

找规律、归纳与递推

前言

数学实验

严格化

① 数学归纳法

② 递推

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

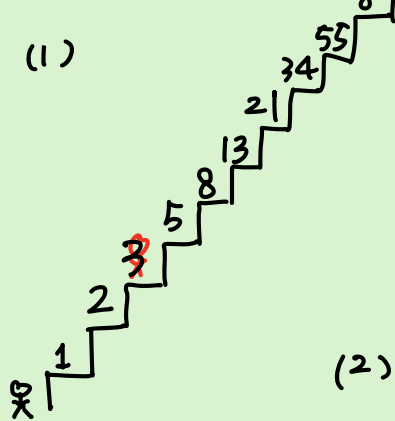
归纳和递推是处理数列问题的常用手段. 注意到题目中已知条件或者所求证的结论中有着比较密切的前后关系时, 我们通常可以考虑使用递推和归纳的方法解决问题. 这种题的突破点往往在如何找到要用的前后关系, 这时候通常我们会从简单情况开始找规律, 借助简单情况的关系举一反三, 得到我们需要的前后关系.

专项练习

1. (1) 已知某层楼有 10 级台阶, 阿不每次可以选择登上 1 级台阶或者 2 级台阶. 试问: 阿不共有多少种不同的登台阶方法?

(2) 已知某层楼有 n 级台阶, 阿不每次可以选择登上 1 级台阶或者 2 级台阶. 试问: 阿不共有多少种不同的登台阶方法?

(1)



$a_3 =$ 往前想一步, 在 a_1 或 a_2 .

= 上一步在 1 级 + 上一步在 2 级

$$= a_1 + a_2 = 3$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

$$\therefore a_{10} = 89$$

$$(2) \begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 3 \end{cases}$$

③ 阶递代性. (i) 特征根.

$$\begin{aligned} q^2 &= q + 1 \\ q^2 - q - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2. (1) 平面上有 100 条直线, 这些直线可以把平面分成若干个连通区域, 则连通区域数量最大值为 89.

(2) 若平面上有 100 条二次曲线, 这些曲线可以把平面分成若干个连通区域, 则连通区域数量最大值为 2000.

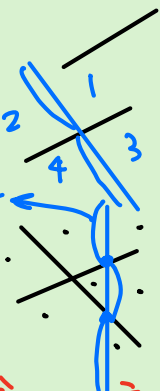
2021 北大 强基

(1) $n=1$

$n=2$

大栅栏

$n=3$



2

4

7

不退化

退化

$n=4$

10

11

15

20

25

30

35

40

45

50

55

60

65

70

75

80

85

90

95

100

105

110

115

120

125

130

135

140

145

150

155

160

165

170

175

180

185

190

195

200

205

210

215

220

225

230

235

240

245

250

255

260

265

270

275

280

285

290

295

300

305

310

315

320

325

330

335

340

345

350

355

360

365

370

375

380

385

390

395

400

405

410

415

420

425

430

435

440

445

450

455

460

465

470

475

480

485

490

495

500

505

510

515

520

525

530

535

540

545

550

555

560

565

570

575

580

585

590

595

600

605

610

615

620

625

630

635

640

645

650

655

660

665

670

675

680

685

690

695

700

705

710

715

720

725

730

735

740

745

750

755

760

765

770

775

780

785

790

795

800

805

810

815

820

825

830

835

840

845

850

855

860

865

870

875

880

885

890

895

900

905

910

915

920

925

930

935

940

945

950

955

960

965

970

975

980

985

990

995

1000

1005

1010

1015

1020

1025

1030

1035

1040

1045

1050

1055

1060

1065

1070

1075

1080

1085

1090

1095

1100

1105

1110

1115

1120

1125

1130

1135

1140

1145

1150

1155

1160

1165

1170

1175

1180

1185

1190

1195

1200

1205

1210

1215

1220

1225

1230

$$\frac{5+3\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}(6+2\sqrt{5})}{5 \cdot 4} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$

$$A_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \sqrt{5}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

(1) $A_n = A_{n-1} + n, A_1 = 2.$

$A_{n-1} = A_{n-2} + n-1$

$\vdots$

$A_2 = A_1 + 2$

($n \geq 2$) $A_n = 2 + 2 + 3 + \dots + n$
 $= 1 + (1 + 2 + \dots + n)$
 $= \frac{n(n+1)}{2} + 1.$

$n=1$ 时, $\checkmark.$

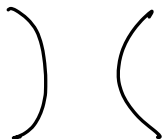
$A_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$

* 双曲线 & 双曲线

至多产生 10 个交点.

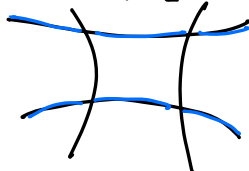
$x, y \in \mathbb{Q}$
 $2 \times 2 = 4.$

$n=1$



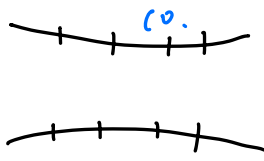
3

$n=2$



$3+6=9$

$n=3$



$9+10=19.$

一般地: 第 n 条双曲线: $4(n-1)$ 个交点; $(4n-2)$ 段.

$\therefore A_n = A_{n-1} + 4n-2.$

$A_{n-1} = A_{n-2} + 4n-6$

$\vdots$

$A_2 = A_1 + 6$

$\therefore A_{100} = 3 + 6 + 10 + \dots + 398$

$= 1 + 2 + 6 + 10 + \dots + 398$

$= 1 + \frac{100 \times 400}{2} = 20001. \checkmark$

(2) 二次曲线 $\begin{cases} \text{退化: 两条直线.} \\ \text{未退化 (e=1, >1 <1)} \end{cases}$

渐近线

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

双曲线

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

椭圆

$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$

① 椭圆



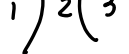
2

② 椭圆



2

③ 双曲线



3



2

3

4

①

②

100 个 "双曲线"

$= A_{100} = \frac{200 \cdot 201}{2} + 1 = 20101.$

实战演练

1. (2015 北京西城二模) 无穷数列 $P: a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 满足 $a_i \in \mathbb{N}^*$, 且 $a_i \leq a_{i+1}$ ($i \in \mathbb{N}^*$), 对于数列 P , 记 $T_k(P) = \min\{n | a_n \geq k\}$ ($k \in \mathbb{N}^*$), 其中 $\min\{n | a_n \geq k\}$ 表示集合 $\{n | a_n \geq k\}$ 中最小的数.

(1) 若数列 $P: 1, 3, 4, 7, \dots$, 写出 $T_1(P), T_2(P), \dots, T_5(P)$;

(2) 若 $T_k(P) = 2k - 1$, 求数列 P 前 n 项的和;

(3) 已知 $a_{20} = 46$, 求 $s = a_1 + a_2 + \dots + a_{20} + T_1(P) + T_2(P) + \dots + T_{46}(P)$ 的值.

重点笔记

突破点 (规律):

难点 (技巧):

$$\{n | a_n \geq k\} = \{n | \text{前标 } n, \text{ 使 } a_n \geq k\}$$

$$= \{n | \text{"} \geq k \text{" 的项的前标}\}$$

$$\min\{\dots\} = \text{第一次 "} \geq k \text{" 时的前标 (项数)}$$

$$1) \quad \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{array}$$

$$T_1(P) = P \text{ 中第一次 } \geq 1 \text{ 的项数} = 1. \quad (T_1(P) = 1)$$

$$T_2(P) = P \text{ 中第一次 } \geq 2 \text{ 的项数} = 2.$$

$$T_3(P) = P \text{ 中第一次 } \geq 3 \text{ 的项数} = 2.$$

$$T_4(P) = 3. \quad T_5(P) = 4.$$

(2) $T_k(P) = 2k - 1$ 即 "第一次大于 k 的项, 是 a_{2k-1} ", 求 S_n .

① 求 $S_n \Leftrightarrow$ 数列中每项均可求! $\Leftrightarrow$ 不用这个数列.

令 $k=1$, 第一次 ≥ 1 的是 $a_1 \Rightarrow a_1 = ?$ (无用)

令 $k=2$, 第一次 ≥ 2 的是 $3 \Rightarrow a_1, a_2 < 2 \Rightarrow a_1 = a_2 = 1.$

令 $k=3$, ≥ 3 5 $\Rightarrow a_3, a_4 < 3 = 2$

$\therefore a_n \leq a_{n+1} \therefore 3 > a_4 \geq a_3 \geq a_2 = 1.$

$a_3 = 1 \text{ or } 2. \quad \textcircled{1} a_3 = 1 ? \text{ X. } \therefore T_2(P) = 3 \therefore a_3 \geq 2$

$\therefore a_3 = 2. \quad a_4 = 2.$

$\therefore T_3(P) = 5 \therefore a_3 \leq a_4 < 3.$

$\therefore T_2(P) = 3 \therefore 2 \leq a_3 \leq a_4 \therefore 2 = a_3 = a_4. \rightarrow 3 \text{ 的.}$

1. 1. 2. 2. 3. 3. 4. 4. 5. 5. ...

令 $k=4$.

$$\left(\begin{array}{l} \because T_4(p) = 7 \therefore a_5 \leq a_6 < 4. \\ \because T_3(p) = 5 \therefore 3 \leq a_5 \leq a_6 \end{array} \right) \rightarrow 4 \text{ 否.}$$

$\therefore 3 = a_5 = a_6.$

$$\left(\begin{array}{l} \text{一般地: } \because T_k(p) = 2k-1 \therefore a_{2k-3} \leq a_{2k-2} < k \\ \because T_{k-1}(p) = 2k-3 \therefore k-1 \leq a_{2k-3} \leq a_{2k-2} \\ \therefore a_{2k-3} = a_{2k-2} = k-1. \\ \therefore a_{2k-1} = a_{2k} = k. \end{array} \right) \quad k \text{ 否}$$

① n 是偶数时. $1. 1. 2. 2. 3. 3 \dots, \quad \frac{n}{2}. \frac{n}{2}$

$$S_n = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + \frac{n}{2}) = 2 \cdot \left(\frac{(1 + \frac{n}{2}) \cdot \frac{n}{2}}{2} \right) = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}.$$

② n 是奇数时. $1. 1. 2. 2. 3. 3 \dots, \quad \frac{n+1}{2}.$

$$n=3. \quad 1. 1. 2 = \frac{3+1}{2}$$

$$S_n = (1 + 2 + \dots + \frac{n+1}{2}) + (1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2})$$

$$= \frac{(\frac{n+1}{2} + 1) \frac{n+1}{2}}{2} + \frac{(\frac{n-1}{2} + 1) \frac{n-1}{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{n+3}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2n+2}{2} (n+1) = \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2 + 2n + 1}{4}.$$

$$\therefore S_n = \begin{cases} \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{n^2 + 2n + 1}{4}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

破题① 数学实验: 简单的 k 枚举

严格化② 每一步是怎么推的

基本思路: 推广 a_3, a_4 怎么推广

严格化.

13) $a_{20} = 46$, 求 $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} + T_1(p) + T_2(p) + \dots + T_{46}(p)$

* 特殊? 天比前19次和"同定".

破题

① $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{20} = 46$

$a_1 + \dots + a_{20} + T_1(p) + \dots + T_{46}(p) = 46 \times 20 + | + | + \dots + | = 46 \times 21 = 966.$

② $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{19} = 1, a_{20} = 46.$

所求 = $19 \times 1 + 46 + | + 20 + 20 + \dots + 20$

$= 900 + 20 + 46 = 966.$

猜: $S = 966$ ✓

数学归纳法

① 一般数据 $\Rightarrow$ 猜一般形式.

② 信息又有 $n, a_n \Rightarrow$ 用 n, a_n 表示.

③ 简单但不失结构例子/题目要求 ✓

* 求 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + T_1(p) + T_2(p) + \dots + T_{a_n}(p) = (a_n)(n+1) = 1 \times n+1$

① $a_1 = a_2 = a_3 = 3$ 猜: $S = 4 \times 3 = 12.$

$3 + 3 + 3 + T_1(p) + T_2(p) + T_3(p) = 12$ ✓

② $a_1 = a_2 = a_3 = a \geq 2$

$S = 4a$ ✓

① 数学归纳法 $\rightarrow$ 数学归纳法

② 算两次 ✓

$a + a + a + T_1(p) + T_2(p) + \dots + T_a(p) = 3a + a = 4a.$

证明: * 数学归纳法.

① 奠基:

$n=1$ 时, $a_1 + T_1(p) + \dots + T_{a_1}(p) = a_1 + 1 + \dots + 1 = 2a_1 = (n+1)a_n$ ✓

② 假设 $n=k$ 时成立, 推 $n=(k+1)$ 时也成立.

$(k+2) \times a_{k+1} (a_1 + a_2 + \dots + a_k + T_1(p) + \dots + T_{a_k}(p)) = (k+1)a_k$
 $S = (\dots) + a_{k+1} + T_{a_{k+1}}(p) + T_{a_{k+2}}(p) + \dots + T_{a_{k+1}}(p)$

* a_k 与 a_{k+1} 的关系.

$$(i) a_k = a_{k+1}. \quad a_1 + a_2 + \dots + a_k + \boxed{T_1(p) + \dots + T_{a_k}(p)} \quad \text{没加!}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \boxed{a_{k+1}} + \boxed{T_1(p) + \dots + T_{a_{k+1}}(p)}$$

$$S = a_{k+1} + (k+1) a_k = a_{k+1} + (k+1) a_{k+1} = (k+2) a_{k+1}.$$

$$(ii) \boxed{a_k} < a_{k+1}$$

$$T_{\boxed{a_{k+1}}}(p) = \dots = T_{\boxed{a_{k+1}}}(p) = \boxed{k+1}.$$

(第 k 项 = $a_k < \boxed{a_{k+1}} < \dots < \boxed{a_{k+1}}$)

$$\begin{aligned} \therefore S &= (k+1) a_k + a_{k+1} + (k+1) \cdot (a_{k+1} - a_k) \\ &= \cancel{(k+1) a_k} + a_{k+1} + a_{k+1} (k+1) - \cancel{a_k (k+1)} \\ &= (k+2) a_{k+1}. \end{aligned}$$

(ii) $\rightarrow$ 直接开! 建立 $\boxed{a_1 \sim a_n}$ 和 $T_1(p) \sim T_{a_n}(p)$ 的一个等式.

1. 1. 2. 2. 3. 3. 4. 4. 5. 5. 6. 6, ...

$$\overset{1\text{项}}{T_1(p)} = 1. \quad \overset{3\text{项}}{T_2(p)} = 3. \quad T_3(p) = 5. \quad T_4(p) = 7, \dots$$

$$S_n = \boxed{2\text{个}1} + 2\text{个}2 + 2\text{个}3 + 2\text{个}4 + \dots$$

算两次.

$$= (\boxed{T_2(p)} - \boxed{T_1(p)}) \times 1 + (T_3(p) - T_2(p)) \times 2 + \dots +$$

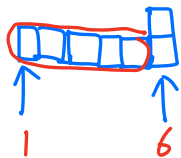
4个46

= 大于等于1, 但小于2的数的个数

= 1 的个数.

$$\boxed{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad \star$$

$$\begin{array}{cccccc} 45 & 46 & 46 & 46 & 46 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \end{array}$$



= 多少个1, 多少个2, 多少个3, ..., 多少个 a_n

$$= (T_2(p) - T_1(p)) \times 1 + (T_3(p) - T_2(p)) \times 2$$

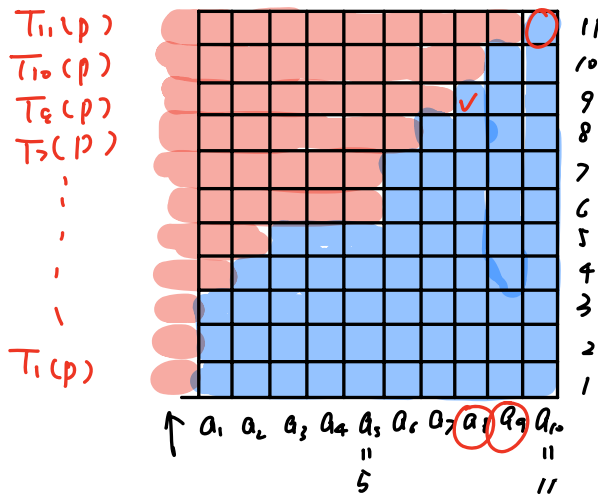
$$+ \dots + (n+1 - T_{a_n}(p)) \times a_n$$

$$= \cancel{T_2(p)} - \cancel{T_1(p)} + \cancel{2T_3(p)} - \cancel{2T_2(p)} + \cancel{3T_4(p)} - \cancel{3T_3(p)}$$

$$+ \dots + (n+1) a_n - \cancel{(n+1) T_{a_n}(p)} =$$

$$= \underline{(n+1) a_n - T_1(p) - T_2(p) - \dots - T_n(p)}$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \dots + a_n + T_1(p) + \dots + T_n(p) = (n+1) a_n.$$



算两次

$$S_{\text{总}} = a_1 + \dots + a_n$$

$$S_{\text{总}} = T_1(p) + T_2(p) + \dots + T_n(p)$$

$$\therefore \text{所求} = a_n \times (n+1) \quad \checkmark$$

$$(1, 2, \dots, 4m+2)$$

2. (2024 新高考I) 设 m 为正整数, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差为 0 的等差数列, 若从中删去两项 a_i 和 a_j ($i < j$) 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组, 且每组的 4

个数都能构成等差数列, 则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列.

(1) 写出所有的 (i, j) , $1 \leq i < j \leq 6$, 使数列 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 是 (i, j) -可分数列; ✓

(2) 当 $m \geq 3$ 时, 证明: 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列; ✓

(3) 从 $1, 2, \dots, 4m+2$ 中任取两个数 i 和 j ($i < j$), 记数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列的概率为 P_m , 证明: $P_m > \frac{1}{8}$.

$$P_m = \frac{1}{8}$$

重点笔记

突破点 (规律):

难点 (技巧):

$$|S| = C_{4m+2}^2 = \frac{(4m+2)(4m+1)}{2} = (2m+1)(4m+1) = 8m^2 + 6m + 1.$$

$$(1) \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow \text{一三三三三三}$$

$$d \geq 2 \times \boxed{d \geq 2, 1, 3, 5, 7} \therefore d = 1$$

$$(1, 2, 3, 4) \quad (2, 3, 4, 5) \quad (3, 4, 5, 6)$$

$$(i, j) = (5, 6) \quad (i, j) = (1, 6) \quad (i, j) = (1, 2)$$

$$(2) \quad 1, 2, \dots, 4m+2 \text{ 去掉 } 2, 13 \text{ 后可分. } (m \geq 3)$$

$$\boxed{1, 13} \quad \textcircled{1} \quad m \rightarrow m+1 \text{ 时, 多四项.}$$

$$1 \sim 14 \quad (2, 13)$$

$$m=3 \checkmark \Rightarrow m=4 \checkmark.$$

$$1 \sim 18 = 1 \sim 14 + (15, 16, 17, 18)$$

$$\therefore \text{只需看 } 1 \sim 14 \text{ 即可 } \checkmark.$$

$$1 \sim 22.$$

$$\uparrow$$

$$m \geq 3 \Rightarrow m=3 \checkmark.$$

$$d_2 = 1 \quad d_1 = 1 \quad (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$$

$$\textcircled{1} \quad \text{有 } 2, 13 \text{ 时, } 1 \sim 4, 11 \sim 14 \text{ 去掉 } 2, 13, \text{ 困难 } 1 \& 14$$

$$\textcircled{2} \quad \text{枚举 } d_1 = 2, d_2 = 2 \checkmark: (1, 3, 5, 7) (14, 12, 10, 8)$$

$$4, 6, 9, 11 \quad \times.$$

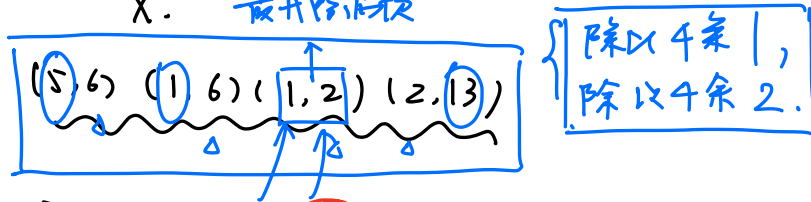
$$d_1 = 3, d_2 = 2 \quad \times: (1, 4, 7, 10), (14, 12, 10, 8) \quad \times.$$

$$\checkmark d_1 = 3, d_2 = 3: \checkmark (1, 4, 7, 10) (14, 11, 8, 5) (3, 6, 9, 12) \checkmark.$$

对称性: 2 是正数第 2, 13 倒数第 2. 关于 7.5 轴对称.

$\Rightarrow$ 1, 14 "地位相同" $\Rightarrow$ "最好" 1, 14 的公差也相同!

$d_1=2, d_2=3$? (1, 3, 5, 7) (14, 11, 8, 5) X.
X. 最开始两项



(3) $P_m > \frac{1}{8} \Leftrightarrow$ 可行 $\geq \frac{1}{8}(m^2+m+1) \approx m^2$

(i) { 构造: 可行的排列很多的. $m^2 + \square \dots$ 具体
逆推: m 时可行 $\rightarrow (m+1)$ 时可行? $\checkmark$

(ii) m^2 : $4m+2$ 个数 "m" 个除以4余1 (m+1)
"m" 个除以4余2 (m+1)
 $\frac{4m+2}{4} \approx m$
(i, j) 余1 或 余2 m^2

(iii) 枚举: 有序 $\rightarrow$ 从小到大 $\rightarrow$ 以最小数

① $i=1$. (1, 2) (1, 6) $\checkmark$ 2 3 4 5 7 8 9 10 ... $4m+2$
(1, 10) $\checkmark$ (2 3 4 5, 6 7 8 9) (11 ~ $4m+2$)
(1, $4k+2$) $k=1, 2, \dots, m+1$ $\checkmark$ $\lfloor m \rfloor$

② $i=2$. (2, 13) $\leftarrow$ 1 ~ 14 $\checkmark$.

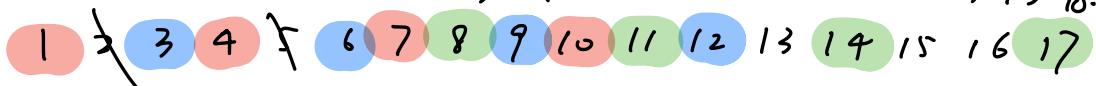
(2, 5) (2, 9) (2, 17) (2, 21) ... (对称性)

(2, 9): 1 ~ 10 (11 ~ $4m+2$) 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10.
连续 $d_1=2, d_2=2$. (1, 3, 5, 7) 14, 6, 8, 10 $\checkmark$.

(2, 5)? 1 ~ 6 1 3 4 6 难题. 给6的空间太少!
是. $d_1=\square=d_2$. 6 前面无法再构造一个4项等差. X.

$d_1=d_2=2$. 1, 3, 5 X.

$d_1=3, d_2=3$. (1, 4, 7, 10) (3, 6, 9, 12) (8, 11, 14, 17) 18.



13 14 15 16 17 18 19 20 21 ...
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

X.

*. (2, 9) ✓ (2, 13) ✓ (2, 5) 空同十.
 后面应该都行? (2, 17) ✓ (2, 21) ... ✓

$4 \times 2 + 1$
 (2, 9): 1. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 10.

$4 \times 3 + 1$
 (2, 13): 1. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12 14 | 8 | $d_1=2$. $d_2=2$ 伸长
 | 12 | $d_1=3$. $d_2=3$ 隔3取1
 隔4取1

(2, 17): 1. 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 18.

(1. 5. 9. 13) (18. 14. 10. 6)
 (3. 7. 11. 15) (4. 8. 12. 16) ✓.

(2, $4k+1$): (1. 5. 9. 13)
(1. 14 ~ 7. $4k+2$)
(1. 3. 5. 7) | $4k$ | $d_1 = d_2 = k$.

每行五个

| | | | | | |
|--------------|---------|----------|--------|------------------------------|---|
| 1. | $k+1$. | $2k+1$. | $3k+1$ | $4k+1$ | ✓ |
| 2 | $k+2$ | $2k+2$ | $3k+2$ | $4k+2$ | ✓ |
| 3 | $k+3$ | $2k+3$ | $3k+3$ | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| $k-1$ | $2k-1$ | $3k-1$ | $4k-1$ | | |
| k | $2k$ | $3k$ | $4k$ | | |

成立!

最小数

$i=1$: (1, 2) (1, 6) ... (1, $4m+2$)
 $i=2$: (2, 9) (2, 13) ... (2, $4m+1$)
 $i=5$: (5, 6) (5, 10) ... (5, $4m+2$)
 $i=6$: (6, 13) (6, 17) ... (6, $4m+1$)
14

个数

$$\begin{aligned} & m+1 \\ & \frac{4m-8}{4} + 1 = m-1 \\ & m \\ & m-2 \end{aligned}$$

$$i=1, 5, 9, 13, \dots : (m+1) + m + \dots + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

$$i=2, 6, 10, 14, \dots : (m-1) + (m-2) + \dots + 1 = \frac{(m-1)m}{2}.$$

$$\text{合计: } \frac{m^2+3m+2}{2} + \frac{m^2-m}{2} = \frac{2m^2+2m+2}{2} = m^2+m+1.$$

$$P_m \geq \frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1} > \frac{1}{8} \quad \checkmark.$$

数学实验

① 对称: $1 \sim 14$ 中, $(2, 13)$ 关于中心对称, 构造时 $d="$.

② 伸长: $\begin{cases} (2, 9) & d=2 \\ (2, 13) & d=3 \\ (2, 4k+1) & d=k \end{cases}$ 以 k 为除数, $|k|$ 组.

题眼: "取3m项"

3. (2024 北京昌平二模) 已知 $Q: a_1, a_2, \dots, a_N$ 为有穷正整数数列, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N$, 且 $s = a_1 + a_2 + \dots + a_N$. 从 Q 中选取第 i_1 项, 第 i_2 项, $\dots$, 第 i_m 项 ($i_1 < i_2 < \dots < i_m$), 称数列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ 为 Q 的长度为 m 的子列. 规定: 数列 Q 的任意一项都是 Q 的长度为 1 的子列. 若对于任意的正整数 $t \leq s$, 数列 Q 存在长度为 m 的子列 $a_{t_1}, a_{t_2}, \dots, a_{t_m}$, 使得 $a_{t_1} + a_{t_2} + \dots + a_{t_m} = t$, 则称数列 Q 为全覆盖数列.

(1) 判断数列 1, 1, 1, 5 和数列 1, 2, 4, 8 是否为全覆盖数列;

(2) 在数列 Q 中, 若 $s \leq 2N - 1$, 求证: 当 $2 \leq n \leq N$ 时, $a_n \leq n \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$;

(3) 若数列 Q 满足: $a_1 = 1$, 且当 $2 \leq n \leq N$ 时, $a_n \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$, 求证: 数列 Q 为全覆盖数列.

重点笔记

突破点 (规律):

难点 (技巧):

* 对 $t \leq s$, 都能从中找到 m 个数和为 t .

(1) ① 1, 1, 1, 5: $s = 1 + 1 + 1 + 5 = 8$.

4 无法凑出. 故 1, 1, 1, 5 不是;

② 1, 2, 4, 8: $s = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$. $\rightarrow$ 二进制

1: $\checkmark$ 2: $\checkmark$ 3: $1 + 2 \checkmark$ 4: $\checkmark$

5: $1 + 4 \checkmark$ 6: $2 + 4 \checkmark$ 7: $1 + 2 + 4 \checkmark$

8: $\checkmark$ 9: $1 + 8 \checkmark$ 10: $2 + 8 \checkmark$ 11: $1 + 2 + 8 \checkmark$

12: $4 + 8 \checkmark$ 13: $1 + 4 + 8 \checkmark$ 14: $2 + 4 + 8 \checkmark$ 15: $1 + 2 + 4 + 8 \checkmark$

* 公比为 2 的等比是临界状态.

(2) $a_n \leq n \leq 1 + a_1 + \dots + a_{n-1}$

$1 + a_1 + \dots + a_{n-1} \geq 1 + 1 + \dots + 1 = n$. $\checkmark$ $\exists a_n \leq n$

正向: 不等式 $\Rightarrow a_n \leq n$

反向: 反证法 ($\exists n$ 使 $a_n > n$) $\rightarrow$ 数学实验.

抬杠, 举反例. 看 $a_n > n$ 会有什么矛盾 $\Rightarrow a_n \leq n$.

举例: $n = 2$. $a_2 \leq 2$?

否则 $a_2 \geq 3 \Rightarrow a_n \geq 3 \therefore s \geq 1 + 3 + \dots + 3 = 3N - 2 > 2N - 1$.

矛盾! 不行.

总和 S 有限, 限制了我们每个具体的 n , 不能太大.

$$\text{正向: } S \leq 2N-1 \Rightarrow a_n \leq n$$

$$\text{反证: } a_n > n \text{ 与 } S \leq 2N-1 \text{ 矛盾.}$$

反证: 存在 $a_n > n$ 成立, $a_n \geq n+1$. 看 S 至少是多少

$$S \geq \underbrace{n-1}_{\substack{\uparrow \\ \text{前}(n-1)\uparrow, \geq 1}} + \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{\substack{\uparrow \\ (N-n+1)\uparrow, \geq n+1}}$$

$$= (n-1) \times 1 + (N-n+1)(n+1)$$

$$= n-1 + Nn + N - n^2 - n + n+1$$

$$= (n+1)N - n^2 + n$$

$$\because 2N-1 \geq S \therefore 2N-1 \geq S \geq (n+1)N - n^2 + n.$$

$$\therefore \boxed{n^2 - n - 1} \geq (n+1)N \quad \text{而 } N \geq n$$
$$\geq (n+1)n = \boxed{n^2 + n} \quad \text{矛盾!}$$

$$\therefore a_n \leq n.$$

反证法思路:

① 数学实验: $n=2$ $a_2 \leq 2$

$$a_2 > 2 \Rightarrow S \text{ 太大了}$$

② 严格化: 一般的, $a_n \geq n$

$$\Rightarrow S \geq (n+1)N - n^2 + n.$$

$$\text{与 } S \leq 2N-1 \text{ 矛盾.}$$

$$(3) \text{ 证明是 } \checkmark. \quad \boxed{a_n \leq 1 + a_1 + \dots + a_{n-1}} \quad n=2, 3, \dots, N.$$

$$n=2 \text{ 时, } a_2 \leq 1 + a_1 = 2.$$

不能超过 $n=2$ 的等比数列.

$$n=3 \text{ 时, } a_3 \leq 1 + a_1 + a_2 = 1 + 1 + a_2 \leq 4 \Rightarrow a_3 \leq 4$$

$$n=4 \text{ 时, } a_4 \leq 1 + a_1 + a_2 + a_3 \leq 1 + 1 + 2 + 4 = 8.$$

$$\boxed{1, 2, 4, 8, \dots}$$

$$* a_5 \leq 1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16 \text{ 才可以.}$$

✓ ① $a_5 = 9$. 1. 2. 4. 8. 9.

$1+2+4+8=15$ ✓ $15+9=24$.

$16 \sim 24$ 均构造出来. $a_1 \sim a_4$ ✓.

$16 \sim 24 = 9 + (7 \sim 15)$ $a_1 \sim a_5$ ✓.

10. 11. 12. 13 ✓.

✗ ② $a_5 = 17$. 1. 2. 4. 8. 17. $15+17=32$.

$a_1+a_2+a_3+a_4+1=16 < a_5$. $a_1+a_2+a_3+a_4+1$

$16 \sim 32$ 16 无法构造. ① 17 超过了 16 ✗.

② 不能用 17 $\Rightarrow$ 1. 2. 4. 8

* $a_5 > a_1+a_2+a_3+a_4+1$.

则 $a_1+a_2+a_3+a_4+1$ 无法构造

$a_1+a_2+a_3+a_4$

可覆盖 $\Rightarrow a_n \leq 1+a_1+\dots+a_{n-1}$

* 每次新增的数, 至多是前几项的和 + 1. $S_{n-1}+1$

如何证明? { 正向: "构造" 有具体的数 $S_{n-1}+1$

无具体的数? 0 变 2 手 (从好的基础出发) 只做一点改进即可. 数学归纳法 ✓.

反向: 不可覆盖 $\Rightarrow a_n > 1+a_1+\dots+a_{n-1}$

对 n 归纳. $a_1=1, 2 \leq n \leq N, a_n \leq 1+a_1+\dots+a_{n-1}$ ✓ $\Rightarrow$ 可覆盖.

① 奠基: $N=1$ 时, 1 成立.

$N=2$ 时, $a_2 \leq a_1+1=2$. $\therefore a_2=1$ 或 2

$a_2=1$. 1. 1. 1. 2 ✓.

$a_2=2$. 1. 2. 1. 2. 3 ✓. $\therefore n=2$ 成立!

② $N=k$ 成立. $\uparrow$ P_{k+1} $N=k+1$ 成立.

证法: $a_1=1$. $2 \leq n \leq k+1$ 时, $a_n \leq S_{n-1}+1$ $\Rightarrow$ 可覆盖.

证法: $a_1=1$. $2 \leq n \leq k$ 时, $a_n \leq S_{n-1}+1$ $\Rightarrow$ 可覆盖.

$a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ P_k

由归纳假设, $a_1 \sim a_k$ 可覆盖, 即可从中选出子列, 和为 t

$t \in \underline{a_1 + \dots + a_k}$ 均可取到. $\because a_{k+1} \leq a_1 + \dots + a_k + 1$
 $\therefore 1 + a_1 + \dots + a_k - a_{k+1} = x \geq 0.$

$x \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k$ $x = a_{t_1} + \dots + a_{t_m}$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_k + 1 &= a_{k+1} + \boxed{x} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_k + 2 &= a_{k+1} + \boxed{x+1} \quad \checkmark \\ &\vdots \\ \boxed{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}} &= \end{aligned}$$

$\boxed{x}$
 $\boxed{x+1}$
 $\vdots$
 $\boxed{}$

$\therefore \underbrace{[a_1 + a_2 + \dots + a_k + 1 - a_{k+1}]}_{[x]}, \underbrace{[a_1 + a_2 + \dots + a_k]}_{\cdot} \leq a_1 + \dots + a_k.$

↑ 均可构造!

$\therefore a_1 + a_2 + \dots + a_k + 1 \sim a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}$ 也可

$\therefore N = k+1$ 也成立!

由数学归纳法原理, 命题成立...

- ① 临界状态: $q=2$ 的等比
- ② 数与方程: $\boxed{1, 2, 4, 8, 9 \text{ 怎么造 } 16 \sim 24}$
- ③ 数归 $\rightarrow$ (i) 不再是01演起手; (好处)
 (ii) P_{n+1} 兼容 P_n 时才适用!
 P_{n+1} 成立时, P_n 成立或好用 (适合)

4. (2023 北京丰台一模) 已知集合 $S_n = \{1, 2, 3, \dots, 2n\} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 4)$, 对于集合 S_n 的非空子集 A . 若 S_n 中存在三个互不相同的元素 a, b, c , 使得 $a+b, b+c, c+a$ 均属于 A , 则称集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”.

(1) 试判断集合 $A_1 = \{3, 4, 5\}$, $A_2 = \{3, 5, 7\}$ 是否为集合 S_4 的“期待子集”; (直接写出答案, 不必说明理由)

(2) 如果一个集合中含有三个元素 x, y, z 同时满足 ① $x < y < z$, ② $x+y > z$, ③ $x+y+z$ 为偶数. 那么称该集合具有性质 P . 对于集合 S_n 的非空子集 A , 证明: “集合 A 是集合 S_n 的‘期待子集’” 的充要条件是“集合 A 具有性质 P ”;

(3) 若 $S_n (n \geq 4)$ 的任意含有 m 个元素的子集都是集合 S_n 的“期待子集”, 求 m 的最小值.

重点笔记

突破点 (规律):

难点 (技巧):

$$(a, b, c) \rightarrow (a+b, a+c, b+c) \text{ 在 } A.$$

$$S_4 = 1 \sim 8 \checkmark$$

$$(1) A_1 = \{3, 4, 5\} \quad \begin{cases} a+b=3 \\ a+c=4 \\ b+c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$$

$$A_2 = \{3, 5, 7\} \quad \begin{cases} a+b=3 \\ a+c=5 \\ b+c=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=15 \\ a+b+c=\frac{15}{2} \times \end{cases}$$

*. 三个数和为偶数才行! 奇数 $\times$.

$$(2) \boxed{P \Rightarrow A \text{ 是期待子集.}}$$

$$\begin{cases} a+b=x \\ a+c=y \\ b+c=z \end{cases} \Rightarrow a+b+c = \frac{x+y+z}{2}$$

$$\therefore c = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{x+z-y}{2}, a = \frac{x+y-z}{2}$$

$$① x, y, z \in S_{2n} \Rightarrow a, b, c \in 2n \checkmark$$

$$② \because x+y > z \therefore y+z > x, x+z > y, x+y > z.$$

$$x < y < z. \quad (x, y, z \text{ 构成三角形}).$$

$$③ \because x+y+z \text{ 为偶数} \therefore y+z-x = \frac{x+y+z}{2} - x \text{ 为偶数.}$$

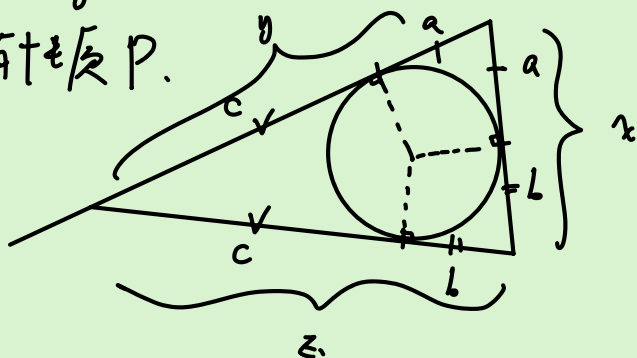
同理 $x+z-y, x+y-z$ 也是偶数 $\checkmark \Rightarrow a, b, c$ 为正整数

$$\boxed{A \text{ 是期待子集} \Rightarrow P}$$

$$\{a, b, c\} \quad (a < b < c)$$

$$x = a+b, y = a+c, z = b+c$$

$$A \text{ 具有性质 } P.$$



(3) 任意 m 元子集均期待. $\Rightarrow$ 取 m 个里, 至少三个具有性质 P

"抽屉原理" $\Rightarrow$ 最不利原则 $m \vee. \lfloor \frac{m-1}{3} \rfloor$ 个不行, 数学实验.

$n=4, S_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

✓ ① $x < y < z$ ✓. 取 $\textcircled{3}$ 个 - 至少成立

② $(x+y > z)$? $\lfloor \frac{1+2+3}{2} \rfloor = 3 < 6$ $\lfloor \frac{1+2+3}{2} \rfloor = 3 < 6$ $\lfloor \frac{1+2+3}{2} \rfloor = 3 < 6$ $\lfloor \frac{1+2+3}{2} \rfloor = 3 < 6$

✓ ③ $x+y+z$ 偶 $\Rightarrow$ 不能同奇. $\textcircled{\text{奇奇偶}} / \text{偶偶偶} \vee.$

* 最不利. 全奇 1, 3, 5, 7

$\lfloor \frac{1+2+3}{2} \rfloor = 3 < 6$ 全取奇 $n. 2$ 个. $\textcircled{n+1}$

若 $x+y+z$ 偶 $\Rightarrow$ 至少取 3 个. 剩下的全奇数.

$\Rightarrow$ 无法构成三角形.

$\therefore$ 取 5 个, 也可能没有三角形 $\Rightarrow \lfloor \frac{m-1}{3} \rfloor = 1$

$\begin{cases} \textcircled{1} m=5 \text{ 也不能保证 "期待"} \\ \textcircled{2} m \geq 6 \text{ 可以} \end{cases}$ $m=n+1$. 不期待 $m \geq n+2$. 期待.

$S_4 = \{1, 2, 3, \textcircled{4}, 5, \textcircled{6}, 7, \textcircled{8}\}$ 取 6 个必期待.

✓ "大偶数" (奇+2) 设 B 是 S_4 的 6 元子集.

① $(4, 6, 8)$ 均在 B 中: ✓ $(4, 6, 8)$

4. $\rightarrow (3, 5) (5, 7)$ (差 2)

* 6 $\rightarrow (3, 5) (3, 7) (5, 7)$ (差 2, 差 4)

8 $\rightarrow (3, 5) (3, 7) (5, 7)$ (差 2, 差 4)

② $(4, 6, 8)$ 恰 2 个在 B 中. $\Rightarrow$ 6, 8 至少一个在 B 中.

$(1, 2, \textcircled{3}, 5, 7)$ 恰 4 个在 B 中. $\Rightarrow$ 3, 5, 7 至少两个在 B 中.

③ $(4, 6, 8)$ 恰 1 个在. $(1, 2, 3, 5, 7)$ 均在 B 中.

$(\square, 3, 5)$ 必完成期待 ✓.

$\lfloor \frac{1+2+3}{2} \rfloor = 3 < 6$

$n > 4$ ① $n=4$ 思路, 构造抽屉 $\leftarrow$ 大偶数 $\checkmark$.

② 数学归纳法.

$$k \checkmark \Rightarrow k+1 \checkmark.$$

要证: S_n 中的 $(n+2)$ 元子集必完成期待.

① $n=4 \checkmark$

② $n=k (k \geq 4)$ 成立, 推 $n=k+1$ 成立.

$\checkmark S_k$ 中的 $(k+2)$ 元集合, 完成期待 $\checkmark$

$\Rightarrow S_{k+1}$ 中的 $(k+3)$ 元集合 完成期待. $\downarrow$ 多一个数.

$$S_{k+1} = S_k \cup \{2k+1, 2k+2\}$$

| | |
|-------|----------------|
| $k+1$ | 2 |
| $k+2$ | 1 $\checkmark$ |
| $k+3$ | 0 $\checkmark$ |

设 B 是 S_{k+1} 的 $(k+3)$ 元集合.

① B 中只有 $2k+1, 2k+2$ 的一个. 则 B 含有 S_k 的 $(k+2)$ 元子集. 该子集期待 (归纳假设) $\checkmark$.

② $2k+1 \in B, 2k+2 \in B$

取 $B \cap S_k$ 共 $(k+1)$ 个元素. $\leq |S_k|$. $k=4$. 1个.

* S_k 有 $(k+1)$ 反例 $\Rightarrow S_k$ 内部不保证. $|2k|$.

$\Rightarrow$ 利用 $2k+1, 2k+2$ 完成期待

$$\{2k+2, 2k+1\}$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2k-1\}$$

$$\{2k+2\}$$

大一点的偶数. $\uparrow$

$3 \sim 2k-1$ 共 $\frac{2k-1-3}{2}+1 = (k-1)$ 个奇数.

① $B \cap S_k$ 含有 $3, 5, 7, 9 \sim 2k-1$ 中的元素 c .

$(c, 2k+1, 2k+2) \checkmark$.

② $B \cap S_k$ 没有. $\therefore 2k - (k-1) = k+1$

$\therefore$ 剩下 $(k+1)$ 个数全出现. 即 $1, 2, 4, 6, 8, \dots, 2k-2, 2k \leq \beta$.
 $2k+2, 2k-2, 2k$. ($k \geq 4$) 时完成期待. $\checkmark$.

极端原理 (包含无穷递降思想)

前言

最大, 最小, 多, 少, 极限

我们处理复杂问题的时候, 除了从简单情况找规律, 还经常从特殊情况找规律. 以“集合中最小的数”, “最短的边”等作为突破口可以帮助我们快速发现题目的一些性质, 从而完成解题.

什么时候用 $\Rightarrow$ 多一个性质

专项练习

1. 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数.

两个正整数
最大公因数 = 1

反设 $\sqrt{2}$ 是有理数.

其中 m, n 互质

同题 $2 \mid m \Rightarrow m = 2m_1$

$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \quad (m, n \in \mathbb{Z}^+)$

$2 = \frac{n^2}{m^2} \Rightarrow \frac{4m_1^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2 = \frac{n^2}{m_1^2}$

$\therefore 2 \mid n^2, \therefore 2 \mid n$

$\therefore n = 2n_1$

* 设 m, n 时, 不是随便.

令 $\frac{n}{m}$ 互质最简分数 $\Rightarrow$ 最小 m

而 $2 \mid m, 2 \mid n$ 矛盾 $\Rightarrow$ 最小 n

2. 求所有的整数 k , 使得存在正整数 a, b 满足 $\frac{b+1}{a} + \frac{a+1}{b} = k$.

取最小的 (互质) (多) (少)

① (a, b) 对称的. (a, b) 是解. (b, a) 也是解.

在第一个位置上的数

② 设 b 是所有解中最小的. $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = k$

$\Rightarrow a \geq b$

$\frac{b+1}{a} + \frac{a+1}{b} = k \Rightarrow$ 关于 a 的二次方程.

$a' \geq b$

$b^2 + b + a^2 + a = abk$

$a^2 + (1 - bk)a + b^2 + b = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} a + a' = kb - 1 \\ aa' = b(b+1) \end{cases}$

$\approx b^2$

$\therefore a, a'$ 一个是 b , 一个是 $b+1$.

综上.

$k=3$ 或 4 .

$a \geq b \Rightarrow a' \leq b+1, \therefore b \leq a \leq b+1$

$a' \geq b \Rightarrow a \leq b+1, b \leq a' \leq b+1$

$\therefore a + a' = 2b + 1 = kb - 1 \Rightarrow k = \frac{2b+2}{b} = 2 + \frac{2}{b}$

$\therefore k \in \mathbb{Z} \therefore \frac{2}{b} \in \mathbb{Z} \therefore b = 1 \text{ or } 2 \therefore k = 3 \text{ or } 4$

$b=1$ 时, $k=4, a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ or } 2$

$b=2$ 时, $k=3, a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ or } 3$

实战演练

连续的子列.

1. (2024 北京西城二模) 已知数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$, 从 A 中选取第 i_1 项、第 i_2 项、...、第 i_k 项 ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$) 构成数列 $B: a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$, B 称为 A 的 k 项子列. 记数列 B 的所有项的和为 $T(B)$. 当 $k \geq 2$ 时, 若 B 满足: 对任意 $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $i_{s+1} - i_s = 1$, 则称 B 具有性质 P . 规定: A 的任意一项都是 A 的 1 项子列 且具有性质 P . $i_{s+1} - i_s = 1 \Rightarrow k$ 个连续项. $a_1 \sim a_5, a_2 \sim a_4$.

(1) 当 $n = 4$ 时, 比较 A 的具有性质 P 的子列个数与不具有性质 P 的子列个数的大小, 并说明理由;

(2) 已知数列 $A: 1, 2, 3, \dots, n$ ($n \geq 2$).

(i) 给定正整数 $k \leq \frac{n}{2}$, 对 A 的 k 项子列 B , 求所有 $T(B)$ 的算术平均值: $\frac{k(n+k)}{2}$.

(ii) 若 A 有 m 个不同的具有性质 P 的子列 $B_1, B_2, \dots, B_m$, 满足: $\forall 1 \leq i < j \leq m$,

B_i 与 B_j 都有公共项, (且公共项构成 A 的具有性质 P 的子列) 求 m 的最大值.

重点笔记

突破点 (规律):

难点 (技巧):

(1) 1 2 3 4

子集 (空集):

子列:

4: 1 2 3 4

3: 1 2 3, 2 3 4

2: 1 2, 2 3, 3 4

1: 1, 2, 3, 4

1 P :

2 $1+2+3+4=10$.

3 (多)

4

子列: $2^4 - 1 = 15$. 不 P : $15 - 10 = 5$.

(2) 思路: ① 子列: 找所有子列? (双色)

和/个数. ② 算术平均值: 求和?

* 等差数列求和: 首尾配对 $\frac{a_1 + a_n}{2}$.

$n=7$

Δ

(1, 7)

(2, 6)

(3, 5)

(4, 4)

(5, 3)

(6, 2)

(7, 1)

1 2 3 4 5 6 7

8 Δ Δ 8 Δ 8 Δ 8 $4+4=8$.

(1, 7) (2, 6) (3, 5) (4)

(1, 2) + (6, 7) = $2 \times 8 = 16$

(1, 2, 3) (5, 6, 7) = $3 \times 8 = 24$

(1, 2, 4) (7, 6, 4) = $3 \times 8 = 24$

(1, 3, 5) (7, 5, 3) = $3 \times 8 = 24$

k 项子列: $a_1, a_2, \dots, a_k$

$\rightarrow 8 - a_1, 8 - a_2, \dots, 8 - a_k$

$8 \times k = 8k$

$\therefore k \cdot \frac{n+1}{2}$

平均 = $\frac{8k}{2} = 4k$ $\checkmark$.

$4 = \frac{7+1}{2} = \frac{n+1}{2}$

* k 项子列: 每个数平均 $\frac{n+1}{2}$. $\boxed{k \cdot \frac{n+1}{2}}$.

过程: 对每个子列 $B: a_1, a_2, \dots, a_k$, 和 $B': n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_k$.
所有 k 子列都有一个 $\frac{n+1}{2}$ 的 k 子列对应.

$$\sum_{k \text{ 子列}} T(B) = \frac{1}{2} \sum_{k \text{ 子列}} (a_1 + a_2 + \dots + a_k) + (n+1-a_1 + n+1-a_2 + \dots + n+1-a_k)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \text{ 子列}} k(n+1) = \frac{k(n+1)}{2} \cdot k \text{ 子列个数}$$

$$\therefore \frac{\sum_{k \text{ 子列}} T(B)}{k \text{ 子列个数}} = \frac{k(n+1)}{2}$$

找到一种可能的.

(ii) 取连续子列, 最多取多少个, 还能有公共项?

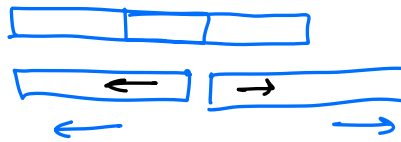
① 构造: 最多的取法? (数学实验) $\boxed{M}$

② 证明: $\begin{cases} \text{保证有交} \Rightarrow m \leq M. (正) \\ m > M \Rightarrow \text{一定无交} (反) \end{cases}$

$\square \square$

Step 1. 两个子列, 怎么有交

"最差, 极端" 无交



* 所有长度 $> \frac{n}{2}$ 的子列, 两两必有交!



* 先取所有 $> \frac{n}{2}$ 的子列

数学实验.

| | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|
| $n=5$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ✓ 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ✓ 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ✓ 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| (取舍) 2 | 1 | 2 | X | 2 | 3 |
| | 3 | 4 | ✓ | 4 | 5 |

* 在两边给的实例中.

$\Rightarrow$ 靠中间

$\Rightarrow$ 长子列有交.

(3) ① $\rightarrow \checkmark$ $1 \times$ 单顶和 P 子列均不交 $\Rightarrow P$ 子列都会这个数.

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 \text{ (种)}.$$

$n=6$ 1 2 3 4 5 6

$\left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 5 \\ 4 \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{l} 123456 \\ 12345, 23456 \\ 1234, 2345, 3456 \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$

(4)
① 取均含 3 的 $\checkmark$

②. 两边路的空列 +.

$\rightarrow$ 123, 456 不同时.

$\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{l} 123, 234, 345, 456 \\ (\cancel{123}, 23, 34, 456) \\ 3 \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$

$$1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = 12.$$

(含3) $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$

$n=5$
 $n=2k+1$

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 + 3 + 2 + 1 \\
 & \left(1 + 2 + \dots + \frac{n+1}{2} \right) + \left(\frac{n-1}{2} + \dots + 1 \right) \\
 & = \left(\frac{n+3}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 & = \frac{n+1}{4} \left(\frac{n+3}{2} + \frac{n-1}{2} \right) = \frac{n+1}{4} \cdot (n+1) = \frac{n^2+2n+1}{4}
 \end{aligned}$$

$n=6$

$$\begin{aligned}
 & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \\
 & \left(1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} \right) + \left(\frac{n}{2} + \dots + 1 \right) = 2 \times \left(1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} \right) \\
 & = 2 \cdot \frac{\frac{n}{2}}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{n^2+2n}{4}
 \end{aligned}$$

7
5

$n=$ 奇数情况: 取所有含 $\frac{n+1}{2}$ 的子列.
偶.

$\left(\frac{n}{2} \neq \frac{n+1}{2} \right)$ 的子列 $>$ 每种子列 "物尽其用".

给证明: $\checkmark$ ① 正向: 长度为 k 的子列 至多取一个 $\checkmark$.

② 反例: $m > \frac{n^2+2n+1}{4}$ (或 $\frac{n^2+2n}{4}$) 则必有不交.

$\Rightarrow$ ① 两两对 $\checkmark$
抽屉/鸽巢.

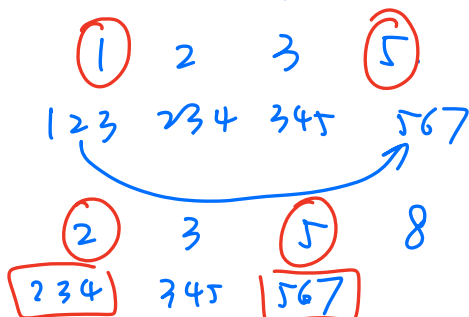
证明:

① $k > \frac{n}{2}$ 时, 长度为 k 的有 $(n+1-k)$ 个, 最多取这么多.

② $k \leq \frac{n}{2}$ 时, 长度为 k 的至少取 k 个, 否则有至少 $(k+1)$ 个.

长度为 3 的子串, 保证有交, 至少取 3 个. $\checkmark$

取 3 个



设这 $(k+1)$ 个子串的最小数为 $i_1, i_2, \dots, i_{k+1}$, ($i_1 < i_2 < \dots < i_{k+1}$).
 $i_{k+1} - i_1 \geq k$ 故以第 1 个与第 $k+1$ 个无交. 矛盾.

$\therefore$ 最多取 k . $n \quad n-1 \quad \dots \quad \frac{n+1}{2} \quad \frac{n-1}{2} \quad \frac{n-3}{2} \quad \dots \quad 1$

① n 为奇数时, 取 $1 \quad 2 \quad \frac{n+1}{2} \quad \frac{n-1}{2} \quad \frac{n-3}{2} \quad \dots \quad 1$

最多: $1 + 2 + \dots + \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-3}{2} + \dots + 1 = \frac{n^2 + 2n + 1}{4}$

② n 为偶数时, $k \quad n \quad n-1 \quad \frac{n}{2} + 1 \quad \frac{n}{2} \quad \frac{n}{2} - 1 \quad \dots \quad 1$

最多: $1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \dots + 1 = \frac{n^2}{4} + n$

取等: ① n 为奇数时, 取所有含 $\frac{n+1}{2}$ 的子串. $\checkmark$

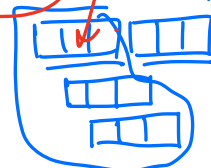
② n 偶.

$\checkmark$

思路 ① 极端情况

(i) 尽可能不交 $\Rightarrow$ 往两头跑 $\Rightarrow$ 最左/最右

(ii) 长度为 k , 最多多少个



2. (2022 北京丰台二模) 设 $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, ..., $I_n = [a_n, b_n]$, $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, 是 $n+1$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 个互不相同的闭区间, 若存在实数 x_0 使得 $x_0 \in I_i$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$), 则称这 $n+1$ 个闭区间为聚合区间, x_0 为该聚合区间的聚合点.

(1) 已知 $I_1 = [1, 3]$, $I_2 = [-2, \sin t]$ ($0 < t < \pi$) 为聚合区间, 求 t 的值; $t = \frac{\pi}{2}$.

(2) 已知 $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, ..., $I_n = [a_n, b_n]$, $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ 为聚合区间.

(i) 设 x_0, y_0 是该聚合区间的两个不同的聚合点. 求证: 存在 $k, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, 使得 $[a_k, b_j] \subseteq I_i$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$);

(ii) 若对任意 p, q ($p \neq q$ 且 $p, q \in \{1, 2, \dots, n+1\}$), 都有 I_p, I_q 互不包含. 求

证: 存在不同的 $i, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, 使得 $b_i - a_j \geq \frac{n-1}{n}(b_i - a_i)$.

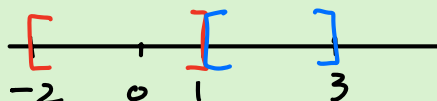
重点笔记

突破点 (规律):

难点 (技巧):

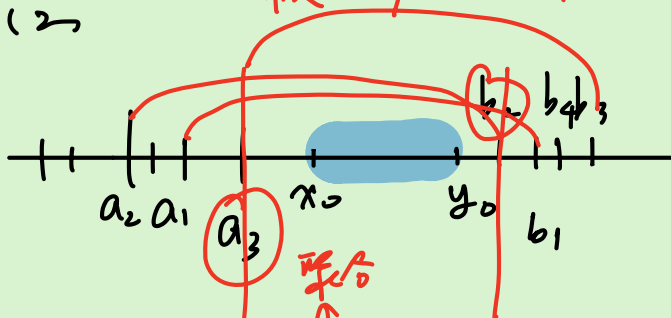
(1)

$$\therefore \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$



极值原理: 有意识地取最大、最小.

(2)



$$a_i \leq x_0, y_0 \leq b_i$$

$$\therefore a_k \leq x_0, y_0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$b_k \geq x_0, y_0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

取最大的 a , 最小的 b 即可.

$$a_i \leq a_k \leq x_0 < y_0 \leq b_j \leq b_i$$

$$\therefore [a_k, b_j] \subseteq I_i.$$

$$(3) \quad b_i - a_j \geq \frac{n-1}{n}(b_i - a_i)$$

$$\text{即 } b_i - a_j \geq \square.$$

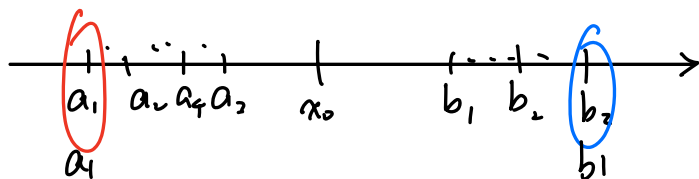
① a_j , 只在此处出现 $\rightarrow$ 独立!

想使 $b_i - a_j \geq \square \Rightarrow$ 让 a_j 尽可能小!

取最小的 a_j , 最大的 b_i | 无法保证 $i \neq j$.

$\therefore$ 聚合区间: $a \leq b$. $\rightarrow$ 极值原理.

$\therefore I_p, I_q$ 互不包含 $\therefore i \neq j$. (最大 a , 最大 b 不是同一区间的端点)
 否则 $a_i = a_j$, 那么互相包含.



$$\therefore b_i - a_j \geq \underbrace{b_i - a_i}_{\substack{\downarrow \\ \text{(聚合)}}} \geq \frac{n-1}{n} (b_i - a_i) \checkmark$$

3. (2024 北京朝阳一模) 若有穷自然数数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$ 满足如下两个性质, 则称 A 为 B_n 数列:

① $a_k \geq \max\{a_1 + a_{k-1}, a_2 + a_{k-2}, \dots, a_{k-1} + a_1\} (k = 2, 3, \dots, n)$, 其中, $\max\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 这 s 个数中最大的数;

② $a_k \leq \min\{a_1 + a_{k-1}, a_2 + a_{k-2}, \dots, a_{k-1} + a_1\} + 1 (k = 2, 3, \dots, n)$, 其中, $\min\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 这 s 个数中最小的数.

(1) 判断 $A: 2, 4, 6, 7, 10$ 是否为 B_5 数列, 说明理由;

(2) 若 $A: a_1, a_2, \dots, a_6$ 是 B_6 数列, 且 a_1, a_2, a_3 成等比数列, 求 a_6 ; $\cdot = 8$

(3) 证明: 对任意 B_n 数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$, 存在实数 λ , 使得 $a_k = [k\lambda] (k = 1, 2, \dots, n)$. ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

重点笔记

突破点 (规律):

难点 (技巧):

$$\textcircled{1} \max \leq a_k \leq \min + 1$$

$$\min \leq \max \leq a_k \leq \min + 1$$

$$\therefore a_k = \min \text{ 或 } \min + 1$$

$$\max = \min \text{ 或 } \min + 1$$

$$\min \leq \max$$

$$\max \leq \min + 1$$

留给 a_k 的选择不多!

$\Rightarrow$ a_k 只有 2 种选择. (极端情况)

$\Rightarrow$ $\min, \max$ 2 种.

若 $\min = \max$, 即 $a_1 + a_{k-1} = a_2 + a_{k-2} = \dots = a_{k-1} + a_1 = x$
此时 $a_k = x$ 或 $x + 1$.
若 $\max = \min + 1 = x$, 则 $a_k = \max = \min + 1 = x$.

(1) 2, 4, 6, 7, 10

$$k=2. \quad 2a_1 \leq a_2 \leq 2a_1 + 1. \quad 4 \leq a_2 \leq 5 \quad \checkmark$$

$$k=3. \quad 6 \leq a_3 \leq 7 \quad \checkmark$$

$$k=4. \quad 7 \geq a_4 + a_2 = 8 \text{ 矛盾. } \therefore \text{不是!}$$

(2) a_1, a_2, a_3 等比. $a_2^2 = a_1 a_3$. 3 个方程

$$\textcircled{1} a_2 = 2a_1 \text{ 或 } a_3 = 4a_1.$$

$$a_1, 2a_1, 4a_1$$

$$3a_1 \leq 4a_1 \leq 3a_1 + 1$$

$$\therefore a_1 \leq 1 \quad \because a_1 \in \mathbb{Z}^+ \therefore a_1 = 1.$$

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4.$$

$$\textcircled{2} a_2 = 2a_1 + 1, \quad a_3 = \frac{(2a_1 + 1)^2}{a_1} = \frac{4a_1^2 + 4a_1 + 1}{a_1}$$

$$a_1, 2a_1 + 1, \quad = 4a_1 + 4a_1 + \frac{1}{a_1} \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\because a_2, a_1 \in \mathbb{Z}^+ \therefore \frac{1}{a_1} \in \mathbb{Z}^+ \therefore a_1 = 1.$$

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9 \quad X. \quad 9 \notin 3+1+1=5 \quad X.$$

$$\therefore a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4.$$

$$\max\{4, 5\} \leq a_4 \leq \min\{5, 4\} + 1 \Rightarrow a_4 = 5$$

$$a_4: \quad 1 \quad 2 \quad 4, 5$$

$$4, 5$$

$$\max\{a_1+a_4, a_2+a_3\} \leq a_5 \leq \min\{6, 7\} + 1$$

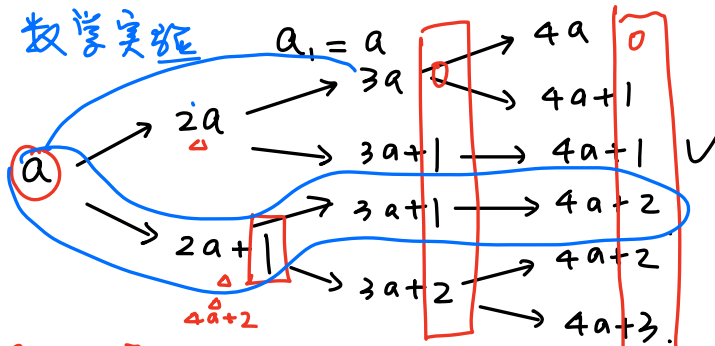
$$a_5: \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad a_5 = 6 \neq 7.$$

$$a_6: \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad a_6 = 8.$$

$$\therefore a_6 = 8.$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad a_6 = 8.$$

(3) 数学实验



$$a_1 = a + \square \quad a_2 = 2a + \square \quad a_3 = 3a + \square$$

$$\textcircled{1} \text{ 猜想: } a_k = ka + \square, \quad \square = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

$\textcircled{2}$ 每步2种.

$$a_k = [k\lambda]?$$

$$\textcircled{1}: \lambda \approx a.$$

$$a_k = \frac{ka + \square}{1} = [k\lambda] = [ka + \square] = ka + \square$$

$$a, 2a, 3a, 4a, \lambda = a$$

带的这个数: 取几

$$a, 2a, 3a, 4a+1, \lambda = a + \square \cdot \frac{1}{4}$$

开始进位!

$$[a + \frac{1}{4}] [2a + \frac{1}{2}] [3a + \frac{3}{4}] [4a+1] = 4a+1$$

$$\checkmark a+0, 2a+0, 3a+1, 4a+1, \lambda = a + \square$$

$$\textcircled{1} 3a+1 = [3\lambda] = [3a+3\square] = 3a+[3\square] \quad [3\square]=1 \quad \square \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

$$\textcircled{2} 4a+1 = [4\lambda], [4\square]=1 \Rightarrow \square \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4})$$

$$2a = [2\lambda] = 2a + [2\square] \Rightarrow [2\square]=0 \Rightarrow \square \in [0, \frac{1}{2})$$

* + - 给 λ 的小数部分 "口" 加进来.

$$\begin{array}{cccc} a & 2a+1 & 3a+1 & 4a+2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \square \in [0, 1) & \square \in [\frac{1}{2}, 1) & \square \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & \square \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}) \end{array}$$

* 四个区间有交集!
(聚合区间!)

$$\textcircled{1} a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \checkmark$$

$$\textcircled{2} b_i = a_i - i a_1 \text{ 对 } i \text{ 号区间. } \checkmark, \quad b_k = 0, 1, \dots, k-1$$

$$\textcircled{1} a_k = [k\lambda] \Leftrightarrow k\lambda - 1 < a_k \leq k\lambda$$

正整数

$$\Leftrightarrow \frac{a_k}{k} \leq \lambda < \frac{a_{k+1}}{k}$$

$$\therefore \exists \lambda \text{ 使 } \lambda \in [\frac{a_k}{k}, \frac{a_{k+1}}{k}) \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

又需证 有交集.

$$\max \{ \frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_n}{n} \} < \min \{ \frac{a_1+1}{1}, \frac{a_2+1}{2}, \dots, \frac{a_{n+1}}{n} \}$$

$$\lambda$$

无界转化.

$$\Leftrightarrow \text{对任意 } k, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ 均有 } \frac{a_k}{k} < \frac{a_j+1}{j} \text{ 即可. } (*)$$

$$B_n \text{ 数列} \Leftrightarrow \text{不矛盾组. } \{ \begin{array}{l} a_k \geq \max \\ a_k \leq \min + 1 \end{array} \}$$

纯代数. $a_k \geq \max$
 $a_k \leq \min + 1 \Rightarrow (*)$. 数学实验.

$a_1 + a_2 \leq a_3 \leq a_1 + a_2 + 1$

$$\begin{cases} \frac{a_2}{2} < \frac{a_3+1}{3} \textcircled{1} & \Leftrightarrow a_2 < \frac{2(a_3+1)}{3} + 2 \\ \frac{a_3}{3} < \frac{a_2+1}{2} \textcircled{2} & \Leftrightarrow 2a_3 < 2(a_2+1) + 3 \\ \frac{a_3}{3} < \frac{a_5+1}{5} \textcircled{3} & \Leftrightarrow 5a_3 < 5(a_5+1) + 3 \end{cases}$$

又 $a_2 \leq a_1 + 1$
 $2a_3 \geq 2(a_1 + a_2)$
 $\Rightarrow a_2 < 2a_1 + 2 \checkmark$
 $\therefore a_2 \leq 2a_1 + 1 < 2a_1 + 2 \checkmark$

① $\begin{cases} a_2 \leq 2a_1 + 1 \\ a_3 \geq a_1 + a_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_2}{2} < \frac{a_3+1}{3}$

② $\frac{a_3}{3} < \frac{a_2+1}{2} \Leftrightarrow 2a_3 < 3a_2 + 3$
 $2a_3 \leq 2(a_1 + a_2 + 1)$
 $\Rightarrow 2(a_1 + a_2 + 1) < 3a_2 + 3$
 $2a_1 < a_2 + 1 \checkmark. \quad 2a_1 \leq a_2 < a_2 + 1.$

③ $\begin{cases} a_3 \leq a_1 + a_2 + 1 \\ 2a_1 \leq a_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_3}{3} < \frac{a_2+1}{2} \checkmark$
 $2a_1 < a_2 + 1 \Rightarrow a_1 < \frac{a_2+1}{2}$

③ $\frac{a_3}{3} < \frac{a_5+1}{5} \Leftrightarrow 5a_3 < 3a_5 + 3$
 $a_5 \geq a_3 + a_2 \Rightarrow 3a_5 \geq 3a_3 + 3a_2$
 $\Rightarrow 5a_3 < 3a_3 + 3a_2 + 3 (\leq 3a_3 + 3) \checkmark$

较小的 $a_3 < 3a_2 + 3$
 $\frac{a_3}{3} < \frac{a_2+1}{2}$

$\therefore \begin{cases} \frac{a_3}{3} < \frac{a_2+1}{2} \\ a_5 \geq a_3 + a_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_3}{3} < \frac{a_5+1}{5}$

较大的! (3,2) $\rightarrow$ (3,5)
 $\rightarrow$ (3,8)...

* 数学归纳法!

补题目条件.

0 帧起手.

$$\boxed{(2, 1)} \Rightarrow \boxed{(2, 3)} \\ \boxed{(1, 2)} \Rightarrow \boxed{(3, 2)} \Rightarrow (3, 5)$$

$$\begin{aligned} k > \bar{j} \quad \frac{a_{k-\bar{j}}}{k-\bar{j}} &< \frac{a_{\bar{j}+1}}{\bar{j}} \quad \frac{a_k}{k} < \frac{a_{\bar{j}+1}}{\bar{j}} \quad ((k-\bar{j}, \bar{j}) \rightarrow (k, \bar{j})) \\ k < \bar{j} \quad \frac{a_k}{k} &< \frac{a_{\bar{j}-k+1}}{\bar{j}-k} \quad \frac{a_k}{k} < \frac{a_{\bar{j}+1}}{\bar{j}} \quad ((k, \bar{j}-k) \rightarrow (k, \bar{j})) \end{aligned}$$

① $n=2$ 时. $\begin{cases} \frac{a_1}{1} < \frac{a_2+1}{2} \\ \frac{a_2}{2} < a_1+1 \end{cases} \quad \frac{a_1}{1} < \frac{a_1+1}{1} \quad \checkmark \quad \frac{a_k}{k} < \frac{a_{j+1}}{j} \quad (k, j=1, 2, \dots, n)$

② 假设 $n=N$ 时成立 $\frac{a_k}{k} < \frac{a_{j+1}}{j} \quad (k, j=1, 2, \dots, N)$ 则成立.
要证: $(k, j=1, 2, \dots, N+1)$ 均成立.

又要证: $\begin{cases} \frac{a_{N+1}}{N+1} < \frac{a_{j+1}}{j} & (i) \\ \frac{a_k}{k} < \frac{a_{N+1}}{N+1} & (ii) \end{cases}$
 $\because j \geq 1 \therefore N-j+1 \leq N$
 $\therefore$ 可归纳假设.

(i) $\frac{a_{N-j+1}}{N-j+1} < \frac{a_{j+1}}{j} = C$
 $\Rightarrow \frac{a_{N+1}}{N+1} < \frac{a_{j+1}}{j}$
 $\frac{a_{N+1}}{N+1} \leq \frac{a_j + a_{N+1-j} + 1}{N+1}$
 $\frac{a_j + 1}{j} = \frac{a_{j+1}}{j} = C$
 $A < C, B < C$
 $A + B < 2C$
 $\therefore \frac{a_{N+1}}{N+1} < \frac{a_{j+1}}{j}$
 $(和比定理)$

$\therefore \frac{a_{N-j+1} + a_j + 1}{N+1} < \frac{a_{j+1}}{j}$

$\therefore \frac{a_{N+1}}{N+1} < \frac{a_{j+1}}{j}$ 归纳假设.

(ii) $\frac{a_k}{k} < \frac{a_{N-k+1}}{N-k+1} > \frac{a_k}{k} < \frac{a_{N+1}}{N+1}$
 $a_{N+1} \geq a_k + a_{N-k} + 1$
 $\frac{a_k}{k} \leq \frac{a_{N-k} + 1}{N-k}$
 $\therefore$ 由数学归纳法得. 成立!

和比定理.

$$\frac{a_{N-k} + a_k + 1}{N+1} \geq \frac{a_k}{k}$$

$$\frac{a_{N+1} + 1}{N+1} \geq \frac{a_{N-k} + a_k + 1}{N+1} \geq \frac{a_k}{k}$$