

2026 届高三考前适应性训练(一)

数 学 试 题

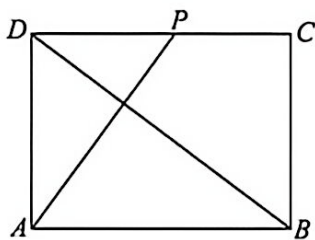
- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 1.已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x \leq 4\}$, $B = \{x | x^2 - 9x + 18 \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{3\}$ B. $\{4\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{3, 4\}$
- 2.已知 $(2+i^{11})(1-bi)$ (其中 i 为虚数单位) 是纯虚数, 则实数 b 的值为
A. -2 B. -1 C. 2 D. 3
- 3.已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x-a}$ 为奇函数, 则 $f(6) =$
A. $\frac{37}{6}$ B. $\frac{41}{7}$ C. $\frac{53}{8}$ D. $\frac{62}{9}$
- 4.已知圆台的高为 $\sqrt{15}$, 侧面积为 12π , 下底面半径是上底面半径的 2 倍, 则该圆台的体积为
A. $\frac{5\sqrt{7}}{3}\pi$ B. $\frac{4\sqrt{13}}{3}\pi$ C. $\frac{7\sqrt{15}}{3}\pi$ D. $\frac{8\sqrt{17}}{3}\pi$
- 5.某党校派了 3 名讲师到 4 个单位去讲党课, 每个单位只能安排一位讲师授课, 而每位讲师至少要去一个单位且至多只能去两个单位, 则不同的选派方法的种数为
A. 36 B. 42 C. 52 D. 58
- 6.已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A, B 分别为椭圆 C 的左、右顶点, 直线 l 过 F_2 与椭圆 C 交于 P, Q 两点 (不同于点 A, B), $\triangle PF_1Q$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 直线 PA 与 PB 的斜率分别为 k_{PA}, k_{PB} , 且 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{2}{3}$, 则椭圆 C 的离心率为
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

7. 早在西周时期, 中国就有对勾股定理探讨的实例, 数学家商高曾经和周公讨论过“勾 3 股 4 弦 5”的问题.“勾 a 股 b 弦 c ”指的是直角三角形的两条直角边长分别是 a, b , 斜边长为 c . 如图, 已知在长方形 $ABCD$ 中, $\triangle ABD$ 满足“勾 3 股 4 弦 5”, $AD=3$, P 为 CD 上一点, 且 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, 则向量 $\overrightarrow{AD}$ 可用向量 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BD}$ 表示为



- A. $\overrightarrow{AD} = \frac{9}{16}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{16}\overrightarrow{BD}$ B. $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{20}\overrightarrow{AP} + \frac{11}{20}\overrightarrow{BD}$
 C. $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{24}\overrightarrow{AP} - \frac{13}{24}\overrightarrow{BD}$ D. $\overrightarrow{AD} = \frac{16}{25}\overrightarrow{AP} + \frac{9}{25}\overrightarrow{BD}$
8. 已知 A, B 为圆 $O: (x+2)^2 + y^2 = 4$ 上的不同两点, 过 A, B 两点分别作圆 O 的切线, 且两切线的交点 P 在直线 $l: x+2y-3=0$ 上, 则 $|PO| \cdot |AB|$ 的最小值为

- A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. 6 D. $3\sqrt{5}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的是

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 2 \leq 0$ B. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > \frac{2}{3}$ ”是“ $\frac{2}{x} < 3$ ”的充要条件
 C. $x^2 + \frac{9}{x^2 + 3}$ 的最小值为 3 D. 若 $\frac{a}{c^2 - 1} > \frac{b}{c^2 - 1}$, 则 $a > b$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $A = \frac{\pi}{3}$, $a = 4$, 则下列结论正确的是

- A. $c \cos B + b \cos C = 4$ B. 若 $c = 7$, 则符合条件的三角形有两个
 C. $b^2 + c^2 \leq 32$ D. $\frac{\cos C}{\cos B} \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

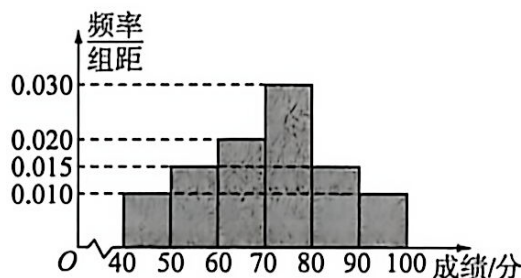
11. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则下列结论正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的极大值为 $\frac{1}{e}$
 B. 函数 $f(x)$ 的极小值为 $-\sqrt{e}$
 C. 直线 $x - y - 1 = 0$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条切线
 D. 若关于 x 的不等式 $f(x) > a$ 有唯一的整数解, 则实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}\right)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2\left(x + \frac{15}{2}\right), & x \geq 0, \\ 2^x, & x < 0, \end{cases}$ 则 $f(f(-1)) =$ _____.

13. 在期中考试后，某小学五年级统计了学生的数学成绩(满分：100 分)，将所有学生的数学成绩按 $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$ 分为 6 组，画出频率分布直方图如图所示，则该校五年级学生期中考试的数学成绩的中位数为 _____。(保留到小数点后两位)



14. 已知函数 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. 若 $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 + x_2) =$ _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -1, a_{n+1} = 3a_n + 4, b_n = a_n + 2 (n \in \mathbb{N}^*)$.

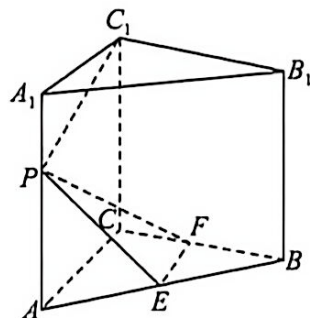
(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = \log_3 b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

16. (15 分) 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $CA \perp CB, CA = CB = 2, BB_1 = 4, P$ 是线段 AA_1 上的一个动点， E, F 分别是线段 AB, CB 的中点.

(1) 若平面 $PEF \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = l$, 求证： $EF \parallel l$ ；

(2) 若 $PA = \sqrt{3}$, 求二面角 $P - EF - B$ 的大小.



17. (15 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1, F_2, |F_1F_2| = 2c$, 直线 l 过点 F_1 且与双曲线 C 交于第一象限的点 P .

(1) 若直线 l 与双曲线 C 的左半支交于点 $Q, |PQ| = |PF_2|, c = 3$, 且 $\cos \angle QF_1F_2 = \frac{13}{20}$,

求实数 a 的值；

(2) 若点 P 的横坐标为 c , 且满足 $b^2 = ac$, 证明：直线 l 的斜率为定值.

18.(17 分)已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的值域;

(2)若不等式 $\frac{e^x}{x}-\lambda \ln \frac{e^x}{x}+e^2 \geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,求实数 λ 的最大值.

19.(17 分)当下有许多人喜欢以爬山作为锻炼身体的运动方式,有一座山,上山有①②两条路径.

(1)小李、小王、小张三人经常组队去爬这座山锻炼身体,三人选择①路径爬山的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$,求小李、小王、小张三人中恰有两人选择②路径爬山的概率.

(2)若小刘决定连续两天去爬山,事件 A = “小刘第一天选择①路径爬山”, B = “小刘第二天选择②路径爬山”,且 $P(A)=\frac{1}{2}$.若小刘第一天选择①路径爬山,第二天仍选择①路径爬山的概率为 $\frac{1}{5}$;若小刘第一天选择②路径爬山,则第二天选择①路径爬山的概率为 $\frac{1}{3}$.求 $P(B)$.

(3)有一支登山队,经过一段时间的爬山锻炼后,可对每人的登山速度的提高做出评定为“有效”和“无效”.在对全体登山队员的登山速度的提高做出评定后,从中随机抽取一人,登山速度的提高为“有效”的概率为 0.88.现从全体登山队员中抽取一人,若此人登山速度的提高为“有效”,则抽取下一人,直到抽取的是登山速度的提高为“无效”的人结束.若抽取的次数为 ξ ,且 $\xi \leqslant k(k \geqslant 8$ 且 $k \in \mathbf{N}^*)$, $E(\xi) \leqslant 2.5$,求 k 的最大值.

(参考数据: $\ln 0.88 \approx -0.128, 0.88^{28} \approx 0.028, 0.88^{29} \approx 0.025, 0.88^{30} \approx 0.022$)

数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】 $\because x \in \mathbb{N}, \therefore A = \{1, 2, 3, 4\}$. 解不等式 $x^2 - 9x + 18 \leq 0$ 得 $3 \leq x \leq 6, \therefore B = \{x | 3 \leq x \leq 6\}, \therefore A \cap B = \{3, 4\}$. 故选 D.

2.C 【解析】 $\because (2+i^{11})(1-bi) = (2-i)(1-bi) = 2-2bi-i-b = 2-b-(1+2b)i, \therefore \begin{cases} 2-b=0, \\ 1+2b \neq 0, \end{cases}$ 解得 $b=2$. 故选 C.

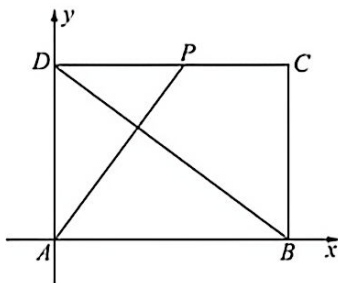
3.A 【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x-a}$ 为奇函数, $\therefore f(x) = -f(-x)$, 即 $x + \frac{1}{x-a} = x - \frac{1}{-x-a}$, 解得 $a=0$.
 $\therefore f(x) = x + \frac{1}{x}, \therefore f(6) = \frac{37}{6}$. 故选 A.

4.C 【解析】设圆台的母线长为 l , 上底面的半径为 r , 则下底面的半径为 $2r$. $\because$ 圆台的侧面积为 $12\pi, \therefore \frac{1}{2}l(2\pi r + 4\pi r) = 12\pi$, 解得 $lr=4$. 又 $\because l^2 = r^2 + (\sqrt{15})^2, \therefore r=1, l=4$, 则该圆台的体积为 $\frac{1}{3} \times \sqrt{15} \times (\pi \times 1^2 + \pi \times 2^2 + \pi \times 1 \times 2) = \frac{7\sqrt{15}}{3}\pi$. 故选 C.

5.A 【解析】由题意知, 必有一位讲师去两个单位, 另外两个单位各去一位讲师. 第一步: 先将 4 个单位按 $2:1:1$ 分成三组, 共有 $\frac{C_4^2 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} = 6$ 种方法; 第二步: 再把三名讲师分配到三个小组, 有 $A_3^3 = 6$ 种分配方法, 故共有 $6 \times 6 = 36$ 种选派方法. 故选 A.

6.B 【解析】 $\because \triangle PF_1Q$ 的周长为 $4\sqrt{3}, \therefore |PF_1| + |PF_2| + |QF_1| + |QF_2| = 4a = 4\sqrt{3}, \therefore a = \sqrt{3}$, 则 $A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$. 设点 $P(x_0, y_0)$. $\because k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{2}{3}, \therefore \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{3}} \cdot \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{3}} = -\frac{2}{3}$, 整理得 $y_0^2 = -\frac{2}{3}(x_0^2 - 3)$.
 又 $\because \frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \therefore y_0^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{3}\right)$, 解得 $b^2 = 2$,
 $\therefore c = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2} = 1, \therefore$ 椭圆 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

7.D 【解析】以 A 为坐标原点, AB, AD 所在直线分别为 x 轴、 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系.



$\because AD=3, AB=4, \therefore A(0,0), D(0,3), B(4,0), \therefore \overrightarrow{AD} = (0,3), \overrightarrow{DB} = (4,-3)$. 设 $\overrightarrow{AP} = (\lambda, 3)$. $\because \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$,
 $\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DB} = 4 \times \lambda + 3 \times (-3) = 0$, 解得 $\lambda = \frac{9}{4}$. 设 $\overrightarrow{AD} = x \overrightarrow{AP} + y \overrightarrow{BD}$, 则 $(0,3) = x \left(\frac{9}{4}, 3\right) + y(-4, 3)$,

$\therefore \begin{cases} \frac{9}{4}x - 4y = 0, \\ 3x + 3y = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{16}{25}, \\ y = \frac{9}{25}, \end{cases} \therefore \overrightarrow{AD} = \frac{16}{25}\overrightarrow{AP} + \frac{9}{25}\overrightarrow{BD}$. 故选 D.

8.B 【解析】∵圆 $O: (x+2)^2 + y^2 = 4$, ∴圆心 $O(-2, 0)$, 半径 $r=2$. ∵ PA, PB 是圆 O 的两条切线, ∴ $PA \perp OA$, $PB \perp OB$, ∴由圆的知识可知 A, P, B, O 四点共圆, 且 $AB \perp OP$, $|PA| = |PB|$,

$$\therefore |PO| \cdot |AB| = 4S_{\triangle PAO} = 4 \times \frac{1}{2} \times |PA| \times |AO| = 4|PA|.$$

又∵ $|PA| = \sqrt{|PO|^2 - 4}$, ∴当 $|PO|$ 的值最小, 即 $PO \perp l$ 时, $|PO| \cdot |AB|$ 取得最小值.

$$\therefore |PO|_{\min} = \frac{|-2+0-3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \therefore |PO| \cdot |AB| \text{ 的最小值为 } 4\sqrt{|PO|_{\min}^2 - 4} = 4\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 4} = 4. \text{ 故选 B.}$$

9.AC 【解析】对于 A, ∵不等式 $x^2 + 3x + 2 \leq 0$ 的解集为 $[-2, -1]$, ∴ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 2 \leq 0$, 故 A 正确.

对于 B, 当 $\frac{2}{x} < 3$ 时, $x < 0$ 或 $x > \frac{2}{3}$, 故 $x > \frac{2}{3}$ 能推出 $\frac{2}{x} < 3$, 但 $\frac{2}{x} < 3$ 不能推出 $x > \frac{2}{3}$,

∴“ $x > \frac{2}{3}$ ”是“ $\frac{2}{x} < 3$ ”的充分不必要条件, 故 B 错误.

$$\text{对于 C, } \because x^2 + \frac{9}{x^2 + 3} = x^2 + 3 + \frac{9}{x^2 + 3} - 3 \geq 2\sqrt{(x^2 + 3) \times \frac{9}{x^2 + 3}} - 3 = 6 - 3 = 3,$$

当且仅当 $x^2 + 3 = \frac{9}{x^2 + 3}$, 即 $x = 0$ 时, 等号成立, ∴ $x^2 + \frac{9}{x^2 + 3}$ 的最小值为 3, 故 C 正确.

对于 D, 由 $\frac{a}{c^2 - 1} > \frac{b}{c^2 - 1}$, 得 $c^2 - 1 \neq 0$. 但 $c^2 - 1$ 可正, 可负, ∴推不出 $a > b$, 故 D 错误. 故选 AC.

10.ACD 【解析】对于 A, 由余弦定理, 得 $c \cos B + b \cos C = c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = a = 4$, 故 A 正确.

对于 B, 由正弦定理得, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 解得 $\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{7\sqrt{3}}{8} > 1$, 故符合条件的三角形不存在, 故 B 错误.

对于 C, 由余弦定理得, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $16 = b^2 + c^2 - bc \geq b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2}{2}$,

∴ $b^2 + c^2 \leq 32$, 当且仅当 $b = c$ 时, 等号成立, 故 C 正确.

$$\text{对于 D, } \frac{\cos C}{\cos B} = \frac{\cos[\pi - (A + B)]}{\cos B} = \frac{-\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin B - \frac{1}{2} \cos B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan B - \frac{1}{2}.$$

$$\because B \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \therefore \tan B \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, +\infty), \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \tan B - \frac{1}{2} \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right),$$

即 $\frac{\cos C}{\cos B} \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 故 D 正确. 故选 ACD.

11.ACD 【解析】 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

对于 A, B, 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增;

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

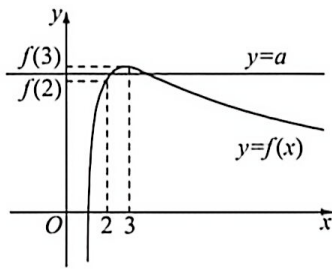
∴ $f(x)$ 在定义域内只有极大值, 没有极小值, 极大值为 $f(e) = \frac{1}{e}$, 故 A 正确, B 错误.

对于 C, 设切点为 $\left(t, \frac{\ln t}{t}\right)$, $t > 0$. ∵ $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, ∴ $f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} = 1$, 显然 $\frac{1 - \ln 1}{1^2} = 1$,

∴ $t = 1$ 是方程 $\frac{1 - \ln t}{t^2} = 1$ 的一个根, ∴切点为 $(1, 0)$, ∴切线方程为 $y = x - 1$, 即 $x - y - 1 = 0$, 故 C 正确.

对于 D, ∵ $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(x)$ 在定义域内有极大值 $f(e) = \frac{1}{e}$,

又 $\because 2^3 < 3^2, \therefore 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}, \therefore \ln 2^{\frac{1}{2}} < \ln 3^{\frac{1}{3}}$, 即 $\frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln 3}{3}$, $\therefore$ 由此作出函数 $f(x)$ 的大致图象, 如图.



$\because$ 不等式 $f(x) = \frac{\ln x}{x} > a$ 有唯一的整数解, $\therefore f(2) \leq a < f(3)$, 即 $\frac{\ln 2}{2} \leq a < \frac{\ln 3}{3}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

12.3 【解析】 $\because f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \therefore f(f(-1)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2} + \frac{15}{2}\right) = \log_2 8 = 3$.

13.71.67 【解析】设该校五年级学生期中考试的成绩的中位数的估计值为 x . $\because$ 第一组、第二组、第三组数据的频率之和为 $10 \times (0.010 + 0.015 + 0.020) = 0.45 < 0.5$, 第一组、第二组、第三组、第四组数据的频率之和为 $10 \times (0.010 + 0.015 + 0.020 + 0.030) = 0.75 > 0.5, \therefore x \in [70, 80)$. 由 $10 \times (0.010 + 0.015 + 0.020) + 0.030 \times (x - 70) = 0.5$, 解得 $x \approx 71.67$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x)$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

由题意知 $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 相邻最近的两个零点, 且 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, 故 $x_1 + x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x_1 + x_2) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.解: (1) 由题意得, $a_{n+1} = 3a_n + 4$, 得 $a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$,

即 $b_{n+1} = 3b_n$ 2 分

又 $\because b_1 = a_1 + 2 = -1 + 2 = 1 \neq 0, \therefore b_n \neq 0, \therefore \{b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 3 的等比数列.

$\therefore b_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$ 6 分

(2) $\because c_n = \log_3 b_n = \log_3 3^{n-1} = n - 1$, 8 分

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (1 + 2 + \cdots + n) - (1 + 1 + \cdots + 1) = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n^2 + n - 2n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$ 13 分

16.(1) 证明: $\because E, F$ 分别是线段 AB, CB 的中点, $\therefore EF \parallel AC$ 1 分

在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 四边形 AA_1C_1C 为平行四边形, 则 $AC \parallel A_1C_1, \therefore EF \parallel A_1C_1$ 2 分

又 $\because EF \not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1, A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,

$\therefore EF \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$ 4 分

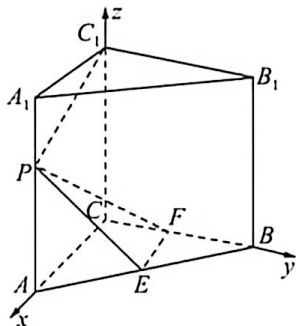
$\because EF \subset$ 平面 PEF , 平面 $PEF \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = l$,

$\therefore EF \parallel l$ 6 分

(2) 解: $\because CC_1 \perp$ 平面 $ABC, CA, CB \subset$ 平面 $ABC, \therefore CC_1 \perp CA, CC_1 \perp CB$.

又 $CA \perp CB, \therefore CC_1, CA, CB$ 两两相互垂直.

以 C 为坐标原点, CA, CB, CC_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系. 7 分



则 $C(0,0,0), A(2,0,0), B(0,2,0), P(2,0,\sqrt{3}), E(1,1,0), F(0,1,0)$,

$\therefore \overrightarrow{EF} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{PF} = (-2, 1, -\sqrt{3})$ 8 分

设平面 PEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = -x = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PF} = -2x + y - \sqrt{3}z = 0. \end{cases}$$

令 $z=1$, 则 $x=0, y=\sqrt{3}$, 得 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{3}, 1)$ 10 分

易知平面 BEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 4)$ 11 分

设二面角 $P-EF-B$ 的大小为 θ , 则 $|\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AA_1} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AA_1}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{AA_1}|} = \frac{4}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} \times 4} = \frac{1}{2}$ 14 分

由题图可知, θ 为钝角, 则二面角 $P-EF-B$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$ 15 分

17.(1)解: $\because$ 点 P 在双曲线右支上, $\therefore |PF_1| - |PF_2| = 2a$, 即 $|PF_2| = |PF_1| - 2a$,

$\therefore$ 由 $|PQ| = |PF_2|$, 得 $|PF_1| - |PQ| = |QF_1| = 2a$ 2 分

又直线 l 与双曲线 C 的左半支交于点 Q , $\therefore |QF_2| - |QF_1| = 2a$, $\therefore |QF_2| = 4a$ 4 分

在 $\triangle QF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle QF_1F_2 = \frac{|F_1F_2|^2 + |QF_1|^2 - |QF_2|^2}{2|F_1F_2||QF_1|} = \frac{4c^2 + 4a^2 - 16a^2}{2 \times 2c \times 2a} = \frac{36 - 12a^2}{24a} =$

$\frac{3}{2a} - \frac{a}{2}$, $\therefore \frac{3}{2a} - \frac{a}{2} = \frac{13}{20}$, 整理得 $10a^2 + 13a - 30 = 0$, 解得 $a = \frac{6}{5}$ 或 $a = -\frac{5}{2}$ (舍去). 7 分

$\therefore$ 实数 a 的值为 $\frac{6}{5}$ 8 分

(2)证明: 方法一: 设直线 l 的斜率为 k , 则直线 $l: y = k(x+c)$.

联立
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = k(x+c), \end{cases}$$
 整理得 $(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2ck^2x - a^2c^2k^2 - a^2b^2 = 0$. ① 11 分

$\because$ 点 P 的横坐标为 c , $\therefore x=c$ 恰是方程①的解,

$\therefore (b^2 - a^2k^2)c^2 - 2a^2ck^2 - a^2c^2k^2 - a^2b^2 = 0$, 整理得 $b^2c^2 - 4a^2c^2k^2 - a^2b^2 = 0$, 即 $4a^2c^2k^2 = b^4$.

又 $\because b^2 = ac$, $\therefore k^2 = \frac{1}{4}$ 14 分

$\because$ 直线 l 过点 F_1 且与双曲线 C 交于第一象限的点 P ,

$\therefore k = \frac{1}{2}$, 即直线 l 的斜率为定值. 15 分

方法二: $\because$ 点 P 的横坐标为 c , 在第一象限, 且在双曲线 C 上,

$\therefore \frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \frac{b^2}{a}$, $\therefore P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ 11 分

$\because$ 直线 l 过点 $F_1(-c, 0)$, $\therefore$ 直线 l 的斜率为 $\frac{\frac{b^2}{a} - 0}{c + c} = \frac{b^2}{2ac}$ 13 分

$\because b^2=ac, \therefore$ 直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 即直线 l 的斜率为定值. 15 分

18. 解: (1) 由 $f(x) = \frac{e^x}{x} (x > 0)$, 得 $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ 2 分

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 1$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 1$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 5 分

$\therefore f(x) \geq f(1) = e$.

又当 x 趋近于 0 或 $+\infty$ 时, $f(x)$ 趋近于 $+\infty$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[e, +\infty)$ 7 分

(2) 设 $t = \frac{e^x}{x}$, 则由 (1) 知 $t \geq e$, 且不等式 $\frac{e^x}{x} - \lambda \ln \frac{e^x}{x} + e^2 \geq 0$ 可转化为 $t - \lambda \ln t + e^2 \geq 0$.

设 $g(t) = t - \lambda \ln t + e^2$, 则 $g'(t) = 1 - \frac{\lambda}{t} = \frac{t - \lambda}{t}$. 由题意得 $g(t) \geq 0$ 在 $[e, +\infty)$ 上恒成立. 10 分

若 $\lambda \leq e$, 则 $g'(t) \geq 0$ 在 $[e, +\infty)$ 上恒成立, $\therefore g(t)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递增,

则 $g(t) \geq g(e) = e - \lambda + e^2 \geq e^2 > 0$, 符合题意.

若 $\lambda > e$, 则令 $g'(t) > 0$, 解得 $t > \lambda$; 令 $g'(t) < 0$, 解得 $e \leq t < \lambda$.

$\therefore g(t)$ 在 $[e, \lambda)$ 上单调递减, 在 $(\lambda, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(t) \geq g(\lambda) = \lambda - \lambda \ln \lambda + e^2 \geq 0$ 13 分

设 $h(\lambda) = \lambda - \lambda \ln \lambda + e^2 (\lambda > e)$, 则 $h'(\lambda) = -\ln \lambda < 0$ 在 $(e, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore h(\lambda)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 且 $h(e^2) = 0$, 则不等式 $h(\lambda) \geq 0$ 的解集为 $(e, e^2]$, 即 $e < \lambda \leq e^2$, 16 分

综上, $\lambda \leq e^2$, 即实数 λ 的最大值为 e^2 17 分

19. 解: (1) 由题意得小李、小王、小张三人中恰有两人选择②路径爬山的概率为

$P = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{36}$ 3 分

(2) 由题意得, $P(\bar{A}) = P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, $P(B|\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 6 分

$\therefore P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{11}{15}$ 8 分

(3) 设从全体登山队员中随机抽取 1 人, 抽取到的人是“无效”的概率为 p , 则 $p = 0.12$.

$\therefore$ 抽取的次数为 ξ , $\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	1	2	3	...	$k-1$	k
P	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	...	$(1-p)^{k-2} p$	$(1-p)^{k-1}$

..... 10 分

故 $E(\xi) = p + (1-p)p \times 2 + (1-p)^2 p \times 3 + \dots + (1-p)^{k-2} p \times (k-1) + (1-p)^{k-1} \times k$.

又 $(1-p)E(\xi) = (1-p)p + (1-p)^2 p \times 2 + (1-p)^3 p \times 3 + \dots + (1-p)^{k-1} p \times (k-1) + (1-p)^k \times k$,

两式相减得 $pE(\xi) = p + (1-p)p + (1-p)^2 p + \dots + (1-p)^{k-2} p + (1-p)^{k-1} p$ 13 分

$\therefore E(\xi) = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \dots + (1-p)^{k-2} + (1-p)^{k-1} = \frac{1 - (1-p)^k}{p} = \frac{1 - 0.88^k}{0.12}$ 15 分

$\therefore E(\xi) \leq 2.5, \therefore \frac{1 - 0.88^k}{0.12} \leq 2.5$, 解得 $k \leq 2$,

$\therefore$ 抽取次数的期望值不超过 2.5, k 的最大值为 2. 17 分