

重庆市 2026 届高考模拟调研卷（四）

数 学 试 题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{i^2 + 1, i^3 - 1, i^4 + 1\}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $A \cap B =$
 A. $\{0, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{0, 1\}$
2. 已知 $P: x^2 - 1 < 0$, $q: x \geq m$, 若 P 是 q 的既不充分又不必要条件, 则实数 m 的取值范围是
 A. $(-1, 1)$ B. $[-1, 1]$ C. $(-1, +\infty)$ D. $[-1, +\infty)$
3. 若向量 $a = (4, 6)$, $b = (4, 16)$ 且 $a \perp (2a + \lambda b)$, 则 λ 的值为
 A. $-\frac{13}{14}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{13}{14}$
4. 函数 $|e^x - 2| = a$ 的零点个数不可能是
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
5. 点 $A(6, 1)$ 到直线 $l: (5\lambda - 1)x - (27\lambda - 1)y + 22\lambda = 0$ 的最大距离是
 A. 4 B. 5 C. 6 D. $\sqrt{34}$
6. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2ax - 1$ 与 $g(x) = e^x + b$ 的图象在 $x = 0$ 处的切线重合, 则 $a + b =$
 A. $e - 1$ B. $e + 1$ C. $\frac{5}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $na_{n+1} - (n+1)a_n = 2n(n+1)$, 且 $\{a_n\}$ 中小于 0 的项有 10 项, 则 a_1 的取值范围是
 A. $[-22, -20)$ B. $(-22, -20]$ C. $[-20, -18)$ D. $(-20, -18]$
8. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, $x + 2^{2x-1} = 2$, $4y + \log_2 y = 2$, 则 $x + 2y =$
 A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错得 0 分。

9. 已知 A, B 为两个随机事件, $\bar{A}, \bar{B}$ 分别表示 A, B 的对立事件, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, 则下列说法正确的是

A. 若 $A \subseteq B$, 则 $P(A+B)=0.3$

B. 若 $A \subseteq \bar{B}$, 则 $P(A+B)=0.5$

C. 若 A, B 相互独立, 则 $P(A+B)=0.4$

D. 若 $P(A\bar{B})=0.1$, 则 $P(A|B)=\frac{1}{3}$

10. 已知 $P(x, y)$ 为直线 $l: x+y-2=0$ 在第一象限内的一点, 则下列结论正确的是

A. xy 的最大值为 2

B. $\frac{1}{x} + \frac{9}{y}$ 的最小值为 8

C. $x^2 + 4y^2$ 的最小值为 3

D. $\frac{2x+y-1}{xy}$ 的最小值为 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, F_1, F_2 是其左右焦点, 点 P 为双曲线上在第一象限内的一点, 连接点 P 与右焦点 F_2 的直线交双曲线的右支于另一点 Q , 记点 P 到两渐近线的距离为 d_1, d_2 , 点 Q 到两渐近线的距离为 d_3, d_4 , $\triangle PF_1F_2, \triangle QF_1F_2$ 的内切圆圆心分别为 I_1, I_2 , 则下列结论正确的是

A. $d_1d_2 > d_3d_4$

B. 两内切圆相切于 x 轴上同一点

C. 点 F_2 在以 I_1I_2 为直径的圆上

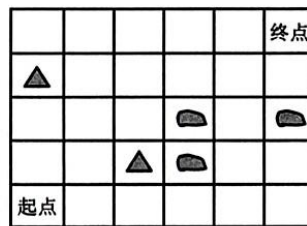
D. 两内切圆周长之和的取值范围是 $[4\pi, \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi)$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 已知 α 为锐角, 且 $\tan 2\alpha = -\frac{4}{3}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

13. 直径为 2 的球 O 与一个正方体的各个面相切, 过正方体的一条棱作一平面, 该平面被正方体截得的长方形面积为 $2\sqrt{5}$, 则球 O 被截面截得的圆的面积为 _____.

14. 小明玩一款棋, 如图所示, 地图上标记了不能走的山或湖, 小明每一步只能向上或向右移动 1 格, 则从起点到终点共有 _____ 种不同的走法.



四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

(1) 求 ω 以及曲线 $y = f(x)$ 的对称中心;

(2) 讨论函数 $g(x) = f(x) - x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的单调性.

16. (15 分)

小明和小红参加班级数学老师组织的游戏，游戏共 2 轮，每轮的规则如下：小明和小红在每轮的开始每人都拿一张王牌和一张鬼牌，每人每次独立地随机取出 1 张牌相互交换，交换 3 次后该轮结束. 2 轮进行完游戏结束.

(1) 记每轮游戏在交换 1 次后，小明手里王牌的张数为 X ，求 X 的分布列及数学期望；

(2) 在游戏开始前，数学老师问了小明一个问题：当游戏结束时，只要在 2 轮中有至少 1 轮结束时，你手里的两张牌是相同的，你就获胜，否则小红获胜，你愿意接受这样的游戏规则吗？如果你是小明，你会如何回答？

17. (15 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n$.

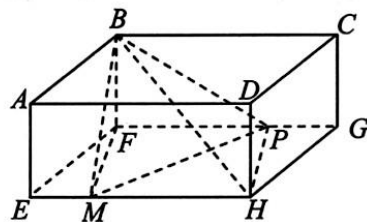
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n = \frac{1}{(2a_n - 1)(2a_n + 3)}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 R_n ；

(3) 令 $c_n = \frac{1}{a_n(a_n + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 M_n ，证明：对一切正整数 n ， $M_n < \frac{1}{3}$ 恒成立.

18. (17 分)

如图所示, 在长方体 $ABCD-EFGH$ 中, $AB=2\sqrt{2}$, $AD=4$, $AE=\sqrt{3}$, 点 M 在棱 EH 上, 点 P 在棱 FG 上, 且 $EM=GP=1$.



(1) 证明: $MP \perp BH$;

(2) 求直线 BH 与平面 BMP 所成角的余弦值;

(3) 在棱 FP 上是否存在点 Q , 使得 Q 到平面 BMP 的距离与 Q 到平面 BFM 的距离相等? 若存在, 求出 FQ 的长; 若不存在, 说明理由.

19. (17 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆上, 且椭圆上满足 $PF_1 \perp PF_2$ 的点 P 有且仅有 2 个.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点 (A 在第一象限), 与 x 轴, y 轴分别交于点 M, N , 且 $\overline{AM} = 3\overline{AN}$;

点 A 关于 x 轴的对称点为 D , 直线 DN 与椭圆的另一个交点为 E .

(i) 记直线 AN, DN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $\frac{k_2}{k_1}$ 为定值;

(ii) 求直线 BE 的斜率的最小值.

重庆市 2026 届高考模拟调研卷（四）

数学答案

1	2	3	4	5	6	7	8
A	C	A	D	B	D	C	B

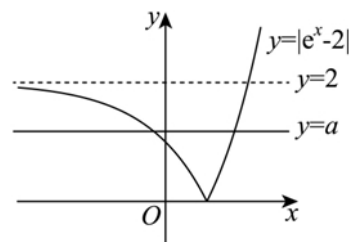
1 题【一解析】 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{i^2 + 1, i^3 - 1, i^4 + 1\} = \{0, -i - 1, 2\}$, 则 $A \cap B = \{0, 2\}$;

2 题【一解析】设集合 $p: x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$; 若 p 是 q 的既不充分又不必要条件, 则两者对应集合没有包含关系, 故 $m > -1$;

3 题【一解析】 $2\vec{a} + \lambda\vec{b} = (8 + 4\lambda, 12 + 16\lambda)$, 故

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \lambda\vec{b}) = (4, 6) \cdot (8 + 4\lambda, 12 + 16\lambda) = 104 + 112\lambda = 0, \text{ 解得 } \lambda = -\frac{13}{14};$$

4 题【一解析】画出 $y = |e^x - 2|$ 与 $y = a$ 的图象如图: 函数 $|e^x - 2| = a$



的零点个数有可能是 0, 1, 2, 不可能是 3;

5 题【一解析】由 $(5\lambda - 1)x - (27\lambda - 1)y + 22\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(5x - 27y + 22) + (y - x) = 0$ 得

$$\begin{cases} 5x - 27y + 22 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ 则直线 } l \text{ 恒过定点 } P(1, 1), \text{ 故点 } A(6, 1) \text{ 到直线 } l \text{ 的最大距离是 } |AP| = 5;$$

6 题【一解析】由 $f'(x) = 2x + 2a, g'(x) = e^x$, 故 $\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + b = -1 \\ 2a = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}$,

$$\text{故 } a + b = -\frac{3}{2};$$

7 题【一解析】由 $na_{n+1} - (n+1)a_n = 2n(n+1)$ 得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 2$, 故

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} + 2(n-1) = 2n + (a_1 - 2),$$

$$\text{故 } a_n = 2n^2 + (a_1 - 2)n; \text{ 令 } a_n < 0 \text{ 得 } 1 \leq n < \frac{2 - a_1}{2} \text{ 且 } a_1 < 0, \text{ 故 } 10 < \frac{2 - a_1}{2} \leq 11 \Rightarrow a_1 \in [-20, -18];$$

8 题【一解析】 $x + 2^{2x-1} = 2 \Rightarrow 2x + 2^{2x} = 4$,

$$4y + \log_2 y = 2 \Rightarrow 4y + \log_2 y + 2 = 4 \Rightarrow \log_2(4y) + 4y = 4;$$

显然函数 $f(t) = t + 2^t$ 单调递增, 故 $f(2x) = f(\log_2(4y)) \Rightarrow 2x = \log_2(4y) \Rightarrow 4y = 2^{2x}$,

$$\text{故 } x + 2y = x + \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} = x + 2^{2x-1} = 2.$$

9	10	11
ABD	BD	BCD

9 题【一解析】若 $A \subseteq B$, 则 $P(A+B) = P(B) = 0.3$, A 正确;

若 $A \subseteq \bar{B}$, 则 A, B 互斥, 故 $P(A+B) = P(A) + P(B) = 0.5$, B 正确;

若 A, B 相互独立, 则 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.2 + 0.3 - 0.2 \times 0.3 = 0.44$, C 错误,

若 $P(\overline{AB}) = 0.1$, 则 $P(AB) = P(A) - P(\overline{AB}) = 0.1$, 故 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{3}$, D 正确;

10 题 【

一解析】由基本不等式可得 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$, 当且仅当 $x = y = 1$ 时取等号, 故 A 错误;

$\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1}{2}(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right) = \frac{1}{2}\left(10 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y}\right) \geq 8$, 当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{9x}{y}$ 时取等号, 故 B 正确;

由 $x = 2 - y$ ($0 < y < 2$), 代入得 $x^2 + 4y^2 = (2 - y)^2 + 4y^2 = 5y^2 - 4y + 4 \geq \frac{16}{5}$,

此时 $y = \frac{2}{5}, x = \frac{8}{5}$, 故 C 错误;

$\frac{2x+y-1}{xy} = \frac{2x+y-\frac{1}{2}(x+y)}{xy} = \frac{3}{2y} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2y} + \frac{1}{2x}\right)(x+y) = \frac{1}{2}\left(\frac{3x}{2y} + \frac{y}{2x} + 2\right) \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

当且仅当 $\frac{3x}{2y} = \frac{y}{2x}$ 成立, 故 D 正确.

11 题 【

一解析】设点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 经计算可得 $d_1 d_2 = d_3 d_4 = \frac{3}{4}$, 故 A 项错误;

如图, 设 $\triangle PF_1 F_2$ 的内切圆的切点为 R, S, T , 由双曲线的

的定义得, $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 而 $|PR| = |PS|$,

得 $|RF_1| - |SF_2| = 2a$, 而 $|RF_1| = |TF_1|, |SF_2| = |TF_2|$,

得 $|TF_1| - |TF_2| = 2a$, 设 B 为双曲线的右顶点, 又因为

$|BF_1| - |BF_2| = (c+a) - (c-a) = 2a$, 得切点 T 与点 B 重合,

得点 $T(1, 0)$, 则内心 I_1 的横坐标为 1, 同理可得, 内心 I_2 的横坐标也为 1, 得 I_1, B, I_2 三点共线,

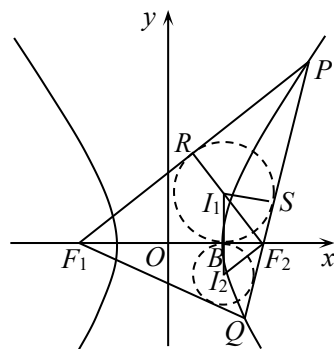
故 B 项正确; 设直线 PQ 的倾斜角为 θ , 连接 $I_1 F_2, I_2 F_2$, 则 $\angle I_2 F_2 B = \angle I_2 F_2 Q = \frac{\theta}{2}$,

$\angle I_1 F_2 B = \angle I_1 F_2 S = \frac{\pi - \theta}{2}$, 故 $I_1 F_2 \perp I_2 F_2$, 故 C 正确; 由题可知双曲线的渐近线为: $y = \pm \sqrt{3}x$,

倾斜角分别为 $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, 因为直线 PQ 与双曲线的右支交于 P, Q 两点, 所以 $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$,

$\frac{\theta}{2} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$, $\tan \frac{\theta}{2} \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$, 令 $\tan \frac{\theta}{2} = t$, 则 $t \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$, 则 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ 单调递减,

在 $(1, \sqrt{3})$ 单调递增, 故 $t + \frac{1}{t} \in [2, \frac{4\sqrt{3}}{3})$, 故周长范围为 $[4\pi, \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi)$, 故 D 项正确.



12	13	14
2	$\frac{4}{5}\pi$	29

12 题【

—解析】

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{3} \Rightarrow 2 \tan^2 \alpha - 3 \tan \alpha - 2 = 0 \Rightarrow (\tan \alpha - 2)(2 \tan \alpha + 1) = 0, \text{ 解得}$$

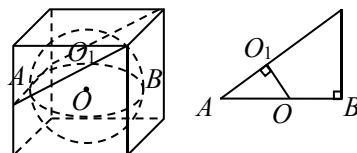
$$\tan \alpha = 2 \text{ 或 } \tan \alpha = -\frac{1}{2}, \text{ 因为 } \alpha \text{ 为锐角, 则 } \tan \alpha = 2.$$

13 题【

—解析】由题意, 正方体边长为 2, 则截面长方形的另一边为

$\sqrt{5}$, 如图所示截面位置, 点 A 是截面长方形另一条宽的中点, 也是所在平面的中心点, O_1 为截面圆的圆心, 则 $OA = 1$, 所以截面圆半

$$\text{径 } O_1A = \frac{2}{5}\sqrt{5}, \text{ 面积为 } \frac{4}{5}\pi.$$



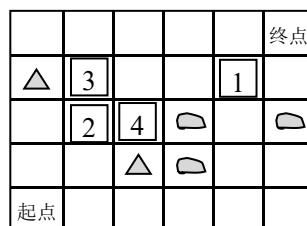
14 题【

—解析】通过列举: ①若从起点向右走先走到 1 处, 再走到终点, 有 2 种走法;

②从起点先走到 2 处, 有 3 种走法, 再从 2 处通过 3 处走到终点, 有 5 种走法, 共 15 种走法;

③从起点先走到 2 处, 有 3 种走法, 再从 2 处通过 4 处走到终点, 有 4 种走法, 共 12 种走法.

综上, 一共有 29 种走法.



四、解答题:

15. (13 分)

解: (1) 由 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ 知 $\omega = 2$,2 分

$$\text{所以 } f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3}), \text{ 令 } 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi, \text{ 得 } x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 得对称中心为 } (\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0) (k \in \mathbb{Z}). \text{6 分}$$

$$(2) \text{ 则 } g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - x, \text{ 求导有 } g'(x) = 2 \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1,$$

$$\text{当 } g'(x) > 0 \text{ 时, } \frac{2\pi}{3} < x < \pi, \text{ 所以当 } x \in (\frac{2\pi}{3}, \pi) \text{ 时, } g(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{当 } g'(x) < 0 \text{ 时, } 0 < x < \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以当 } x \in (0, \frac{2\pi}{3}) \text{ 时, } g(x) \text{ 单调递减.13 分}$$

16. (15 分)

解: (1) 交换 1 次后, 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2;

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

故随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{随机变量 } X \text{ 的期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1. \text{7 分}$$

(2) 记事件 A_n 为每轮小明第 $n(n=1, 2, 3)$ 次交换后, 他手里的两张牌相同;

则 $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}[1 - P(A_n)]$; 又 $P(A_1) = \frac{1}{2}$, 故 $P(A_2) = \frac{1}{2}[1 - P(A_1)] = \frac{1}{4}$,

故 $P(A_3) = \frac{1}{2}[1 - P(A_2)] = \frac{3}{8}$; 故小明获胜的概率 $P = 1 - \left(1 - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{39}{64} > \frac{1}{2}$;

所以如果我是小明，我愿意接受这样的游戏规则。.....15 分

17. (15 分)

解: (1) 当 $n=1$ 时: $S_1 = T_1 = 2$;

当 $n \geq 2$ 时: $S_n = T_n - T_{n-1} = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}(n-1)^3 - (n-1)^2 - \frac{2}{3}(n-1) = n^2 + n$,

故当 $n=1$ 时: $a_1=S_1=2$; 当 $n \geq 2$ 时: $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-[(n-1)^2+(n-1)]=2n$,

$$(2) \quad b_n = \frac{1}{(2a_n-1)(2a_n+3)} = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right),$$

故数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$R_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{16n+12}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(3) 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$: $n^2 + \frac{n}{2} > n^2 + \frac{n}{2} - \frac{3}{16} = \left(n - \frac{1}{4}\right)\left(n + \frac{3}{4}\right)$;

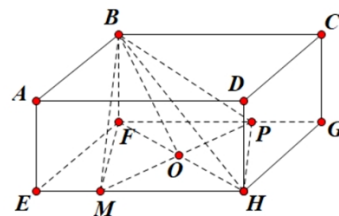
$$\text{故 } c_n = \frac{1}{a_n(a_n+1)} = \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n\left(n+\frac{1}{2}\right)} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(n-\frac{1}{4}\right)\left(n+\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{(4n-1)(4n+3)} = \mathfrak{A}_n,$$

18. (17 分)

解: (1) 证明: 如图所示, 连接 FH 交 MP 于点 O , $MH = FP = 3$,

故 $MP \perp FH$ ，由长方体得 $BF \perp$ 平面 $EFGH$ ，

(2) 如图所示, 连接 BO , 由 (1) 知, $MP \perp$ 平面 BFH , 又由 $MP \subset$ 平面 BMP 知, 平面 $BMP \perp$ 平面 BFH , 交线为 BO , 故点 H 在平面 BMP 的投影必在直线 BO 上, 故直线 BH 与平面 BMP 所成角即为



$\angle HBO$ ，在 $\triangle HBO$ 中， $OH = \frac{1}{2}FH = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{6}$ ， $BO = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = 3$ ，
 $BH = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{3}$ ，故由余弦定理： $\cos \angle HBO = \frac{5}{9}\sqrt{3}$ ，即直线 BH 与平面 BMP 所成
 角的余弦值为 $\frac{5}{9}\sqrt{3}$ ；.....11 分

(3) 假设存在点 Q 满足条件，记 Q 到平面 BMP 的距离= Q 到平面 BFM 的距离= d ，

$$\text{则 } \frac{V_{Q-BFM}}{V_{Q-BMP}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\triangle BFM} \cdot d}{\frac{1}{3}S_{\triangle BMP} \cdot d} = \frac{S_{\triangle BFM}}{S_{\triangle BMP}}, \text{ 由 (1) (2) 知 } S_{\triangle BFM} = \frac{1}{2}BF \cdot FM = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$$BM = MP = BP = 2\sqrt{3}, \text{ 故 } S_{\triangle BMP} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}; \text{ 则 } \frac{V_{Q-BFM}}{V_{Q-BMP}} = \frac{S_{\triangle BFM}}{S_{\triangle BMP}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{另一方面 } \frac{V_{Q-BFM}}{V_{Q-BMP}} = \frac{V_{B-FMQ}}{V_{B-PMQ}} = \frac{FQ}{QP} = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } FQ = \frac{1}{3}FP = 1, \text{ 综上所述, 存在符合题意的 } Q \text{ 点, } FQ = 1. \text{17 分}$$

19. (17 分)

解：(1) 由椭圆上满足 $PF_1 \perp PF_2$ 的点 P 有且仅有 2 个知以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆有 2 个公共点，

$$\text{故 } b = c, \text{ 故椭圆 } C: \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 代入 } (\sqrt{2}, 1) \text{ 解得 } b^2 = 2, \text{ 故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1. \text{ ...4 分}$$

$$(2) \text{ (i) 设 } N(0, n), \text{ 则由 } \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AN} \text{ 知 } A\left(x_0, \frac{3}{2}n\right) \Rightarrow D\left(x_0, -\frac{3}{2}n\right) (n > 0, x_0 > 0),$$

$$\text{故 } k_1 = \frac{\frac{3}{2}n - n}{x_0} = \frac{n}{2x_0}, k_2 = \frac{-\frac{3}{2}n - n}{x_0} = -\frac{5n}{2x_0}, \text{ 故 } \frac{k_2}{k_1} = -5 \text{ 为定值.10 分}$$

$$(ii) \text{ 由 (i) 知直线 } l: y = kx + n (k = k_1 = \frac{n}{2x_0} > 0), \text{ 直线 } DN: y = -5kx + n;$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx + n \end{cases}, \text{ 整理得: } (2k^2 + 1)x^2 + 4nkx + (2n^2 - 4) = 0,$$

$$\text{故由韦达定理: } x_0 x_B = \frac{2n^2 - 4}{2k^2 + 1} \Rightarrow x_B = \frac{2(n^2 - 2)}{(2k^2 + 1)x_0} \Rightarrow y_B = kx_B + n = \frac{2k(n^2 - 2)}{(2k^2 + 1)x_0} + n;$$

$$\text{同理可得: } x_E = \frac{2(n^2 - 2)}{(50k^2 + 1)x_0} \Rightarrow y_E = \frac{-10k(n^2 - 2)}{(50k^2 + 1)x_0} + n;$$

$$\text{故} \begin{cases} x_E - x_B = \frac{2(n^2 - 2)}{(50k^2 + 1)x_0} - \frac{2(n^2 - 2)}{(2k^2 + 1)x_0} = \frac{-96k^2(n^2 - 2)}{(50k^2 + 1)(2k^2 + 1)x_0} \\ y_E - y_B = \frac{-10k(n^2 - 2)}{(50k^2 + 1)x_0} + n - \frac{2k(n^2 - 2)}{(2k^2 + 1)x_0} - n = \frac{-12k(10k^2 + 1)(n^2 - 2)}{(50k^2 + 1)(2k^2 + 1)x_0} \end{cases},$$

$$\text{故 } k_{BE} = \frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \frac{10k^2 + 1}{8k} = \frac{5k}{4} + \frac{1}{8k} \geq 2\sqrt{\frac{5k}{4} \cdot \frac{1}{8k}} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{5k}{4} = \frac{1}{8k} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ 时取等号；此时 } \frac{n}{2\sqrt{4 - \frac{9}{2}n^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow n^2 = \frac{4}{7} < 2,$$

故 N 在椭圆 C 内 $\Rightarrow \Delta > 0$ 成立；

综上所述：直线 BE 的斜率的最小值为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$17 分