

江西省八所重点中学 2026 届高三联考

数学试卷 2026.4

命题人：吉安一中

广信中学

(考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分)

一、选择题 (本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 若全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C_U A = \{x | 0 \leq x \leq 4, x \in N\}$, 则集合 A 为 ()

- A. $\{5, 6\}$ B. $\{0, 5, 6\}$ C. $\{0, 4, 5, 6\}$ D. $\{4, 5, 6\}$

2. 已知复数 z 满足 $|1 + \sqrt{3}i| + i = z(1 - i)$, 则 z 的虚部为 ()

- A. $\frac{3}{2}i$ B. $-\frac{3}{2}i$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

3. 已知 $\sin(\alpha - \pi) + 3\cos \alpha = 0$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

4. 设单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的夹角为 $\frac{2}{3}\pi$, $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, 则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影数量为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_2 \cdot a_5 = 4a_6$, $a_3 - a_2 = 48$, 记 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 设

$b_n = [\frac{n^2 + 1}{\log_4 a_n}]$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 30 项和为 ()

- A. 464 B. 465 C. 466 D. 467

6. 若甲盒中有 3 个白球, 2 个红球, 1 个黑球, 乙盒中有 x 个白球 ($x \in N$), 3 个红球, 2 个黑球, 现从甲盒中随机取出一个球放入乙盒, 再从乙盒中随机取出一个球, 若事件“从甲盒中取出的球和从乙盒取出的球颜色相同”的概率不小于 $\frac{4}{9}$, 则 x 的最小值为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

7. 已知两定点 $F_1(-3, 0)$ 和 $F_2(3, 0)$, 双曲线 Γ 以 F_1, F_2 为焦点且经过动点 M , 若 M 在直线 $l: y = 2x + 4$ 上运动,

则双曲线 Γ 的离心率的最小值为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ D. $2\sqrt{5}$

8. 已知函数 $f(x) = e^x + x - m$ 的零点为 x_1 , 函数 $g(x) = \ln x + x - m$ 的零点为 x_2 , 其中 $m > 1$, 则 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ 的取值范围是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(e + \frac{1}{e}, +\infty)$ C. $[e + \frac{1}{e}, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

二、选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）

9. 若 a, b, c, d 均为实数，则下列说法正确的是（ ）

- A. 若 $a < b, c \neq 0$, 则 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$
- B. 若 $a < b, c < d$, 则 $ac < bd$
- C. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $2a + 3b$ 的最小值为 $5 + 2\sqrt{6}$
- D. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 2$, 则 $a^2 + b^2$ 的最大值为 2

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 F ，过 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点（ A 位于第一象限），过 A, B 作抛物线准线的垂线，垂足分别为 A_1, B_1 ，则下列结论正确的是（ ）

- A. $|AB|$ 的最小值为 2
- B. 若直线 l 交 y 轴于点 M , $2\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AM}$, 则 $|FM| = 5$
- C. 抛物线 C 在点 A, B 处的两条切线相互垂直
- D. 若 $|A_1B_1| = 4$, 则梯形 ABB_1A_1 面积分别为 16

11. 在三棱锥 $S-ABC$ 中， $SA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, 且 $SA = AB = AC = 1$. 动点 P 在侧面 SBC 内（包括边界）运动，且满足点 P 到平面 ABC 的距离等于点 P 到点 S 的距离. 设动点 P 的轨迹为曲线 Γ ，则以下选项中正确的是（ ）

- A. 三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为 6π
- B. 二面角 $S-BC-A$ 的正切值为 $\sqrt{2}$
- C. 三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最小值是 $\frac{3-\sqrt{6}}{6}$
- D. 过点 P 平行于平面 ABC 的平面截三棱锥 $S-ABC$ 所得截面面积的最大值为 $5-2\sqrt{6}$

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

12. $(x+1)^{10}$ 的二项展开式中，系数最大的项为_____.

13. 已知函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = f(x) \cdot f(x+1) \cdot f(x+2)$ 对任意实数 x 都成立，若 $f(1) = 2, f(2) = 3$ ，则 $f(13) - f(14) =$ _____.

14. 在三角形 ABC 中， $\angle BAC = 60^\circ$, BC 边上的中线 $AD = 2$, 外心为 O ，重心为 G ，则 $|\overrightarrow{OG}|$ 的取值范是_____.

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15.(本题满分 13 分) 有媒体称 DeepSeek 开启了我国 AI 新纪元.某高校拟与某网络平台合作组织学生参加与 AI 知识有关的网络答题活动，为了解男女学生参与答题意愿的差异，男生、女生各取 100 人.现从这 200 名学生中随机选 1 名学生，设事件 A 为“选到的学生愿意报名参加答题活动”，事件 B 为“选到的学生为男生”，且 $P(A) = \frac{3}{5}$ ， $P(B|A) = \frac{2}{3}$.

(1) 根据已知条件，完成下列 2×2 列联表.从不愿意报名参加答题活动的学生中随机选择 1 人，设选到女生的概率为 p ，求 p 的值：

性别	男生	女生	合计
不愿报名参加答题活动			
愿意报名参加答题活动			
合计			

(2) 依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验，分析该校学生报名参加答题活动是否与性别有关.

参考公式与数据： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
χ_c	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

15.(本题满分 15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n = 2a_n - 3 \cdot 2^{n+1} (n \in N^*)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ；

(2) 设 $b_n = \frac{(n+2)a_n}{n(n+1)^2 4^{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

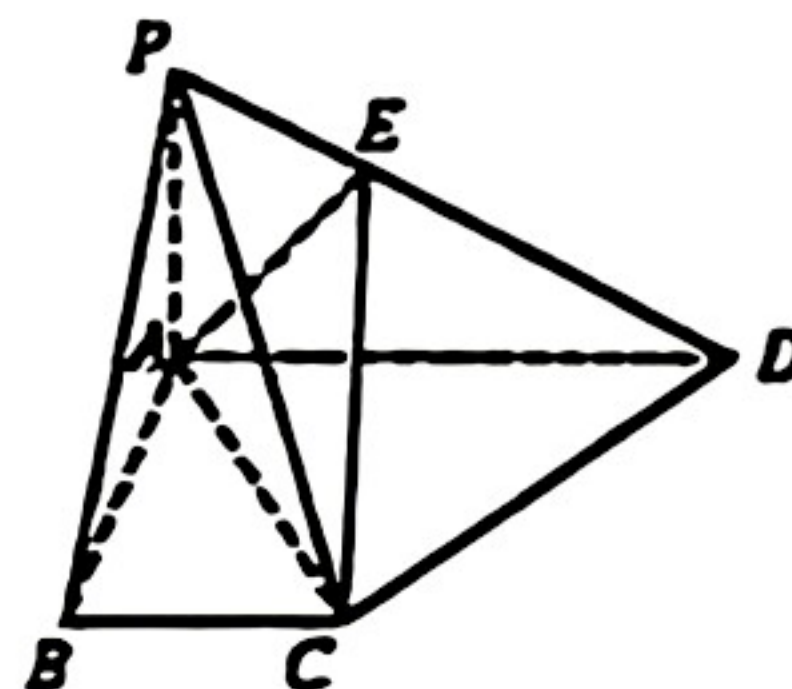
17.(本题满分 15 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \perp$ 平面 PAB , 平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $PA = AB = BC = 1, AD = 2$

(1) 证明: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 点 E 为线段 PD 上一点 (E 与 P, D 不重合).

(i) 若 $\frac{PE}{PD} = \frac{1}{3}$, 求二面角 $P-AC-E$ 的余弦值;

(ii) 是否存在点 E , 使得 B, C, P, E 四点共球且该球心位于平面 $ABCD$ 内, 若存在, 指出点 E 位置; 若不存在, 请说明理由.



18.(本题满分 17 分) 若椭圆: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, P, Q 分别为左、右顶点且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 直线 l 过 $T(-1, 0)$ 交椭圆 C

于 A, B 两点. 当直线 l 垂直于 x 轴时, $|AB| = \sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 连接 AQ, BQ, BP , 并过 A, B 两点分别作椭圆的切线, 这两条切线相交于点 D , 过 D 作 BQ 的平行线交 AQ 于 M 点, 直线 OM (O 为坐标原点) 交直线 BQ 于点 N , 直线 AQ 和直线 BP 的斜率分别为 k_1 和 k_2 , N, B 两点横坐标分别为 x_N, x_B .

证明 (i) $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值; (ii) $2x_N - x_B$ 为定值.

19.(本题满分 17 分) 已知函数 $f(x) = a \ln x (a > 0)$.

(1) 若 $a = 1$ 时, 求函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在点 $(e, g(e))$ 上的切线方程;

(2) 若 $\exists x_1, x_2 > 0$, 使得当 $x \in [x_1, x_2]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[x_1, x_2]$.

(i) 求实数 a 的取值范围; (ii) 证明: $(x_1 - x_2)^2 > 4(a^2 - ea)$.

江西省八所重点中学 2026 届高三联考数学试卷

答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	A	D	B	D	C	B	A	C	AC	ACD	BCD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $252x^5$ 13. -1 14. $[0, \frac{4}{3})$

答案详解如下：

1.A 【解析】 $C_U A = \{x | 0 \leq x \leq 4, x \in N\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，故 $A = \{5, 6\}$ 。

2.D 【解析】 $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ，故 $2 + i = z(1 - i)$ ，

$z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ，故 z 的虚部为 $\frac{3}{2}$ 。

3.B 【解析】 由已知可得 $-\sin \alpha + 3\cos \alpha = 0$ ，故 $\tan \alpha = 3$ ，

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 。

4.D 【解析】 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影数量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$ ，

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \cdot (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 2\vec{e}_1^2 + 3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - 2\vec{e}_2^2 = 2 + 3 \times 1 \times 1 \times (-\frac{1}{2}) - 2 = -\frac{3}{2}$ ，

$|\vec{a}|^2 = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)^2 = \vec{e}_1^2 + 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 4\vec{e}_2^2 = 1 + 4 \times 1 \times 1 \times (-\frac{1}{2}) + 4 = 3$ ，

$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影数量为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

5.C 由已知得 $a_n = 4^n$ ，

$b_n = [\frac{n^2+1}{\log_4 a_n}] = [\frac{n^2+1}{\log_4 4^n}] = [\frac{n^2+1}{n}] = [n + \frac{1}{n}]$ ，

当 $n=1$ 时， $b_1 = 2$ ，当 $n \geq 2$ 时， $b_n = n$ 。

设数列 $\{b_n\}$ 的前 30 项和为 T_{30} ，

$T_{30} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{30} = 2 + 2 + \cdots + 30 = 2 + \frac{(2+30) \times 29}{2} = 466$ 。

6.B 【解析】 设第一次从甲盒取出白球、红球、黑球分别为事件 A_1 ， A_2 ， A_3 ，从甲盒中取出的球和从乙盒中取出

$$\begin{aligned} & \text{的球颜色相同为事件 } B, \text{ 则 } P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_2)P(B|A_2) \\ & = \frac{1}{2} \times \frac{x+1}{x+6} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{x+6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{x+6} = \frac{3x+3+8+3}{6 \times (x+6)} = \frac{3x+14}{6 \times (x+6)} \geq \frac{4}{9}, \text{ 即 } 9x+42 \geq 8x+48, \end{aligned}$$

故 $x \geq 6$, 所以 x 的最小值为 6.

7.A 【解析】 焦距 $|F_1F_2| = 6$, 半焦距 $c = 3$, 离心率 $e = \frac{3}{a}$, 求 e 的最小值即求实半轴长 a 的最大值.

$$a = \frac{1}{2} \|MF_1\| - \|MF_2\|, \text{ 先求 } \|MF_1\| - \|MF_2\| \text{ 的最大值. 由于 } \|MF_1\| - \|MF_2\| \leq |F_1F_2'| \text{ (其中 } F_2' \text{ 为 } F_2 \text{ 关于直线 } l$$

的对称点, 当且仅当 M 在 F_1F_2' 延长线与 l 的交点时等号成立.

$$F_2(3,0) \text{ 关于直线 } l: y = 2x + 4 \text{ 的对称点 } F_2'(-5,4). \text{ 故 } |F_1F_2'| = 2\sqrt{5},$$

$$\text{即 } \|MF_1\| - \|MF_2\| \text{ 的最大值为 } 2\sqrt{5}, \text{ 因此 } (2a)_{\max} = 2\sqrt{5}, a_{\max} = \sqrt{5}.$$

$$\text{故双曲线离心率的最小值为 } e_{\min} = \frac{c}{a_{\max}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}.$$

$$8. C \text{ 【解析】 } f(x) = e^x + x - m, \quad g(x) = \ln x + x - m = \ln x + e^{\ln x} - m = e^{\ln x} + \ln x - m = f(\ln x),$$

$$f(x) \text{ 在 } R \text{ 上单增, } e^x + x = m, \text{ 当 } x = 0 \text{ 时, } e^x + x = 1, \text{ 当 } m > 1 \text{ 时, } x_1 > 0, \text{ 故 } \ln x_2 > 0,$$

$$x_2 > 1, \text{ 即 } \ln x_2 = x_1.$$

$$\text{令 } t = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\ln x_2}{x_2}, \quad x_2 \in (1, +\infty), \quad t'(x_2) = \frac{1 - \ln x_2}{x_2^2},$$

$$\text{故函数 } t(x_2) \text{ 在 } (1, e) \text{ 上递增, } (e, +\infty) \text{ 在上递减, 则 } t \in (0, \frac{1}{e}], \text{ 所以 } t + \frac{1}{t} \in [e + \frac{1}{e}, +\infty).$$

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9.AC 【解析】 由不等式性质可知 A 正确, B 错误

$$C \text{ 选项, 由已知得 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \text{ 则 } 2a + 3b = (2a + 3b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \text{ 故 } C \text{ 正确}$$

$$D \text{ 选项, } \because \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2, \therefore a^2 + b^2 \geq 2, a^2 + b^2 \text{ 最小值为 } 2, D \text{ 选项错误}$$

10.ACD 【解析】 由抛物线焦点弦最短可知 A 选项正确

$$\text{由 } 2\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AM}, F\left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ 得 } A\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), M(0, \sqrt{6}), \therefore |FM| = \frac{5}{2}, B \text{ 选项错误}$$

$$\text{抛物线在 } A, B \text{ 处的切线分别为 } y_1y = x + x_1, y_2y = x + x_2, \text{ 两条切线斜率之积为 } y_1y_2 = -p^2 = -1, C \text{ 选项正确}$$

$$\text{由 } |A_1B_1| = \frac{2p}{\sin \theta} = \frac{2}{\sin \theta} = 4 \text{ 得 } \sin \theta = \frac{1}{2}, \therefore |AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta} = 8, \text{ (其中 } \theta \text{ 为直线 } l \text{ 的倾斜角)}$$

$$S_{ABB_1A_1} = \frac{1}{2}(|AA_1| + |BB_1|) \cdot |A_1B_1| = \frac{1}{2}(|AF| + |BF|) \cdot |A_1B_1| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |A_1B_1| = 16, D \text{ 选项正确}$$

11. BCD 【解析】 三棱锥 $S-ABC$ 的外接球半径为体对角线的一半， $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，表面积 $4\pi R^2 = 3\pi$ ，故 (A) 错误。

二面角 $S-BC-A$ 即平面 SBC 与平面 ABC 的夹角。平面 ABC 的法向量为 $\vec{n}_1 = (0,0,1)$ ，平面 SBC 的法向量为 $\vec{n}_2 = (1,1,1)$ ，设夹角为 θ ，则 $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，故 $\tan \theta = \sqrt{2}$ ，因此 (B) 正确。

以 A 为原点，建立空间直角坐标系： $A(0,0,0)$ ， $B(1,0,0)$ ， $C(0,1,0)$ ， $S(0,0,1)$ 。平面 SBC 的方程为 $x+y+z=1$ 。设 $P(x,y,z)$ ，由条件 $z = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$ ，化简得 $2z = x^2 + y^2 + 1$ 。联立 $x+y+z=1$ 得 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 3$ ， $x, y \geq 0$ ， $x+y \leq 1$ 。由轨迹方程可求得 $z_P \in [3-\sqrt{6}, 2-\sqrt{2}]$ 三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{6}z_P$ ，由得 $V \in [\frac{3-\sqrt{6}}{6}, \frac{2-\sqrt{2}}{6}]$ ，因此 (C) 正确。

过 P 且平行于平面 ABC 的平面方程为 $z = z_P$ ，截面为直角三角形，面积 $S = \frac{1}{2}(1-z_P)^2$ ，

又 $z_P \in [3-\sqrt{6}, 2-\sqrt{2}] \therefore S_{\max} = 5-2\sqrt{6}$ ，故 (D) 正确。

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $252x^5$ 【解析】 $(x+1)^{10}$ 展开式的第 $r+1$ 项系数为 $C_{10}^r 1^r = C_{10}^r$ ，其中 $r=0,1,\dots,10$ ，当 $r=5$ 时，系数为最大，故系数最大的项为 $C_{10}^5 x^5 = 252x^5$ 。

13. -1 【解析】 已知 $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = f(x) \cdot f(x+1) \cdot f(x+2)$ ，

所以 $f(x+1) + f(x+2) + f(x+3) = f(x+1) \cdot f(x+2) \cdot f(x+3)$ ，两式相减得

$$f(x+3) - f(x) = (f(x+3) - f(x)) \cdot f(x+2) \cdot f(x+1), \because f(1) \cdot f(2) \neq 0, \therefore f(x+2) \cdot f(x+1) \neq 0,$$

则 $f(x+3) - f(x) = 0, \therefore f(13) - f(14) = f(1) - f(2) = -1$ ，

14. $[0, \frac{4}{3})$ 【解析】 设 $AB = c$ ， $AC = b$ ， $BC = a$ ，三角形 ABC 的面积为 S 。

由面积公式： $S = \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$ ，得 $bc = \frac{4S}{\sqrt{3}}$ 。

由中线长公式： $AD^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = 4$ ，即 $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 16 \dots\dots (1)$

由余弦定理： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ = b^2 + c^2 - bc \dots\dots (2)$

将(2)代入(1)得： $2b^2 + 2c^2 - (b^2 + c^2 - bc) = 16$ ，即 $b^2 + c^2 + bc = 16 \dots\dots (3)$

将 $bc = \frac{4S}{\sqrt{3}}$ 代入式(3)，得 $b^2 + c^2 = 16 - \frac{4S}{\sqrt{3}}$ 。

由基本不等式 $b^2 + c^2 \geq 2bc$ ，得 $16 - \frac{4S}{\sqrt{3}} \geq 2 \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}}$ ，解得 $S \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ；结合三角形存在性，

$S > 0$ ，故 $S \in (0, \frac{4\sqrt{3}}{3}]$ 。

外接圆半径 R 满足： $2R = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ ，即 $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ 。

由(2)和(3)消去 $b^2 + c^2$ ，结合 $bc = \frac{4S}{\sqrt{3}}$ ，得 $a^2 = 16 - \frac{8S}{\sqrt{3}}$ 。

由 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 平方得 $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} = \frac{16 - 4\sqrt{3}S}{9}$ 。

求|OG|的取值范围：

当 $S \rightarrow 0^+$ 时， $|OG| \rightarrow \frac{4}{3}$ ；当 $S = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时， $|OG| = 0$ 。答案： $[0, \frac{4}{3})$

四、解答题： 本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

15. 【解析】(1)愿意报名参加答题活动的人数为 $200 \times \frac{3}{5} = 120$ ，愿意参加答题活动的学生为男生的人数为 $120 \times \frac{2}{3} = 80$ ，故愿意参加活动的学生为女生的人数为 $120 - 80 = 40$ ，不愿意参加答题活动的学生为男生的人数为 $100 - 80 = 20$ ，不愿意参加答题活动的学生为女生的人数为 $100 - 40 = 60$ ．

性别	男生	女生	合计
不愿报名参加答题活动	20	60	80
愿意报名参加答题活动	80	40	120
合计	100	100	200

.....4 分

由表格得不愿意参加答题活动得 80 人有 60 个女生，所以 p 的估计值为 $\frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ ．

.....7 分

(2)零假设为 H_0 ：该校学生报名参加答题活动与性别无关，

根据表中数据可得， $\chi^2 = \frac{200 \times (20 \times 40 - 60 \times 80)^2}{80 \times 120 \times 100 \times 100} = \frac{100}{3} \approx 33.333 > 10.828 = x_{0.001}$ ，

.....11 分

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的 χ^2 独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为该校学生报名参加答题活动与性别有关，该推断犯错误的概率不超过 0.001

.....13 分

16. 【解析】（1）已知 $S_n = 2a_n - 3 \cdot 2^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$

当 $n = 1$ 时， $S_1 = a_1 = 2a_1 - 3 \cdot 2^2$ ，解得 $a_1 = 12$

.....1 分

当 $n \geq 2$ 时， $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 3 \cdot 2^n$ ，由 $S_n - S_{n-1}$ 得： $a_n - 2a_{n-1} = 3 \cdot 2^n$ ，

.....3 分

两边同除以 2^n ，得 $\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = 3$ ，因此 $\left\{ \frac{a_n}{2^n} \right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{2^1} = 6$ ，公差为 3 的等差数列，

.....6 分

故 $\frac{a_n}{2^n} = 6 + 3(n-1) = 3n+3$, 即 $a_n = 3(n+1) \cdot 2^n$

.....8 分

$$\begin{aligned} \text{由 } a_n = 3(n+1) \cdot 2^n, \text{ 则 } b_n &= \frac{(n+2)a_n}{n(n+1)^2 4^{n+1}} = \frac{(n+2) \cdot 3(n+1) \cdot 2^n}{n(n+1)^2 \cdot 2^{2n+2}} = \frac{3(n+2)}{n(n+1) \cdot 2^{n+2}} \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right) \end{aligned}$$

.....12 分

则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为:

$$\begin{aligned} T_n = \sum_{k=1}^n b_k &= \frac{3}{4} \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2^0} - \frac{1}{2 \cdot 2^1} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 2^1} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right) \right] \\ &= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{(n+1) \cdot 2^{n+2}} \end{aligned}$$

.....15 分

17. 【解析】(1) 方法一: 由 $BC \perp$ 平面 PAB , $PA \subset$ 平面 PAB , 得 $BC \perp PA$.

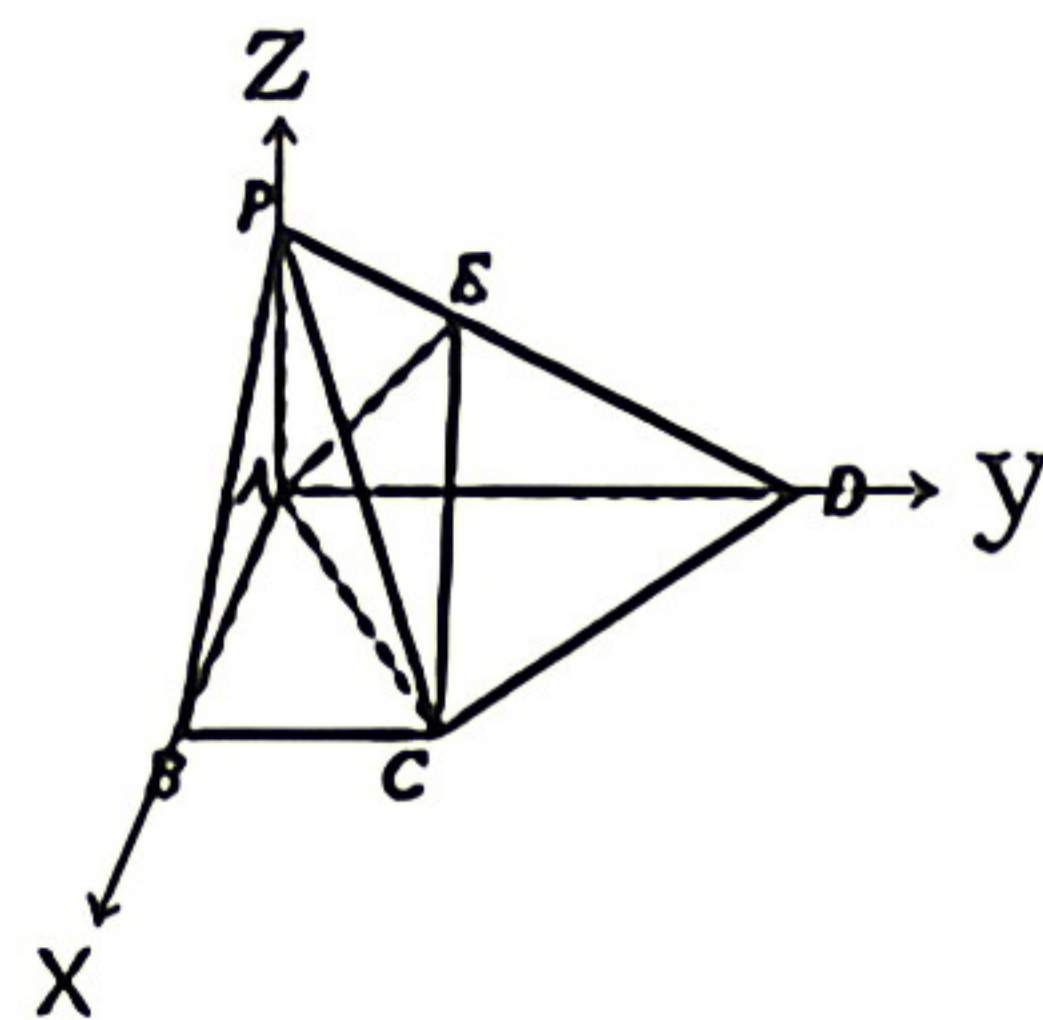
因为平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $PAC \cap$ 平面 $ABCD = AC$, 取 AC 的中点为 K , 又因为 $BA = BC$, 所以 $BK \perp AC$, 所以 $BK \perp$ 平面 PAC , 因为 $PA \subset$ 平面 PAC , 所以 $BK \perp PA$, 又因为 $BC \cap BK = B$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

方法二: 因为 $BC \perp$ 平面 PAB , $BA \subset$ 平面 PAB , 得 $BC \perp BA$, 又因为 $AB = BC = 1$, 所以 $AC = \sqrt{2}$, $\angle BAC = 45^\circ$, 又因为 $\angle BAD = 90^\circ$, 所以 $\angle CAD = 45^\circ$

又 $AD = 2$, 由余弦定理得 $CD = \sqrt{2}$, 所以 $DC \perp CA$, 又因为平面 $ABCD \perp$ 平面 PAC , 且平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAC = AC$, 所以 $DC \perp PA$, 又因为 $BC \perp PA$, 且 $BC \cap CD = C$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$4 分

(2) (i) 以 A 为原点, AB, AD, AP 方向为 x, y, z 轴方向建系, 则有 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,2,0), P(0,0,1)$, 由于 $\frac{PE}{PD} = \frac{1}{3}$ 则 $E(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

.....6 分



平面 PAC 的法向量: 设 $n_1 = (x, y, z)$, 由 $\overrightarrow{AC} \cdot n_1 = 0, \overrightarrow{AP} \cdot n_1 = 0$ 得 $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 令 $x = 1$ 得 $n_1 = (1, -1, 0)$7 分

平面 ACE 的法向量: 设 $n_2 = (x, y, z)$, 由 $\overrightarrow{AC} \cdot n_2 = 0, \overrightarrow{AE} \cdot n_2 = 0$ 得 $\begin{cases} x + y = 0 \\ \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases}$

令 $x = 1$, 得 $n_2 = (1, -1, 1)$.

.....9 分

设二面角 $P-AC-E$ 的平面角为 θ ，注意到 θ 为锐二面角，

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 即二面角 } P-AC-E \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ (ii) 设 } \overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PD} (0 < \lambda < 1), \text{ 则 } E(0, 2\lambda, 1-\lambda) (0 < \lambda < 1); \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

设过 B, C, P, E 四点的球的球心为 $O(x, y, z)$ ，半径为 R ，则 $R^2 = OB^2 = OC^2 = OP^2 = OE^2$ ，即

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = R^2 \\ x^2 + (y-2\lambda)^2 + [z-(1-\lambda)]^2 = R^2 \end{cases} \quad \text{可得} \quad \begin{cases} x = 2 - \frac{5\lambda}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 - \frac{5\lambda}{2} \end{cases}$$

$$\text{令 } z = 2 - \frac{5\lambda}{2} = 0 \text{ 解得 } \lambda = \frac{4}{5} \in (0, 1) \text{ 满足条件,}$$

综上：即 $\overrightarrow{PE} = \frac{4}{5} \overrightarrow{PD}$ 时点 E 使得 B, C, P, E 四点共球且该球心位于平面 $ABCD$ 内. \dots\dots 15 分

18. 【解析】(1)由题意可知 $(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆上，且由 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，可得 $a = 2b$ ，联立方程

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}, \text{ 所以椭圆 } C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2)(i)由题意可知直线 AB 不与 x 轴重合，设直线 $AB: x = my - 1$ ，点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

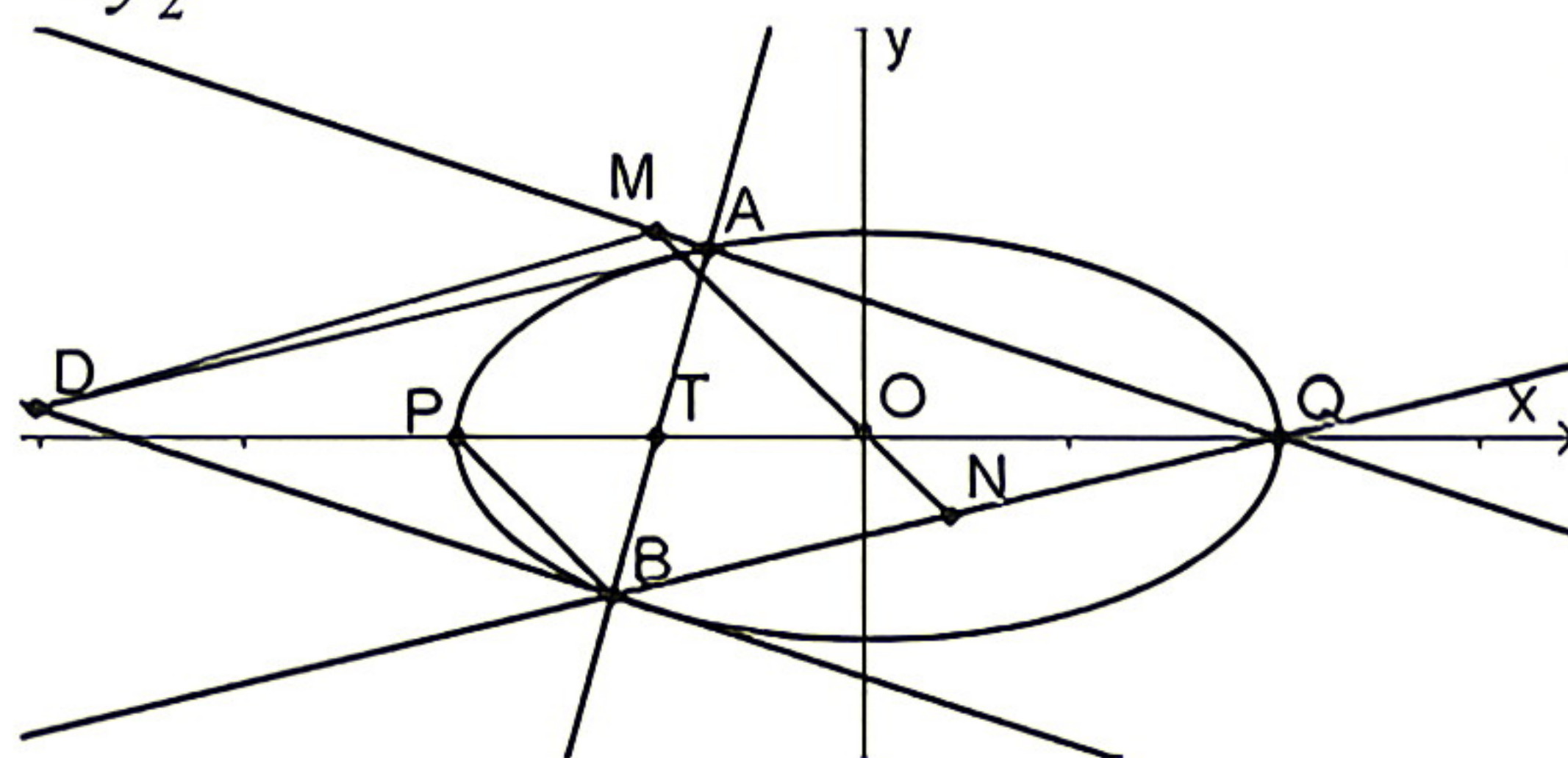
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x = my - 1 \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 4)y^2 - 2my - 3 = 0.$$

$$y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2 + 4}, \Delta = 16m^2 + 48 > 0 \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1 - 2}}{\frac{y_2}{x_2 + 2}} = \frac{y_1(x_2 + 1)}{y_2(x_1 - 3)} = \frac{y_1(my_2 + 2)}{y_2(my_1 - 2)} = \frac{my_1 y_2 + y_1}{my_1 y_2 - 3y_2} \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } y_1 + y_2 = -\frac{2m}{3} y_1 y_2 \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{-\frac{3}{2}(y_1 + y_2) + y_1}{-\frac{3}{2}(y_1 + y_2) - 3y_2} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$



(ii)由题意可知过点 A 的切线和点 B 的切线分别为： $\frac{x_1 x}{4} + y_1 y = 1$ ，和 $\frac{x_2 x}{4} + y_2 y = 1$ ，联立方程

$$\begin{cases} \frac{x_1 x}{4} + y_1 y = 1 \\ \frac{x_2 x}{4} + y_2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow x_D = \frac{4(y_1 - y_2)}{x_2 y_1 - x_1 y_2} = \frac{4(y_1 - y_2)}{(my_2 - 1)y_1 - (my_1 - 1)y_2} = -4 \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$y_D = \frac{1 + x_1}{y_1} = m, \text{ 所以 } D(-4, m) \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

$$\text{直线 } l_{DM}: y - m = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x + 4), \text{ 直线 } l_{AQ}: y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$$

$$\begin{cases} y - m = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x + 4) \\ y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{y_1}{x_1 - 2} - \frac{y_2}{x_2 - 2} \right) x_M = \frac{2y_1}{x_1 - 2} + \frac{4y_2}{x_2 - 2} + m \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y_1}{my_1 - 3} - \frac{y_2}{my_2 - 3} \right) x_M = \frac{2y_1}{my_1 - 3} + \frac{4y_2}{my_2 - 3} + m \Rightarrow$$

$$x_M = \frac{-3(y_2 - y_1) + (m^3 + 6m)y_1 y_2 - (3m^2 + 9)(y_1 + y_2) + 9m}{3(y_2 - y_1)}$$

$$= -1 + \frac{(m^3 + 6m) \frac{-3}{m^2 + 4} - (3m^2 + 9) \frac{2m}{m^2 + 4} + 9m}{3(y_2 - y_1)} = -1 \dots\dots\dots 15 \text{分}$$

$$k_{OM} = \frac{\frac{y_1}{x_1 - 2}(x_M - 2)}{x_M} = 3k_1, \text{ 又由(i)可知 } k_2 = 3k_1, \text{ 所以 } k_{OM} = k_2,$$

即 $OM \parallel BP$. $\dots\dots\dots 16 \text{分}$

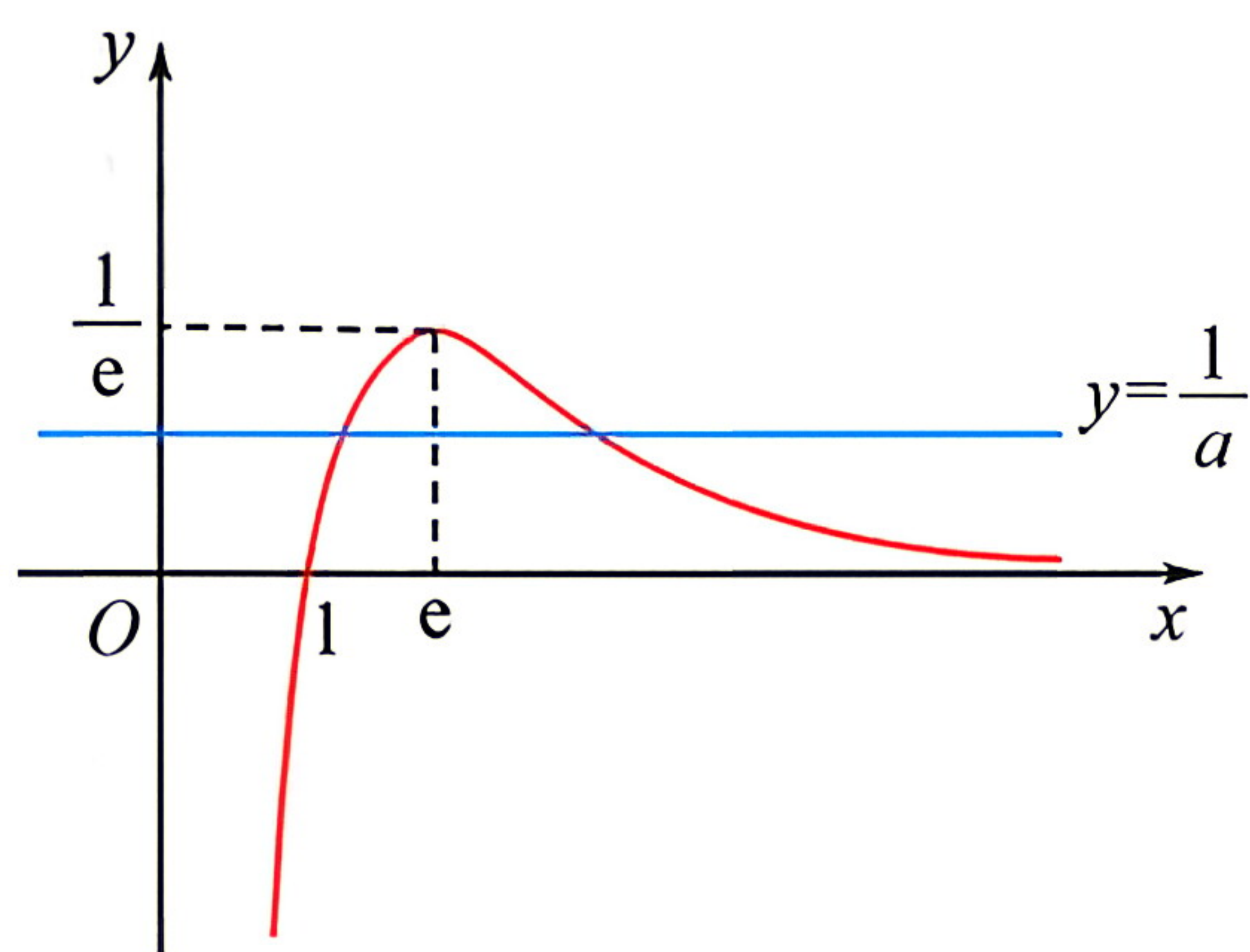
可得 N 为 BQ 中点, 所以 $x_N = \frac{x_B + x_Q}{2}$, 即 $2x_N - x_B = 2$. $\dots\dots\dots 17 \text{分}$.

19.(1) 当 $a = 1$ 时, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 所以 $g'(e) = 0, g(e) = \frac{1}{e}$, 故切线方程为 $y = \frac{1}{e}$. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) ① 显然 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上单调递增, 则 $\begin{cases} f(x_1) = x_1 \\ f(x_2) = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ln x_1 = x_1 \\ a \ln x_2 = x_2 \end{cases}$, 所以 $\frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{1}{a}$,

令 $F(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $F'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 故 $F(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

$F(e) = \frac{1}{e}$, 函数 $F(x)$ 的大致图象为下图, 故有 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{e}$, 即 a 的取值范围为 $(e, +\infty)$. $\dots\dots\dots 10 \text{分}$



②记 $h(x) = \ln x + \frac{e}{x} - 2$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x-e}{x^2}$, 故 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(x) \geq h(e) = 0$, 即 $\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}$, $\because x_1 \neq e \therefore \frac{1}{a}x_1 = \ln x_1 > 2 - \frac{e}{x_1}$, 即 $\frac{1}{a}x_1^2 - 2x_1 + e > 0$, 同理 $\frac{1}{a}x_2^2 - 2x_2 + e > 0$, 因为函数 $t(x) = \frac{1}{a}x^2 - 2x + e$ 的 $\Delta = 4 - \frac{4e}{a} > 0$, 且对称轴为 $x = a$, 则方程 $t(x) = 0$ 存在两根 $m, n (m < a < n)$, 且 $m + n = 2a$, $mn = ae$, 故 $n - m = \sqrt{(m+n)^2 - 4mn} = \sqrt{4a^2 - 4ea}$, 又 $m < a < n$, 且 $t(x_1) > 0$, $t(x_2) > 0$, $t(e) < 0$, $x_1 < e < x_2$, 所以 $x_1 < m < e < a < n < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > n - m = \sqrt{4a^2 - 4ea}$, 即 $(x_1 - x_2)^2 > 4(a^2 - ea)$17 分