

期末小题(2) 强化训练

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 【答案】D 【解析】

由 $y = \frac{1}{2}x^2$ 可得抛物线标准方程为： $x^2 = 2y$ ， $\therefore$ 其焦点坐标为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ．

2. 【答案】A 【解析】

二项式 $\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)^7$ 的通项公式为 $T_{r+1} = C_7^r \cdot \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{7-r} \cdot \left(-\frac{1}{x^4}\right)^r = C_7^r \cdot (-1)^r \cdot x^{\frac{14-14r}{3}}$ ，

令 $\frac{14-14r}{3} = 0 \Rightarrow r = 1$ ，所以常数项为 $C_7^1 \cdot (-1) = -7$ ，

3. 【答案】A 【解析】

由 $\log_2 x \leq 1$ ，则 $\log_2 x \leq \log_2 2$ ，所以 $0 < x \leq 2$ ，

所以 $A = \{x | \log_2 x \leq 1\} = \{x | 0 < x \leq 2\}$ ，又 $B = \{y | y = 2^x, x \leq 2\} = \{y | 0 < y \leq 4\}$ ，

所以 $A \subseteq B$ ，则 $A \cup B = B$ ， $A \cap B = A$ ．

4. 【答案】A 【解析】

若 $B = \Omega$ ， $A \cap B = \{1, 2\}$ ，则 $P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ，而 $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ， $P(B) = 1$ ，

所以 $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ ，所以事件 A, B 相互独立，反过来，当 $B = \{1, 3\}$ ， $A \cap B = \{1\}$ ，

此时 $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ， $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ ，满足 $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ ，

事件 A, B 相互独立，所以不一定 $B = \Omega$ ，所以甲是乙的充分不必要条件．

5. 【答案】C 【解析】

由函数 $f(x) = \ln|e^x - 1| - mx$ 为偶函数，可得 $f(-1) = f(1)$ ，即 $\ln|e^{-1} - 1| + m = \ln|e - 1| - m$ ，

解之得 $m = \frac{1}{2}$ ，则 $f(x) = \ln|e^x - 1| - \frac{1}{2}x (x \neq 0)$ ，

$f(-x) = \ln|e^{-x} - 1| + \frac{1}{2}x = \ln|e^x - 1| - x + \frac{1}{2}x = \ln|e^x - 1| - \frac{1}{2}x = f(x)$

故 $f(x) = \ln|e^x - 1| - \frac{1}{2}x$ 为偶函数，符合题意．

6. 【答案】A【解析】

因为函数 $y = f(x)$ 的图象恰为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ x 轴上方的部分，

所以 $y = f(x) = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} (-a < x < a)$ ，因为 $f(s-t)$ ， $f(s)$ ， $f(s+t)$ 成等比数列，

所以有 $f^2(s) = f(s-t) \cdot f(s+t)$ ，且有 $-a < s < a$ ， $-a < s-t < a$ ， $-a < s+t < a$ 成立，

即 $-a < s < a$ ， $-a < t < a$ 成立，

由 $f^2(s) = f(s-t) \cdot f(s+t) \Rightarrow (b \cdot \sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2}})^2 = b \cdot \sqrt{1 - \frac{(s-t)^2}{a^2}} \cdot b \cdot \sqrt{1 - \frac{(s+t)^2}{a^2}}$ ，

化简得： $t^4 = 2a^2t^2 + 2s^2t^2 \Rightarrow t^2(t^2 - 2a^2 - 2s^2) = 0 \Rightarrow t^2 = 0$ ，或 $t^2 - 2a^2 - 2s^2 = 0$ ，

当 $t^2 = 0$ 时，即 $t = 0$ ，因为 $-a < s < a$ ，所以平面上点 (s, t) 的轨迹是线段（不包含端点）；

当 $t^2 - 2a^2 - 2s^2 = 0$ 时，即 $t^2 = 2a^2 + 2s^2$ ，

因为 $-a < t < a$ ，所以 $t^2 < a^2$ ，而 $2a^2 + 2s^2 > a^2$ ，所以 $t^2 = 2a^2 + 2s^2$ 不成立，

7. 【答案】C【解析】

因为 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = -2$ ，解得 $\tan \alpha = 3$ ，

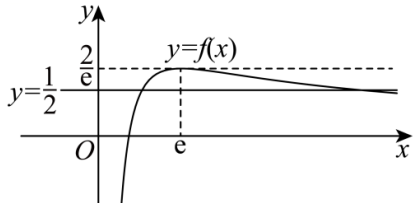
所以， $\frac{\sin \alpha (1 - \sin 2\alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha}$
 $= \frac{\sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{3 - 9}{1 + 9} = -\frac{3}{5}$ 。

8. 【答案】D【解析】

由题知， $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$ 的实数解可转化为 $f(x) = \frac{1}{2}$ 或 $f(x) = 1$ 的实数解，

即 $y = f(x)$ 与 $y = 1$ 或 $y = \frac{1}{2}$ 的交点，当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{2 \ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$

所以 $x \in (0, e)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增， $x \in (e, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，

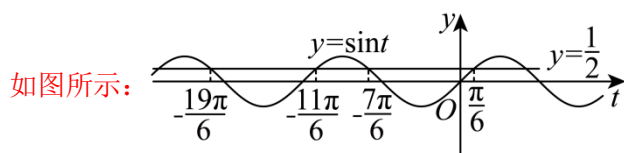
如图所示： 所以 $x = e$ 时 $f(x)$ 有最大值： $\frac{1}{2} < f(x)_{\max} = \frac{2}{e} < 1$

所以 $x > 0$ 时，由图可知 $y = f(x)$ 与 $y = 1$ 无交点，即方程 $f(x) = 1$ 无解，

$y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}$ 有两个不同交点, 即方程 $f(x) = \frac{1}{2}$ 有 2 解

当 $x < 0$ 时, 因为 $\omega > 0$, $-\pi \leq x \leq 0$, 所以 $-\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \omega x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}$,

令 $t = \omega x + \frac{\pi}{6}$, 则 $t \in \left[-\omega\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 则有 $y = \sin t$ 且 $t \in \left[-\omega\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$,



因为 $x > 0$ 时, 已有两个交点, 所以只需保证 $y = \sin t$ 与 $y = \frac{1}{2}$ 及与 $y = 1$ 有四个交点即可,

所以只需 $-\frac{19\pi}{6} < -\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq -\frac{11\pi}{6}$, 解得 $2 \leq \omega < \frac{10}{3}$.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 【答案】ACD 【解析】

$$\Delta = b^2 - 4 < 0, \therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{4 - b^2}i}{2},$$

不妨设 $z_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4 - b^2}}{2}i$, $z_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{4 - b^2}}{2}i$, $\overline{z_1} = z_2$, A 正确;

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4 - b^2}}{2}\right)^2} = 1, \text{ C 正确};$$

$$z_1 z_2 = 1, \therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1^2}{z_1 z_2} = z_1^2 = \frac{b^2 - 2}{2} - \frac{b\sqrt{4 - b^2}}{2}i, \text{ } b \neq 0 \text{ 时, } \frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}, \text{ B 错};$$

$$b = 1 \text{ 时, } z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ } z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ 计算得 } z_1^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_2 = \overline{z_1},$$

$$z_2^2 = z_1 = \overline{z_2}, \text{ } z_1^3 = z_1 z_2 = 1, \text{ 同理 } z_2^3 = 1, \text{ D 正确}.$$

10. 【答案】BD 【解析】

对于 A: 连接 BD , 且 $AC \cap BD = O$, 如图所示, 当 M 在 PC 中点时,

因为点 O 为 AC 的中点, 所以 $OM \parallel PA$, 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

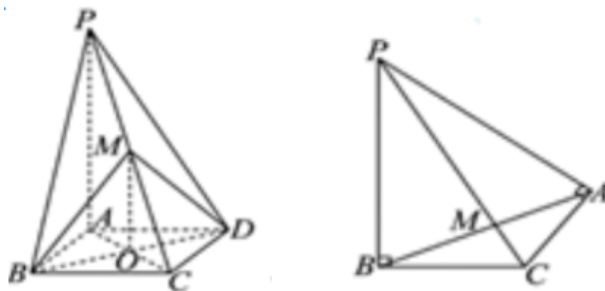
所以 $OM \perp$ 平面 $ABCD$, 又因为 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $OM \perp AC$,

因为 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AC \perp BD$.

又因为 $BD \cap OM = O$, 且 $BD, OM \subset$ 平面 BDM , 所以 $AC \perp$ 平面 BDM ,

因为 $BM \subset$ 平面 BDM ，所以 $AC \perp BM$ ，所以A错误；

对于B：将 $\triangle PBC$ 和 $\triangle PCD$ 所在的平面沿着 PC 展开在一个平面上，如图所示，



则 $MB+MD$ 的最小值为 BD ，直角 $\triangle PBC$ 斜边 PC 上高为 $\frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ ，即 $\frac{\sqrt{30}}{6}$ ，

直角 $\triangle PCD$ 斜边 PC 上高也为 $\frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ ，所以 $MB+MD$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{30}}{3}$ ，所以B正确；

对于C：易知四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球直径为 PC ，

半径 $R = \frac{1}{2}|PC| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，表面积 $S = 4\pi R^2 = 6\pi$ ，所以C错误；

对于D：点 M 到直线 AB 距离的最小值即为异面直线 PC 与 AB 的距离，

因为 $AB \parallel CD$ ，且 $AB \not\subset$ 平面 PCD ， $CD \subset$ 平面 PCD ，所以 $AB \parallel$ 平面 PCD ，

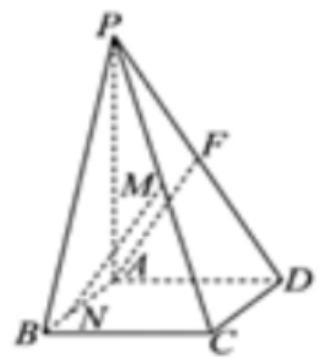
所以直线 AB 到平面 PCD 的距离等于点 A 到平面 PCD 的距离，过点 A 作 $AF \perp PD$ ，

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 $PA \perp CD$ ，又 $AD \perp CD$ ，且 $PA \cap AD = A$ ，

故 $CD \perp$ 平面 PAD ， $AF \subset$ 平面 PAD ，所以 $AF \perp CD$ ，因为 $PD \cap CD = D$ ，

且 $PD, CD \subset$ 平面 PCD ，所以 $AF \perp$ 平面 PCD ，所以点 A 到平面 PCD 的距离，

即为 AF 的长，如图所示，



在 $\text{Rt}\triangle PAD$ 中， $|PA| = 2$ ， $|AD| = 1$ ，可得 $|PD| = \sqrt{5}$ ，

所以由等面积得 $|AF| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，即直线 AB 到平面 PCD 的距离等于 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，所以D正确，

11. 【答案】ACD 【解析】

设 $A_{\text{红}}$ ， $A_{\text{黄}}$ ， $A_{\text{绿}}$ ，分别表示先抽到的小球的颜色分别是红、黄、绿的事件，

设 $B_{\text{红}}$ 表示再抽到的小球的颜色是红的事件，

在甲先抽取的是黄球的条件下，甲获得奖品的概率为：

$$P(B_{\text{红}} | A_{\text{黄}}) = \frac{P(B_{\text{红}} A_{\text{黄}})}{P(A_{\text{黄}})} = \frac{\frac{2}{7} \times \frac{4}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{4}{7}, \text{ 故A正确;}$$

在甲先抽取的不是红球的条件下，甲没有获得奖品的概率为：

$$P(\overline{B_{\text{红}}} | \overline{A_{\text{红}}}) = \frac{P(\overline{A_{\text{红}}} \overline{B_{\text{红}}})}{P(\overline{A_{\text{红}}})} = \frac{P(A_{\text{黄}} \overline{B_{\text{红}}}) + P(A_{\text{绿}} \overline{B_{\text{红}}})}{P(\overline{A_{\text{红}}})} = \frac{\frac{2}{7} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2}}{\frac{4}{7}} = \frac{13}{28}, \text{ 故B错误;}$$

由题意可知， $P(A_{\text{红}}) = \frac{3}{7}, P(A_{\text{黄}}) = \frac{2}{7}, P(A_{\text{绿}}) = \frac{2}{7}, P(B_{\text{红}} | A_{\text{红}}) = \frac{3}{7}, P(B_{\text{红}} | A_{\text{黄}}) = \frac{4}{7},$

$P(B_{\text{红}} | A_{\text{绿}}) = \frac{1}{2}$ ，由全概率公式可知，甲获得奖品的概率为：

$$P = P(A_{\text{红}})P(B_{\text{红}} | A_{\text{红}}) + P(A_{\text{黄}}) \cdot P(B_{\text{红}} | A_{\text{黄}}) + P(A_{\text{绿}}) \cdot P(B_{\text{红}} | A_{\text{绿}}) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{24}{49},$$

故C正确；

因为甲获奖时红球取自哪个箱子的颜色与先抽取小球的颜色相同，

$$\text{则 } P(A_{\text{红}} | B_{\text{红}}) = \frac{P(A_{\text{红}}) \cdot P(B_{\text{红}} | A_{\text{红}})}{P(B_{\text{红}})} = \frac{\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{49}{24}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8},$$

$$P(A_{\text{黄}} | B_{\text{红}}) = \frac{P(A_{\text{黄}}) \cdot P(B_{\text{红}} | A_{\text{黄}})}{P(B_{\text{红}})} = \frac{\frac{2}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{49}{24}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3},$$

$$P(A_{\text{绿}} | B_{\text{红}}) = \frac{P(A_{\text{绿}}) \cdot P(B_{\text{红}} | A_{\text{绿}})}{P(B_{\text{红}})} = \frac{\frac{2}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{49}{24}}{\frac{3}{8}} = \frac{7}{24},$$

所以甲获得奖品时，甲先抽取绿球 机会最小，故D正确.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 【答案】11 【解析】

因为 $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CE} - 2\overrightarrow{CA}$ ，边 BC 的中点为 D ，所以 $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = 3(\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC}) + 2\overrightarrow{AC}$ ，

因为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{BE} - 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC}$ ，所以 $\frac{5}{2}\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{AC}$ ，

所以 $\frac{5}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 3\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{AC}$ ，所以 $5\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{BE} + 4\overrightarrow{AC}$ ，即 $5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$ ，

因为 $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BE}$ ，所以 $x = 5$ ， $y = 6$ ，故 $x + y = 11$.

13. 【答案】① $\frac{\sqrt{6}}{3}$; ② $\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi$ 【解析】

设圆锥的底面半径为 r ，圆锥的母线与底面所成的角为 $\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，易知 $\cos \theta = \frac{r}{2}$ 。

圆锥的体积为 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \sqrt{4-r^2} = \frac{4}{3}\pi \cos^2 \theta \cdot 2 \sin \theta = \frac{8\pi}{3} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta = \frac{8\pi}{3}(1-\sin^2 \theta) \sin \theta$

令 $x = \sin \theta, x \in (0, 1)$ ，则 $y = (1-\sin^2 \theta) \sin \theta = -x^3 + x$ ， $y' = -3x^2 + 1$

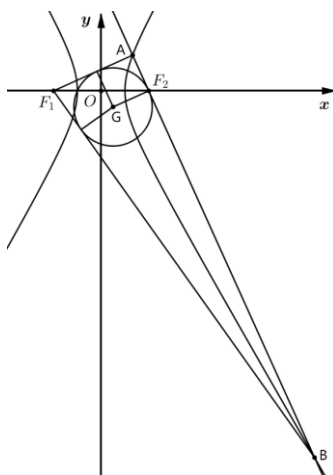
当 $y' > 0$ 时， $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，当 $y' < 0$ 时， $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ ，

即函数 $y = -x^3 + x$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ 上单调递减，

即 $V_{\max} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 \right) = \frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$ ，此时 $\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

14. 【答案】① $\sqrt{7}+1$; ② $\sqrt{7}-1$ 【解析】

由双曲线方程知 $a=1, b=\sqrt{3}, c=2$ ，如下图所示：



由 $F_1A \perp AB$ ，则 $|AF_1|^2 + |AF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 16$ ，故 $(|AF_1| - |AF_2|)^2 + 2|AF_1||AF_2| = 16$ ，

而 $|AF_1| - |AF_2| = 2a = 2$ ，所以 $|AF_1||AF_2| = 6$ ，故 $|AF_2|^2 + 2|AF_2| - 6 = 0$ ，

解得 $|AF_2| = \sqrt{7} - 1$ ，所以 $|AF_1| = \sqrt{7} + 1$ ，

若 G 为 $\triangle ABF_1$ 内切圆圆心且 $F_1A \perp AB$ 可知，以直角边切点和 G, A 为顶点的四边形为正方形，

结合双曲线定义内切圆半径 $r = \frac{1}{2}(|AF_1| + |AB| - |BF_1|) = \frac{1}{2}(|AF_1| + |AF_2| + |BF_2| - |BF_1|)$

所以 $r = \frac{1}{2}(2\sqrt{7} + |BF_2| - |BF_1|) = \frac{1}{2}(2\sqrt{7} - 2) = \sqrt{7} - 1$ ；即 $\triangle ABF_1$ 内切圆的半径为 $\sqrt{7} - 1$ 。