

期末小题（1）强化训练

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 【答案】A 【解析】

易知 $\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{5}{2}$, $\bar{y} = \frac{13+m}{4}$, 代入 $y = 2.4x - 2$ 得 $\frac{13+m}{4} = 2.4 \times \frac{5}{2} - 2 \Rightarrow m = 3$.

2. 【答案】B 【解析】

线面垂直，则有该直线和平面内所有的直线都垂直，故B正确.

3. 【答案】D 【解析】

$\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 9 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 故 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -9$,

$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{-9}{9} \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

4. 【答案】A 【解析】

因为 n 为一组从小到大排列的数 1, 2, 4, 8, 9, 10 的第六十百分位数, $6 \times 60\% = 3.6$, 所以 $n = 8$,

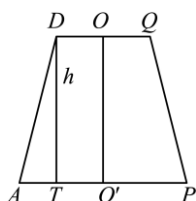
二项式 $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x}\right)^8$ 的通项公式为 $T_{r+1} = C_8^r \cdot (\sqrt[3]{x})^{8-r} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^r = C_8^r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot x^{\frac{8-r}{3}-r}$,

令 $\frac{8-r}{3} - r = 0 \Rightarrow r = 2$, 所以常数项为 $C_8^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{1}{4} = 7$,

5. 【答案】D 【解析】

设圆台上下底面的半径分别为 r_1, r_2 , 由题意可知 $\frac{1}{3} \times 2\pi \times 3 = 2\pi r_1$, 解得 $r_1 = 1$,

$\frac{1}{3} \times 2\pi \times 6 = 2\pi r_2$, 解得: $r_2 = 2$, 作出圆台的轴截面, 如图所示:



图中 $OD = r_1 = 1$, $O'A = r_2 = 2$, $AD = 6 - 3 = 3$, 过点 D 向 AP 作垂线, 垂足为 T , 则 $AT = r_2 - r_1 = 1$,

所以圆台的高 $h = \sqrt{AD^2 - AT^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$, 则上底面面积 $S_1 = \pi \times 1^2 = \pi$, $S_2 = \pi \times 2^2 = 4\pi$,

由圆台的体积计算公式可得: $V = \frac{1}{3} \times (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) \times h = \frac{1}{3} \times 7\pi \times 2\sqrt{2} = \frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$,

6. 【答案】A 【解析】

由函数 $f(x) = x^2 - bx + c (b > 0, c > 0)$ 的两个零点分别为 x_1, x_2 ,

即 x_1, x_2 是 $x^2 - bx + c = 0$ 的两个实数根, 则 $x_1 + x_2 = b, x_1 x_2 = c$

因为 $b > 0, c > 0$, 可得 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 又因为 $x_1, x_2, -1$ 适当调整可以是等差数列和等比数列,

不妨设 $x_1 < x_2$, 可得 $\begin{cases} x_1 x_2 = (-1)^2 = 1 \\ -1 + x_2 = 2x_1 \end{cases}$, 解得 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$,

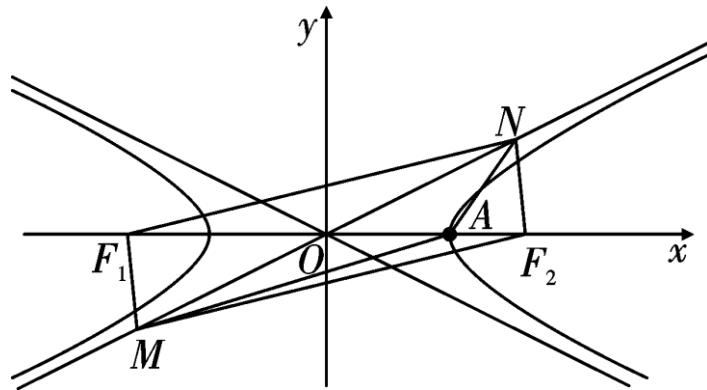
所以 $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, x_1 x_2 = 1$, 所以 $b = \frac{5}{2}, c = 1$,

则不等式 $\frac{x-b}{x-c} \leq 0$, 即为 $\frac{x-\frac{5}{2}}{x-1} \leq 0$, 解得 $1 < x \leq \frac{5}{2}$, 所以不等式的解集为 $\left(1, \frac{5}{2}\right]$.

7. 【答案】C 【解析】

如图, 因为四边形 MF_1NF_2 为矩形, 所以 $|MN| = |F_1F_2| = 2c$ (矩形的对角线相等),

所以以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = c^2$. 直线 MN 为双曲线的一条渐近线, 不妨设其方程为 $y = \frac{b}{a}x$,



由 $\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$, 所以 $N(a, b)$, $M(-a, -b)$ 或 $N(-a, -b)$, $M(a, b)$.

不妨设 $N(a, b)$, $M(-a, -b)$,

又 $A(a, 0)$, 所以 $|AM| = \sqrt{(a+a)^2 + b^2} = \sqrt{4a^2 + b^2}$, $|AN| = \sqrt{(a-a)^2 + b^2} = b$.

在 $\triangle AMN$ 中, $\angle MAN = \frac{2\pi}{3}$,

由余弦定理得 $|MN|^2 = |AM|^2 + |AN|^2 - 2|AM||AN| \cdot \cos \frac{2\pi}{3}$, 即 $4c^2 = 4a^2 + b^2 + b^2 + \sqrt{4a^2 + b^2} \times b$,

则 $2b = \sqrt{4a^2 + b^2}$, 所以 $4b^2 = 4a^2 + b^2$, 则 $b^2 = \frac{4}{3}a^2$, 所以 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

8. 【答案】C【解析】

令 $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1, x > 0$, 则 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$.

当 $x > 0$ 时, 有 $e^x > 1, \frac{1}{x+1} < 1$, 所以 $\frac{1}{x+1} < 1$,

所以, $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以, $f(x) > f(0) = 1 - 1 = 0$, 所以, $f(0.2) > 0$, 即 $e^{0.2} - \ln 1.2 - 1 > 0$, 所以 $a < b$

令 $g(x) = e^x - (x+1), x > 0$, 则 $g'(x) = e^x - 1$ 在 $x > 0$ 时恒大于零, 故 $g(x)$ 为增函数,

所以 $\frac{x+1}{e^x} < 1, x > 0$, 而 $a = \ln(1.2e) = 1 + \ln 1.2 > 1$, 所以 $c < a$, 所以 $c < a < b$,

二、选择题: 本题共3小题, 每小题6分, 共18分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得6分, 部分选对的得部分分, 有选错的得0分.

9. 【答案】AC【解析】

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \sin 2x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \cos 2x + \cos 2x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin 2x \sin \frac{3\pi}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = -\sqrt{2} \sin 2x, \end{aligned}$$

即 $f(x) = -\sqrt{2} \sin 2x$,

对于A, $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cos 2x$, 易知为偶函数, 所以A正确;

对于B, $f(x) = -\sqrt{2} \sin 2x$ 对称轴为 $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 故B错误;

对于C, $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right), 2x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, $y = \sin 2x$ 单调递减, 则 $f(x) = -\sqrt{2} \sin 2x$ 单调递增, 故C正确;

对于D, $f(x) = -\sqrt{2} \sin 2x$, 则 $\sin 2x \in [-1, 1]$, 所以 $f(x) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 故D错误;

10. 【答案】ABD【解析】

对于A, 设 $z = a + bi$, 故 $\bar{z} = a - bi$, 则 $|z|^2 = a^2 + b^2$, $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, 故 $|z|^2 = z\bar{z}$ 成立, 故A正确,

对于B, $z = (1 - 2i)^2 = -4i - 3$, $\bar{z} = 4i - 3$, 显然复平面内 $\bar{z}$ 对应的点位于第二象限, 故B正确,

对于C, 易知 $|z|^2 = a^2 + b^2$, $z^2 = a^2 + b^2 + 2abi$, 当 $ab \neq 0$ 时, $z^2 \neq |z|^2$, 故C错误,

对于D, 若 $|z|=1$, 则 $a^2+b^2=1$, 而 $|z+i|=\sqrt{a^2+(b+1)^2}=\sqrt{2b+2}$, 易得当 $b=1$ 时, $|z+i|$ 最大, 此时 $|z+i|=2$, 故D正确.

11. 【答案】BCD 【解析】

如图, 取AC中点O, 连接OB, OD',

则 $OB=OD'$, $OB \perp AC, OD' \perp AC$, $\angle BOC$ 为二面角 $D'AC-B$ 的平面角, 即 $\angle BOC = \theta$.

若 $D'ABC$ 是正四面体, 则 $BD'=BC \neq BO$, $\triangle OBD'$ 不是正三角形, $\theta \neq \frac{\pi}{3}$, A错;

四面体 $D'ABC$ 的体积最大时, $BO \perp$ 平面 ACD' , 此时B到平面 ACD' 的距离最大为 $BO = \sqrt{3}$,

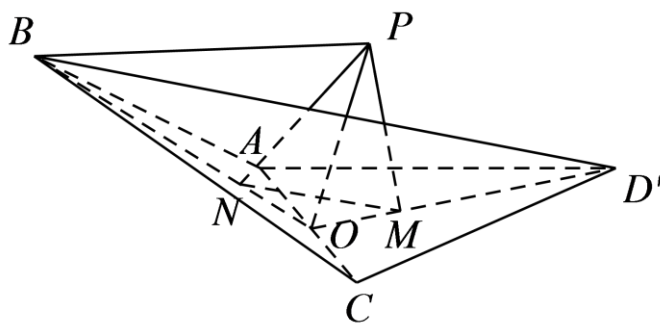
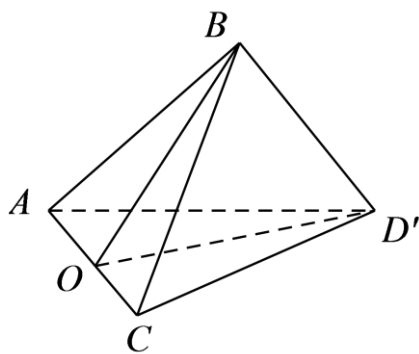
而 $S_{\triangle ACD'} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$, 所以 $V = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1$, B正确;

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle D'AC} = \sqrt{3}$, 易得 $\triangle BAD' \cong \triangle BCD'$, $S_{\triangle BAD'} = S_{\triangle BCD'} = \frac{1}{2} \times 2^2 \sin \angle BCD' = 2 \sin \angle BCD'$,

未折叠时 $BD' = BD = 2\sqrt{3}$, 折叠到B, D'重合时, $BD' = 0$, 中间存在一个位置, 使得 $BD' = 2\sqrt{2}$,

则 $BC^2 + D'C^2 = BD'^2$, $\angle BCD' = \frac{\pi}{2}$, 此时 $S_{\triangle BAD'} = S_{\triangle BCD'} = 2 \sin \angle BCD'$ 取得最大值2,

所以四面体 $D'ABC$ 的表面积最大值为 $2(\sqrt{3}+2)$, C正确;



当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时, 如图, 设M, N分别是 $\triangle ACD'$ 和 $\triangle BAC$ 的外心,

在平面AOD'内作 $PM \perp OD'$, 作 $PN \perp OB$, $PM \cap PN = P$, 则P是三棱锥外接球的球心,

由上面证明过程知平面OBD'与平面ABC、平面D'AC垂直, 即P, N, O, M四点共面,

$\theta = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\angle PON = \frac{\pi}{3}$, $ON = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $PN = ON \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 1$,

$PB = \sqrt{PN^2 + BN^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ 为球半径, D正确.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 【答案】 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$ 【解析】

因为 $\log_2 x < 1 = \log_2 2$ ，所以 $0 < x < 2$ ，即 $M = \{x \mid \log_2 x < 1\} = \{x \mid 0 < x < 2\}$ ，

因为 $2x - 1 < 0$ ，解得 $x < \frac{1}{2}$ ，所以 $N = \{x \mid 2x - 1 < 0\} = \left\{x \mid x < \frac{1}{2}\right\}$ ，所以， $M \cap N = \left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$.

13. 【答案】 24 【解析】

设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $q > 0$ ，

所以， $S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + q^4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = S_4(1 + q^4)$ ，

则 $S_8 - 2S_4 = S_4(q^4 - 1) = 6$ ，则 $q^4 > 1$ ，可得 $q > 1$ ，则 $S_4 = \frac{6}{q^4 - 1}$ ，

所以， $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = q^8(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = S_4 q^8 = \frac{6q^8}{q^4 - 1} = \frac{6(q^4 - 1 + 1)^2}{q^4 - 1}$
 $= \frac{6[(q^4 - 1)^2 + 1 + 2(q^4 - 1)]}{q^4 - 1} = 6\left[(q^4 - 1) + \frac{1}{q^4 - 1} + 2\right] \geq 6\left[2\sqrt{(q^4 - 1) \cdot \frac{1}{q^4 - 1}} + 2\right] = 24$ ，

当且仅当 $q^4 - 1 = \frac{1}{q^4 - 1} (q > 1)$ 时，即当 $q = \sqrt[4]{2}$ 时，等号成立，故 $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$ 的最小值为 24.

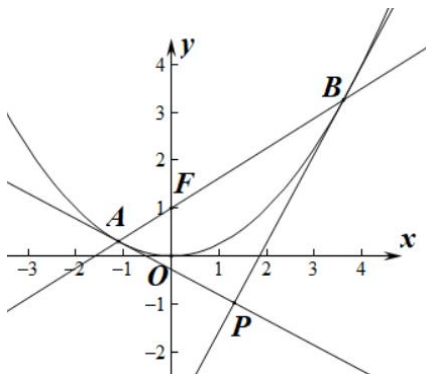
14. 【答案】 10 【解析】

$C: x^2 = 4y$ 的焦点为 $(0, 1)$ ，设直线 AB 方程为 $y = kx + 1$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

联立直线与抛物线方程有 $x^2 - 4kx - 4 = 0$ ，则 $|AB| = y_1 + y_2 + 2 = k(x_1 + x_2) + 4 = 4k^2 + 4$.

又 $y = \frac{1}{4}x^2$ 求导可得 $y' = \frac{1}{2}x$ ，故直线 AP 方程为 $y - y_1 = \frac{1}{2}x_1(x - x_1)$.

又 $y_1 = \frac{1}{4}x_1^2$ ，故 $AP: y = \frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{4}x_1^2$ ，同理 $BP: y = \frac{1}{2}x_2x - \frac{1}{4}x_2^2$.



$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{4}x_1^2 \\ y = \frac{1}{2}x_2x - \frac{1}{4}x_2^2 \end{cases} \text{ 可得 } \frac{1}{2}(x_1 - x_2)x = \frac{1}{4}(x_1^2 - x_2^2), \text{ 解得 } x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \text{ 代入可得 } P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{4}\right),$$

代入韦达定理可得 $P(2k, -1)$ ，故 $|PF| = \sqrt{4k^2 + 4}$ 。

$$\text{故 } |PF|^2 + \frac{25}{|AB|} = 4k^2 + 4 + \frac{25}{4k^2 + 4} \geq 2\sqrt{(4k^2 + 4) \times \frac{25}{4k^2 + 4}} = 10,$$

当且仅当 $4k^2 + 4 = \frac{25}{4k^2 + 4}$ ，即 $k = \pm \frac{1}{2}$ 时取等号。