

六大超越函数图象性质及应用

函数	xe^x	$\frac{e^x}{x}$	$\frac{x}{e^x}$
图象			
性质			
函数	$x \ln x$	$\frac{\ln x}{x}$	$\frac{x}{\ln x}$
图象			
性质			

运用：教材 P104 第 17 题. 作函数 $y = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 的大致图象

1. 已知 $a = \frac{\ln 2}{2}$, $b = \frac{1}{e}$, $c = \frac{\ln 3}{3}$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系为 ()

- A. $b < c < a$ B. $c < a < b$
C. $a < c < b$ D. $c < b < a$

【答案】C

【分析】结合导数求 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调性, 可判断 $b > a, b > c$, 令 $a - c$, 结合对数的运算性质可判断出 $c > a$, 从而可选出正确答案.

【详解】解：设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当

$0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

则当 $x = e$ 时, $f(x)_{\max} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$, 即 $b > a, b > c$;

$a - c = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} = \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{6} = \frac{\ln 8 - \ln 9}{6} < 0$, 则 $c > a$, 所以

$b > c > a$,

故选：C.

变式：已知 $a > b > 1$, e 为自然对数的底数, 则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $ae^a > be^b$ B. $a \ln b > b \ln a$
C. $a \ln a > b \ln b$ D. $be^a > ae^b$

【答案】ACD

【分析】采用逐一验证的方法, 通过构造函数 $f(x) = xe^x$,

$g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $h(x) = x \ln x$, $k(x) = \frac{e^x}{x}$, 根据这些函数在 $(1, +\infty)$ 的单调性可得结果.

【详解】设 $f(x) = xe^x$, $x > 1$, 则 $f'(x) = (x+1)e^x > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 故函数单调递增,

故 $f(a) > f(b)$, 即 $ae^a > be^b$, A 正确;

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 1$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 函数在 $(1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 故当 $1 < b < a < e$ 时, $g(a) > g(b)$, 即 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$, 故 $a \ln b < b \ln a$, B 错误;

设 $h(x) = x \ln x$, $x > 1$, 则 $h'(x) = \ln x + 1 > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 故函数单调递增, $h(a) > h(b)$, 即 $a \ln a > b \ln b$, C 正确;

设 $k(x) = \frac{e^x}{x}$, $x > 1$, 则 $k'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 故函数单调递增,

故 $k(a) > k(b)$, 即 $\frac{e^a}{a} > \frac{e^b}{b}$, 故 $be^a > ae^b$, D 正确.

故选：ACD.

2. 函数 $y=\ln x-ax$ 有两个零点, 则 a 的取值范围为_____

思路 1: 求导后分类讨论

思路 2: 化为 $\ln x=ax$ 利用切线求解

思路 3: 参变分离, 化成 $a=\frac{\ln x}{x}$ 的交点个数问题

3. 已知函数 $f(x)=x-1+\frac{a}{e^x}$, 当 $a=1$ 时, 若直线 $l: y=kx-1$

与 $y=f(x)$ 无交点, 求 k 的最大值

思路: 转化为 xe^x 与直线无交点的问题

变式. (2016 全国 I) 设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$,

其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$,

则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{3}{2e}, 1\right)$ B. $\left[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4}\right)$
C. $\left[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4}\right)$ D. $\left[\frac{3}{2e}, 1\right)$

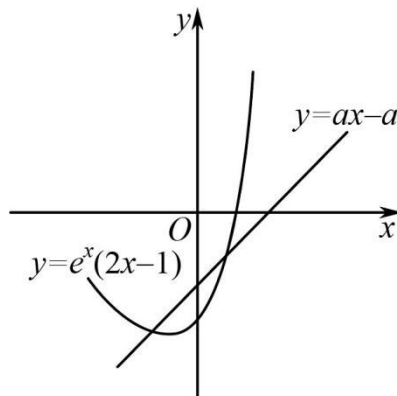
【答案】D

【分析】设 $g(x)=e^x(2x-1)$, $y=a(x-1)$, 问题转化为存在唯一的整数 x_0 使得满足 $g(x_0) < a(x-1)$, 求导可得出函数 $y=g(x)$ 的极值, 数形结合可得

$-a > g(0) = -1$ 且 $g(-1) = -\frac{3}{e} \geq -2a$, 由此可得出实数 a 的取值范围.

【详解】设 $g(x)=e^x(2x-1)$, $y=a(x-1)$,

由题意知, 函数 $y=g(x)$ 在直线 $y=ax-a$ 下方的图象中只有一个点的横坐标为整数,



$g'(x) = e^x(2x+1)$, 当

$x < -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) > 0$.

所以, 函数 $y=g(x)$ 的最小值为 $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -2e^{\frac{1}{2}}$.

又 $g(0) = -1$, $g(1) = e > 0$.

直线 $y=ax-a$ 恒过定点 $(1, 0)$ 且斜率为 a ,

故 $-a > g(0) = -1$ 且 $g(-1) = -\frac{3}{e} \geq -a-a$, 解得 $\frac{3}{2e} \leq a < 1$, 故选

D.

【点睛】本题考查导数与极值, 涉及数形结合思想转化, 属于中等题.

4. 若 $\forall x > 0, xe^x > \ln x + x + a$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \ln 2)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(\ln 2, +\infty)$

【答案】B

【分析】由 $xe^x = e^{\ln x + x}$, 设 $\ln x + x = t$, 则 $t \in \mathbb{R}$, 原不等式可化为 $a < e^t - t$, 转化成求 $g(t) = e^t - t$ 的最小值.

【详解】因为 $\ln(xe^x) = \ln x + x$, 所以 $xe^x = e^{\ln x + x}$, 设 $\ln x + x = t$, 则 $t \in \mathbb{R}$ 且原不等式可化为 $a < e^t - t$, 只需 $a < (e^t - t)_{\min}$. 设

$g(t) = e^t - t$, 则 $g'(t) = e^t - 1$, 所以当 $t < 0$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 单调递减; 当 $t > 0$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单调递增. 所以

$g(t)_{\min} = g(0) = 1$, 所以 $a < 1$.

故选: B.

【点睛】本题考查用导数研究不等式恒成立问题. 解题方法是用分离参数法把不等式进行变形转化为求函数的最值, 解题关

键是式子的变换,然后用换元法使得函数简单化.

5. (2014 新课标I) 设函数 $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

(1) 求 a, b

(2) 证明: $f(x) > 1$

【答案】(1) $a=1, b=2$; (2) 详见解析.

【详解】试题分析: (1) 根据求导法则求出原函数的导函数, 由某点的导数是在该点的切线的斜率, 结合切线方程以及该点的函数值, 将函数值和切线斜率代入原函数和导函数可求得参数值; (2) 由 (1) 可得 $f(x)$ 的解析式, $f(x)$ 为多项式, 对要证的不等式进行变形, 使之成为两个函数的大小关系式, 再分别利用导函数求出两函数在定义域内的最值, 可证得两函数的大小关系, 进而证得.

试题解析: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = ae^x \ln x + \frac{a}{x} e^x - \frac{b}{x^2} e^{x-1} + \frac{b}{x} e^{x-1}.$$

由题意可得 $f(1)=2$, $f'(1)=e$. 故 $a=1$, $b=2$.

(2) 证明: 由 (1) 知, $f(x) = e^x \ln x + \frac{2}{x} e^{x-1}$,

从而 $f(x) > 1$ 等价于 $x \ln x > xe^{-x} - \frac{2}{e}$.

设函数 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = 1 + \ln x$.

所以当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $g'(x) < 0$;

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) > 0$.

故 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增,

从而 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

设函数 $h(x) = xe^{-x} - \frac{2}{e}$, 则 $h'(x) = e^{-x}(1-x)$.

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时,

$h'(x) < 0$. 故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 从而 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值为 $h(1) = -\frac{1}{e}$.

综上, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > h(x)$, 即 $f(x) > 1$.

变式: 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - x$.

(1) 当 $a=-2$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $a=1$ 时, 证明: $f(x) - \frac{1}{e^x} + x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

【答案】(1) $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $f(2) = \ln 2 - 3$, $f(x)$ 无极大值 (2) 详见解析

【详解】试题分析: (1) 先求导数

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - 1 = -\frac{(x-2)(x+1)}{x^2},$$

再求导函数在定义区间上的零点 $x=2$, 列表分析函数单调性变化趋势, 确定极值 (2)

证明不等式, 一般利用函数最值进行证明, 而构造恰当的函数是解题的关键与难点, 因为 $f(x) - \frac{1}{e^x} + x = \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x}$, 所以首先将对数函数与指数函数分离, 为使函数有最值, 再作变形:

$x \ln x + 1 > \frac{x}{e^x}$, 这样只需证明: $(x \ln x + 1)_{\min} > \left(\frac{x}{e^x}\right)_{\max}$, 利用导

数不难求得 $g(x) = x \ln x + 1 \geq g\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e}$,

$h(x) = \frac{x}{e^x} \leq h(1) = \frac{1}{e} < 1 - \frac{1}{e}$, 所以 $(x \ln x + 1)_{\min} = \left(\frac{x}{e^x}\right)_{\max}$, 但等

号取法不同, 因此 $x \ln x + 1 > \frac{x}{e^x}$

试题解析: (1) 当 $a=-2$ 时,

$$f(x) = \ln x - \frac{2}{x} - x, f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - 1 = -\frac{(x-2)(x+1)}{x^2},$$

$\therefore$ 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $f(2) = \ln 2 - 3$, $f(x)$ 无极大值

(2) 当 $a=1$ 时, $f(x) - \frac{1}{e^x} + x = \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x}$,

下面证 $\ln x + \frac{1}{x} > \frac{1}{e^x}$, 即证 $x \ln x + 1 > \frac{x}{e^x}$.

设 $g(x) = x \ln x + 1$, 则 $g'(x) = 1 + \ln x$,

在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 是减函数; 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上,

$g'(x) > 0$, $g(x)$ 是增函数.

所以 $g(x) \geq g\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e}$.

设 $h(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

在 $(0,1)$ 上, $h'(x)>0,h(x)$ 是增函数; 在 $(1,+\infty)$ 上,

$h'(x)<0,h(x)$ 是减函数,

所以 $h(x)\leq h(1)=\frac{1}{e}<1-\frac{1}{e}$, .

所以 $h(x)<g(x)$, 即 $\frac{x}{e^x}<x\ln x+1$, 所以

$x\ln x+1-\frac{x}{e^x}>0$, 即 $\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x}>0$,

即 $f(x)-\frac{1}{e^x}+x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立