

# 南京市 2026 届高三年级第二次模拟考试

## 数学参考答案

2026.05

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A    2. B    3. A    4. C    5. A    6. C    7. D    8. B

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.

9. BC    10. BCD    11. ABD

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.  $\frac{\pi}{6}$     13.  $2\sqrt{2}$     14. 7

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分.

15. (本小题满分 13 分)

解：(1) 因为  $a_n^2$ ,  $S_n$ ,  $a_n$  成等差数列，所以  $2S_n = a_n^2 + a_n$ ,

所以当  $n \geq 2$  时,  $2S_{n-1} = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$ ,

两式相减得,  $2(S_n - S_{n-1}) = a_n^2 + a_n - a_{n-1}^2 - a_{n-1}$ ,

即  $2a_n = a_n^2 + a_n - a_{n-1}^2 - a_{n-1}$ ,

即  $a_n + a_{n-1} = (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})$ .

因为  $\{a_n\}$  为正项数列，所以  $a_n + a_{n-1} \neq 0$ ,

则  $a_n - a_{n-1} = 1$ ,

当  $n=1$  时,  $2S_1 = a_1^2 + a_1$ , 解得  $a_1 = 1$ ,

所以  $\{a_n\}$  是首项为 1 公差为 1 的等差数列,

则  $a_n = 1 + (n-1) = n$ .

(2)  $b_n = a_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{a_n} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ,

则  $T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ,

所以  $\frac{1}{2}T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ,

两式相减得:  $\frac{1}{2}T_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times [1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} - n \cdot (\frac{1}{2})^{n+1} = 1 - (\frac{1}{2})^n - n \cdot (\frac{1}{2})^{n+1},$$

$$\text{所以 } T_n = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1} - n \cdot (\frac{1}{2})^n.$$

16. (本小题满分 15 分)

$$\text{解: (1) } f(x) = \frac{a \cdot e^x - (ax + a - 1) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1 - ax}{e^x},$$

①当  $a=0$  时,

因为  $f(x) = \frac{1}{e^x} > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数;

②当  $a>0$  时,

由  $f(x) > 0$ , 得  $x < \frac{1}{a}$ , 由  $f(x) < 0$ , 得  $x > \frac{1}{a}$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{1}{a})$  上为增函数, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上为减函数;

③当  $a<0$  时,

由  $f(x) > 0$ , 得  $x > \frac{1}{a}$ , 由  $f(x) < 0$ , 得  $x < \frac{1}{a}$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{1}{a})$  上为减函数, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上为增函数;

综上, 当  $a=0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数; 当  $a>0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{1}{a})$  上为增函数, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上为减函数; 当  $a<0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{1}{a})$  上为减函数, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上为增函数.

(2) 由 (1) 知, 当  $a>0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{1}{a})$  上为增函数, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上为减函数, 所

$$\text{以 } f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a}) = \frac{a}{e^a}.$$

要证:  $f(x) < \frac{1}{2}a^2$ , 只要证:  $\frac{a}{e^a} < \frac{1}{2}a^2$ , 即证:  $a \cdot e^{\frac{1}{a}} > 2$ .

法一: 记  $g(a) = a \cdot e^{\frac{1}{a}}$ ,  $a > 0$ ,

$$\text{则 } g'(a) = \frac{1}{e^a} + a \cdot \frac{1}{e^a} \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{e^a} \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{e^a} \cdot \frac{a-1}{a},$$

由  $g'(a)=0$ , 得  $a=1$ , 由  $g'(a)>0$ , 得  $a>1$ , 由  $g'(a)<0$ , 得  $0<a<1$ ,

所以  $g(a)$  在  $(0, 1)$  上为减函数, 在  $(1, +\infty)$  上为增函数,

$$\text{则 } g(a)_{\min} = g(1) = e,$$

因为  $e>2$ , 所以  $g(a)>2$ , 即  $a \cdot e^{\frac{1}{a}}>2$ .

法二: 只要证:  $\frac{1}{e^a} - \frac{2}{a} > 0$ , 令  $\frac{1}{a} = t > 0$ , 即要证:  $e^t - 2t > 0$ .

$$\text{记 } g(t) = e^t - 2t, \quad t > 0,$$

$$\text{则 } g'(t) = e^t - 2,$$

由  $g'(t)=0$ , 得  $t=\ln 2$ , 由  $g'(t)>0$ , 得  $t>\ln 2$ , 由  $g'(t)<0$ , 得  $0<t<\ln 2$ ,

所以  $g(t)$  在  $(0, \ln 2)$  上为减函数, 在  $(\ln 2, +\infty)$  上为增函数,

$$\text{所以 } g(t)_{\min} = g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2.$$

因为  $2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$ , 所以  $g(t) > 0$ , 即  $e^t - 2t > 0$ .

法三: 只要证:  $\ln(a \cdot e^{\frac{1}{a}}) > \ln 2$ , 即证:  $\ln a + \frac{1}{a} > \ln 2$ .

$$\text{记 } g(a) = \ln a + \frac{1}{a}, \quad a > 0,$$

$$g'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{a-1}{a^2},$$

由  $g'(a)=0$ , 得  $a=1$ , 由  $g'(a)>0$ , 得  $a>1$ , 由  $g'(a)<0$ , 得  $0<a<1$ ,

所以  $g(a)$  在  $(0, 1)$  上为减函数, 在  $(1, +\infty)$  上为增函数,

$$\text{则 } g(a)_{\min} = g(1) = 1,$$

因为  $1 > \ln 2$ , 所以  $g(a) > \ln 2$ , 即  $\ln a + \frac{1}{a} > \ln 2$ .

17. (本小题满分 15 分)

解: (1) 连接  $BD$ , 因为  $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$ ,  $BC=3$ ,  $CD=6$ ,

$$\text{所以 } BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}.$$

在 $\triangle ABD$ 中,  $AB=\sqrt{5}$ ,  $DA=4\sqrt{2}$ ,

由余弦定理, 得  $\cos \angle ADB = \frac{DA^2 + BD^2 - AB^2}{2DA \cdot BD} = \frac{32 + 45 - 5}{2 \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ,

则  $\tan \angle ADB = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \angle ADB}}{\cos \angle ADB} = \frac{1}{3}$ .

因为  $\tan \angle BDC = \frac{BC}{CD} = \frac{1}{2}$ ,

则  $\tan \angle ADC = \tan(\angle ADB + \angle BDC) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = 1$ ,

因为  $\angle ADC \in (0, \pi)$ , 所以  $\angle ADC = \frac{\pi}{4}$ .

(2) 因为  $CD=6$ ,  $DA=4\sqrt{2}$ ,  $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ ,

所以  $DE=2$ ,  $DF=2\sqrt{2}$ .

在 $\triangle DEF$ 中, 由余弦定理,

得  $EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cos \angle EDF = 4 + 8 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ ,

则  $DE^2 + EF^2 = DF^2$ , 则  $DE \perp EF$ .

所以  $PE \perp EF$ ,  $CE \perp EF$ , 则  $\angle PEC$  是二面角  $P-EF-C$  的平面角,

又因为二面角  $P-EF-C$  是直二面角,

所以  $\angle PEC = 90^\circ$ , 即  $PE \perp EC$ .

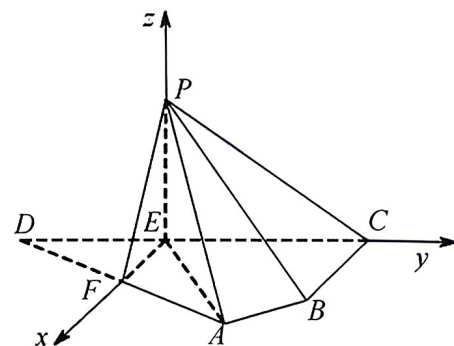
以  $\{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EP}\}$  为正交基底建立空间直角坐标系  $E-xyz$ , 则  $A(4, 2, 0)$ ,

$B(3, 4, 0)$ ,  $C(0, 4, 0)$ ,  $P(0, 0, 2)$ ,

所以  $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ ,  $\overrightarrow{AP} = (-4, -2, 2)$ ,  $\overrightarrow{PC} = (0, 4, -2)$ .

设平面  $PAB$  的法向量  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ , 则  $\begin{cases} -x + 2y = 0, \\ -4x - 2y + 2z = 0, \end{cases}$  则  $\begin{cases} x = 2y, \\ z = 5y. \end{cases}$

令  $y=1$ , 则  $\mathbf{n} = (2, 1, 5)$  是平面  $PAB$  的一个法向量.



设直线  $PC$  与平面  $PAB$  所成角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{PC}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{PC}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{6}{\sqrt{30} \times 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{10},$$

所以  $PC$  与平面  $PAB$  所成角正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{10}$ .

18. (本小题满分 17 分)

解: (1) 因为双曲线  $C$  的右顶点为  $(1, 0)$ , 所以  $a=1$ ,

又因为  $C$  的渐近线互相垂直, 所以  $\frac{b}{a}=1$ , 则  $b=1$ ,

所以  $C$  的方程为  $x^2 - y^2 = 1$ .

(2) ① 由题意可知  $l_2$  不与  $x$  轴垂直, 且不与  $C$  的渐近线平行, 设  $l_2: y=kx+m$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ y = kx + m, \end{cases} \text{ 得 } (k^2 - 1)x^2 + 2kmx + m^2 + 1 = 0,$$

因为  $l_2$  与  $C$  有且只有一个公共点  $M$ , 所以  $\Delta = 4k^2m^2 - 4(k^2 - 1)(m^2 + 1) = 0$ ,

所以  $k^2 - m^2 - 1 = 0$ .

$$\text{则 } M \text{ 点横坐标 } x_M \text{ 满足: } 2x_M = \frac{-2km}{k^2 - 1}, \text{ 所以 } x_M = \frac{-km}{k^2 - 1} = \frac{-km}{m^2} = -\frac{k}{m}.$$

由  $l_2: y=kx+m$ , 令  $y=0$ , 得  $T$  点横坐标  $x_T = -\frac{m}{k}$ .

$$\text{所以 } x_M \cdot x_T = \left(-\frac{k}{m}\right) \cdot \left(-\frac{m}{k}\right) = 1.$$

② 由①知  $T$  点坐标为  $\left(-\frac{m}{k}, 0\right)$ ,

$$\text{把 } x_M = -\frac{k}{m} \text{ 代入 } y=kx+m, \text{ 得 } M \text{ 点纵坐标 } y_M = -\frac{k^2}{m} + m = \frac{-k^2 + m^2}{m} = -\frac{1}{m},$$

所以  $M$  点坐标为  $\left(-\frac{k}{m}, -\frac{1}{m}\right)$ ,

由于点  $N$  与  $M$  关于原点  $O$  对称, 所以  $N$  点坐标为  $\left(\frac{k}{m}, \frac{1}{m}\right)$ ,

因为  $l_1 \perp l_2$ , 所以  $l_1: x = -ky - \frac{m}{k}$ ,



$$\text{由 } \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x = -ky - \frac{m}{k}, \end{cases} \text{ 得 } (k^2 - 1)y^2 + 2my + \frac{m^2 - k^2}{k^2} = 0, \text{ 即 } m^2 y^2 + 2my - \frac{1}{k^2} = 0,$$

$$\text{设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2}{m}, \\ y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 k^2}, \end{cases}$$

$$\text{由 } N(\frac{k}{m}, \frac{1}{m}), P(x_1, y_1), \text{ 得 } NP \text{ 直线方程为: } (x_1 - \frac{k}{m})(y - \frac{1}{m}) = (y_1 - \frac{1}{m})(x - \frac{k}{m}),$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 得 } A \text{ 点横坐标 } x_A = \frac{x_1 - ky_1}{1 - my_1},$$

$$\text{同理可得 } B \text{ 点横坐标 } x_B = \frac{x_2 - ky_2}{1 - my_2}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } x_A + x_B &= \frac{x_1 - ky_1}{1 - my_1} + \frac{x_2 - ky_2}{1 - my_2} = \frac{-ky_1 - \frac{m}{k} - ky_1}{1 - my_1} + \frac{-ky_2 - \frac{m}{k} - ky_2}{1 - my_2} \\ &= \frac{-2ky_1 - \frac{m}{k}}{1 - my_1} + \frac{-2ky_2 - \frac{m}{k}}{1 - my_2} \\ &= \frac{4k}{m} + (\frac{2k}{m} + \frac{m}{k})(\frac{1}{my_1 - 1} + \frac{1}{my_2 - 1}) \\ &= \frac{4k}{m} + (\frac{2k}{m} + \frac{m}{k}) \frac{m(y_1 + y_2) - 2}{m^2 y_1 y_2 - m(y_1 + y_2) + 1} \\ &= \frac{4k}{m} + \frac{2k^2 + m^2}{mk} \times \frac{m(-\frac{2}{m}) - 2}{m^2(-\frac{1}{m^2 k^2}) - m(-\frac{2}{m}) + 1} \\ &= \frac{4k}{m} + \frac{2k^2 + m^2}{mk} \times \frac{4k^2}{1 - 3k^2}, \end{aligned}$$

$$\text{注意到 } k^2 - m^2 - 1 = 0, \text{ 所以 } 2k^2 + m^2 = 3k^2 - 1,$$

$$\text{所以 } x_A + x_B = 0,$$

$$\text{所以 } OA = OB, \text{ 又因为 } OM = ON,$$

$$\text{所以四边形 } AMBN \text{ 是平行四边形.}$$

解：(1) 解：(1)  $P_1 = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$ ,

$$P_2 = \frac{C_4^2}{C_6^2} \times \frac{C_2^2}{C_6^2} + \frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2} \times \frac{C_4^1}{C_5^2} = \frac{6}{15} \times \frac{1}{15} + \frac{8}{15} \times \frac{4}{10} = \frac{6}{25}.$$

(2) 若盒中有 4 个黑球，2 个红球，一次性摸出两个球，

摸到 0, 1, 2 个红球的概率分别为  $\frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}$ ,  $\frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$ ,  $\frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$ ,

若盒中有 4 个黑球，1 个红球，一次性摸出两个球，

摸到 0, 1 个红球的概率分别为  $\frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{C_4^1 \cdot C_1^1}{C_5^2} = \frac{2}{5}$ ,

则摸球  $n$  次，记第  $i$  次和第  $n$  次分别各摸到一个红球的概率为  $p_i$ ,

则  $p_i = \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} \times \frac{8}{15} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-i-1} \times \frac{2}{5}$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ),

摸球  $n$  次，记第  $n$  次摸到两个红球的概率为  $p_n$ ，则  $p_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \frac{1}{15}$ ,

则  $P_n = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^{n-1} p_i + p_n$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \frac{1}{15} + \frac{8}{15} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{8}{15} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-3} \times \frac{2}{5} + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2} \times \frac{8}{15} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{15} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{16}{75} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{15} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{16}{15} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{15} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{16}{15} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.$$

(3) 法一：

设摸球  $2n$  次，在第  $i$  次和第  $2n$  次分别摸到一个红球的概率为

$$p_i = \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} \times \frac{8}{15} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{2n-i-1} \times \frac{2}{5} \quad (i=1, 2, \dots, 2n-1),$$

记  $M = p_1 + p_3 + \dots + p_{2n-1}$ ，则  $M = \frac{16}{15} \times \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{2n} - \left(\frac{2}{5}\right)^{2n}\right]$ ,

$$\frac{M}{P_{2n}} = \frac{\frac{16}{15} \times [(\frac{3}{5})^{2n} - (\frac{2}{5})^{2n}]}{\frac{16}{15} \times [(\frac{3}{5})^{2n-1} - (\frac{2}{5})^{2n-1}]} = \frac{3}{5} + \frac{\frac{13}{75} \times (\frac{2}{5})^{2n-1}}{\frac{16}{15} \times [(\frac{3}{5})^{2n-1} - (\frac{2}{5})^{2n-1}]} > \frac{3}{5},$$

$X_{2n}$  可能取值为 1, 2, 且  $P(X_{2n}=1) = \frac{M}{P_{2n}}$ ,  $P(X_{2n}=2) = 1 - \frac{M}{P_{2n}}$ ,

$$E(X_{2n}) = \frac{M}{P_{2n}} \times 1 + (1 - \frac{M}{P_{2n}}) \times 2 = 2 - \frac{M}{P_{2n}}, \text{ 故 } E(X_{2n}) < \frac{7}{5}.$$

法二:

设摸球  $2n$  次, 在第  $i$  次和第  $2n$  次分别摸到一个红球的概率为

$$p_i = (\frac{2}{5})^{i-1} \times \frac{8}{15} \times (\frac{3}{5})^{2n-i-1} \times \frac{2}{5} \quad (i=1, 2, \dots, 2n-1),$$

摸球  $2n$  次, 第  $2n$  次摸到两个红球的概率为  $p_{2n} = (\frac{2}{5})^{2n-1} \times \frac{1}{15}$ ,

①若  $n \geq 2$ ,

此时当  $k$  为奇数且  $k \leq 2n-3$  时,  $\frac{2}{3}p_k = p_{k+1}$ ; 当  $k=2n-1$  时,  $\frac{2}{3}p_k > p_{k+1}$ ;

$$\text{则 } \frac{2}{3}(p_1 + p_3 + \dots + p_{2n-1}) > p_2 + p_4 + \dots + p_{2n},$$

$$\text{故 } \frac{5}{3}(p_1 + p_3 + \dots + p_{2n-1}) > p_1 + p_2 + \dots + p_{2n},$$

记  $M = p_1 + p_3 + \dots + p_{2n-1}$ ,

$$\text{则 } \frac{M}{P_{2n}} = \frac{p_1 + p_3 + \dots + p_{2n-1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_{2n}} > \frac{p_1 + p_3 + \dots + p_{2n-1}}{\frac{5}{3}(p_1 + p_3 + \dots + p_{2n-1})} = \frac{3}{5},$$

$X_{2n}$  可能取值为 1, 2, 且  $P(X_{2n}=1) = \frac{M}{P_{2n}}$ ,  $P(X_{2n}=2) = 1 - \frac{M}{P_{2n}}$ ,

$$E(X_{2n}) = \frac{M}{P_{2n}} \times 1 + (1 - \frac{M}{P_{2n}}) \times 2 = 2 - \frac{M}{P_{2n}}, \text{ 故 } E(X_{2n}) < \frac{7}{5}.$$

②当  $n=1$  时,  $P(X_2=1) = \frac{8}{9}$ ,  $P(X_2=2) = \frac{1}{9}$ ,  $E(X_2) = \frac{8}{9} \times 1 + \frac{1}{9} \times 2 = \frac{10}{9} < \frac{7}{5}$ ,

结论也成立;

综上,  $E(X_{2n}) < \frac{7}{5}$ .