

本试卷共 4 页, 19 题. 全卷满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

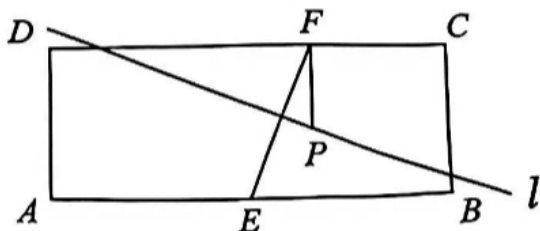
1. 已知复数 $z=1+i$, 则 $|\frac{z}{z-1}|=$
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4
2. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x|x^2-x\leq 0\}$, 则 $A\cap B=$
A. $\{-1,0\}$ B. $\{0,1\}$ C. $\{-1,1\}$ D. $\{0,1,2\}$
3. 设公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_7=28$, 若 a_3, a_4, a_8 成等比数列, 则 $a_8=$
A. 16 B. 8 C. 4 D. 2
4. 已知 α, β 是两个不同的平面, l 为平面 α 内的一条直线, 则“ $l//\beta$ ”是“ $\alpha//\beta$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知变量 x, y 的统计数据如下, 若 x 与 y 的回归直线方程为 $\hat{y}=0.64x+0.8$, 则 $m=$

x	2.8	3.3	5.0	6.7	7.2
y	2.6	m	4.0	5.1	5.4

- A. 2.5 B. 2.7 C. 2.9 D. 3.1
6. 某空间站由 A, B, C 三个舱构成, 某次实验需要 5 名宇航员同时在 3 个舱中开展, 每个人只能去 1 个舱, 每个舱至少安排 1 名宇航员, 其中宇航员甲只能去 A 舱, 则不同的安排方法的种数为
A. 35 B. 36 C. 42 D. 50

7. 如图, 点 E 为矩形 $ABCD$ 边 AB 的中点, 以动直线 l 为折痕将矩形在其下方的部分向上翻折, 每次翻折后点 E 都落在边 CD 上, 记该落点为 F , 过点 F 作 FP 垂直于 CD 交直线 l 于点 P , 点 P 的轨迹为曲线 W 的一部分, 则 W 为

- A. 圆
B. 椭圆
C. 双曲线
D. 抛物线



8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x-2)$ 为偶函数, $f(2x-1)$ 为奇函数, $f(0)=1$,

则 $\sum_{i=1}^{2026} f(i) =$

- A. 1 B. 0 C. -1 D. -2

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 2a_n + 1$, 则

- A. $a_1 = 1$ B. $a_n = -2^{n-1}$
C. $S_n = 2^n - 1$ D. $a_1 a_2 \cdots a_{2n} = 2^{2n^2 - n}$

10. 已知函数 $f(x) = \ln|x| + x^2 - \frac{1}{x^2}$, 则

- A. $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增
B. $f(x)$ 恰有两个零点
C. 不等式 $f(x) < f(1-x)$ 的解集为 $\{x | 0 < x < \frac{1}{2}\}$
D. 若 $f(m) + f(n) = 0$, 则 $m^2 + n^2$ 的最小值为 2

11. 已知四面体 $ABCD$ 满足 $AB = AC = CD = BD = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, 点 A, B, C, D 均在球 O_1 的

表面上, 球 O_2 与四面体的 4 个面均相切, 过直线 $O_1 O_2$ 的平面截四面体 $ABCD$ 所得的截面的面积为 S , 则

- A. 球 O_1 的表面积为 8π
B. 当四面体 $ABCD$ 体积最大时, $O_1 O_2 = 2 - \sqrt{2}$
C. 当 $AD = \sqrt{2}$ 时, S 的最大值为 $\sqrt{3}$
D. 当 $AD = \sqrt{2}$ 时, S 的最小值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$ ，若 $P(X \leq 0) = 0.2$ ，则 $P(X \leq 4) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，以 F_1F_2 为直径的圆与 C 在第一象限的交点为 M ，若直线 MF_2 与 C 的一条渐近线平行，则 C 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 记 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $\frac{c \cos A}{a \cos C} + \frac{2c \cos B}{b \cos C} = 3$ ，则 $\frac{1}{\tan A} + \frac{2}{\tan B}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

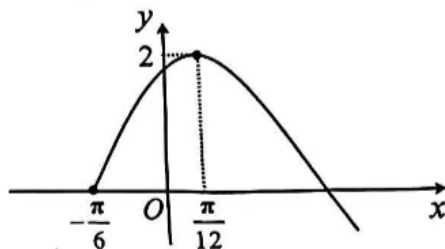
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图像如图所示。

(1) 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 时，求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 已知 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，且 $f(\theta) = -\frac{2}{5}$ ，求 $\cos 2\theta$ 的值。

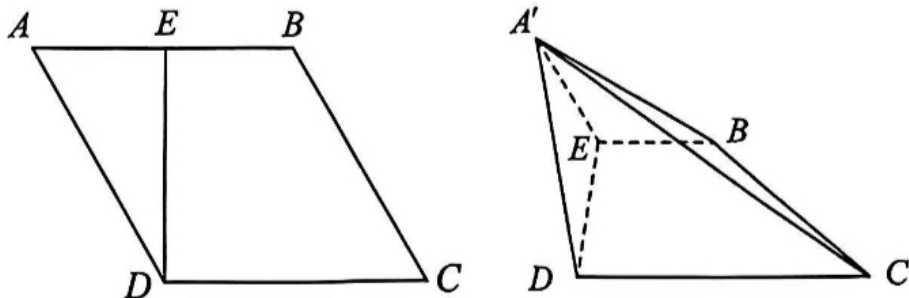


16. (15 分)

如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ， E 为 AB 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折至 $\triangle A'DE$ ，得到四棱锥 $A'-BCDE$ 。

(1) 证明：平面 $A'BE \perp$ 平面 $BCDE$ ；

(2) 当二面角 $A'-DE-C$ 为 120° 时，求 CA' 和平面 $A'DE$ 所成角的正弦值。



17. (15 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若存在 $x_1, x_2 \in [1, 3]$ ， $x_2 - x_1 \geq 1$ ，使得 $f(x_1) = f(x_2)$ ，求 a 的最大值。

18. (17分)

在某生成式人工智能模型中,有一种简化的“词元生成器”,该模型只有两种词元 A, B ,且生成词元总数不超过 $2n(n \geq 2)$.若生成 A ,则过程立即结束;否则继续生成,直至总数达到 $2n$.每个词元生成需要先预测,再审核.假设每次预测为 A, B 的概率均为 0.5 ,且各次预测相互独立.审核规则如下:

①若预测中第一次出现词元 A ,则审核后生成 A, B 的概率均为 0.5 ;

②若预测中第二次出现词元 A ,则审核后必生成 A ;

③若预测中出现词元 B ,则审核后必生成 B .

设 X 表示过程结束时生成词元的总个数.

(1)求 $P(X=1)$, $P(X=2)$;

(2)求 X 的分布列;

(3)求 $P(X=2|X \leq n)$.

19. (17分)

已知 O 为坐标原点,椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,长轴长为4.

(1)求 W 的方程;

(2)若过 O 的直线 l 交 W 于 A, B 两点,点 C 在 W 上,点 D 为直线 BC 与 x 轴的交点,点 A 的横坐标为点 D 横坐标的3倍.

(i)证明: $AB \perp AC$;

(ii)若点 A, B 都在曲线 $E: y = m^{x+1} + n(m \geq 2)$ 上,求 n 的最大值.