

## 数 学 试 卷

2026.3

本试卷共 4 页,19 题,全卷满分 150 分.考试用时 120 分钟.

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4. 考试结束后,请将答题卡上交.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $[1, 3)$       B.  $[1, 2]$       C.  $\{1, 2\}$       D.  $\{0, 1, 2\}$

2. 已知复数  $z$  满足  $(1+i)z = |2-2i|$  (其中  $i$  为虚数单位), 则  $z$  的共轭复数  $\bar{z} =$

- A.  $2-2i$       B.  $2+2i$       C.  $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$       D.  $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

3. 已知向量  $a = (1, m)$ ,  $b = (m, 4)$ , 则“ $m=2$ ”是“ $a \parallel b$ ”的

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

4. 下列函数中,是奇函数且在  $(0, +\infty)$  单调递增的是

- A.  $y = 3^{-x} - 3^x$       B.  $y = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$       C.  $y = x^3 + x^{-1}$       D.  $y = \begin{cases} x^2+2x, & x > 0 \\ -x^2+2x, & x < 0 \end{cases}$

5.  $(\frac{1}{x^2} + 2x)^6$  的展开式中的常数项为

- A. 60      B. 120      C. 160      D. 240

6. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  的直线与双曲线的

两条渐近线分别交于  $M, N$  两点,且满足  $\overrightarrow{F_1M} = \overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{F_1N} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$ , 则双曲线的离心率为

- A. 2      B.  $\sqrt{5}$       C.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$       D.  $\sqrt{6}$

7. 已知点  $P, Q$  分别在圆  $C_1: x^2 + y^2 = 1, C_2: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$  上运动, 点  $M$  在直线  $l: x - y + 2 = 0$  上运动, 则  $|MP| + |MQ|$  的最小值为
- A.  $\sqrt{5} - 2$                       B. 3                      C.  $\sqrt{5} - 1$                       D. 4

8. 已知  $n \in N^*$ , 设函数  $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}) - \log_{(4n-1)} x$  的零点个数为  $a_n$ , 则  $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} =$
- A. 120                      B. 210                      C. 75                      D. 240

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 某校为了了解本校学生在寒假期间参加社会实践活动的情况, 随机调查了 100 名学生, 得到如下列联表(单位: 人):

|           | 男生 | 女生 | 合计  |
|-----------|----|----|-----|
| 参加了社会实践活动 | 30 | 40 | 70  |
| 未参加社会实践活动 | 20 | 10 | 30  |
| 合计        | 50 | 50 | 100 |

- 附  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a + b + c + d; \chi_{0.05} = 3.841$
- A. 依据小概率值  $\alpha = 0.05$  的  $\chi^2$  独立性检验, 认为学生是否参加社会实践活动与性别无关
- B. 从男生中随机抽取 1 人, 其参加了社会实践活动的概率为  $\frac{3}{5}$
- C. 随机抽取 1 人, 若抽取到的是参加了社会实践的学生, 则这名学生是男生的概率为  $\frac{3}{7}$
- D. 按性别用分层抽样的方法从参加课外活动的学生中抽取 7 人, 再从这 7 人中抽取 2 人, 则这 2 人中至少有一名男生的概率为  $\frac{5}{7}$
10. 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为正方形,  $PA \perp$  平面  $ABCD, PA = AB$ , 点  $E, F, G$  分别为棱  $PD, PA, BC$  的中点, 则
- A.  $EG \perp AD$                       B.  $PB \parallel$  平面  $EFG$
- C. 异面直线  $EG$  与  $PA$  所成角的正切值为 2                      D. 直线  $AC$  与平面  $PBC$  所成角为  $30^\circ$

11. 已知函数  $f(x) = e^x - ax^2$ , 其中  $a \in \mathbb{R}$ , 则

A. 若函数  $f(x)$  有且仅有 1 个零点, 则  $a \in (0, \frac{e^2}{4})$

B. 若函数  $f(x)$  有且仅有 2 个极值点, 则  $a$  的取值范围是  $(\frac{e}{2}, +\infty)$

C. 不存在  $a \in \mathbb{R}$ , 使函数  $f(x)$  存在唯一的极值点

D. 若对  $\forall x > 0, f(x) \geq 0$  恒成立, 则  $a \leq \frac{e^2}{4}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 2n$ , 则  $a_4 =$  \_\_\_\_\_.

13. 已知  $x, y$  均为非负数, 且  $x + 2y = 1$ , 则  $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{y+1}$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

14. 在棱长为 2 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  内, 有按照如下方式产生的一系列大小均不相同的  $n$  个球: 第 1 个球与正方体的 6 个面均相切; 第 2 个球与第 1 个球外切, 且与正方体过顶点  $A$  的 3 个面均相切; 第 3 个球与第 2 个球外切, 且与正方体过顶点  $A$  的 3 个面均相切,  $\dots$ , 依次下去. 记这  $n$  个球的表面积和为  $T_n$ , 若  $T_n < M$  对  $n \in \mathbb{N}^*$  总成立, 则  $M$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点与抛物线  $y^2 = 4\sqrt{3}x$  的焦点重合, 且椭圆  $C$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

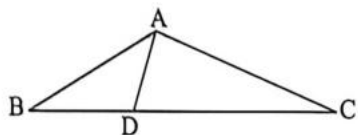
(2) 过椭圆  $C$  的左顶点  $A$  且倾斜角为  $30^\circ$  的直线交椭圆  $C$  于另一点  $B$ ,  $O$  为坐标原点, 求  $\triangle OAB$  的面积.

16. (本小题满分 15 分)

如图, 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $c = \sqrt{2}, a \cos C = c(\sqrt{2} - \cos A)$ .

(1) 求  $b$ ;

(2) 若  $D$  点满足  $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ ,  $\angle CAD = 2\angle DAB$ , 求  $a$ .



17. (本小题满分 15 分)

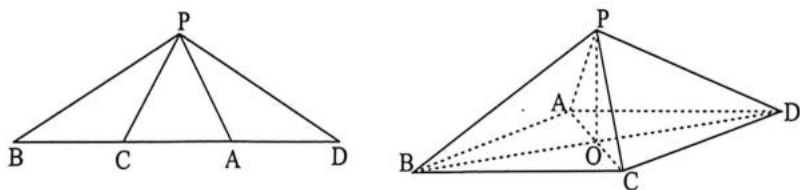
某商场在春节期间举行过关赢奖娱乐活动,活动设有  $A, B$  两类关卡,  $A, B$  两类关卡每一次闯关成功的概率分别为  $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}$ . 活动参与者第一次闯关等可能的选择  $A, B$  中的一类关卡,如果闯关成功,则下一次闯关继续选择同类关卡,如果失败则选择另一类关卡,以此类推. 规定  $A$  类关卡闯关成功一次得 20 分,  $B$  类关卡闯关成功一次得 10 分, 闯关失败均得 0 分. 每名活动参与者有 3 次闯关机会.

(1) 已知活动参与者甲第一次闯关成功, 求甲选择的是  $A$  类关卡的概率;

(2) 若一名活动参与者闯关总得分不低于 40 分则获得现金奖励 1000 元, 低于 40 分则根据分数奖励其他实物小礼品. 若活动参与者有 1000 人, 求商场支出的现金奖励总金额的期望.

18. (本小题满分 17 分)

“细长三角板”指的是有一个内角为  $30^\circ$  的直角三角板. 现有两个细长三角板, 其较短的直角边长均为 10 cm, 先按左图所示的方式放置, 其中以  $\triangle PAB, \triangle PCD$  表示两个细长三角板,  $PA = PC = 10$  cm,  $\angle PBA = \angle PDC = 30^\circ$ , 直角顶点重合于点  $P$ , 两条斜边  $AB, CD$  在一条直线上. 保持直角顶点重合, 将两条斜边  $AB, CD$  平行展开, 得到右图所示的四棱锥  $P-ABCD$ .



(1) 设  $AC \cap BD = O$ , 求证:  $PO \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 是否存在四棱锥  $P-ABCD$ , 使得底面  $ABCD$  为菱形? 若存在, 求此时四棱锥的高, 若不存在, 请说明理由;

(3) 求四棱锥  $P-ABCD$  体积的最大值, 并求此时平面  $PAB$  与平面  $PCD$  所成二面角的大小.

19. (本小题满分 17 分)

已知函数  $f(x) = \ln x - \sin x + 1$ .

(1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$  处的切线方程;

(2) 讨论  $f(x)$  在  $x \in (0, \pi)$  上的单调性;

(3)  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导数, 若两个不相等的实数  $x_1, x_2 \in (0, \pi)$  满足  $f'(x_1) = f'(x_2)$ , 求证:  $f(x_1) + f(x_2) > 0$ .

(参考公式:  $\cos \theta - \cos \varphi = -2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}$ )