+1} = 2a_n$,

所以公比 $q = 2$5 分

由于 $\{a_n\}$ 为等比数列, 所以 $a_2 = 2a_1$, 又 $S_1 = a_1 = a_2 - 2$,

所以 $a_1 = 2$9 分

(2) 由 (1) 知, $a_n = 2^n$.

所以 $S_n = a_{n+1} - 2 = 2^{n+1} - 2$13 分

16. (1) 因为 $P-ABCD$ 的所有棱长相等, 点 M 是棱 PC 的中点,

所以 $PC \perp DM$, $PC \perp BM$,

又因为 $DM \cap BM = M$, $DM, BM \subset$ 平面 BDM ,

所以 $PC \perp$ 平面 BDM5 分

(2) 建系如图, 则 $D(0, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $P(1, 1, \sqrt{2})$, 设 $Q(2, t, 0)$ ($0 \leq t \leq 2$),

由 (1) 知 $PC \perp$ 平面 BDM ,

则 $\overrightarrow{CP} = (1, -1, \sqrt{2})$ 为平面 BDM 的法向量.

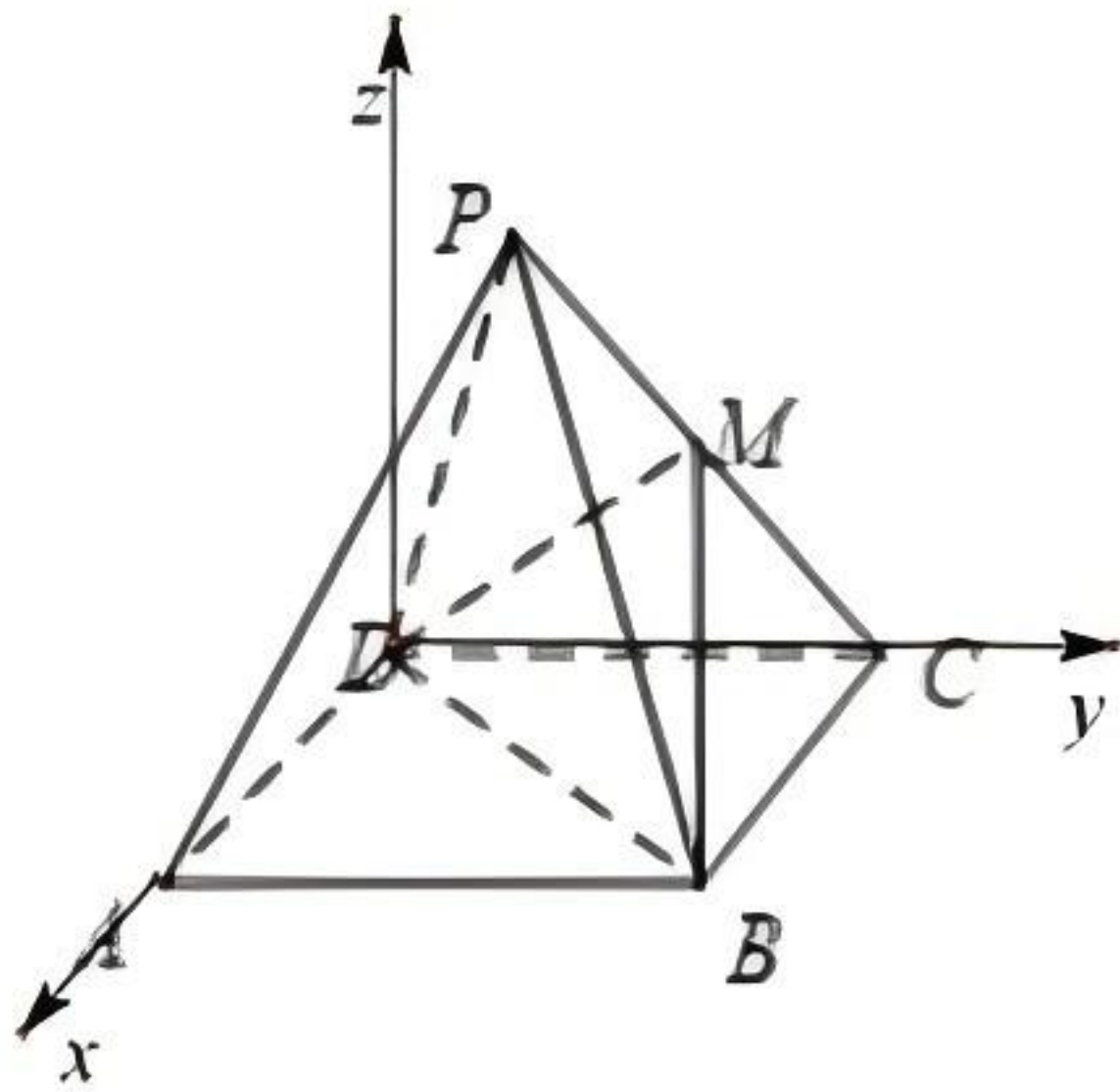
则 $\overrightarrow{DQ} = (2, t, 0)$, $\overrightarrow{DP} = (1, 1, \sqrt{2})$,

设平面 PDQ 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{DQ} \cdot \boldsymbol{n} = 2x + ty = 0, \\ \overrightarrow{DP} \cdot \boldsymbol{n} = x + y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}, \text{ 可取 } \boldsymbol{n} = (t, -2, \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t),$$

记平面 PDQ 与平面 BDM 所成角为 θ , 则, $\cos \theta = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CP}|}{|\boldsymbol{n}| |\overrightarrow{CP}|} = \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}t^2 - 2t + 6}}.$

当 $t = \frac{2}{3}$ 时, $\cos \theta$ 取到最大值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$15 分



17. (1) 平均时间

$$\bar{X} = \frac{1}{50}(2.5 \times 20 + 7.5 \times 14 + 12.5 \times 10 + 17.5 \times 6) = 7.7; \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) (i) 证明: 由题意知, $P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = e^{-\frac{t}{10}}$,

分别记已经等待 s 分钟和已经等待 $s + t$ 分钟为事件 A 和事件 B ,

$$\begin{aligned} \text{则 } P(X > s + t | X > s) &= P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(X > s+t \text{ 且 } X > s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\frac{s+t}{10}}}{e^{-\frac{s}{10}}} = e^{-\frac{t}{10}} = P(X > t). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

(ii) 由 (i) 知,

$$P(Y > 10) = P(X > 5 + 10 | X > 5) = P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = e^{-1},$$

$$P(0 \leq Y \leq 10) = 1 - P(Y > 10) = 1 - e^{-1},$$

$$\text{所以费用的期望是 } 2 \times (1 - e^{-1}) + 20 \times e^{-1} = 2 + \frac{18}{e} \text{ (元)}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

18. (1) 将点 A 代入 $y^2 = 2px$ 得 $p = 2$, 即 $\Gamma: y^2 = 4x$. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}

(2) (i) 过 M 点斜率为 2 的直线 $y - 2t = 2(x - t^2)$,

L_{OA} 直线方程 $y = x$,

可得 $Q(2t^2 - 2t, 2t^2 - 2t)$,

由 $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QP}$ 得 $P(3t^2 - 4t, 4t^2 - 6t)$. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}

(ii) 所以直线 OP 方程为 $y = \frac{4t-6}{3t-4}x$,

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = \frac{4t-6}{3t-4}x \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 得 } N\left(\frac{(3t-4)^2}{(2t-3)^2}, \frac{2(3t-4)}{2t-3}\right), \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } MN: y - 2t = \frac{2t-3}{t^2-2}(x - t^2),$$

$$\text{整理得 } t^2(y - 3) + 2t(2 - x) + (3x - 2y) = 0,$$

因此直线 MN 过定点 $E(2, 3)$. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}

所以点 F 到直线 MN 的最大距离为 $\sqrt{10}$. \dots\dots\dots 17 \text{ 分}

19. (1) 一方面, 记 $f(x) = x - \sin x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

则 $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, 故 $f(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 即 $f(x) > f(0) = 0$.

另一方面, 记 $g(x) = \tan x - x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$, 故 $g(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 即 $g(x) > g(0) = 0$.

综上, $\sin x < x < \tan x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 成立. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}

(2) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 由 (1) 知 $x > \sin x$, 故 $\lambda < \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ 恒成立.

一方面，取 $x=\frac{\pi}{4}$ ，， 则 $\lambda < \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}} \approx 2.7$ ；

另一方面，当 $\lambda=2$ 时， 记 $h(x)=\tan x+2\sin x-3x$ ， 则 $h'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos x-3$.

由 $\cos x>0$ 知 $1+\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos x \geq \frac{2}{\cos x}+2\cos x \geq 4$ ，

所以 $h'(x) \geq 0$ ， 故 $h(x)$ 单调递增. 进而 $h(x) > h(0)=0$.

综上， 正整数 λ 的最大值为 2.10 分

(3) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时， 由 (2) $\tan x-x > 2(x-\sin x) > x-\sin x$ ，

即 $\tan x+\sin x > 2x$.

$$\text{则 } (\sqrt{\tan x}+\sqrt{\sin x})^2 = \tan x+\sin x+2\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x}} > 2x+2\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}, \quad \textcircled{1}$$

$$\text{下证 } \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x}} > x,$$

$$f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos x}-x^2=\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}-x^2=\frac{1}{\cos x}-\cos x-x^2,$$

$$\text{则 } f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\sin x-2x \geq 2\sqrt{\frac{\sin x}{\cos^2 x}\sin x}-2x=2\tan x-2x > 0,$$

故 $f'(x)$ 单调递增. 进而 $f'(x) > f(0)=0$ ，

$$\text{故 } f(x)\text{单调递增. 进而 } f(x) > f(0)=0,\text{即 } \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x}} > x.$$

所以结合①可得 $(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\sin x})^2 > 4x$ ， 即 $\sqrt{\tan x}+\sqrt{\sin x} > 2\sqrt{x}$ ，

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n (\sqrt{\tan \frac{\pi}{4^k}}+\sqrt{\sin \frac{\pi}{4^k}}) > 2\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{4^k}} = \sum_{k=1}^n \frac{2\sqrt{\pi}}{2^k} = 2\sqrt{\pi}(1-\frac{1}{2^n}). \quad \text{.....17 分}$$