

2024 年普通高等学校招生“圆梦杯”统一模拟考试（五）

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z = \frac{2+i}{1+2i}$ ，则 $|z| =$
A. 1 B. 2 C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{8}{5}$
2. 已知命题 $p: a < 8$ ，命题 q ：样本数据 15, 9, 9, 3, 8, 7, a 的中位数为 8，则命题 p 是命题 q 的
A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 设集合 $A = \{x \mid |x-1| \leq 1\}$ ， $B = \{x \mid 2a < x \leq a+1\}$ ，若 $A \cap B = B$ ，则 a 的取值范围是
A. $[0, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $[0, 1]$ D. $(0, 1]$
4. 已知函数 $f(x) = e^{x-2} + e^{-x-a}$ 的图象关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称，则 $a =$
A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1
5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右顶点为 A ，右焦点为 F ，上顶点为 B ，且 $|AB| = \sqrt{7}|AF|$ ，则 C 的离心率为
A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
6. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{2}$ ，且 $\tan A = 2\sqrt{2}$ ， $BC = \sqrt{17}$ ，则 $AB + AC =$
A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

7. 深度学习是人工智能的一种具有代表性的学习方法, 它以神经网络为出发点. 在神经网络优化中, 指数衰减的学习率模型为 $L = L_0 D^{\frac{G}{G_0}}$, 其中 L 表示衰减后的学习率, L_0 表示初始学习率, D 表示衰减系数, G 表示训练迭代轮数, G_0 表示衰减速度. 已知某个指数衰减的学习率模型的初始学习率为 0.8, 衰减速度为 12, 且当训练迭代轮数为 12 时, 学习率衰减为 0.5. 则学习率衰减到 0.2 以下 (不含 0.2) 所需的训练迭代轮数至少为 (参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010$)
- A. 34 B. 35 C. 36 D. 37
8. 已知圆 O 的半径为 1, 线段 AB 与圆 O 不相交, 当点 P 在圆 O 上运动时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的最小值为 1, 最大值为 9, 则 $|AB| =$
- A. $\sqrt{11}$ B. $\sqrt{17}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{10}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + 2\cos(x + \frac{2\pi}{3})$, 则
- A. $f(x)$ 的最大值为 3 B. $f(x) = f(x + 4\pi)$
- C. $f(x - \frac{\pi}{6})$ 是偶函数 D. $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增
10. 随机事件 A, B 满足 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, 则
- A. $P(AB) = \frac{1}{12}$ B. 事件 A, B 相互独立
- C. $P(A|B) = \frac{1}{4}$ D. $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{4}$
11. 已知函数 $f(x) = ae^x - x$ 有 2 个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 函数 $g(x) = ae^x + bx + 2\ln \frac{x}{a}$, 若 $g(x_1) = 0$, 则
- A. $b = -2$
- B. $x_1 < 1 < x_2$
- C. $g(x)$ 可能有 2 个零点
- D. 若 $g(x)$ 存在大于 x_2 的零点, 则 $a \in (\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知双曲线 C 的中心为坐标原点，对称轴为坐标轴，虚轴长为 1，一条渐近线方程为 $y = 2x$ ，则 C 的方程为_____.

13. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，前 n 项和为 S_n ，若 $\frac{d}{a_1} + \frac{a_3}{d} = 4$ ，则 $\frac{S_{2024}}{a_{2024}} =$ _____.

14. 记圆台 OO_1 的侧面积为 S ，体积为 V . 已知 AB 为圆台的一条母线， $AB = \sqrt{2}$ ，若线段 OO_1 上存在一点 C ，满足 $AC = BC$ ， $AC \perp BC$ ，则 $\frac{S^3}{V^2}$ 的取值范围为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = \frac{5}{3}$ ， $3a_{n+1} = a_n + 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $S_{2024} < m$ ，求整数 m 的最小值.

16. (15 分)

袋中有 8 个除颜色外完全相同的小球，其中 1 个黑球，3 个白球，4 个红球.

(1) 若从袋中一次性取出 2 个小球，记取到的红球个数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；

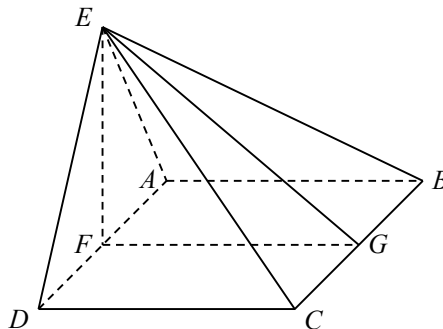
(2) 若从袋中不放回地取 3 次，每次取 1 个小球，取到黑球记 0 分，取到白球记 2 分，取到红球记 4 分，求在最终得分为 8 分的条件下，恰取到 1 个红球的概率.

17. (15 分)

如图，四棱锥 $E-ABCD$ 的底面为正方形， $\angle EAD = \angle EDA$ ， F ， G 分别为线段 AD ， BC 的中点.

(1) 证明：平面 $EFG \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 若 $EF \perp CD$ ， $EG = \sqrt{2}FG$ ，点 H 与点 F 关于平面 BCE 对称，求二面角 $E-DG-H$ 的正弦值.



18. (17 分)

已知抛物线 $E: x^2 = 3y$, 圆 $C: x^2 + (y-3)^2 = 17$, 直线 $y = kx + 6 (k \geq 1)$ 交 E 于 A, B 两点, 交 C 于 M, N 两点, 其中 A 在第二象限, N 在 A 的上方.

(1) 求 B 点横坐标的最小值;

(2) 证明: $|MN| \leq |BN|$;

(3) 若 MR 为 C 的直径, 点 P 在 C 上, 且 $|BP| = |MP|$. 记 $\triangle ANR$ 和 $\triangle ANP$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 比较 S_1 和 S_2 的大小关系, 并求出 S_2 的最大值.

19. (17 分)

记集合 $S_{\theta(x)}(a, b) = \{(x, y) \mid y = \theta(x), a \leq x \leq a+1, b \leq y \leq b+1\}$, 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, $g(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$.

(1) 求 $S_{f(x)}(1, 1)$ 中的元素个数;

(2) 若存在实数 b , 使得存在 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S_{g(x)}(a, b)$, 且 $y_2 - y_1 = 1$, 求 a 的取值范围;

(3) 记 $S_{f(x)}(a, b) \cup S_{g(x)}(a, b) = S_{f(x) \cup g(x)}(a, b)$, 对于给定的正整数 $n (n \geq 2)$, 判断是否存在正整数 $i, j (1 \leq i < j \leq n)$, 使得存在直线 $l: y = m$, 满足 $l \cap S_{f(x) \cup g(x)}(i, 0) \neq \emptyset$, 且 $l \cap S_{f(x) \cup g(x)}(j, 0) \neq \emptyset$. 若存在, 求出正整数对 (i, j) 的个数 (用 n 表示); 若不存在, 说明理由.