

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$.

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 定义集合 $D(x_0) = \{d \in \mathbb{R} \mid f(x_0 + d) > f(x_0)\}$.

(1) 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 1 - x$, 求 $D(-1)$;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, $f(x_1) \leq f(x_2)$, 且 $x_1 x_2 \neq 0$, 求证: $D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

(3) 设 $f(x)$ 满足: 当 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 时, $D(x_2) \subseteq D(x_1)$; 且当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(0)$.

求证: $f(0) \geq 1$; 且 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增.

(1) $D(-1) = (0, 3/2)$.

(2) 一般结论: 若 $x_0 < 0$, 则 $D(x_0) = (0, -x_0)$; 若 $x_0 > 0$, 则 $D(x_0) = (-\infty, -x_0] \cup (0, +\infty)$

由 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 共三种情况: 若 $x_1 \leq x_2 < 0$ 或 $0 < x_1 \leq x_2$, 则由 $-x_2 \leq -x_1$ 可知 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

若 $x_2 < 0 < x_1$, 则 $D(x_2) = (0, -x_2) \subseteq (0, +\infty) \subseteq D(x_1)$. 证毕.

(3) 证明 $f(0) \geq 1$:

如若不然, 即 $f(0) < 1$, 则存在 $a < 0$ 使得 $f(a) \geq f(0)$, 即 $D(a) \subseteq D(0)$.

令 $d' = \min\{1/2, -a/2\}$. 由 $a < a + d' < 0$ 得 $f(a + d') > f(a)$, 从而 $d' \in D(a)$, 进而 $d' \in D(0)$.

但根据条件可知 $f(d') < f(0)$, 所以 $d' \notin D(0)$, 矛盾! 于是 $f(0) \geq 1$.

接下来先证明, 当 $0 < x < 1$ 时 $f(x) \leq 0$:

如若不然, 设存在 $0 < s < 1$ 使得 $f(s) > 0$, 则存在 $t < 0$ 使得 $f(t) \leq f(s)$, 从而 $D(s) \subseteq D(t)$.

由 $f(0) > f(s)$ 可得 $-s \in D(s)$, 所以 $-s \in D(t)$. 但又由 $f(t - s) < f(t)$ 可知 $-s \notin D(t)$, 矛盾!

接下来证明: 进一步地, $x > 0$ 时 $f(x) \leq 0$:

如若不然, 设存在 $u \geq 1$ 使得 $f(u) > 0$, 则存在 $v < 0$ 使得 $f(v) < f(u)$, 从而 $u - v \in D(v)$.

记 $w = 1/2 - u + v$, 则 $w < v$, 进而 $f(w) < f(v)$, 所以 $D(v) \subseteq D(w)$, 可得 $u - v \in D(w)$.

但又由 $f(w + u - v) = f(1/2) \leq 0 < f(w)$ 可知 $u - v \notin D(w)$, 矛盾!

最后证明 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增:

对于任意的 $0 < x_1 < x_2$, 由 $f(x_1) \leq 0 < f(x_1 - x_2)$, 可得 $D(x_1 - x_2) \subseteq D(x_1)$.

由 $f(x_1 - x_2) < 1 \leq f(0)$, 可得 $x_2 - x_1 \in D(x_1 - x_2)$, 所以 $x_2 - x_1 \in D(x_1)$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, 证毕.