

第 19 题第 (3) 问

19 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$. 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 定义集合

$$D(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x+a) > f(a)\}.$$

在第 (3) 问中, 设 f 还满足:

(1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

(2) 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(0)$.

(i) 证明: $f(0) \geq 1$.

证明. 反设 $f(0) < 1$. 因为 $x < 0$ 时 $f(x) = 2^x$, 且 $2^x \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0^-$), 故可取 $x_0 < 0$, 使得 $f(x_0) > f(0)$. 由条件 (1) 得 $D(x_0) \subseteq D(0)$.

任取 $t \in (0, -x_0)$, 则 $x_0 + t < 0$, 从而 $f(x_0 + t) = 2^{x_0+t} > 2^{x_0} = f(x_0)$, 即

$$(0, -x_0) \subseteq D(x_0).$$

又由条件 (2), 当 $0 < t < 1$ 时 $f(t) < f(0)$, 所以

$$(0, 1) \cap D(0) = \emptyset.$$

但由 $D(x_0) \subseteq D(0)$ 可得 $(0, \min\{-x_0, 1\}) \subseteq D(0)$, 与上式矛盾. 故 $f(0) \geq 1$. □

(ii) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

引理 1. 若 $f(a) > 0$, 则对任意 $h < 0$, 均有

$$f(a+h) < f(a).$$

也就是说, $f(a)$ 严格大于它左侧任一点处的函数值.

证明. 因为 $2^x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow -\infty$), 故可取 $u < 0$, 使得

$$f(u) = 2^u < f(a).$$

由条件 (1) 得 $D(a) \subseteq D(u)$. 若存在 $h < 0$ 使 $f(a+h) > f(a)$, 则 $h \in D(a)$, 从而 $h \in D(u)$, 即

$$f(u+h) > f(u).$$

但 $u+h < u < 0$, 于是

$$f(u+h) = 2^{u+h} < 2^u = f(u),$$

矛盾. 因此对任意 $h < 0$, 都有 $f(a+h) < f(a)$. □

引理 2. 若 $f(a) \leq 0$, 则对任意 $h > 0$, 均有

$$f(a+h) > f(a).$$

也就是说, $f(a)$ 严格小于它右侧任一点处的函数值。

证明. 任取 $h > 0$. 取 $u < -h$, 则 $u < 0$ 且 $u+h < 0$. 由于

$$f(a) \leq 0 < 2^u = f(u),$$

由条件 (1) 得 $D(u) \subseteq D(a)$. 又因为 $u, u+h < 0$ 且 $h > 0$, 所以

$$f(u+h) = 2^{u+h} > 2^u = f(u),$$

即 $h \in D(u)$. 于是 $h \in D(a)$, 故

$$f(a+h) > f(a).$$

□

证明. 先证明

$$0 < x < 1 \implies f(x) \leq 0.$$

任取 $x \in (0, 1)$. 由条件 (2) 有 $f(x) < f(0)$. 若 $f(x) > 0$, 则由第一个引理应用于点 x 与 $h = -x$, 可得

$$f(0) < f(x),$$

矛盾. 所以 $f(x) \leq 0$.

下面证明

$$x > 0 \implies f(x) \leq 0.$$

反设存在 $x_1 > 0$, 使得 $f(x_1) > 0$. 由上一步知 $x_1 \notin (0, 1)$, 故 $x_1 \geq 1$. 又由引理 1 得

$$f(x_1) > f(0),$$

所以由条件 (1) 有

$$D(x_1) \subseteq D(0).$$

而条件 (2) 表明 $(0, 1) \cap D(0) = \emptyset$, 于是

$$(0, 1) \cap D(x_1) = \emptyset.$$

即对任意 $t \in (0, 1)$, 均有

$$f(x_1+t) \leq f(x_1).$$

若存在 $a, b \in (x_1, x_1+1)$, 满足 $a < b$ 且 $f(a) < f(b)$, 记 $c = b - a$, 则 $0 < c < 1$. 由于 $x_1 - b < 0$, 且由上式有 $f(b) \leq f(x_1)$, 取到严格不等时便有

$$x_1 - b \in D(b).$$

又 $f(a) < f(b)$, 由条件 (1) 得 $D(b) \subseteq D(a)$, 故 $x_1 - b \in D(a)$ 。于是

$$f(x_1 - c) = f(a + x_1 - b) > f(a).$$

这样便可在 x_1 的左侧造出一个新的正值点 $x_2 = x_1 - c$, 且 $0 < x_1 - x_2 < 1$ 。

反复进行上述构造, 可得一系列正值点

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots, \quad 0 < x_k - x_{k+1} < 1,$$

且 $f(x_k) > 0$ 。取 n 充分大, 使得 $x_n \in (0, 1)$, 便与已经证明的 $(0, 1)$ 上 $f(x) \leq 0$ 矛盾。因此对任意 $x > 0$, 必有 $f(x) \leq 0$ 。

于是若 $0 < x < y$, 令 $h = y - x > 0$ 。由引理 2 可得

$$f(y) = f(x + h) > f(x).$$

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。

□