

莆田市 2026 届高中毕业班第二次质量调研测试试卷

数 学

本试卷共 4 页, 19 小题, 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | 3^x > 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\emptyset$ B. $\{1\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$
2. 已知复数 $z = i(1 - 2i)$, 则 $|z| =$
 A. $\sqrt{5}$ B. 3 C. $2\sqrt{5}$ D. 5
3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 上顶点为 P , 则 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为
 A. 5 B. 6 C. 8 D. 10
4. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a = 5, b = 7, c = 8$, 则 $B =$
 A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$
5. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $0 < |a| < b < 1$, 则
 A. $a^2 > b^2$ B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ C. $\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1}$ D. $\cos a < \cos b$
6. 为了探究六年级学生每日自主阅读时间与语文成绩的关系, 某研究小组随机调查了 50 名学生, 得到成对样本数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, 50$), 其中 x_i 表示每日自主阅读时间 (单位: 小时), y_i 表示语文成绩 (单位: 分). 经计算得回归直线方程为 $\hat{y} = 5.2x + 72.4$. 下列说法正确的是
 A. 该样本数据的相关系数为 5.2
 B. 当阅读时间每增加 1 小时, 语文成绩平均增加 5.2 分
 C. 该样本数据中, 至少有一个点 (x_i, y_i) 在回归直线上
 D. 若某学生每日阅读时间为 2 小时, 则他的语文成绩一定为 82.8 分

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $m, n, s, t \in \mathbb{N}^*$, 则下列命题正确的是

A. 若 $a_1 a_3 = 4$, 则 $a_2 = 2$

B. 若 $a_1 < a_2$, 则 $q > 1$

C. 若 $|q| \neq 1$, 则 $(a_1 + a_3) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} \right) > 4$

D. 若 $a_m a_n = a_s a_t$, 则 $m + n = s + t$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 任意给定 $n \in \mathbb{N}^*$, 都存在 $x_0 \in D$, 使得 $f(nx_0) = nf(x_0)$, 则 $f(x)$ 不可能为

A. $f(x) = x$

B. $f(x) = \sqrt{x}$

C. $f(x) = \ln x$

D. $f(x) = e^{-x^2}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = n^2 - 4n$, 则下列说法正确的是

A. $\{a_n\}$ 为等差数列

B. $\{a_n\}$ 为单调递增数列

C. $|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| + |a_6| = 12$

D. $\frac{S_n}{a_n}$ 的最小值为 -3

10. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x(2x+1)}{x}$, 则

A. $f(x)$ 有且只有一个零点

B. 点 $(0, 2)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

C. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 3e)$ 处的切线方程为 $y = 2ex + e$

D. $\exists x_1 < 0 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$

11. 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, 且 $AB = 3A_1B_1 = 3$, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AA_1}$, 则

A. 当 P 为棱 B_1C_1 的中点时, $x + y + z = \frac{4}{3}$

B. $\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 1$

C. 若直线 $BP \parallel$ 平面 ACC_1A_1 , 则 $x = 1$

D. 若 $AA_1 = \sqrt{2}$, 则球 O 的表面积为 18π

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知向量 $a = (2, 3)$, $b = (1, k)$, 若 $a \perp (a + b)$, 则 $k =$ _____.

13. 有 4 个相同的球, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 从中随机取球一次 (至少取一个), 则取出的球的标号之和不超过 5 的概率为 _____.

14. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 过 F 的直线 l 交 C 于 M, N 两点. 若

$|MN| = 18$, 则 $\triangle AMN$ 的外接圆的半径为 _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin(x + \varphi)$ ($|\varphi| < \pi$) 的图象过点 $P\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 当 $f\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)f\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = 3$ ，且 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{15}{16}$ 时，证明： $\tan \alpha = 4 \tan \beta$ 。

16. (15 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x$ 。

(1) 当 $a = 2$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2) 若 $f(x) \geq (2 - a)x$ ，求实数 a 的取值范围。

17. (15 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，准线为 l ，直线 $y = 2\sqrt{3}$ 与 l ， C 的交点分别为 P ， Q ，且 $|FP| = |FQ|$ 。

(1) 求 p ；

(2) 若过点 $D(4, 0)$ 的直线 m 交 C 于 A ， B 两点，且 $|AD| \cdot |BD| = 24$ ，求 $\frac{|AD|}{|BD|}$ 的值。

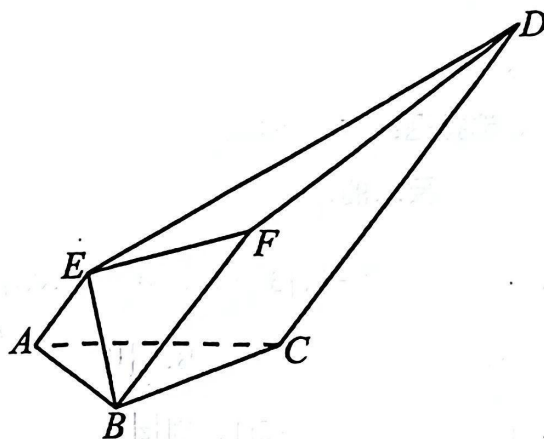
18. (17分)

如图, 五面体 $ABCDEF$ 中, $AE \parallel BF \parallel CD$, $AE=1$, $BF=3$, $CD=5$, $AB=AC=2$, $\angle EAB = \angle EAC = \alpha$, $\angle BAC = \beta$.

(1) 证明: $AE \perp BC$;

(2) 当 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ 时, 求直线 BE 与平面 $BCDF$ 所成角的正弦值;

(3) 若 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 当该五面体的体积取到最大值时, 求 $\cos \beta$ 的值.



19. (17分)

某分布式存储系统中, 数据块容量上限为 N ($N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 2$), 数据块的初始数量为 M ($M \in \mathbb{N}$, $M \leq N$). 系统运行遵循以下规则:

① 在每一时间步, 系统以概率 p ($0 < p < 1$) 执行清理操作(数据块的数量减1), 以概率 $1-p$ 执行写入操作(数据块的数量加1);

② 当数据块的数量为 0 (成功复位) 或为 N (内存溢出) 时, 系统运行立即终止.

记当数据块的数量为 k ($0 \leq k \leq N$, $k \in \mathbb{N}$) 时, 系统最终以“成功复位”状态终止的概率为 a_k .

(1) 直接写出 a_0 , a_N 的数值, 并写出 a_{k-1} , a_k , a_{k+1} ($1 \leq k \leq N-1$) 的关系式;

(2) 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 比较系统最终以“成功复位”与“内存溢出”状态终止的概率大小关系;

(3) 已知: 若随机变量 X 的取值不会影响随机变量 Y 的概率分布列, 则称 X 与 Y 相互独立, 且满足 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$. 记 X_n 为系统运行 n 步后的数据块的数量 (假设系统在此期间未终止). 当 $p \neq \frac{1}{2}$ 时, 若 $E(\lambda^{X_n})$ 与 n 无关, 求正实数 λ ($\lambda \neq 1$) 的值.

莆田市 2026 届高中毕业班第二次质量调研测试试卷

数学试题参考解答及评分标准

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数. 单项选择题和单空填空题不给中间分.

一、选择题：每小题 5 分，满分 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	B	C	B	C	D

1. 【答案】B

解析： $A = \{x | 3^x > 1\} = \{x | x > 0\}$ ， $A \cap B = \{1\}$ ， 故选 B.

2. 【答案】A

解法一： $z = i(1 - 2i) = 2 + i$ ， 所以 $|z| = \sqrt{5}$ ， 故选 A.

解法二： $|z| = |i(1 - 2i)| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$ ， 故选 A.

3. 【答案】D

解析： 依题意可得 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$ ， 因为 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$ ， $|F_1F_2| = 2c = 4$ ， 所以 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $6 + 4 = 10$ ， 故选 D.

4. 【答案】B

解析： 由 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$ ， 且 $B \in (0, \pi)$ ， 解得 $B = \frac{\pi}{3}$ ， 故选 B.

5. 【答案】C

解法一：（特殊值检验法）取 $a = -\frac{1}{3}$ ， $b = \frac{1}{2}$ ， 则 $a^2 < b^2$ ， $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ， $\cos a > \cos b$ ， 故选项 A，

B， D 均错误；

由于 $-1 < -b < a < b < 1$ ， $a + 1 > 0$ ， $b + 1 > 0$ ，

从而 $\frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1} = \frac{a(b+1) - a(b+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{a-b}{(a+1)(b+1)} < 0$ ，故选项 C 正确，故选 C.

解法二：由已知得 $-b < a < b$ ，则 $a+b > 0$ ， $a-b < 0$ ，从而 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) < 0$ ，故选项 A 错误.

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ ，因为 $b-a > 0$ ， $b > 0$ ，故当 $a < 0$ 时，上式 < 0 ，从而 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ，故选项 B 错误.

考察函数 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ，易知 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递增，又 $-1 < -b < a < b < 1$ ，所以

$f(a) < f(b)$ ，故选项 C 正确.

考察函数 $g(x) = \cos x$ ，可知 $g(x)$ 为偶函数且在区间 $(0, 1)$ 上单调递减，所以

$g(a) = g(|a|) > g(b)$ ，故选项 D 错误.

故选 C.

6. 【答案】B

解析：由于相关系数 $r \in [-1, 1]$ ，故选项 A 错误；

当 $\Delta x = 1$ 时，语文成绩的增量 $\Delta y = 5.2(x+1) + 72.4 - 5.2x - 72.4 = 5.2$ ，故选项 B 正确；

回归直线方程可以不经过成对数据中的任意一对，故选项 C 错误；

回归直线方程得到的值是预测值，不一定是真实值，故选项 D 错误.

故选 B.

7. 【答案】C

解析：由于 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $a_1 a_3 = a_2^2$ ，解得 $a_2 = \pm 2$ ，故选项 A 错误；

当 $a_1 < 0$ ， $a_2 > 0$ 时，有 $a_1 < a_2$ ，但 $q < 0$ ，故选项 B 错误；

由于 $\{a_n\}$ 是等比数列，从而 $\frac{a_3}{a_1} = q^2 > 0$ ， $(a_1 + a_3) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} \right) = 1 + \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_3} + 1 \geq 4$ ，当且仅当

$\frac{a_3}{a_1} = 1$ 时取等号，又 $|q| \neq 1$ ，故选项 C 正确；

当 $q = 1$ 时，有 $a_1 a_2 = a_3 a_4 = a_1^2$ ，但 $1 + 2 \neq 3 + 4$ ，故选项 D 错误.

故选 C.

8. 【答案】D

解析：对给定 $n \geq 2$ ，且 $n \in \mathbf{N}^*$ ，取 $x = 0$ ，有 $f(n \times 0) = 0$ ， $nf(0) = 0$ ，所以 $f(n \times 0) = nf(0)$ ，

所以选项 A 符合题设；

对给定 $n \geq 2$ ，且 $n \in \mathbf{N}^*$ ，取 $x = 0$ ，有 $f(n \times 0) = 0$ ， $nf(0) = 0$ ，所以 $f(n \times 0) = nf(0)$ ，所以

选项 B 符合题设;

对给定 $n \geq 2$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$, 由 $f(nx) = nf(x)$, 得 $\ln(nx) = n \ln x$, 即 $\ln n + \ln x = n \ln x$, 整理得

$\ln x = \frac{\ln n}{n-1}$, 从而 $\ln x = \ln n^{\frac{1}{n-1}}$, 得 $x_0 = n^{\frac{1}{n-1}}$, 所以选项 C 符合题设;

对于选项 D, 对给定 $n \geq 2$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$, 由 $f(nx) = nf(x)$, 得 $e^{-(nx)^2} = ne^{-x^2}$, 即 $e^{(1-n^2)x^2} = n$,

因为 $n \geq 2$, 所以 $(1-n^2)x^2 < 0$, 所以 $0 < e^{(1-n^2)x^2} < 1$, 又由于 $n \geq 2$, 所以对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $e^{-(nx)^2} \neq ne^{-x^2}$, 所以选项 D 不符合题设.

故选 D.

二、选择题: 每小题 6 分, 满分 18 分. (本题为多项选择题, 每小题中, 全部选对得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错得 0 分)

题号	9	10	11
答案	ABD	AC	ACD

9. 【答案】ABD

解析: 由 $S_n = n^2 - 4n$, 得 $a_n = 2n - 5$, 从而 $\{a_n\}$ 是等差数列, 故 A 正确;

由 $d = 2 > 0$, 知 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 故 B 正确;

$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| + |a_6| = 3 + 1 + 1 + 3 + 5 + 7 = 20 \neq 12$, 故 C 错误;

由 $S_n = n^2 - 4n = n(n-4)$ 得, 当 $n \leq 3$ 时, $S_n < 0$; 当 $n \geq 4$ 时, $S_n \geq 0$; 由 $a_n = 2n - 5$ 知, 当 $n \leq 2$

时, $a_n < 0$; 当 $n \geq 3$ 时, $a_n > 0$; 所以当 $n \leq 2$ 或 $n \geq 4$ 时, $\frac{S_n}{a_n} \geq 0$; 当 $n = 3$ 时, $\frac{S_n}{a_n} = -3 < 0$,

所以 $\frac{S_n}{a_n}$ 的最小值为 -3 , 故 D 正确.

故选 ABD.

10. 【答案】AC

解析: 令 $f(x) = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$, 所以 $f(x)$ 有且只有一个零点 $-\frac{1}{2}$, 故 A 正确;

法一: (特值检验排除法) 因为 $f(1) + f(-1) = 3e + \frac{1}{e} \neq 4$, 故 B 错误;

法二: (代数判定) 只需判定 $f(x) + f(-x) = 4$ 是否恒成立, 因为

$f(x) + f(-x) = \frac{e^x(2x+1)}{x} + \frac{e^{-x}(-2x+1)}{-x} = \frac{2x(e^x + e^{-x}) + e^x - e^{-x}}{x} \neq 4$ ，故 B 错误；

$f'(x) = \frac{(x+1)(2x-1)e^x}{x^2}$ ，所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 3e)$ 处的切线斜率为 $k = f'(1) = 2e$ ，所以

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 3e)$ 处的切线方程为 $y = 2ex + e$ ，故 C 正确；

令 $f'(x) = \frac{(x+1)(2x-1)e^x}{x^2} = 0$ ，解得 $x = -1$ 或 $x = \frac{1}{2}$ ，从而当 $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{2}$ 时， $f'(x) > 0$ ；

当 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1), \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增，在

$(-1, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $f(x)$ 的最大值为 $f(-1) = \frac{1}{e}$ ，当 $x \in (0, +\infty)$

时， $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{e}$ 。因为 $x_1 < 0 < x_2$ ， $f(x_1) \leq \frac{1}{e}$ ， $f(x_2) \geq 4\sqrt{e}$ ，所以 $f(x_2) > f(x_1)$ ，

故 D 错误。

故选 AC。

11. 【答案】ACD

解法一：（空间向量非正交基底法）

当 P 为棱 B_1C_1 的中点时， $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ ，从而 $\overrightarrow{AP} =$

$\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$ ，所以 $x + y + z = \frac{4}{3}$ ，故 A 正确；

$\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1}$ 又 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ ， $\overrightarrow{AA_1}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上

的投影向量长度为 1，从而 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 3$ ，所以 $\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = \frac{1}{2}$ ，故 B 错误；

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = (x-1)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AA_1}$ ，平面 ACC_1A_1 的一组基底为 $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\}$ ，因为直线

$BP \parallel$ 平面 ACC_1A_1 ，所以 $x = 1$ ，故 C 正确；

如图所示，若 $AA_1 = \sqrt{2}$ ，则 $\triangle MAB$ 为等腰直角三角形，由

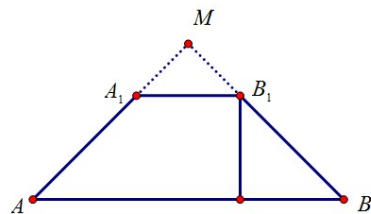
对称性可知球心 O 在上下底面中心 O_1O_2 的连线上，在直角

梯形 $AO_1O_2A_1$ 中，经计算可得 $AO_1 = \sqrt{3}$ ， $A_1O_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$AA_1 = \sqrt{2}$ ， $O_1O_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $MO_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ， $OO_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，所以外

接球半径 $R = OA = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ，从而球的表面积为 18π ，故 D 正确。

故选 ACD。



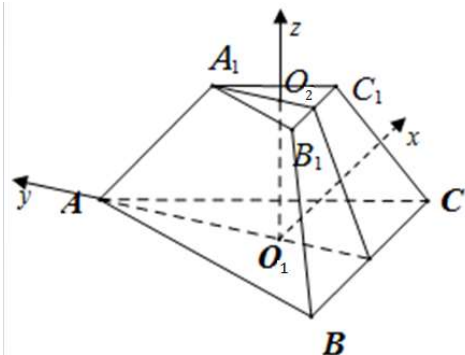
解法二：坐标法

如图，以底面中心为 O_1 为原点，分别以 $\overrightarrow{O_1A}$ ， $\overrightarrow{O_1O_2}$ 的方向为 y 轴、 z 轴的正方向，建立空间直角坐标系

O_1-xyz ，设三棱台的高为 h ，则 $A(0, \sqrt{3}, 0)$ ，

$B\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ， $C\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ， $O_2(0, 0, h)$ ，

$A_1\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, h\right)$ ， $B_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, h\right)$ ， $C_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, h\right)$ 。



$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ， $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ， $\overrightarrow{AA_1} = \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, h\right)$ ，

对于选项 A，当 P 为棱 B_1C_1 的中点时，则 $P\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{6}, h\right)$ ， $\overrightarrow{AP} = \left(0, -\frac{7\sqrt{3}}{6}, h\right)$ ，

由 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AA_1}$ 得 $\overrightarrow{AP} = \left(-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y, -\frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y - \frac{2\sqrt{3}}{3}z, zh\right)$ ，

从而有 $-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = 0$ ， $-\frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y - \frac{2\sqrt{3}}{3}z = -\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ， $zh = h$ ，解得 $x = y = \frac{1}{6}$ ， $z = 1$ ，所

以 $x + y + z = \frac{4}{3}$ ，故 A 正确；

对于选项 B， $\overrightarrow{A_1C_1} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ， $\overrightarrow{A_1B} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{6}, -h\right)$ ， $\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = \frac{1}{2}$ ，故 B 错误；

对于选项 C，设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 ACC_1A_1 的法向量，

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AA_1} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}y + hz = 0. \end{cases}$$

取 $y = \sqrt{3}$ ，则 $x = 3$ ， $z = \frac{2}{h}$ ，所以 $\mathbf{n} = (3, \sqrt{3}, \frac{2}{h})$ 是平面 $BCDF$ 的一个法向量。

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \left(-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y - \frac{2\sqrt{3}}{3}z - \frac{3}{2}\sqrt{3}, zh\right)$ ，由直线 $BP \parallel$ 平面

ACC_1A_1 可知 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ ，解得 $x = -1$ ，故 C 正确；

对于选项 D, 因为 $AA_1 = \sqrt{2}$, 所以 $\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 = 2$, 解得 $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

由对称性可知球心 O 在 O_1O_2 上, 可设 $O(0,0,a)$, 又 $A(0,\sqrt{3},0)$ $A_1\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, 由

$$|OA| = |OA_1| = r \text{ 可得 } 3 + a^2 = r^2, \quad \frac{1}{3} + \left(a - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = r^2,$$

解得 $a = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 从而球的表面积为 18π , 故 D 正确.

故选 ACD.

三、填空题: 每小题 5 分, 满分 15 分.

12. 【答案】 -5

解析: 依题意得 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 3+k)$, 因为 $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 所以 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$, 即 $2 \times 3 + 3(3+k) = 0$, 解得 $k = -5$, 故填 -5.

13. 【答案】 $\frac{8}{15}$

解法一: 记事件 $A =$ “取出的球的标号之和不超过 5”

样本空间 Ω 的所有样本点为: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$, 故 $n(\Omega) = 15$, $n(A) = 8$, 所以 $P(A) = \frac{8}{15}$, 故填 $\frac{8}{15}$.

解法二: 样本空间 Ω 的所有样本点共有 $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$ 个, 因为所有标号之和为 10, 故每一种标号之和小于 5 的情况都对应一种标号之和大于 5 的情况, 反之只有标号之和为 10 的情况对应的是标号之和为 0 的情况, 当标号之和为 5 时, 只有 $\{1,4\}, \{2,3\}$ 两种情况, 所以符合条件的情况有 8 种, 所以概率 $P(A) = \frac{8}{15}$, 故填 $\frac{8}{15}$.

14. 【答案】 9

解法一: 依题意可得 $A(-1,0), F(2,0)$. 因为 l 的斜率不为零, 故可设 $l: x = ty + 2$, 代入

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{3} &= 1, \text{ 消去 } x, \text{ 整理得 } (3t^2 - 1)y^2 + 12ty + 9 = 0. \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 \\ &= \frac{-12t}{3t^2 - 1}, \quad y_1 y_2 = \frac{9}{3t^2 - 1}, \text{ 因为 } (x_1 + 1)(x_2 + 1) = (ty_1 + 3)(ty_2 + 3) = t^2 y_1 y_2 + 3t(y_1 + y_2) + 9 = \\ &= \frac{9t^2}{3t^2 - 1} - \frac{36t^2}{3t^2 - 1} + 9 = \frac{-9}{3t^2 - 1}, \text{ 所以 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (x_1 + 1)(x_2 + 1) + y_1 y_2 = 0, \text{ 所以 } AM \perp AN, \text{ 即} \end{aligned}$$

$\triangle AMN$ 为直角三角形, 所以 $\triangle AMN$ 的外接圆的半径为 $\frac{1}{2}|MN|=9$, 故填 9.

解法二: 先证明一个关于双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的结论:

设点 P 为双曲线右支上一点, 右焦点 F , 左顶点 A , 则必有 $\angle PFA = 2\angle PAF$.

证明如下:

要证明 $\angle PFA = 2\angle PAF$, 只需证明 $\tan \angle PFA = -\tan(2\angle PAF)$, 即证 $-k_{PF} = \frac{2k_{PA}}{1-(k_{PA})^2}$ (*).

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $k_{PF} = \frac{y_0}{x_0 - 2}$, $k_{PA} = \frac{y_0}{x_0 + 1}$,

从而 (*) 式右边为 $\frac{2 \frac{y_0}{x_0 + 1}}{1 - (\frac{y_0}{x_0 + 1})^2} = \frac{2(x_0 + 1)y_0}{(x_0 + 1)^2 - y_0^2}$, 左边为 $-\frac{y_0}{x_0 - 2}$,

故 (*) 式等价于 $-\frac{y_0}{x_0 - 2} = \frac{2(x_0 + 1)y_0}{(x_0 + 1)^2 - y_0^2}$, 即为 $y_0^2 - (x_0 + 1)^2 = 2(x_0 + 1)(x_0 - 2)$,

代入 $y_0^2 = 3x_0^2 - 3$, 则只需 $2x_0^2 - 2x_0 - 4 = 2(x_0 + 1)(x_0 - 2)$,

因为上式成立, 所以原命题成立.

利用上述结论,

(1) 当 P, Q 都在右支时, 则 $\angle PFA = 2\angle PAF$, $\angle QFA = 2\angle QAF$, 又 $\angle PFA + \angle QFA = 180^\circ$, 所以 $\angle PAF + \angle QAF = 90^\circ$, 从而以 PQ 为直径的圆过 A , 故所求圆的半径为 9.

(2) 当点 P 在左支, 点 Q 在右支时, 只需证明 $\angle PFA = 2(\angle PAF - 90^\circ)$,

即证 $\tan \angle PFA = \tan 2(\angle PAF - 90^\circ)$, 只需证 $-k_{PF} = \frac{2k_{PA}}{1-(k_{PA})^2}$, 下同 (*) 式的证明.

从而以 PQ 为直径的圆过 A , 故所求圆的半径为 9.

综上, 从而以 PQ 为直径的圆过 A , 故所求圆的半径为 9.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 本小题主要考查三角函数的图象及性质, 三角函数恒等变换等基础知识; 考查运算求解能力, 逻辑推理能力等; 考查数形结合思想, 函数与方程思想等; 考查逻辑推理, 数学运算, 直观想象等核心素养; 体现基础性和综合性. 满分 13 分.

解: (1) 因为 $f(x)$ 的图象过点 $P\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, 所以 $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 2$, 1 分

所以 $\frac{\pi}{4} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 2 分

又因为 $|\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 3 分

故 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 4 分

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 得 $2k\pi - \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$, 5 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 6 分

(2) 证明: 因为 $f\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)f\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = 4\sin\alpha\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$, 7 分

所以 $4\sin\alpha\cos\beta = 3$, 即 $\sin\alpha\cos\beta = \frac{3}{4}$, 8 分

因为 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{15}{16}$, 9 分

所以 $\cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{16}$, 10 分

从而 $\sin\alpha\cos\beta = 4\cos\alpha\sin\beta$, 11 分

又 $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, 所以 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4\sin\beta}{\cos\beta}$, 12 分

所以 $\tan\alpha = 4\tan\beta$, 证毕. 13 分

16. 本小题主要考查导数及其应用等基础知识; 考查逻辑推理能力, 运算求解能力, 创新意识等; 考查函数与方程思想, 转化与化归思想, 分类与整合思想, 数形结合思想等; 考查逻辑推理, 数学运算, 直观想象等核心素养; 体现基础性和综合性. 满分 15 分.

解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 1 分

当 $a = 2$ 时, $f(x) = 2x^2 - \ln x$, $f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$ 2 分

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$ (舍去), 或 $x = \frac{1}{2}$, 3 分

当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减; 4 分

当 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增. 5 分

因此 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2$, 无极大值. 6 分

(2) 解法一: 由 $f(x) \geq (2-a)x$, 得 $ax^2 - \ln x + (a-2)x \geq 0$,

令 $g(x) = ax^2 - \ln x + (a-2)x$, $x > 0$, 7 分

则 $g'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + a - 2 = \frac{2ax^2 + (a-2)x - 1}{x} = \frac{(2x+1)(ax-1)}{x}$, 8 分

① 当 $a \leq 0$ 时, $g(1) = 2a - 2 < 0$, 不合题意, 舍去; 9 分

② 当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{1}{2}$ (舍去), 或 $x = \frac{1}{a}$, 10 分

当 $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减;

当 $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增. 11 分

因此 $g(x)$ 的最小值为 $g\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} + \ln a + 1 - \frac{2}{a} = \ln a + 1 - \frac{1}{a}$, 12 分

令 $m(a) = \ln a + 1 - \frac{1}{a}$, 依题意得 $m(a) \geq 0$.

由 $y = \ln x$ 及 $y = -\frac{1}{x}$ 的单调性可知 $m(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 13 分

又因为 $m(1) = 0$, 所以 $a \geq 1$, 14 分

所以 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$ 15 分

解法二: 由 $f(x) \geq (2-a)x$, 得 $(x^2+x)a \geq 2x + \ln x$,

因为 $x^2+x > 0$, 所以 $a \geq \frac{2x + \ln x}{x^2+x}$ 7 分

设 $g(x) = \frac{2x + \ln x}{x^2+x}$, $x > 0$, 8 分

则 $g'(x) = \frac{(2+\frac{1}{x})(x^2+x) - (2x + \ln x)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$ 9 分

$$= -\frac{(2x+1)(x + \ln x - 1)}{(x^2+x)^2},$$
 10 分

设 $h(x) = x + \ln x - 1$, 则 $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 11 分

又因为 $h(1) = 0$, 所以 $g'(x) = 0$ 有唯一零点 1. 12 分

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 13 分

从而 $g(x)$ 的最大值为 $g(1)=1$ ，所以 $a \geq 1$ ， 14 分

所以 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$ 。 15 分

解法三：由 $f(x) \geq (2-a)x$ ，得 $ax^2 - \ln x + (a-2)x \geq 0$ ，

令 $g(x) = ax^2 - \ln x + (a-2)x$ ， $x > 0$ ， 7 分

取 $x=1$ ，则 $g(1) = 2a-2 \geq 0$ ， 8 分

解得 $a \geq 1$ 。 9 分

因为 $g(x) = ax^2 - \ln x + (a-2)x = a(x^2 + x) - \ln x - 2x$ ，且 $x^2 + x > 0$ ，

所以当 $a \geq 1$ 时， $g(x) \geq x^2 - \ln x - x$ ， 10 分

令 $F(x) = x^2 - \ln x - x$ ，则只需证 $F(x) \geq 0$ 。 11 分

下面证明 $F(x) \geq 0$ 。

$F'(x) = 2x - \frac{1}{x} - 1 = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$ ， 12 分

当 $x \in (0, 1)$ 时， $F'(x) < 0$ ， $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减；

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $F'(x) > 0$ ， $F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增。 13 分

因此 $F(x) \geq F(1) = 0$ ，证毕。 14 分

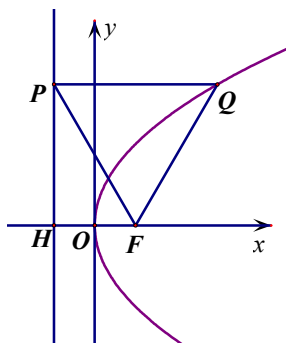
综上所述， a 的取值范围为 $[1, +\infty)$ 。 15 分

17. 本小题主要考查抛物线的标准方程及简单几何性质，直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查逻辑推理能力，运算求解能力等；考查转化与化归思想，数形结合思想，函数与方程思想等；考查逻辑推理，数学运算，直观想象等核心素养；体现基础性和综合性。满分 15 分。

解法一：(1) 依题意可知 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ， $l: x = -\frac{p}{2}$ 。 1 分

设直线 l 与 x 轴交于点 H ，则 $|PH| = 2\sqrt{3}$ ， 2 分

由抛物线的定义可知 $|PQ| = |QF|$ ， 3 分



又因为 $|FP|=|FQ|$ ，所以 $\triangle PFQ$ 为等边三角形， 4 分

又因为 $PQ \parallel HF$ ，

所以 $\angle PFH = \angle FPQ = 60^\circ$ ， 5 分

在 $\text{Rt}\triangle PHF$ 中，由 $\tan \angle PFH = \frac{|PH|}{|HF|}$ ，得 $|HF|=2$ ，

所以 $p=2$ 。 6 分

(2) 由(1)得抛物线方程为 $y^2=4x$ 。

依题意知直线 m 的斜率不为0，可设 $m: x=ty+4$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， 7 分

由方程组 $\begin{cases} x=ty+4, \\ y^2=4x \end{cases}$ 消去 x ，得 $y^2-4ty-16=0$ ， 8 分

则 $\Delta=16t^2+64>0$ ， $y_1+y_2=4t$ ， $y_1y_2=-16$ ， 9 分

所以 $|AD| \cdot |BD| = \sqrt{1+t^2}|y_1| \cdot \sqrt{1+t^2}|y_2| = (1+t^2)|y_1y_2| = 16(1+t^2)$ ， 10 分

故 $16(1+t^2)=24$ ，得 $t^2=\frac{1}{2}$ ， 11 分

又因为 $\frac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=-t^2$ ，所以 $\frac{y_1^2+2y_1y_2+y_2^2}{y_1y_2}=\frac{y_1}{y_2}+2+\frac{y_2}{y_1}=-\frac{1}{2}$ ， 12 分

从而 $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)+1=0$ ， 13 分

解得 $\frac{y_1}{y_2}=-2$ ，或 $\frac{y_1}{y_2}=-\frac{1}{2}$ ， 14 分

因为 $\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|y_1|}{|y_2|}$ ，

所以 $\frac{|AD|}{|BD|}$ 的值为2或 $\frac{1}{2}$ 。 15 分

解法二：(1) 依题意可知 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ， $l: x=-\frac{p}{2}$ 。 1 分

设直线 l 与 x 轴交于点 H ，则 $|PH|=2\sqrt{3}$ ， 2 分

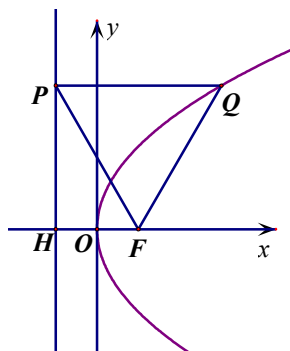
因为 $|FP| = |FQ|$, $PQ \parallel HF$,

所以 $x_P + x_Q = 2x_F$,

所以 $x_Q = \frac{3p}{2}$, 从而 $Q\left(\frac{3}{2}p, 2\sqrt{3}\right)$,

代入 $y^2 = 2px$, 得 $12 = 3p^2$,

又 $p > 0$, 得 $p = 2$.



..... 3 分

..... 4 分

..... 5 分

..... 6 分

(2) 由 (1) 得抛物线方程为 $y^2 = 4x$.

依题意知直线 m 的斜率不为 0, 可设 $m: x = ty + 4$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 7 分

由方程组 $\begin{cases} x = ty + 4 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消去 x , 得 $y^2 - 4ty - 16 = 0$, 8 分

则 $\Delta = 16t^2 + 64 > 0$, $y_1 + y_2 = 4t$, $y_1 y_2 = -16$, 9 分

所以 $|AD| \cdot |BD| = \sqrt{1+t^2} |y_1| \cdot \sqrt{1+t^2} |y_2| = (1+t^2) |y_1 y_2| = 16(1+t^2)$, 10 分

故 $16(1+t^2) = 24$, 得 $t^2 = \frac{1}{2}$, 11 分

根据对称性, 不妨取 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $y^2 - 2\sqrt{2}y - 16 = 0$, 12 分

解得 $y = 4\sqrt{2}$, 或 $y = -2\sqrt{2}$, 13 分

从而 $\frac{y_1}{y_2} = -2$, 或 $\frac{y_1}{y_2} = -\frac{1}{2}$, 14 分

因为 $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|y_1|}{|y_2|}$,

所以 $\frac{|AD|}{|BD|}$ 的值为 2 或 $\frac{1}{2}$ 15 分

18. 本小题主要考查简单几何体的体积, 直线与直线, 直线与平面, 空间角等基础知识; 考查空间想象能力, 逻辑推理能力, 运算求解能力, 创新意识等; 考查转化与化归思想, 数形结合思想, 函数与方程思想等; 考查逻辑推理, 数学运算, 直观想象, 数学抽象等核心素养; 体现基础性、综合性和创新性. 满分 17 分.

解法一：(1) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$ ， 1 分

又 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 \times \cos \alpha = 2 \cos \alpha$ ， 2 分

同理 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cos \alpha$ ，所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ， 3 分

故 $AE \perp BC$ 。 4 分

(2) 取 BC 中点 O ，由 $AB = AC$ ，可知 $AO \perp BC$ ，

由 (1) 知 $AE \perp BC$ ，又 $AE \cap AO = A$ ，所以 $BC \perp$ 平面 AOE 。

如图所示，以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OC}$ ， $\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴、 y 轴的正方向，并均以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系， 5 分

则 $A(0, \sqrt{3}, 0)$ ， $B(-1, 0, 0)$ ， $C(1, 0, 0)$ 。

设 $\angle OAE = \theta$ ，

则 $E(0, \sqrt{3} - \cos \theta, \sin \theta)$ ，

从而 $\overrightarrow{AE} = (0, -\cos \theta, \sin \theta)$ ，

$\overrightarrow{AB} = (-1, -\sqrt{3}, 0)$ ， 6 分

又 $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} \rangle = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AE}|} = \frac{1}{2}$ ，

解得 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，从而 $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， 7 分

所以 $E(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ ， $\overrightarrow{BE} = (1, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ 。

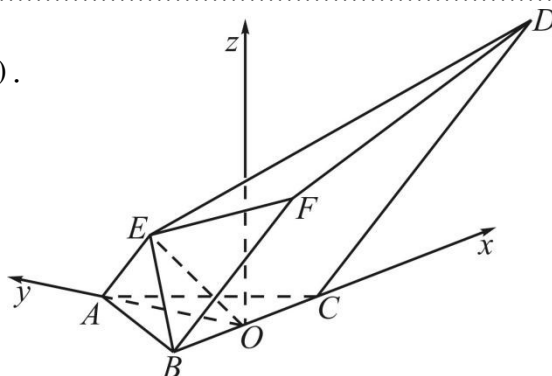
设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 $BCDF$ 的法向量，

$\overrightarrow{AE} = (0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ ， $\overrightarrow{BC} = (2, 0, 0)$ ， 8 分

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = -\frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{\sqrt{6}}{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 2x = 0. \end{cases}$$

取 $y = \sqrt{2}$ ，则 $x = 0$ ， $z = 1$ ，所以 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{2}, 1)$ 是平面 $BCDF$ 的一个法向量。 9 分

设直线 BE 与平面 $BCDF$ 所成角为 φ ，



由 $AE = AE$, $AB = AC$, $\angle EAB = \angle EAC$, 得 $\triangle EAB \cong \triangle EAC$,

所以 $EB = EC$,

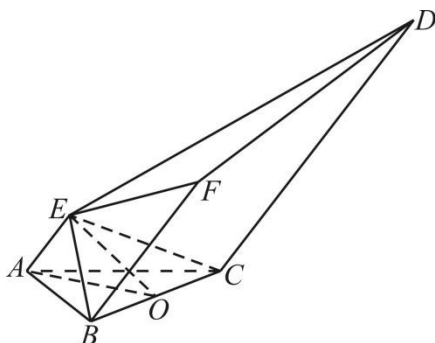
故 $EO \perp BC$.

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$,

得 $AO \perp BC$, 又 $AO \cap EO = O$,

所以 $BC \perp$ 平面 AOE ,

又 $AE \subset$ 平面 AOE , 所以 $AE \perp BC$.



(2) 当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 在 $\triangle ABE$ 中, 由余弦定理得

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cos \angle EAB = 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3, \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

所以 $BE = \sqrt{3}$, $AB^2 = AE^2 + BE^2$, 从而 $AE \perp BE$. $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

又由 (1) 知 $AE \perp BC$, $BE \cap BC = B$, 所以 $AE \perp$ 平面 BCE ,

所以 $AE \perp EO$, 又由 $AE \parallel BF$, 所以 $BF \perp EO$,

又 $BC \perp EO$, $BC \cap BF = B$, 所以 $EO \perp$ 平面 $BCDF$, $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

所以 $\angle EBO$ 为直线 BE 与平面 $BCDF$ 所成的角. $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

当 $\beta = \frac{\pi}{3}$ 时, $\triangle ABC$ 为等边三角形, 故 $BO = \frac{1}{2}BC = 1$,

$$\text{所以 } \cos \angle EBO = \frac{BO}{BE} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 从而 } \sin \angle EBO = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

所以直线 BE 与平面 $BCDF$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

(3) 过 E 作 $EH \perp AO$ 于点 H ,

由 (1) 可知 $BC \perp$ 平面 AOE , 从而 $BC \perp EH$,

又 $AO \cap BC = O$, 所以 $EH \perp$ 平面 ABC . $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

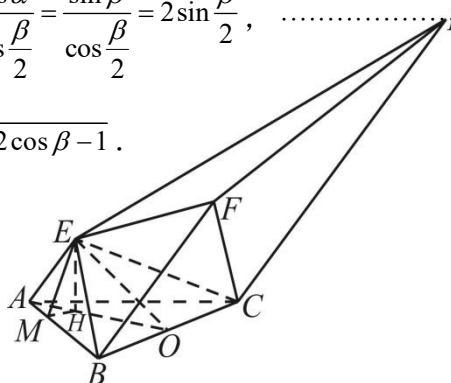
过 H 作 $HM \perp AB$ 于 M , 连接 EH , 可知 $EM \perp AB$,

$$\cos \angle EAH = \frac{AH}{AE} = \frac{\frac{AM}{\cos \angle BAE}}{\frac{AM}{\cos \angle BAO}} = \frac{\cos \angle BAE}{\cos \angle BAO} = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = 2 \sin \frac{\beta}{2}, \quad \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

$$\text{故 } EH = EA \cdot \sin \angle EAH = \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = \sqrt{2 \cos \beta - 1}.$$

连接 CF , 因为 $AE \parallel BF$,

$$\text{所以 } \frac{V_{A-BCE}}{V_{F-BCE}} = \frac{AE}{BF} = \frac{1}{3},$$



又因为 $BF \parallel CD$ ，所以 $\frac{V_{B-FCE}}{V_{D-FCE}} = \frac{BF}{CD} = \frac{3}{5}$ ，

从而 $V_{D-FCE} = \frac{5}{3}V_{B-FCE} = 5V_{A-BCE} = 5V_{E-ABC}$ ，

故该五面体的体积 $V = 9V_{E-ABC}$ ， 13分

$$\begin{aligned} \text{又 } V_{E-ABC} &= \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot EH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \sin \beta \sqrt{2 \cos \beta - 1} = \frac{2}{3} \sin \beta \sqrt{2 \cos \beta - 1} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\sin^2 \beta (2 \cos \beta - 1)} = \frac{2}{3} \sqrt{(1 - \cos^2 \beta)(2 \cos \beta - 1)}, \end{aligned}$$

因此该多面体的体积 $V = 6\sqrt{(1 - \cos^2 \beta)(2 \cos \beta - 1)}$ 。 14分

下同解法一。 17分

19. 本小题主要考查条件概率与全概率公式，分布列与数学期望，等差数列等基础知识；考查逻辑推理能力，运算求解能力，应用意识，创新意识等；考查统计与概率思想，转化与化归思想等；考查逻辑推理，数学运算，数学抽象，数学建模等核心素养；体现基础性、综合性和创新性。满分17分。

解：（1）由题意可知 $a_0 = 1$ ， $a_N = 0$ 。 2分

由全概率公式，得 $a_k = pa_{k-1} + (1-p)a_{k+1}$ ， $1 \leq k \leq N-1$ 。 4分

$$(2) \text{ 当 } p = \frac{1}{2} \text{ 时, } a_k = \frac{1}{2}a_{k-1} + \frac{1}{2}a_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq N-1,$$

即 $a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1}$ ，故 $\{a_k\}$ 为等差数列。 5分

设通项公式 $a_k = a_0 + k \cdot d$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} a_0 = 1, \\ a_N = a_0 + N \cdot d = 0, \end{cases} \text{ 得 } d = -\frac{1}{N}, \quad \dots\dots\dots 6分$$

$$\text{所以 } a_k = 1 - \frac{k}{N}. \quad \dots\dots\dots 7分$$

又因为系统数据块的初始数量为 M ，

$$\text{所以系统最终以“成功复位”状态终止的概率为 } a_M = 1 - \frac{M}{N},$$

$$\text{从而系统最终以“内存溢出”状态终止的概率为 } 1 - a_M = \frac{M}{N}.$$

$$\text{令 } (1 - \frac{M}{N}) - \frac{M}{N} > 0, \text{ 解得 } M < \frac{N}{2}, \quad \dots\dots\dots 8分$$

所以当 $0 \leq M < \frac{N}{2}$ 时，“成功复位”的概率大于“内存溢出”的概率；

同理可得, 当 $M = \frac{N}{2}$ 时, “成功复位”的概率等于“内存溢出”的概率;

当 $\frac{N}{2} < M \leq N$ 时, “成功复位”的概率小于“内存溢出”的概率. 9分

(3) 解法一: 设 ξ_i 为第 i 步数据块的数量的变化值, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 相互独立, 且分布列均为 $P(\xi_i = -1) = p, P(\xi_i = 1) = 1 - p$ 10分

由题意可知, $X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$, 11分

所以 $E(\lambda^{X_{n+1}}) = E(\lambda^{X_n + \xi_{n+1}}) = E(\lambda^{X_n} \cdot \lambda^{\xi_{n+1}})$ 12分

因为每步操作相互独立, 所以第 $n+1$ 步的变化值 ξ_{n+1} 与之前的累积状态 X_n 相互独立,

从而随机变量 λ^{X_n} 与 $\lambda^{\xi_{n+1}}$ 相互独立, 则 $E(\lambda^{X_n} \cdot \lambda^{\xi_{n+1}}) = E(\lambda^{X_n}) \cdot E(\lambda^{\xi_{n+1}})$, 13分

所以 $E(\lambda^{X_{n+1}}) = E(\lambda^{X_n}) \cdot E(\lambda^{\xi_{n+1}})$ 14分

因为 $E(\lambda^{X_n})$ 与 n 无关, 所以 $E(\lambda^{X_{n+1}}) = E(\lambda^{X_n})$ 恒成立, 15分

事实上, $E(\lambda^{X_{n+1}}) = E(\lambda^{X_n}) = E(\lambda^{X_{n-1}}) = \dots = E(\lambda^{X_0}) = E(\lambda^M)$, 故只需 $E(\lambda^{\xi_{n+1}}) = 1$,

由 ξ_i 的分布列可知 $p \cdot \lambda^{-1} + (1-p) \cdot \lambda^1 = 1$, 16分

因式分解得 $(\lambda - 1)[(1-p)\lambda - p] = 0$, 又 $\lambda \neq 1$,

所以 $\lambda = \frac{p}{1-p}$.

所以当 $p \neq \frac{1}{2}$ 时, 若 $E(\lambda^{X_n})$ 与 n 无关, 则 $\lambda = \frac{p}{1-p}$ 17分

解法二: 记系统运行 n 步的过程中, 执行写入操作的次数为 Y 10分

因为每步操作相互独立, 所以 $Y \sim B(n, 1-p)$ 11分

因为 $X_n = M + Y - (n - Y) = M - n + 2Y$,

所以 $\lambda^{X_n} = \lambda^{M-n+2Y} = \lambda^{M-n} \cdot (\lambda^2)^Y$,

所以 $E(\lambda^{X_n}) = \lambda^{M-n} \cdot E(\lambda^{2Y}) = \lambda^{M-n} \cdot E((\lambda^2)^Y)$ 12分

随机变量 $(\lambda^2)^Y$ 的可能取值为 $(\lambda^2)^0, (\lambda^2)^1, \dots, (\lambda^2)^n$ 13分

因为 $P((\lambda^2)^Y = (\lambda^2)^r) = P(Y = r) = C_n^r (1-p)^r p^{n-r}, r = 0, 1, 2, \dots, n$, 14分

所以 $E((\lambda^2)^Y) = \sum_{r=0}^n [(\lambda^2)^r \cdot P(Y = r)] = \sum_{r=0}^n [C_n^r \cdot (\lambda^2)^r \cdot (1-p)^r \cdot p^{n-r}] = [\lambda^2(1-p) + p]^n$,

..... 15分

从而 $E(\lambda^{X_n}) = \lambda^{M-n} \cdot [\lambda^2(1-p) + p]^n = \lambda^M \cdot \left[\lambda(1-p) + \frac{p}{\lambda} \right]^n$ 16分

要使得 $E(\lambda^{X_n})$ 与 n 无关, 又 λ^M 是常数, $\lambda(1-p) + \frac{p}{\lambda} > 0$,

所以 $\lambda(1-p) + \frac{p}{\lambda} = 1$, 解得 $\lambda = \frac{p}{1-p}$.

所以当 $p \neq \frac{1}{2}$ 时, 若 $E(\lambda^{X_n})$ 与 n 无关, 则 $\lambda = \frac{p}{1-p}$ 17分