

机密 ★ 考试结束前

温州市普通高中 2026 届高三第二次适应性考试

数学试题卷

2026. 4

本试卷共 4 页，19 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

考生须知：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、准考证号填写在答题卷上，将条形码横贴在答题卷右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卷上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卷各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卷的整洁，不要折叠。不要弄破。

选择题部分（共 58 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$ ，那么 $\neg p$ 为（▲）
A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$ B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$ D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$
2. 双曲线 $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ 的实轴长为（▲）
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$
3. 若 $(1-x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_5x^5$ ，则 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$ 的值为（▲）
A. 0 B. 16 C. 32 D. 64
4. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (\omega > 0)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内恰有一个极值点，则 ω 可能的取值为（▲）
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4
5. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_5 - a_1 = 15$ ， $a_4 - a_2 = 6$ ，则 $a_3 =$ （▲）
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

6. 甲、乙、丙、丁、戊五名同学参加某项竞赛，决出了第一名到第五名的5个名次. 甲、乙两人去询问成绩，组织者对甲说：“很遗憾，你和乙都未拿到冠军.” 对乙说：“你当然不会是最差的.” 从组织者的回答分析，这五名同学的名次排列的种数为 (▲)

- A. 24 B. 54 C. 72 D. 120

7. 已知圆台的上下底面的半径分别为1和3，圆台的侧面积为 16π ，若圆台内接于球 O ，则球 O 的半径为 (▲)

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ D. $\sqrt{21}$

8. 已知 O 为坐标原点，直线 l 与 x 轴交于 Q 点，与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点，且

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4, \text{ 则 (▲)}$$

- A. $\frac{1}{|QA|} + \frac{1}{|QB|} = 1$ B. $\frac{1}{|QA|^2} + \frac{1}{|QB|^2} = 1$ C. $\frac{1}{|QA|} + \frac{1}{|QB|} = \frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{|QA|^2} + \frac{1}{|QB|^2} = \frac{1}{4}$

二、选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 有一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_9$ ，且 $x_1 < x_2 < \dots < x_9$ ，平均数为 $\bar{x}$ ，中位数为 M ，现对这组数

据做如下变换： $y_i = x_i + i$ ($i = 1, 2, \dots, 9$)，得到一组新数据 $y_1, y_2, \dots, y_9$ ，则下列说法正确的是 (▲)

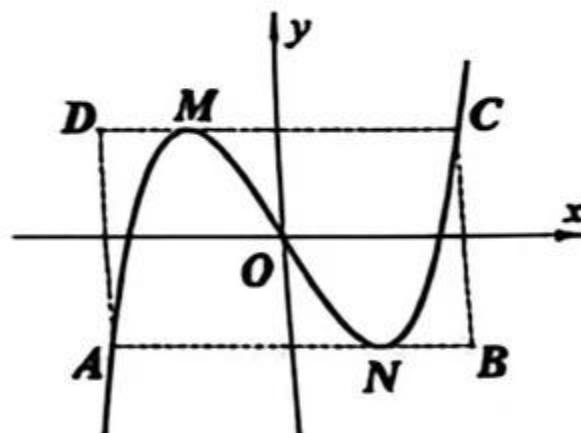
- A. 新数据的极差等于原数据的极差 B. 新数据的平均数等于 $\bar{x} + 5$
C. 新数据的方差大于原数据的方差 D. 新数据的中位数等于 $M + 5$

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3a^2x$ ($a > 0$) 的极大值点和极小值点分别记为 x_1 和 x_2 ，过点

$M(x_1, f(x_1)), N(x_2, f(x_2))$ 分别作 x 轴的平行线交 $f(x)$ 的图象于点 C, A ，过点 M, N 构造

矩形 $ABCD$ ，如图所示，则下列说法正确的是 (▲)

- A. $x_2 - x_1 = 2a$
B. 点 M 为线段 CD 的三等分点
C. 当 $a = 1$ 时，四边形 $ABCD$ 为正方形
D. 当 $a = 1$ 时，四边形 $AMCN$ 为菱形



第10题图

11. 若曲线 Γ 满足条件: 存在正数 a 和点 $P \notin \Gamma$, 对于任意点 $A \in \Gamma$, 总存在点 $B \in \Gamma$, 使得 $|PA| \cdot |PB| = a$, 则称该曲线是“ a -封闭曲线”, 则下列曲线是“ a -封闭曲线”的是 (▲)

A. $2x^2 + y^2 = 1$

B. $x^2 + xy = 1$

C. $x^2 + y^2 = \sin^2 x + \cos^2 y$

D. $\sin(x+2y) = 2x - y$

非选择题部分 (共 92 分)

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分. 把答案填在题中的横线上.

12. $\text{card}(A)$ 表示有限集合 A 中元素的个数, 已知 $\text{card}(A \cup B) = 25$, $\text{card}(A) = 22$, $\text{card}(B) = 20$, 则 $\text{card}(A \cap B) = \underline{\quad \text{▲} \quad}$.

13. 若 i 为虚数单位, 则 $i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 10i^{10} = \underline{\quad \text{▲} \quad}$.

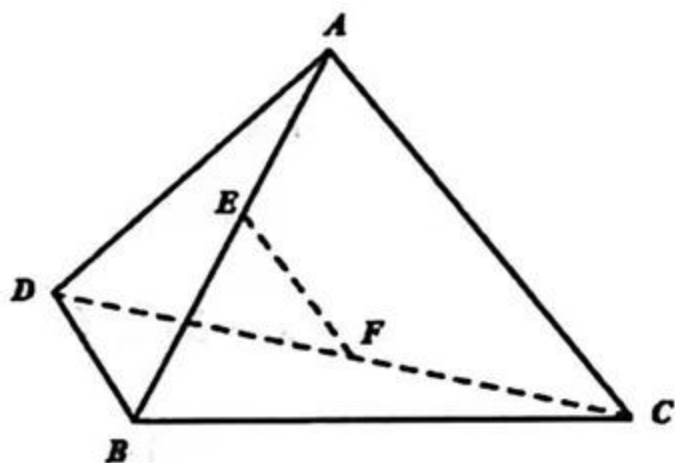
14. 已知圆 $O_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 与圆 $O_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$, 则圆 O_1, O_2 的公切线最多有 ▲ 条; 该情况下, 若这些公切线交点中的三个落在 y 轴上, 则另外三个交点围成的三角形面积是 ▲.

四、解答题: 本大题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明. 证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分) 如图所示, 三棱锥 $A-BCD$ 中, $BC \perp BD$, $AD \perp BD$, 且 $BC = \sqrt{2}$, $BD = AD = 1$, E, F 分别为 AB 和 CD 的中点.

(1) 证明: BD 上存在点 P , 使得 $AD \parallel$ 面 PEF ;

(2) 当 $\langle \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\pi}{4}$ 时, 求二面角 $B-AC-D$ 的正弦值.



第 15 题图

16. (本小题满分 15 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + ax + \frac{b}{x}$, $b \in (0, 1)$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 若 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求 b 的值;

(2) 若 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 求实数 a 的取值范围.

17. (本小题满分 15 分) 在我国深海万米探测工程中, “奋斗者”号深潜器需在极端高压环境下完成姿态校准. 工程师设计了一套算法: “向正方向姿态修正一次”记为 +1 个单位, 向“负方向姿态修正一次”记为 -1 个单位.

(1) 求 6 次姿态修正后达到 +2 个单位的概率;

(2) 以下三种情况将导致校准流程终止:

情况 1: 累计姿态偏移达到 +2 个单位 (校准到位);

情况 2: 累计姿态偏移达到 -2 个单位 (需紧急干预);

情况 3: 完成 6 次姿态修正 (能源耗尽).

(i) 求在能源耗尽的条件下校准到位的概率;

(ii) 设随机变量 X 表示终止时姿态修正的次数, 求 $E(X)$.

18. (本小题满分 17 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且

$$\frac{\sin(A+C)}{\sin(A-C)} = \frac{a^2 + c^2 + ac}{a^2 - c^2}.$$

(1) 求 B ;

(2) 若 $c=1$, 点 D 在 AC 上, 直线 BD 上一点 P 满足 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CP}$,

在点 C 和点 D 的变化过程中,

(i) 求 $PA^2 + PC^2$ 的最小值;

(ii) 当 $PA^2 + PC^2$ 最小时, 求 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的值.

19. (本小题满分 17 分) 已知曲线 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 与点 $P(\sqrt{5}, 0)$, O 为原点, 动点 $Q \in E$,

且 $\angle OPQ$ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$.

(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 已知有 $n+1$ 个点 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ 按逆时针顺序依次在 E 上, 且 $A_0(2, 0)$, $A_n(-2, 0)$.

(i) 当 A_1, A_2 关于 y 轴对称, 且 $\triangle OA_1A_2$ 的面积为 1 时, 求直线 A_2A_3 的斜率;

(ii) 当 $\triangle OA_{k-1}A_k (1 \leq k \leq n)$ 的面积都相等时, 记多边形 $A_0A_1A_2 \dots A_n$ 的周长为 C_n . 若对于

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $C_n < \lambda$, 求整数 λ 的最小值.

浙江省温州市普通高中 2026 届高三二模

数学试题

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，每小题只有一个选项符合要求

1. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$, 那么 p 为

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 > 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 > 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$

【答案】A

【解析】 $\neg p: \neg(\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \leq 0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

2. 双曲线 $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ 的实轴长为

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】 $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ 可化为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, $\therefore a^2 = 2, a = \sqrt{2}$, $\therefore$ 实轴长 $= 2a = 2\sqrt{2}$.

3. 若 $(1-x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_5x^5$, 则 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$ 的值为

- A. 0 B. 16 C. 32 D. 64

【答案】C

【解析】令 $f(x) = (1-x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_5x^5$, 则

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = f(-1) = [1 - (-1)]^5 = 2^5 = 32.$$

4. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内恰有一个极值点, 则 ω 可能的取值为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

【答案】C

【解析】 $f'(x) = \omega \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$,

极值点满足 $\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \omega x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{4} + k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z}$.

由 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 得 $0 < \frac{\frac{\pi}{4} + k\pi}{\omega} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4} + k < \frac{\omega}{2}$. 区间内恰有一个极值点, 故仅有 $k = 0$ 满足,

$0 < \frac{\omega}{2} - \frac{1}{4} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \omega \leq \frac{5}{2}$. 四个选项中只有 $\omega = 2$ 满足.

5. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 - a_1 = 15, a_4 - a_2 = 6$, 则 $a_3 =$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

【答案】D

【解析】设公比为 q , 则 $q > 0$, 且 $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$a_1(q^4 - 1) = 15, a_1(q^3 - q) = 6.$$

$$\frac{q^4 - 1}{q^3 - q} = \frac{15}{6} \Rightarrow \frac{(q^2 + 1)(q^2 - 1)}{q(q^2 - 1)} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{q^2 + 1}{q} = \frac{5}{2}. 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = 2 \text{ 或 } q = \frac{1}{2}.$$

又 $a_1(q^3 - q) = 6 > 0$, 且 $a_1 > 0, \therefore q > 1$, 故 $q = 2, a_1(8 - 2) = 6 \Rightarrow a_1 = 1$,

$$\therefore a_3 = a_1 q^2 = 4.$$

6. 甲、乙、丙、丁、戊五名同学参加某项竞赛, 决出了第一名到第五名的 5 个名次. 甲、乙两人去询问成绩, 组织者对甲说: “很遗憾, 你和乙都未拿到冠军.” 对乙说: “你当然不会是最差的.” 从组织者的回答分析, 这五名同学的名次排列的种数为

- A. 24 B. 54 C. 72 D. 120

【答案】B

【解析】1° 甲最后一位有 $C_3^1 A_3^3 = 18$ 个结果;

2° 甲不是最后一位有 $C_3^1 C_2^1 A_3^3 = 36$ 个结果; $18 + 36 = 54$.

7. 已知圆台的上下底面的半径分别为 1 和 3, 圆台的侧面积为 16π , 若圆台内接于球 O , 则球 O 的半径为

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ D. $\sqrt{21}$

【答案】C

【解析】设圆台母线长为 l , 高为 h , 则 $\pi(1+3)l = 16\pi \Rightarrow l = 4$.

$$\text{又 } l^2 = h^2 + (3-1)^2 \Rightarrow 16 = h^2 + 4 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}.$$

作圆台的轴截面, 得一等腰梯形, 其上、下底长分别为 2, 6, 高为 $2\sqrt{3}$.

在截面内建系: 下底端点为 $(-3, 0), (3, 0)$, 上底端点为 $(-1, h), (1, h)$,

设外接圆圆心为 $(0, c)$, 半径为 r , 则 $r^2 = 3^2 + c^2 = 1^2 + (h - c)^2$.

代入 $h = 2\sqrt{3}$, $9 + c^2 = 1 + (2\sqrt{3} - c)^2 = 13 - 4\sqrt{3}c + c^2$,

$$4\sqrt{3}c = 4 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot r^2 = 9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}, r = \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

8. 已知 O 为坐标原点, 直线 l 与 x 轴交于 Q 点, 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -4$, 则

- A. $\frac{1}{|QA|} + \frac{1}{|QB|} = 1$ B. $\frac{1}{|QA|^2} + \frac{1}{|QB|^2} = 1$
C. $\frac{1}{|QA|} + \frac{1}{|QB|} = \frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{|QA|^2} + \frac{1}{|QB|^2} = \frac{1}{4}$

【答案】D

【解析】 $Q(n, 0)$, 设 $AB: x = my + n, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\begin{cases} x = my + n \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{消 } x \text{ 可得 } y^2 - 4my - 4n = 0, y_1 y_2 = -4n, x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} = \frac{16n^2}{16} = n^2$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = n^2 - 4n = -4, \therefore n = 2, \therefore y_1 y_2 = -8, x_1 x_2 = 4$$

$$|QA| = \sqrt{1+m^2} |y_1|, |QB| = \sqrt{1+m^2} |y_2|$$

$$\frac{1}{|QA|} + \frac{1}{|QB|} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}|y_1|} + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}|y_2|} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \frac{|y_1| + |y_2|}{|y_1 y_2|}$$

$$= \frac{\sqrt{(y_1 - y_2)^2}}{8\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}}{8\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{16m^2+32}}{8\sqrt{m^2+1}} \text{ 非定值}$$

$$\frac{1}{QA^2} + \frac{1}{QB^2} = \frac{1}{(m^2+1)y_1^2} + \frac{1}{(m^2+1)y_2^2} = \frac{1}{m^2+1} \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2}{y_1^2 y_2^2} = \frac{1}{m^2+1} \frac{16m^2+16}{64} = \frac{1}{4}.$$

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 有一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_9$, 且 $x_1 < x_2 < \dots < x_9$, 平均数为 $\bar{x}$, 中位数为 M , 现对这组数据做如下变换:

$y_i = x_i + i (i = 1, 2, \dots, 9)$, 得到一组新数据 $y_1, y_2, \dots, y_9$, 则下列说法正确的是

- A. 新数据的极差等于原数据的极差 B. 新数据的平均数等于 $\bar{x} + 5$
C. 新数据的方差大于原数据的方差 D. 新数据的中位数等于 $M + 5$

【答案】BCD

【解析】原极差 $x_9 - x_1$, 后来极差 $x_9 + 9 - (x_1 + 1) = x_9 - x_1 + 8 \neq x_9 - x_1$, A 错.

原平均数 $\bar{x}$, 后平均数 $\bar{x} + \frac{1+2+3+\cdots+9}{9} = \bar{x} + 5$, B 对.

现离散程度比之前离散程度大, 即现方差比原方差大, C 对.

原中位数为 M , 现中位数 $M + 5$, D 对.

方法二: 由 $y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i) + 1 > 0$, 得 $y_1 < y_2 < \cdots < y_9$.

对 A, $y_9 - y_1 = (x_9 + 9) - (x_1 + 1) = x_9 - x_1 + 8 \neq x_9 - x_1$, A 错.

对 B, $\bar{y} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 y_i = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i + \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 i\bar{x} + 5$, B 对.

对 C, $\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (y_i - \bar{y})^2 - \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 [(x_i - \bar{x}) + (i-5)]^2 - \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2$
 $= \frac{2}{9} \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})(i-5) + \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (i-5)^2 = \frac{2}{9} \sum_{i=1}^9 x_i(i-5) + \frac{60}{9}$
 $= \frac{2}{9} [4(x_9 - x_1) + 3(x_8 - x_2) + 2(x_7 - x_3) + (x_6 - x_4)] + \frac{60}{9} > 0$, 故新数据的方差大于原

数据的方差, C 对.

对 D, $y_5 = x_5 + 5 = M + 5$, D 对.

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3a^2x (a > 0)$ 的极大值点和极小值点分别记为 x_1 和 x_2 , 过点 $M(x_1, f(x_1))$, $N(x_2, f(x_2))$ 分别作 x 轴的平行线交 $f(x)$ 的图象于点 C, A , 过点 M, N 构造矩形 $ABCD$, 如图所示, 则下列说法正确的是

A. $x_2 - x_1 = 2a$

B. 点 M 为线段 CD 的三等分点

C. 当 $a = 1$ 时, 四边形 $ABCD$ 为正方形

D. 当 $a = 1$ 时, 四边形 $AMCN$ 为菱形

【答案】AC

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$, $x < -a \Rightarrow f'(x) > 0$,

$-a < x < a \Rightarrow f'(x) < 0$, $x > a \Rightarrow f'(x) > 0$, 故 $x_1 = -a, x_2 = a$, 则 $x_2 - x_1 = 2a$, A 对.

$M(-a, 2a^3), N(a, -2a^3)$. 由 $x^3 - 3a^2x = 2a^3 \Rightarrow (x+a)^2(x-2a) = 0$, 得

$C(2a, 2a^3)$; 由 $x^3 - 3a^2x = -2a^3 \Rightarrow (x-a)^2(x+2a) = 0$, 得 $A(-2a, -2a^3)$.

故 $B(2a, -2a^3), D(-2a, 2a^3)$. 对 B, $CD = 4a, DM = a, MC = 3a$,

$DM : MC = 1 : 3$, B 错.

对 C, 当 $a=1$ 时, $AB = 4, AD = 4$, 故四边形 $ABCD$ 为正方形, C 对.

对 D, 当 $a=1$ 时, $A(-2, -2), M(-1, 2), C(2, 2), N(1, -2), AM = \sqrt{17}, MC = 3, CN = \sqrt{17}, NA = 3$, 四边形 $AMCN$ 不是菱形, D 错.

11. 若曲线 Γ 满足条件: 存在正数 a 和点 $P \notin \Gamma$, 对于任意点 $A \in \Gamma$, 总存在点 $B \in \Gamma$, 使得 $|PA| \cdot |PB| = a$, 则称该曲线是“ a - 封闭曲线”, 则下列曲线是“ a - 封闭曲线”的是

A. $2x^3 + y^3 = 1$

B. $x^2 + xy = 1$

C. $x^2 + y^2 = \sin^2 x + \cos^2 y$

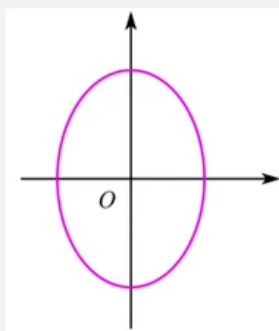
D. $\sin(x+2y) = 2x - y$

【答案】 AC

【解析】 方法一: 对于 A, 取 $P(0, 0), |AP|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}, |AP|_{\max} = 1$,

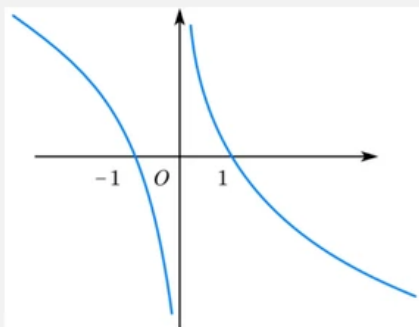
令 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 由 $|PA| \cdot |PB| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 对 $\forall A \in \Gamma, |AP| \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 此时

$|PB| = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{|PA|} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ 符合, A 正确.



对于 B, 显然 $x \neq 0, \therefore y = \frac{1-x^2}{x} = \frac{1}{x} - x$, 作出该函数图象, $\because$ 该图象是无界的, 当 $PA \rightarrow +\infty$ 时, 但对给定的

$P \notin \Gamma$ 而言, $|PB|_{\min}$ 是一个具体的正数, $|PA| \cdot |PB| \rightarrow +\infty$, 矛盾, B 错.



对于 C, $x^2 + y^2 = \sin^2 x + \cos^2 y$, 它关于 x 轴, y 轴及坐标原点均对称且 $x^2 + y^2 \leq 2$, $\therefore$ 该曲线 Γ 上的点均在 $\odot: x^2 + y^2 = 2$ 的内部, 图象是有界的, 取 $P(0, 0)$, 设 $|PA|_{\min} = \lambda, |PA|_{\max} = \mu$, 取 $a = \lambda\mu$, 由

$|PA| \cdot |PB| = \lambda\mu$, 对 $\forall A \in \Gamma$, $PA \in [\lambda, \mu]$, 此时 $PB = \frac{\lambda\mu}{PA} \in [\lambda, \mu]$, C 正确.

对于 D, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = 2x - \sin(x+2y) \rightarrow +\infty$ ($\because 2x \rightarrow +\infty, \sin(x+2y) \in [-1, 1]$) $\therefore$ 曲线 $\sin(x+2y) = 2x - y$ 图象无界, 当 $PA \rightarrow +\infty$ 时, 对给定的 $P \notin \Gamma$ 而言, $|PB|_{\min}$ 是一个具体的正数, 此时 $|PA| \cdot |PB| \rightarrow +\infty$, 这与 $|PA| \cdot |PB| = a, a$ 为有限数矛盾, D 错.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

12. $\text{card}(A)$ 表示有限集合 A 中元素的个数, 已知 $\text{card}(A \cup B) = 25, \text{card}(A) = 22, \text{card}(B) = 20$, 则 $\text{card}(A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 17

【解析】 $\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B) = 22 + 20 - 25 = 17$.

13. 若 i 为虚数单位, 则 $i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 10i^{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-6 + 5i$

【解析】 设 $s = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 10i^{10}$,

则 $s = (i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4) + (5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8) + (9i^9 + 10i^{10})$.

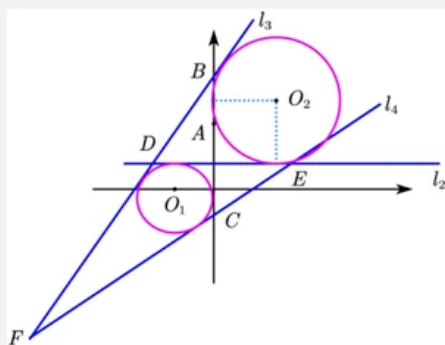
$i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = i - 2 - 3i + 4 = 2 - 2i, 5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8 = 5i - 6 - 7i + 8 = 2 - 2i,$

$9i^9 + 10i^{10} = 9i - 10$. $\therefore s = (2 - 2i) + (2 - 2i) + (9i - 10) = -6 + 5i$.

14. 已知圆 $O_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 与圆 $O_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$, 则圆 O_1, O_2 的公切线最多有 条; 该情况下, 若这些公切线交点中的三个落在 y 轴上, 则另外三个交点围成的三角形面积是 .

【答案】 $4; 2\sqrt{17}$

【解析】公切线最多有四条,且 $\odot O_2$ 半径为 2 时, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的两条公切线一条为 y 轴 ($x=0$) (记为 l_1), 另一条为 $y=1$ (记为 l_2), 另两条为 l_3, l_4 , 设两侧公切线满足 $l_1 \cap l_2, l_3 \cap l_1, l_4 \cap l_1$ 均在 y 轴, 方程为 $y=kx+b$,



$$O_1(-1,0), O_2(2,3), \begin{cases} \frac{|-k+b|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \\ \frac{|2k+b-3|}{\sqrt{k^2+1}}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\frac{9+\sqrt{17}}{8} \\ b=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k=\frac{9-\sqrt{17}}{8} \\ b=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } l_3: y = \frac{9+\sqrt{17}}{8}x + \frac{3+\sqrt{17}}{2}, l_4: y = \frac{9-\sqrt{17}}{8}x + \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{直线 } O_1O_2: y=x+1, \therefore y_F=-3, x_D = \frac{-4(1+\sqrt{17})}{9+\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}-1}{2},$$

$$x_E = \frac{4(\sqrt{17}-1)}{9-\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}+1}{2}, \therefore DE = \sqrt{17}, \therefore S_{\triangle FDE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times 4 = 2\sqrt{17}.$$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. 如图所示，三棱锥 $A-BCD$ 中， $BC \perp BD$ ， $AD \perp BD$ ，且 $BC = \sqrt{2}, BD = AD = 1$, E, F 分别为 AB 和 CD 的中点.

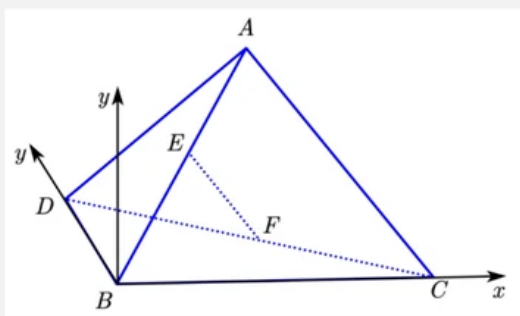
(1) 证明: BD 上存在点 P ，使得 $AD \parallel$ 面 PEF ；

(2) 当 $\langle \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\pi}{4}$ 时，求二面角 $B-AC-D$ 的正弦值.

【解析】(1) 证明: 取 BD 中点 P , $\because E$ 为 AB 中点, $\therefore AD \parallel PE$

$\therefore AD \not\subset$ 平面 $PEF, PE \subset$ 平面 $PEF, \therefore AD \parallel$ 平面 PEF .

(2)如图建系, $\therefore B(0,0,0), C(\sqrt{2},0,0), D(0,1,0)$, 设 $A(m,1,n)$



$$\overrightarrow{DA} = (m, 0, n), \overrightarrow{BC} = (\sqrt{2}, 0, 0)$$

$$\therefore \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\overline{DA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{DA}| |\overline{BC}|} = \frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = n > 0$$

而 $|AD| = \sqrt{m^2 + n^2} = 1 \Rightarrow m = n = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\overline{BC} = (\sqrt{2}, 0, 0), \overline{AC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \overline{CD} = (-\sqrt{2}, 1, 0)$$

设平面 ABC 与平面 ACD 的一个法向量分别为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\therefore \begin{cases} \sqrt{2}x_1 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{n}_1 = (0, 1, -\sqrt{2}),$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_2 = 0 \\ -\sqrt{2}x_2 + y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{n}_2 = (1, \sqrt{2}, -1)$$

设二面角 $B-AC-D$ 的平面角为 θ , $\therefore |\cos\theta| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

16. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax + \frac{b}{x}, b \in (0, 1)$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 若 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求 b 的值;

(2)若 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)当 $a=0$ 时, $f(x)=\ln x+\frac{b}{x}, f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{b}{x^2}=\frac{x-b}{x^2}$

当 $0 < x < b$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > b$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $x=b$ 处取得最小值.

$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

$\therefore f(x)_{\min} = f(b) = \ln b + 1$

$\therefore f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty), \ln b + 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{e}$

(2) $f'(x) = \frac{1}{x} + a - \frac{b}{x^2} = \frac{ax^2 + x - b}{x^2}$

$\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点, $f'(1) = 0 \Rightarrow a + 1 - b = 0 \Rightarrow a = b - 1$

代入得 $f'(x) = \frac{(b-1)x^2 + x - b}{x^2} = \frac{(x-1)[(b-1)x + b]}{x^2}$

要使 $x=1$ 为极小值点, 则 $x=1$ 附近应有 $(b-1)x + b > 0, 2b - 1 > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}$

又 $\because b \in (0, 1), \frac{1}{2} < b < 1, \therefore a = b - 1 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

故 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

17.在我国深海万米探测工程中,“奋斗者”号深潜器需在极端高压环境下完成姿态校准.工程师设计了一套算法:“向正方向姿态修正一次”记为+1个单位,向“负方向姿态修正一次”记为-1个单位.

(1)求6次姿态修正后达到+2个单位的概率;

(2)以下三种情况将导致校准流程终止:

情况1:累计姿态偏移达到+2个单位(校准到位);

情况2:累计姿态偏移达到-2个单位(需紧急干预);

情况3:完成6次姿态修正(能源耗尽).

(i)求在能源耗尽的条件下校准到位的概率;

(ii)设随机变量 X 表示终止时姿态修正的次数,求 $E(X)$.

【解析】

(1)6次姿态修正达到+2,说明4次向正方向,2次向负方向

$$\therefore P = C_6^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}.$$

(2)(i) 记事件 A 为能源耗尽, 事件 B 为校准到位

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\left[C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left[C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2} = \frac{1}{4}.$$

(ii) X 的所有可能取值为 2, 4, 6

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, P(X=4) = C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4},$$

$$P(X=6) = \left[C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \frac{1}{4}$$

$\therefore X$ 的分布列如下:

X	2	4	6
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\therefore E(X) = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{2}.$$

18. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\sin(A+C)}{\sin(A-C)} = \frac{a^2+c^2+ac}{a^2-c^2}$

(1) 求 B ;

(2) 若 $c=1$, 点 D 在 AC 上, 直线 BD 上一点 P 满足 $\vec{CB} \cdot \vec{CP} = \vec{CD} \cdot \vec{CP}$, 在点 C 和点 D 的变化过程中,

(i) 求 $PA^2 + PC^2$ 的最小值;

(ii) 当 $PA^2 + PC^2$ 最小时, 求 $\vec{BA} \cdot \vec{BD}$ 的值.

【解析】(1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\text{得 } \frac{\sin(A+C)}{\sin(A-C)} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 C + \sin A \sin C}{\sin^2 A - \sin^2 C}.$$

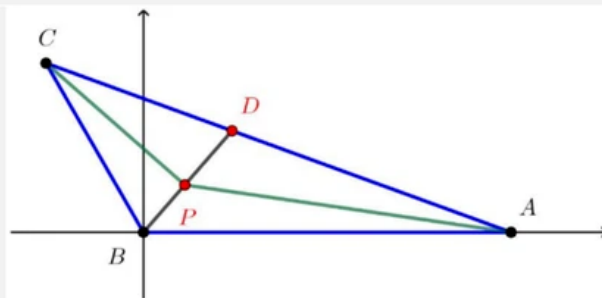
又 $\sin^2 A - \sin^2 C = \sin(A+C) \sin(A-C)$, 故 $\sin^2(A+C) = \sin^2 A + \sin^2 C + \sin A \sin C$.

于是 $\sin^2(A+C) - \sin^2 A - \sin^2 C = 2 \sin A \sin C \cos(A+C) = \sin A \sin C$.

$$A + C = \pi - B \Rightarrow -2\sin A \sin C \cos B = \sin A \sin C .$$

$$\sin A \sin C > 0 \Rightarrow \cos B = -\frac{1}{2} . \therefore B = \frac{2\pi}{3} .$$

$$(2) \text{取坐标系: } B(0,0), A(1,0), C\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), a = BC > 0 .$$



$$\text{设 } \angle ABD = \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}, \overrightarrow{BP} = \lambda (\cos \varphi, \sin \varphi) .$$

$$\text{由 } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CP}, \text{得 } (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 .$$

又 $P \in BD$, 故 $CP \perp BD$.

$$\text{于是 } (\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC}) \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi) = 0 \Rightarrow \lambda - a \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) = 0 \Rightarrow \lambda = a \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) .$$

$$\text{记 } s = PA^2 + PC^2, \text{则 } s = |\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC}|^2 .$$

$$\text{又 } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BP} = a \lambda \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) = \lambda^2 = |\overrightarrow{BP}|^2 ,$$

$$\text{由积化和差, } 2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \cos \varphi = \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \left(2\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \cos \left(2\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \varphi .$$

$$\text{由积化和差, } 2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \cos \varphi = \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \left(2\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \cos \left(2\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) ,$$

$$\text{故 } s = 1 + a^2 + \frac{a}{2} - a \cos \left(2\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) \geq 1 + a^2 - \frac{a}{2} = \left(a - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} \geq \frac{15}{16} .$$

$$\therefore s_{\min} = \frac{15}{16} . \text{取等当且仅当 } \begin{cases} \cos \left(2\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) = 1 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}, a = \frac{1}{4} .$$

(3)当 取最小时, $BC = \frac{1}{4}, \angle ABD = \frac{\pi}{3}$. 故 $A(1,0), C\left(-\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

直线 BD 方程为 $y = \sqrt{3}x$. 直线 AC 方程为 $y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8} - 0}{-\frac{1}{8} - 1}(x-1) = -\frac{\sqrt{3}}{9}(x-1)$.

联立得 $\sqrt{3}x = -\frac{\sqrt{3}}{9}(x-1) \Rightarrow 10x = 1, \therefore D\left(\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{10}\right)$.

于是 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = (1,0) \cdot \left(\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{1}{10}$.

$\therefore B = \frac{2\pi}{3}, (PA^2 + PC^2)_{\min} = \frac{15}{16}, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{10}$.

19. 已知曲线 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 与点 $P(\sqrt{5}, 0)$, O 为原点, 动点 $Q \in E$, 且 $\angle OPQ$ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$.

(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 已知有 $n+1$ 个点 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ 按逆时针顺序依次在 E 上, 且 $A_0(2, 0), A_n(-2, 0)$.

(i) 当 A_1, A_2 关于 y 轴对称, 且 $\triangle OA_1A_2$ 的面积为 1 时, 求直线 A_2A_3 的斜率;

(ii) 当 $\triangle OA_{k-1}A_k (1 \leq k \leq n)$ 的面积都相等时, 记多边形 $A_0A_1A_2 \dots A_n$ 的周长为 C_n . 若对于 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 都有 $C_n < \lambda$, 求整数 λ 的最小值.

【解析】(1) 设过点 $P(\sqrt{5}, 0)$ 的切线为 $y = m(x - \sqrt{5})$.

联立 $\begin{cases} y = m(x - \sqrt{5}) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow (b^2 + 4m^2)x^2 - 8\sqrt{5}m^2x + 20m^2 - 4b^2 = 0$.

切线 $\Rightarrow \Delta = 0, (8\sqrt{5}m^2)^2 - 4(b^2 + 4m^2)(20m^2 - 4b^2) = 0$

$\Rightarrow 16b^2(b^2 - m^2) = 0 \Rightarrow m^2 = b^2$.

又 $\angle OPQ$ 取最大值时, PQ 为切线, 且 $\tan \angle OPQ_{\max} = |m| = b$.

$\angle OPQ_{\max} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = 1, \therefore E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 由(1)知椭圆为 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(i) 设 $A_1(2\cos\alpha, \sin\alpha), A_2(-2\cos\alpha, \sin\alpha), \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), A_3(2\cos\theta, \sin\theta), \theta \in (\pi - \alpha, \pi)$.

$$S_{\triangle OA_1A_3} = |\sin(\theta - \alpha)| = 1.$$

$$\text{又 } 0 < \theta - \alpha < \pi, \therefore \sin(\theta - \alpha) = 1 \Rightarrow \theta - \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore A_3 = \left(2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-2\sin\alpha, \cos\alpha). \quad k_{A_2A_3} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{-2\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{直线 } A_2A_3 \text{ 的斜率为 } \frac{1}{2}.$$

(ii) 设 $A_k(2\cos\theta_k, \sin\theta_k), 0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \pi$,

$$\alpha_k = \theta_k - \theta_{k-1} \in (0, \pi), k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{则 } S_{\triangle OA_{k-1}A_k} = \sin(\theta_k - \theta_{k-1}) = \sin\alpha_k.$$

题目条件为各面积相等, $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \dots = \sin\alpha_n$.

当 $n = 2$ 时, 设 $A_1(2\cos\alpha, \sin\alpha), \alpha \in (0, \pi)$.

$$\text{记 } p_2 = A_0A_1 + A_1A_2.$$

$$\text{则 } A_0A_1 = \sqrt{(2 - 2\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{5 - 8\cos\alpha + 3\cos^2\alpha},$$

$$A_1A_2 = \sqrt{(-2 - 2\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{5 + 8\cos\alpha + 3\cos^2\alpha}.$$

$$\text{设 } c = \cos\alpha, \text{ 则 } p_2 = \sqrt{5 - 8c + 3c^2} + \sqrt{5 + 8c + 3c^2},$$

$$p_2^2 = 10 + 6c^2 + 2\sqrt{9c^4 - 34c^2 + 25}. \text{ 又 } (5 - 3c^2)^2 - (9c^4 - 34c^2 + 25) = 4c^2 \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{9c^4 - 34c^2 + 25} \leq 5 - 3c^2, \therefore p_2^2 \leq 10 + 6c^2 + 2(5 - 3c^2) = 20, p_2 \leq 2\sqrt{5} < 5.$$

当 $n \geq 3$ 时, 若存在 $\alpha_i \neq \alpha_j$, 由 $\sin\alpha_i = \sin\alpha_j, \alpha_i, \alpha_j \in (0, \pi)$ 得 $\alpha_i + \alpha_j = \pi$.

又 $n \geq 3$, 其余各 $\alpha_k > 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > \pi$, 这与 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \theta_n - \theta_0 = \pi$ 矛盾.

$$\therefore \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{\pi}{n}, \therefore A_k = \left(2\cos\frac{k\pi}{n}, \sin\frac{k\pi}{n}\right).$$

$$\text{记 } p_n = \sum_{k=1}^n A_{k-1}A_k. \text{ 则 } A_{k-1}A_k^2 = 4\left(\cos\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{(k-1)\pi}{n}\right)^2 + \left(\sin\frac{k\pi}{n} - \sin\frac{(k-1)\pi}{n}\right)^2$$

$$= 4\sin^2 \frac{\pi}{2n} \left(1 + 3\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right).$$

$$\text{故 } \sum_{k=1}^n A_{k-1} A_k^2 = 4\sin^2 \frac{\pi}{2n} \left[n + 3 \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right].$$

$$\text{又 } \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} = \frac{n}{2},$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n A_{k-1} A_k^2 = 10n \sin^2 \frac{\pi}{2n}.$$

$$\text{由柯西不等式, } p_n^2 \leq n \sum_{k=1}^n A_{k-1} A_k^2 = 10n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}.$$

$$\text{又 } \sin \frac{\pi}{2n} < \frac{\pi}{2n}, p_n^2 < 10n^2 \cdot \frac{\pi^2}{4n^2} = \frac{5\pi^2}{2} < 25, \therefore p_n < 5.$$

$$\text{又 } A_n A_0 = 4, \therefore C_n = p_n + 4 < 9.$$

取 $n=2, A_1=(0,1)$, 则满足面积相等,

$$\text{且 } C_2 = A_0 A_1 + A_1 A_2 + A_2 A_0 = \sqrt{5} + \sqrt{5} + 4 = 4 + 2\sqrt{5} > 8. \therefore \lambda > 8.$$

又对一切满足条件的 n , 都有 $C_n < 9. \therefore \lambda_{\min} = 9.$