

泉州市 2026 届高中毕业班模拟考试（一）

2026.03

高三数学

本试卷共 19 题，满分 150 分，共 4 页。考试用时 120 分钟。

★龙马精神★

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 考生作答时，将答案答在答题卡上。请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效。在草稿纸、试题卷上答题无效。
3. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚。
4. 保持答题卡卡面清洁，不折叠、不破损。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0\}$ ， $B = \{x | \sqrt{x} = 2\}$ ，则 $A \cup B =$

- A. $\emptyset$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{-1, 0, 2\}$ D. $\{-1, 0, 4\}$

2. 若复数 z 满足 $|z|^2 = iz$ ，则 $z =$

- A. $-i$ B. i C. 0 或 $-i$ D. 0 或 i

3. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ ， $\mathbf{b} = (6, 6, 6)$ ，则 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

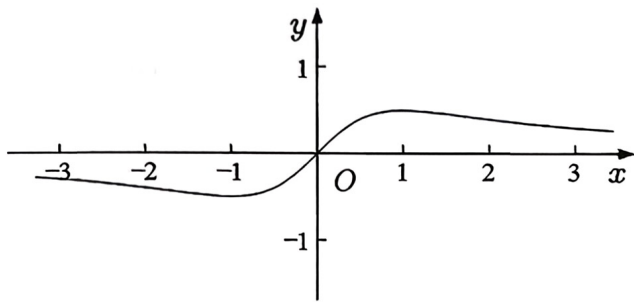
4. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图，则 $f(x)$ 的解析式可能是

A. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

B. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

C. $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$

D. $f(x) = x \ln(|x| + 1)$



5. 为推进“数字适老，智慧生活”，某社区开展 AI 应用培训活动。现随机抽取一位学员，其每日在线学习积分 X 的取值分别为 0, 1, 2，若 $E(X) = 1$ ， $P(X \geq 1) = 0.9$ ，则 $D(X) =$

- A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

6. 已知直线 $l: x - y - 2 = 0$ ，圆 C 关于 y 轴对称，且过点 $A(-1, 3), B(1, 1)$ ，则圆 C 上的点到 l 的距离的最大值与最小值之和等于

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

7. 已知 α, β, γ 成等差数列, $2\sin\alpha - \sin\gamma = 2\cos\beta$, $2\cos\alpha + \cos\gamma = 3\sin\beta$, 则 $\cos(\alpha + \gamma) =$
- A. $-\frac{3}{13}$ B. $\frac{3}{13}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1
8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线, 且 $f(-x) + f(x) = 0$, 若当 $x > 0$ 时, $[f(x) + f'(x)]e^x > [f(x) - f'(x)]e^{-x}$, 则

- A. $f(e) < f(-e)$ B. $xf(x) \leq 0$
- C. $f(x)$ 存在极值点 D. $f(x)$ 有且只有一个零点

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，有选错的得 0 分，部分选对的得部分分。

9. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \lambda a_n + \mu$, 则下列说法正确的是
- A. 当 $\lambda = 1, \mu = 2$ 时, $a_n = 2n - 1$ B. 当 $\lambda = 2, \mu = 0$ 时, $a_n = 2^n$
- C. 当 $\lambda = -1, \mu = 1$ 时, $a_{2026} = 1$ D. 当 $\lambda = 2, \mu = 2$ 时, $a_n = 3 \times 2^{n-1} - 2$
10. 如图所示的花灯的轮廓是正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, 其棱长均相等, 且所有棱长的总和为 36, 则

- A. $AB \parallel$ 平面 CD_1F
- B. $BD_1 \perp$ 平面 B_1DE
- C. 直线 DE 到平面 B_1CF 的距离等于 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$
- D. 平面 ABC_1 与平面 B_1CF 的夹角的余弦值等于 $\frac{1}{7}$



11. 以坐标轴为对称轴的双曲线 C 过点 $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, 其一条渐近线过点 $(1, 2\sqrt{2})$, 且两焦点为 F_1, F_2 . 若直线 $l: x = my + t$ 分别与 C 的两支交于 M, N 两点, 线段 MN 的中点为 P , 则下列说法正确的是
- A. 双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$
- B. 若 $m = 1$, 则点 P 在直线 $y = 4x$ 上
- C. 若 $t = 0$, 则 $|MF_1| \cdot |NF_1|$ 的取值范围为 $(8, +\infty)$
- D. 若 $t = 3$, 则 $\triangle MF_1F_2$ 与 $\triangle NF_1F_2$ 的内切圆的半径之比为 2 或 $\frac{1}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 某学习小组由 6 名男生和 4 名女生组成, 从中依次随机抽取 2 人参加知识竞赛, 则在第一次抽到男生的条件下, 第二次抽到女生的概率等于_____.
13. 将 10 个数从小到大排列, 若这列数成等差数列, 且所有奇数项的和为 30, 所有偶数项的和为 40, 则这列数的中位数等于_____.
14. 若存在 4 条不同的直线既是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的切线, 也是曲线 $y = ax + \frac{1}{x} (a > 0)$ 的切线, 则 a 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(2,0)$ ，动点 P 关于 O 的对称点为 Q ，且直线 AP, AQ 的斜率之积是 $-\frac{1}{4}$ ，记 P 的轨迹为曲线 E 。

(1) 求 E 的方程；

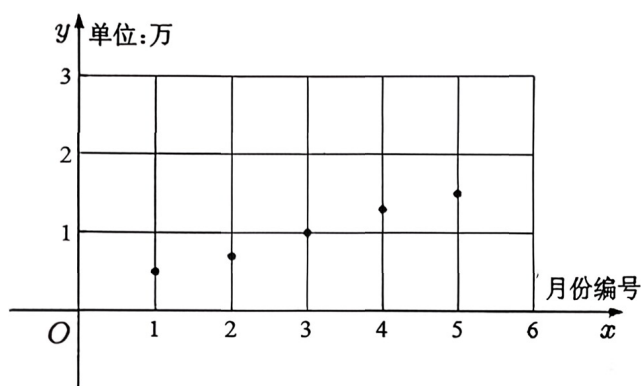
(2) 若 P 关于 x 轴的对称点为 M ，求 $\triangle PQM$ 的面积的最大值。

16. (15 分)

为深入贯彻“五育融合”的教育理念，某地在中小学全面推广劳动教育实践课程，定期统计学生参与劳动实践的情况，下表是课程开设后前 5 个月的数据，其中 x 表示月份编号， y 表示该月份日平均参与劳动实践的学生人数（单位：万）。

月份编号 x	1	2	3	4	5
日平均参与人数 y	0.5	0.7	1	1.3	1.5

根据表格数据得到如图所示的散点图。



(1) 根据散点图推断 y 与 x 是否线性相关，计算样本相关系数，并推断它们的相关程度；

(2) 由 (1) 所得结论，建立 y 关于 x 的回归方程，并预测第 6 个月的日平均参与人数；

(3) 假设第 6 个月（按 30 天计）的日参与人数 Y （单位：万）服从正态分布 $N(\mu, 0.02^2)$ ，并视 (2) 的结果为 μ 的值，预测该月份日参与人数超过 1.75 万的天数是否不少于 25 天。

附：

$$\textcircled{1} \text{ 样本相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}};$$

$$\textcircled{2} \text{ 回归直线 } y = bx + a \text{ 的斜率的最小二乘估计为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2};$$

$$\textcircled{3} \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55, \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 5.68, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 17.6, \sqrt{1.7} \approx 1.304;$$

$$\textcircled{4} \text{ 若 } X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ 则 } P(|X - \mu| < \sigma) = 0.6827.$$

17. (15 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，其面积为 S ．已知 $2S + \sqrt{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ．

(1) 求 A ；

(2) 点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ ，且 $CD = 2AD$ ，求 $\frac{b^2 + c^2}{a^2}$ ．

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \ln x - ax - 1$ ．

(1) 证明： $f(x)$ 有且只有一个极值点；

(2) 若 $f(x)$ 恰有两个零点．

(i) 证明： $a > e - 1$ ；

(ii) 记 $f(x)$ 的极值点为 x_0 ，若 $m(x_0 - \ln x_0) \leq a$ ，求 m 的取值范围．

19. (17 分)

科赫四面体是一种借助递归迭代生成的分形几何体．其构造过程是：从一个正四面体开始，在该几何体的每个正三角形面上，移除以各边中点为顶点的小三角形，并以此小三角形为底面，向外构建小正四面体．如图，持续重复对新生成的几何体执行上述操作，最终得到科赫四面体．



现有一种高效吸附材料，其结构为科赫四面体模型，此模型是由棱长为 $6\sqrt{2}$ 的正四面体经过持续重复上述操作得到的．记第 n 次操作后生成的几何体为 F_n ，设 F_n 的表面积为 S_n ，体积为 V_n ．

(1) 求 S_1, S_2, V_1, V_2 ；

(2) 在材料科学中，物料的表面积与体积之比被定义为比表面积，其值越大，吸附能力越强．根据比表面积 $\frac{S_n}{V_n}$ 随 n 的变化趋势，说明该材料吸附能力强的原因．

(3) 是否存在一个球形容器，能够使该材料整体放入其中？若存在，求其半径的最小值；若不存在，请说明理由．

泉州市 2026 届高中毕业班模拟考试（一）

2026.03

数学参考答案及评分细则

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题序	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	C	A	B	D	B	D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

题序	9	10	11
答案	AD	ACD	ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $\frac{4}{9}$

13. 7

14. $(\frac{3}{4}, +\infty)$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

【命题意图】

本题主要考查椭圆的标准方程、简单几何性质等知识；考查运算求解能力、逻辑推理能力等；考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想等；体现基础性、综合性，导向对数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养的关注。

【试题解析】

解法一：(1) 设 $P(x, y)$ ，则 $Q(-x, -y)$ ，则 1 分

$$k_{AP} = \frac{y}{x-2}, \quad k_{BP} = \frac{-y}{-x-2}, \quad \text{且 } x \neq \pm 2, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由 } k_{AP} \cdot k_{BP} = -\frac{1}{4}, \text{ 得 } \frac{y}{x-2} \cdot \frac{-y}{-x-2} = -\frac{1}{4}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{整理, 得 } 4y^2 = 4 - x^2, \text{ 即 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{故 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (x \neq \pm 2). \text{ (约束条件也可写成 } y \neq 0 \text{)} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{依题意, 得 } M(x, -y), \text{ 则 } \overrightarrow{MP} = (0, 2y), \quad \overrightarrow{MQ} = (-2x, 0),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0, \text{ 从而 } \overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{MQ}, \text{ 所以 } PM \perp QM, \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

则 $\triangle PQM$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|PM| \cdot |QM| = \frac{1}{2}|2y| \cdot |2x| = 2|xy|$, 3 分

因为点 P 在曲线上, 则 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 所以 $1 = \frac{x^2}{4} + y^2 \geq 2\left|\frac{x}{2}\right| \cdot |y|$, 5 分

即 $|xy| \leq 1$, 当且仅当 $\left|\frac{x}{2}\right| = |y| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取“=”. 6 分

故 $\triangle PQM$ 面积的最大值为 2. 7 分

解法二: (1) 同解法一; 6 分

(2) 设 $P(2\cos\theta, \sin\theta), \theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$,

则 $Q(-2\cos\theta, -\sin\theta), M(2\cos\theta, -\sin\theta)$, 1 分

所以 $\overrightarrow{MP} = (0, 2\sin\theta), \overrightarrow{MQ} = (-4\cos\theta, 0)$,

所以 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$, 从而 $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{MQ}$, 所以 $PM \perp QM$, 2 分

则 $\triangle PQM$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|PM| \cdot |QM| = \frac{1}{2}|2\sin\theta| \cdot |4\cos\theta| = 2|\sin 2\theta|$, 4 分

又 $|\sin 2\theta| \leq 1, 2\theta \in (0, 2\pi) \cup (2\pi, 4\pi)$,

故当 $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $2\theta = \frac{3\pi}{2}$ 或 $2\theta = \frac{5\pi}{2}$ 或 $2\theta = \frac{7\pi}{2}$,

即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 或 $\theta = \frac{7\pi}{4}$ 时, 6 分

$S_{\max} = 2$ 7 分

解法三: (1) 同解法一; 6 分

(2) 当直线 PQ 的斜率不存在时, 点 M 与点 Q 重合, 此时不合题意;

当直线 PQ 的斜率存在时, 设直线 PQ 的方程为 $y = kx (k \neq 0), P(x, y)$,

则 $Q(-x, -y), M(x, -y)$, 从而 $\overrightarrow{MP} = (0, 2y), \overrightarrow{MQ} = (-2x, 0)$,

所以 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$, 从而 $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{MQ}$, 所以 $PM \perp QM$, 1 分

由 $\begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y , 得 $(1 + 4k^2)x^2 = 4$, 整理, 得 $x^2 = \frac{4}{1 + 4k^2}$, 2 分

$$\text{所以 } \triangle PQM \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |PM| \cdot |QM| = \frac{1}{2} |2y| \cdot |2x| = 2 |kx^2| = \frac{8|k|}{1+4k^2} = \frac{8}{4|k| + \frac{1}{|k|}} \quad (k \neq 0),$$

..... 4 分

$$\text{因为 } 4|k| + \frac{1}{|k|} \geq 2\sqrt{4|k| \cdot \frac{1}{|k|}} = 4, \text{ 当且仅当 } 4|k| = \frac{1}{|k|}, \text{ 即 } |k| = \frac{1}{2} \text{ 时取“=”}, \text{ 6 分}$$

$$\text{所以 } S_{\max} = 2. \text{ 7 分}$$

16. (15 分)

【命题意图】

本小题主要考查变量间的相关关系、样本相关系数、一元线性回归方程、正态分布的等知识；考查运算求解能力等；考查数形结合思想、化归与转化思想、或然与必然思想等；体现综合性、应用性，导向对数学建模、数学运算核心素养的关注。

【试题解析】

解法一：（1）根据散点图直观判断 y 与 x 之间线性相关。..... 1 分

$$\text{因为 } \bar{x} = 3, \bar{y} = 1, \text{ 2 分}$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y} = 2.6, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2 = 10, \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 - 5\bar{y}^2 = 0.68, \text{ 3 分}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^5 y_i^2 - 5\bar{y}^2)}} = \frac{2.6}{\sqrt{10 \times 0.68}} = \frac{2.6}{2\sqrt{1.7}} \approx 0.997, \text{ 5 分}$$

所以 y 与 x 的线性相关程度强；（求出 r 的值并直接判断不扣分）..... 6 分

（也可利用 “ $r > 0.75$ ” 或 “ r 接近 1” 判断相关程度强）

$$\text{（2）设 } \hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}, \text{ 则 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{2.6}{10} = 0.26, \text{ 1 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 1 - 0.26 \times 3 = 0.22, \text{ 2 分}$$

$$\text{所以 } \hat{y} = 0.26x + 0.22, \text{ 3 分}$$

$$\text{故 } x = 6 \text{ 时, } \hat{y} = 0.26 \times 6 + 0.22 = 1.78. \text{ 4 分}$$

(3) 依题意, 得 $Y \sim N(1.78, 0.02^2)$,

由正态分布性质, 可知 $P(Y > 1.75) > P(Y > 1.76) = P(Y > \mu - \sigma)$ 1 分

因为 $P(|Y - \mu| < \sigma) = 0.6827$,

所以 $P(Y > \mu - \sigma) = 0.5 + \frac{P(|Y - \mu| < \sigma)}{2} = 0.5 + \frac{0.6827}{2} = 0.84135$ 3 分

因为 $0.84135 > \frac{25}{30}$, 4 分

所以该月日参与人数超过 1.75 万人的天数不少于 25 天. 5 分

解法二: (1) 根据散点图直观判断 y 与 x 之间具有线性相关关系. 1 分

因为 $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 1$, 2 分

$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2.6$, $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10$, $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 0.68$, 3 分

$$r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{2.6}{\sqrt{10 \times 0.68}} = \frac{2.6}{2\sqrt{1.7}} \approx 0.997$$
, 5 分

所以 y 与 x 的线性相关程度强; (求出 r 的值并直接判断不扣分) 6 分

(也可利用 “ $r > 0.75$ ” 或 “ r 接近 1” 判断相关程度强)

(2) 设 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{2.6}{10} = 0.26$, 1 分

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 1 - 0.26 \times 3 = 0.22$, 2 分

所以 $\hat{y} = 0.26x + 0.22$, 3 分

故 $x = 6$ 时, $\hat{y} = 0.26 \times 6 + 0.22 = 1.78$ 4 分

(3) 同解法一. 5 分

17. (15 分)

【命题意图】

本小题主要考查平面向量、解三角形等知识; 考查运算求解能力、推理论证能力等; 考查数形结合思想、化归与转化思想等; 体现基础性、综合性、应用性, 导向对数学运算、直观想

象、逻辑推理等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一: (1) 由正弦定理, 得 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$, 2 分

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A = cb \cos A \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

由 $2S + \sqrt{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 得 $bc \sin A + \sqrt{3}bc \cos A = 0$, 整理, 得 $\tan A = -\sqrt{3}$, 5 分

又因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 6 分

(2) 由 (1) 知, $A = \frac{2\pi}{3}$,

如图, 延长 AB 到点 E , 使得 $EB = BA$, 则 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 1 分

整得, 得 $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DE}$, 又 $CD = 2DA$, 所以 $DA = DE$, 2 分

设 $DE = t$, 则 $DA = t$, $DC = 2t$, $CE = 3t$, 3 分

在 $\triangle ACE$ 中, 由余弦定理, 得

$$CE^2 = AE^2 + AC^2 - 2AE \cdot AC \cdot \cos A, \text{ 即 } 9t^2 = b^2 + 4c^2 + 2bc \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

同理, 在 $\triangle ADE$ 中, 由余弦定理, 得 $2t^2 - 2t^2 \cos \angle ADE = 4c^2 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

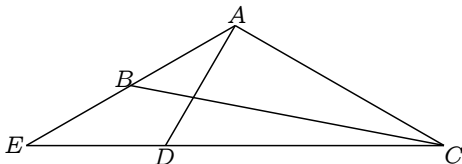
在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理, 得 $5t^2 - 4t^2 \cos \angle ADE = b^2 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

④ + ③ $\times 2$, 得 $9t^2 = b^2 + 8c^2 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

⑤ - ①, 得 $4c^2 - 2bc = 0$, 化简, 得 $b = 2c$, 即 $AE = AC$, 8 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $a^2 = c^2 + b^2 - 2 \times bc \times \cos \frac{2\pi}{3} = 7c^2$,

所以 $\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{5c^2}{7c^2} = \frac{5}{7}$ 9 分



解法二: (1) 同解法一; 6 分

(2) 由 $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 得 $\overrightarrow{AD}^2 = (\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC})^2$,

整理, 得 $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{16}{9}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{8}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2$,

即 $|\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{16}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{8}{9}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A + \frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2$, 即 $|\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{16}{9}c^2 - \frac{4}{9}bc + \frac{1}{9}b^2$ 1 分

如图在 $\triangle ABC$ 中延长 AB 至点 E 使得 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$, 则 $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$,

由 $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 得 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 整理得 $2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

即 $2\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DC}$, 所以点 E, D, C 共线, 且 $2ED = CD$ 2 分

设 $ED = x$, 则由 $CD = 2AD$, 得 $AD = x$, $ED = 2x$, $CE = 3x$ 3 分

在 $\triangle ACE$ 中, 由余弦定理 $CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AE \cos \angle CAE$,

即 $(3x)^2 = b^2 + (2c)^2 - 2b \times 2c \times \cos \frac{2\pi}{3}$, 整理, 得 $9x^2 = b^2 + 4c^2 + 2bc$ ① 4 分

又由 $|\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{16}{9}c^2 - \frac{4}{9}bc + \frac{1}{9}b^2$, 得 $x^2 = \frac{16}{9}c^2 - \frac{4}{9}bc + \frac{1}{9}b^2$,

整理, 得 $9x^2 = b^2 + 16c^2 - 4bc$ ② 5 分

由①-②, 得 $b^2 + 4c^2 + 2bc = b^2 + 16c^2 - 4bc$, 化简, 得 $b = 2c$ 6 分

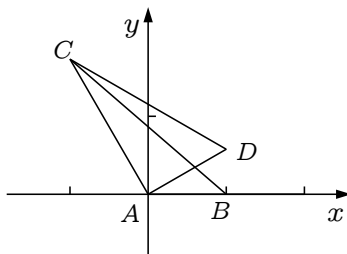
又在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

即 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{2\pi}{3} = b^2 + c^2 + bc$, 即 $a^2 = b^2 + c^2 + bc = 7c^2$, 7 分

所以 $\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{4c^2 + c^2}{7c^2} = \frac{5}{7}$ 9 分

解法三: (1) 同解法一; 6 分

(2) 如图, 以 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系 xAy ,



由 (1) 知, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (c, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-\frac{b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2})$, 2 分

则 $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}(c, 0) + \frac{1}{3}(-\frac{b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}) = (\frac{4}{3}c - \frac{b}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}b)$, 3 分

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \left(\frac{4}{3}c + \frac{b}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}b\right), \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } CD = 2AD, \text{ 所以 } \left(\frac{4}{3}c + \frac{b}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}b\right)^2 = 4 \left[\left(\frac{4}{3}c - \frac{b}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2\right], \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{整理, 得 } \frac{4}{3}c + \frac{b}{3} = 2\left(\frac{4}{3}c - \frac{b}{6}\right) \text{ 或 } \frac{4}{3}c + \frac{b}{3} = -2\left(\frac{4}{3}c - \frac{b}{6}\right),$$

$$\text{即 } b = 2c \text{ 或 } c = 0 \text{ (舍去)}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{又在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理, 得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\text{即 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{2\pi}{3} = b^2 + c^2 + bc = 7c^2, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{4c^2 + c^2}{7c^2} = \frac{5}{7}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

解法四: (1) 同解法一; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

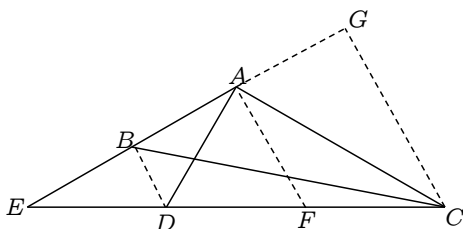
$$(2) \text{ 由 (1) 知, } A = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{如图, 延长 } AB \text{ 到点 } E, \text{ 使得 } EB = BA, \text{ 则 } \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{整理得, 得 } \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DE}, \text{ 又 } CD = 2DA, \text{ 所以 } DA = DE, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

取 DC 的中点 F , 连结 BD, FA ,

$$\text{则 } BD \perp AE, \quad BD = DF = FC, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$



从而 $BD \parallel AF$,

过点 C 作 $CG \perp BA$ 于 G , 则 $BD \parallel CG$,

$$\text{所以 } AF \parallel CG \parallel BD, \text{ 所以 } \frac{BA}{AG} = \frac{DF}{FC} = 1, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

在 $\triangle ACG$ 中, $\angle AGC = 90^\circ$,

$$\text{所以 } AG = AC \cdot \cos \angle CAG = b \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}b, \quad CG = b \sin \angle CAG = \frac{\sqrt{3}}{2}b, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \frac{1}{2}b = c \text{ 即 } b = 2c, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

又在 $\text{Rt}\triangle CGB$ 中, $CB^2 = GB^2 + GC^2$, 即 $a^2 = \frac{3b^2}{4} + (c + \frac{b}{2})^2$,

整理, 得 $a^2 = 7c^2$, 8 分

所以 $\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{4c^2 + c^2}{7c^2} = \frac{5}{7}$ 9 分

18. (17 分)

【命题意图】

本题主要考查函数的极值与零点、方程与不等式等知识; 考查运算求解能力、推理论证能力等; 考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想等; 体现基础性、综合性, 导向对数学运算、直观想象、数学抽象, 逻辑推理等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域 $(0, +\infty)$, $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - a$, 1 分

令 $g(x) = e^x - \frac{1}{x} - a$, 因为 $g'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$,

所以 $g(x) = e^x - \frac{1}{x} - a$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 即 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - a$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

又 $x \rightarrow 0, f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - a < 0$; $x \rightarrow +\infty, f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - a > 0$ 2 分

(没有交代极限扣 1 分)

所以存在唯一的实数 x_0 , 使得 $f'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = a$ 3 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增;

故 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 即 $f(x)$ 有唯一的极值点; 4 分

(2) (i) 证明: 由 (1), 得 $f(x)_{\text{极小值}} = f(x_0)$.

①当 $f(x_0) \geq 0$ 时, $f(x)$ 至多一个零点, 不合题意, 舍去; 1 分

②当 $f(x_0) < 0$ 即 $e^{x_0} - \ln x_0 - ax_0 - 1 < 0$ 时,

$$\text{由} \begin{cases} e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = a, \\ e^{x_0} - \ln x_0 - ax_0 - 1 < 0, \end{cases} \quad \text{消去 } a \text{ 得, } (1-x_0)e^{x_0} - \ln x_0 < 0, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{令 } p(x) = (1-x)e^x - \ln x (x > 0),$$

$$\text{因为 } p'(x) = -xe^x - \frac{1}{x} < 0, \text{ 所以 } p(x) = (1-x)e^x - \ln x \text{ 为减函数,}$$

$$\text{又因为 } p(1) = 0, \text{ 所以 } (1-x_0)e^{x_0} - \ln x_0 < 0 \text{ 的解集为 } (1, +\infty). \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } y = e^x - \frac{1}{x} \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 单调递增, 所以 } a = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} \in (e-1, +\infty). \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } x \rightarrow 0, f(x) > 0; \quad x \rightarrow +\infty, f(x) > 0. \text{ (没有交代极限扣 1 分)}$$

$$\text{此时 } f(x) \text{ 有两个不同的零点, 即 } a > e-1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{(ii) 由于 } x_0 \in (1, +\infty), \text{ 所以 } x_0 > \ln x_0 \text{ 可化为 } m \leq \frac{e^{x_0} - \frac{1}{x_0}}{x_0 - \ln x_0}. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{e^x - \frac{1}{x}}{x - \ln x}, x \in (1, +\infty), \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } h'(x) &= \frac{(e^x + \frac{1}{x^2})(x - \ln x) - (e^x - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{x})}{(x - \ln x)^2} \\ &= \frac{e^x((x - \ln x) - (1 - \frac{1}{x})) + \frac{1}{x^2}(x - \ln x) + \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x})}{(x - \ln x)^2} \\ &= \frac{e^x(x - \ln x - 1 + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}(2x - \ln x - 1)}{(x - \ln x)^2} \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{由 } \ln x \leq x-1, \text{ 得 } x - \ln x - 1 \geq 0, \text{ 从而 } x - \ln x - 1 + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x} > 0. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = 2x - \ln x - 1, \quad g'(x) = 2 - \frac{1}{x} > 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{所以 } g(x) > g(1) = 2 - \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2 > 0, \text{ 所以 } 2x - \ln x - 1 > 0, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \frac{e^x(x - \ln x - 1 + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}(2x - \ln x - 1)}{(x - \ln x)^2} > 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } h'(x) > 0, \text{ 所以 } h(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 单调递增.} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

所以 $h(x) > h(1) = e - 1$,

故 $m \leq e - 1$ 8 分

解法二: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域 $(0, +\infty)$, $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - a$, 1 分

令 $g(x) = e^x - \frac{1}{x} - a$, 因为 $g'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$,

所以 $g(x) = e^x - \frac{1}{x} - a$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 即 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - a$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

由于 $f'(\frac{1}{|a|+e+1}) = e^{\frac{1}{|a|+e+1}} - \frac{1}{\frac{1}{|a|+e+1}} - a = e^{\frac{1}{|a|+e+1}} - (|a|+e+1) - a$

$< e - (|a|+e+1) - a < -|a| - a - 1 < 0$,

$f'(|a|+2) = e^{|a|+2} - \frac{1}{|a|+2} - a > |a|+2+1 - \frac{1}{|a|+2} - a > 0$, 2 分

所以存在唯一的实数 $x_0 \in (\frac{1}{|a|+2}, |a|+2)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = a$, 3 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增;

故 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的唯一极值点. 4 分

(2) (i) 由 (1), 可得 $f(x)_{\text{极小值}} = f(x_0)$.

① 当 $f(x_0) \geq 0$ 时, $f(x)$ 至多一个零点, 不合题意, 舍去; 1 分

② 当 $f(x_0) < 0$ 即 $e^{x_0} - \ln x_0 - ax_0 - 1 < 0$ 时,

由 $\begin{cases} e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = a, \\ e^{x_0} - \ln x_0 - ax_0 - 1 < 0, \end{cases}$ 消去 a , 得 $(1-x_0)e^{x_0} - \ln x_0 < 0$, 2 分

令 $p(x) = (1-x)e^x - \ln x$,

因为 $p'(x) = -xe^x - \frac{1}{x} < 0$, 所以 $p(x) = (1-x)e^x - \ln x$ 单调递减.

又因为 $p(1) = 0$, 所以 $(1-x_0)e^{x_0} - \ln x_0 < 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$ 3 分

又 $y = e^x - \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 所以 $a = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} \in (e-1, +\infty)$ 4 分

此时 $f(e^{-a}) = e^{e^{-a}} - \ln e^{-a} - ae^{-a} - 1 > 1 + a - ae^{-a} - 1 = a(1 - e^{-a}) > 0$

$$f(a+1) = e^{a+1} - \ln(a+1) - a(a+1) - 1 > (a+1)^2 - (a+1) - a(a+1) - 1 = 0$$

又 $a+1 - x_0 = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} - x_0 + 1 > 0$, 则 $e^{-a} < x_0 < a+1$,

由零点存在性定理, 存在 $x_1 \in (e^{-a}, x_0)$, $x_2 \in (x_0, a+1)$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

综上, 可得 $a > e-1$ 5 分

(ii) 将 $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = a$ 代入整理得 $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} \geq m(x_0 - \ln x_0)$ 1 分

令 $h(x) = e^x - \frac{1}{x} - m(x - \ln x)$,

(1) 当 $m \leq 0$ 时, 因为 $x > 1$, 所以 $e^x - \frac{1}{x} > 0$, $x > \ln x$,

所以 $h(x) = e^x - \frac{1}{x} - m(x - \ln x) > 0$, 显然成立; 2 分

(2) 当 $m > 0$ 时, $h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} - m(1 - \frac{1}{x}) = \frac{1}{x}[xe^x + \frac{1}{x} - m(x-1)]$,

令 $g(x) = xe^x + \frac{1}{x} - m(x-1)$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x^2} - m$.

显然 $g'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 所以 $g'(x) > 2e-1-m$ 3 分

① 当 $m \leq 2e-1$, 则 $g'(x) > 2e-1-m \geq 0$,

此时 $g(x) = xe^x + \frac{1}{x} - m(x-1)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

所以 $g(x) > e+1 > 0$, 即 $h'(x) > 0$ 4 分

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 所以 $h(x) > h(1) = e-1-m$,

欲使 $h(x) > 0$, 只需 $e-1-m \geq 0$, 即 $m \leq e-1$.

即 $0 < m \leq e-1$ 时, 符合题意. 5 分

② 当 $m > 2e-1$ 时, 则 $h(1) = e-1-m < 0$,

又 $h(2) = e^2 - \frac{1}{2} - m(2 - \ln 2)$,

(1) 若 $h(2) \geq 0$, 则 $h(1)h(2) \leq 0$,

又 $h(x) = e^x - \frac{1}{x} - m(x - \ln x)$ 在 $(1, +\infty)$ 连续,

则存在 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $h(x_0) < 0$, 这与 $h(x) \geq 0$ 矛盾; 6 分

(2) 若 $h(2) < 0$, 则 $h(x) \geq 0$ 显然不恒成立 7 分

综上, 实数 m 的取值范围为 $m \leq e - 1$ 8 分

解法三: (1) 及 (i) 同解法一或解法二; 4 分

(ii) 将 $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = a$ 代入整理得 $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} \geq m(x_0 - \ln x_0)$ 1 分

令 $h(x) = e^x - \frac{1}{x} - m(x - \ln x)$

① 当 $m > e - 1$ 时, $h(1) = e - 1 - m < e - 1 - (e - 1) = 0$ 2 分

又 $h(2) = e^2 - \frac{1}{2} - m(2 - \ln 2)$,

若 $h(2) \geq 0$, 则 $h(1)h(2) \leq 0$,

又 $h(x) = e^x - \frac{1}{x} - m(x - \ln x)$ 在 $(1, +\infty)$ 的图象是连续不断的,

故存在 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $h(x_0) < 0$, 这与 $h(x) \geq 0$ 矛盾; 3 分

若 $h(2) < 0$, 则 $h(x) \geq 0$ 显然不恒成立

所以 $m > e - 1$ 时, $h(x) = e^x - \frac{1}{x} - m(x - \ln x) > 0$ 不恒成立. 4 分

② 当 $m \leq e - 1$, 因为 $x > \ln x$, $h(x) \geq e^x - \frac{1}{x} - (e - 1)(x - \ln x)$, 5 分

令 $p(x) = e^x - \frac{1}{x} - (e - 1)(x - \ln x)$, $p(1) = 0$

又 $p'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} - (e - 1)(1 - \frac{1}{x})$, 6 分

因为 $x > 1$, 所以 $e^x > e$.

所以 $p'(x) > e + \frac{1}{x^2} - (e - 1)(1 - \frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} + \frac{e - 1}{x} + 1 > 0$

所以 $p(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 7 分

所以 $p(x) > p(1) = 0$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $m \leq e - 1$ 8 分

19. (17 分)

【命题意图】

本小题主要考查空间几何体、数列及其前 n 项和、不等式等知识；考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力等；考查数形结合思想、化归与转化思想、创新意识等；体现基础性、综合性、应用性与创新性，导向对直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注。

【试题解析】

解法一：(1) 正四面体 $ABCD$ 的表面积为 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6\sqrt{2})^2 = 72\sqrt{3}$ 1 分

依题意，得 $S_1 = 72\sqrt{3} \times \frac{3}{2} = 108\sqrt{3}$ ； 2 分

$S_2 = 108\sqrt{3} \times \frac{3}{2} = 162\sqrt{3}$ ； 3 分

正四面体 $ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times 18\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 72$ 4 分

$V_1 = 72 + 72 \times (\frac{1}{2})^3 \times 4 = 108$ ； 5 分

$V_2 = 108 + 72 \times (\frac{1}{2})^6 \times 6 \times 4 = 135$ 6 分

(无详细计算过程但答案正确均给分)

(2) (i) 依题意每次操作后，几何体的表面积变为上一次的 $\frac{3}{2}$ 倍，

故数列 $\{S_n\}$ 是首项为 $108\sqrt{3}$ ，公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列，

所以 $S_n = 72\sqrt{3} \cdot (\frac{3}{2})^n$ ； 1 分

依题意得， $V_n - V_{n-1} = 72 \times (\frac{1}{8})^n \times 6^{n-1} \times 4 (n \geq 2)$ ， 2 分

所以 $V_n = 108 + \sum_{k=2}^n 72 \times (\frac{1}{8})^k \times 6^{k-1} \times 4 = 108 + \sum_{k=2}^n 36 \times (\frac{3}{4})^{k-1}$
 $= 108 + 108[1 - (\frac{3}{4})^{n-1}] = 216 - 144 \times (\frac{3}{4})^n. (n \geq 2)$ ； 3 分

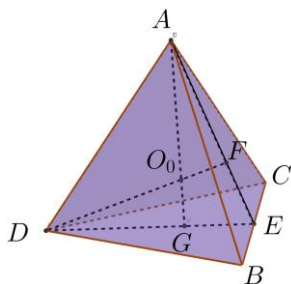
又当 $n=1$ 时， $216 - 144 \times (\frac{3}{4})^n = 108 = V_1$

故 $V_n = 216 - 144 \times (\frac{3}{4})^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 4 分

又 $\{S_n\}$ 为递增数列，且当 $n \rightarrow +\infty$ 时， $S_n \rightarrow +\infty$ ； $\{V_n\}$ 为递增数列，且当 $n \rightarrow +\infty$ 时，

$V_n \rightarrow 216$ ，所以当 $n \rightarrow +\infty$ 时， $\frac{S_n}{V_n} \rightarrow +\infty$ ，故由此解释，该结构吸附能力强. (或 $\frac{S_n}{V_n} \geq \frac{S_1}{V_1}$ ，故当 $n \rightarrow +\infty$ 时， $\frac{S_n}{V_n} \rightarrow +\infty$ ，此处说理合情合理即可酌情给分) 6 分

(ii) 存在， R 的最小值即为正四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $3\sqrt{3}$ 1 分
理由如下：



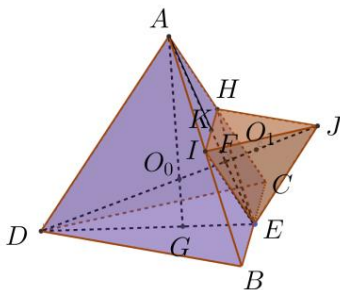
过点 A 作 $AG \perp$ 平面 BCD 于点 G ，因为四面体 $ABCD$ 为正四面体，故 G 为 $\triangle BCD$ 外心，即重心，内心，垂心，则 G 在 DE 上，且 $DG = 2GE$ ，同理得 F 在 AE 上，且 $AF = 2FE$ ，则 O_0 为四面体 $ABCD$ 的外接球球心和内切球球心，设四面体棱长为 a ， $AO_0 = DO_0 = R_0, GO_0 = FO_0 = r_0$ ，则 $DG = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，所以 $AG = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，则由 $(\frac{\sqrt{6}}{3}a - R_0)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2 = R_0^2$ ，解得 $R_0 = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ，所以 $r_0 = \frac{\sqrt{6}}{3}a - \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ 。

记第 1 次操作后构造的任一正四面体 T_1 (即四面体 $EHIJ$) 的外接球球心为 O_1 ，连结 O_0O_1 。

则 $JO_1 \perp$ 平面 EHI ，设垂足为 F' ， $AE \cap HI = K$ ，则 F' 为 $\triangle EHI$ 的外心，重心，垂心，故

F' 在 EK 上，且 $EF = \frac{2}{3}EK = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}AE = \frac{1}{3}AE$ ，故 F' 与 F 重合，所以 D, O_0, O_1, F, J 共线，

则 $O_0O_1 \perp$ 平面 EHI ，故 $O_0O_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}a + \frac{\sqrt{6}}{12} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{8}a$ 。



记第2次操作后在 T_1 上构造的任一正四面体 T_2 的外接球球心为 O_2 ，连结 O_1O_2 ，依次类推，

第 n 次操作后在 T_{n-1} 上构造的任一正四面体 T_n 的外接球球心为 O_n ，其任意顶点为 P_n ，连

结 $O_{n-1}O_n$ ， O_nP_n 。则依题意得：

$$|\overrightarrow{O_0O_1}| = \frac{\sqrt{6}}{8} \times 6\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad |\overrightarrow{O_nP_n}| = 6\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2^n}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$|\overrightarrow{O_{n-1}O_n}| = \frac{\sqrt{6}}{12} \times 6\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{6}}{12} \times 6\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{6}}{12} \times 6\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \geq 1),$$

$\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\text{从而 } |\overrightarrow{O_0O_1}| + |\overrightarrow{O_1O_2}| + |\overrightarrow{O_2O_3}| + \dots + |\overrightarrow{O_{n-1}O_n}| + |\overrightarrow{O_nP_n}| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2^n} = 3\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{O_0P_n} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \dots + \overrightarrow{O_{n-1}O_n} + \overrightarrow{O_nP_n},$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{O_0P_n}| \leq |\overrightarrow{O_0O_1}| + |\overrightarrow{O_1O_2}| + |\overrightarrow{O_2O_3}| + \dots + |\overrightarrow{O_{n-1}O_n}| + |\overrightarrow{O_nP_n}| = 3\sqrt{3}, \text{ 故 } |O_0P_n| \leq 3\sqrt{3}, \text{ 即无论第几次}$$

迭代， F_n 的任意顶点到 O_0 的距离都不会超过正四面体 $ABCD$ 的外接球半径，

$$\text{又 } O_0P_1 = 3\sqrt{3},$$

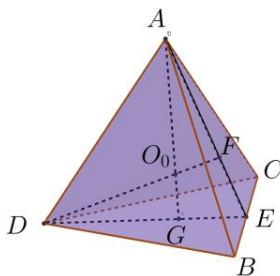
$$\text{故 } R \text{ 的最小值即为 } 3\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

解法二：（1）同解法一； $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

（2）（i）同解法一； $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

（ii）存在， R 的最小值即为正四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $3\sqrt{3}$ 。 $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

理由如下：



过点 A 作 $AG \perp$ 平面 BCD 于点 G ，因为四面体 $ABCD$ 为正四面体，

故 G 为 $\triangle BCD$ 外心，即重心，内心，垂心，则 G 在 DE 上，且 $DG = 2GE$ ，

同理得 F 在 AE 上，且 $AF = 2FE$ ，则 O_0 为四面体 $ABCD$ 的外接球球心和内切球球心，

设四面体棱长为 a ， $AO_0 = DO_0 = R_0, GO_0 = FO_0 = r_0$ ，则 $DG = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$ ，

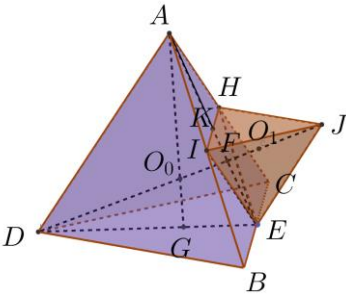
所以 $AG = \frac{\sqrt{6}}{3} a$ ，则由 $(\frac{\sqrt{6}}{3} a - R_0)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3} a)^2 = R_0^2$ ，解得 $R_0 = \frac{\sqrt{6}}{4} a$ ，

所以 $r_0 = \frac{\sqrt{6}}{3} a - \frac{\sqrt{6}}{4} a = \frac{\sqrt{6}}{12} a$ 。

记第 1 次操作后构造的任一正四面体 T_1 （即四面体 $EHIJ$ ）的外接球球心为 O_1 ，连结 $O_0 O_1$ 。则 $JO_1 \perp$ 平面 EHI ，设垂足为 F' ， $AE \cap HI = K$ ，则 F' 为 $\triangle EHI$ 的外心，重心，垂心，

故 F' 在 EK 上，且 $EF = \frac{2}{3} EK = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} AE = \frac{1}{3} AE$ ，故 F' 与 F 重合，

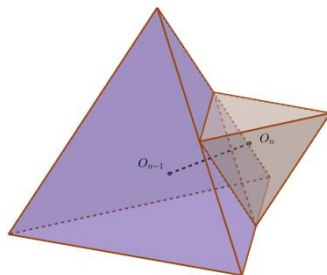
所以 D, O_0, O_1, F, J 共线，则 $O_0 O_1 \perp$ 平面 EHI ，故 $O_0 O_1 = \frac{\sqrt{6}}{12} a + \frac{\sqrt{6}}{12} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{8} a$ 。



以此类推，几何体 F_{n-1} 最新构造的任一四面体 T_{n-1} 及其在 F_n 上对应的四面体 T_n ，棱长分别为 x 和 $\frac{x}{2}$ ，其外接球球心为别为 O_{n-1} 和 O_n ，半径为 R_{n-1} 和 R_n ，记正四面体 $ABCD$ 的中心

为 O_0 ，则 $O_{n-1} O_n = \frac{\sqrt{6}}{8} x$ 。..... 2 分

因为 $R_n = \frac{\sqrt{6}}{8} x$ ， $R_{n-1} = \frac{\sqrt{6}}{4} x$ ，所以 $R_{n-1} - R_n = \frac{\sqrt{6}}{8} x$ ，故 $R_{n-1} - R_n = O_{n-1} O_n$ 。..... 3 分



记球 O_n 体内（含表面）所有点 P 的集合为 M_n ，

因为 $PO_{n-1} \leq PO_n + O_n O_{n-1} \leq R_n + R_{n-1} - R_n = R_{n-1}$ ，所以 $M_n \subseteq M_{n-1} (n \geq 1)$ ，…………… 4 分

故 $M_{n-1} \subseteq M_{n-2}, M_{n-2} \subseteq M_{n-3}, \dots, M_1 \subseteq M_0$ ，所以 $M_n \subseteq M_0 (n \geq 1)$ ，

因为球 O_n 为四面体的外接球，即对 T_n 上的任一点 P_n ，都有 $P_n \in M_n (n \geq 1)$ ，

所以 $P_n \in M_0$ ，即 $O_0 P_n \leq R_0 = 3\sqrt{3}$ ，

故 R 的最小值即为正四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $3\sqrt{3}$ 。…………… 5 分