

期末小题（3）强化训练

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. 【答案】B 【解析】

依题意可得极差为 $10-3=7$ ，平均数为 $\frac{1}{6}(3+5+x+8+9+10)=\frac{1}{6}(35+x)$ ，

所以 $\frac{1}{6}(35+x)=7$ ，解得 $x=7$ ，所以中位数为 $\frac{7+8}{2}=7.5$ 。

2. 【答案】A 【解析】

由 $|x-1|>2$ ，得 $x<-1$ 或 $x>3$ ，所以 $A=\{x|x<-1 \text{ 或 } x>3\}$ ，

由 $\log_4 x < 1$ ，得 $0 < x < 4$ ，所以 $B=\{x|0 < x < 4\}$ ，所以 $A \cap B = \{x|3 < x < 4\}$ 。

3. 【答案】B 【解析】

由已知可得， $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2\sin\alpha}{2 \times 2}(2,0) = (\sin\alpha, 0)$ ，

又 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量 $\vec{c} = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，所以 $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ，

所以 $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，所以 $\vec{a} + \vec{b} = \left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{7}$ 。

4. 【答案】C 【解析】

设两圆锥的高 $OP = x$ ， $OQ = y$ ，则 $AP = \sqrt{x^2 + 1}$ ， $AQ = \sqrt{y^2 + 1}$ ，

由 $AP \perp AQ$ ，有 $AP^2 + AQ^2 = PQ^2$ ，可得 $x^2 + 1 + y^2 + 1 = (x + y)^2$ ，可得 $xy = 1$ ，

又由上下圆锥侧面积之比为 $2:1$ ，即 $\pi \times 1 \times PA = 2 \times \pi \times 1 \times QA$ ，

可得 $PA = 2QA$ ，则有 $\sqrt{x^2 + 1} = 2\sqrt{y^2 + 1}$ ，即 $x^2 = 4y^2 + 3$ ，

代入 $y = \frac{1}{x}$ 整理为 $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ ，解得 $x = 2$ （负值舍），可得 $y = \frac{1}{2}$ ， $OP = x + y = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ 。

5. 【答案】C 【解析】

设 $P(x, y)$ ，由 $\overrightarrow{QP} = (1, -3)$ ，则 $Q(x-1, y+3)$ ，

由 Q 在直线 $l: x + 2y + 1 = 0$ 上，故 $x-1 + 2(y+3) + 1 = 0$ ，

化简得 $x + 2y + 6 = 0$ ，即 P 轨迹为 E 为直线且与直线 l 平行，

E 上的点到 l 的距离 $d = \frac{|6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$ ，故 A、B、D 错误，C 正确。

6. 【答案】C【解析】

在 $(x+1)(x-1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$ 中,

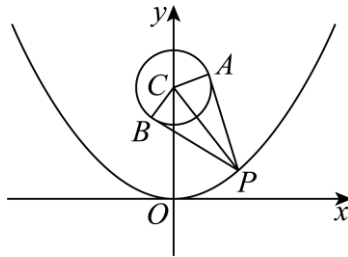
而 $(x+1)(x-1)^5 = x(x-1)^5 + (x-1)^5$, 由二项式定理知 $(x-1)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} (-1)^r$,

令 $5-r=2$, 解得 $r=3$, 令 $5-r=3$, $r=2$, 故 $a_3 = C_5^3(-1)^3 + C_5^2(-1)^2 = 0$,

同理令 $5-r=1$, 解得 $r=4$, 令 $5-r=0$, 解得 $r=5$, 故 $a_1 = C_5^4(-1)^4 + C_5^5(-1)^5 = 4$, 故 $a_1 + a_3 = 4$.

7. 【答案】C【解析】

如图所示: 因为 $\angle APB = 2\angle APC$, $\sin \angle APC = \frac{|AC|}{|PC|} = \frac{1}{|PC|}$,



设 $P\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$, 则 $|PC|^2 = t^2 + \left(\frac{t^2}{4} - 3\right)^2 = \frac{t^4}{16} - \frac{t^2}{2} + 9 = \frac{1}{16}(t^2 - 4)^2 + 8$,

当 $t^2 = 4$ 时, $|PC|$ 取得最小值 $2\sqrt{2}$, 此时 $\angle APB$ 最大, $\cos \angle APB$ 最小,

且 $(\cos \angle APB)_{\min} = 1 - 2\sin^2 \angle APC = 1 - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{4}$, 故C正确.

8. 【答案】D【解析】

对于D, $\because g(x)$ 为偶函数, 则 $g(x) = g(-x)$, 两边求导可得 $g'(x) = -g'(-x)$, 则 $g'(x)$ 为奇函数,

则 $g'(0) = 0$, 令 $x = 4$, 则 $f(4) - g'(0) = 3$, $f(4) = 3$, D对;

对于C, 令 $x = 2$, 可得 $\begin{cases} f(2) + g'(2) = 3 \\ f(2) - g'(2) = 3 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} f(2) = 3 \\ g'(2) = 0 \end{cases}$, C错;

对于B, $\because f(x) + g'(x) = 3$, 可得 $f(2+x) + g'(2+x) = 3$,

$f(x) - g'(4-x) = 3$ 可得 $f(2-x) - g'(2+x) = 3$, 两式相加可得 $f(2+x) + f(2-x) = 6$,

令 $x = 1$, 即可得 $f(1) + f(3) = 6$, B错;

又 $\because f(x) + g'(x) = 3$,

则 $f(x-4) + g'(x-4) = f(x-4) - g'(4-x) = 3$, $f(x) - g'(4-x) = 3$, 可得 $f(x) = f(x-4)$,

所以 $f(x)$ 是以4为周期的函数, 所以根据以上性质不能推出 $f(-1) = f(-3)$, A不一定成立.

二、选择题: 本题共3小题, 每小题6分, 共18分.

9. 【答案】AD【解析】

因为 $a^2 - ab = a(a-b) > 0$ ，所以 $a^2 > ab$ ，

因为 $ab - b^2 = b(a-b) > 0$ ，所以 $ab > b^2$ ，所以 $a^2 > ab > b^2$ ，故A正确；

因为 $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2 + 2} \geq 2$ 的等号成立条件 $x^2 + 2 = \frac{1}{x^2 + 2}$ 不成立，所以B错误；

因为 $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1$ ，所以 $a^2 + b^2 \geq 2$ ，故C错误；

因为 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}(x+2-x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2-x}{x} + \frac{x}{2-x}\right) \geq \frac{1}{2}(2+2) = 2$ ，

当且仅当 $\frac{1}{x} = \frac{1}{2-x}$ ，即 $x=1$ 时，等号成立，所以D正确。

10. 【答案】BCD【解析】

由 $\sin x > 0, \cos x > 0$ 得 $f(x)$ 的定义域为 $\left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ 。

对于A：当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时， $x + \pi \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ 不在定义域内，

故 $f(x + \pi) = f(x)$ 不成立，易知 $f(x)$ 的最小正周期为 2π ，故选项A 错误；

对于B：又 $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2 x \cdot \log_2 \cos x + 2\sin^2 x \cdot \log_2 \sin x = f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称，所以选项B 正确；

对于C：因为 $f(x) = \sin^2 x \cdot \log_2 \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \log_2 \cos^2 x$ ，

设 $t = \sin^2 x$ ，所以函数转化为 $g(t) = t \cdot \log_2 t + (1-t) \cdot \log_2 (1-t), t \in (0, 1), g'(t) = \log_2 t - \log_2 (1-t)$ ，

由 $g'(t) > 0$ 得， $\frac{1}{2} < t < 1$ 。 $g'(t) < 0$ 得 $0 < t < \frac{1}{2}$ 。所以 $g(t)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递增，

故 $g(t)_{\min} = g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ ，即 $f(x)_{\min} = -1$ ，故选项C 正确；

对于D：因为 $g(t)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递增，由 $t = \sin^2 x$ ，

令 $0 < \sin^2 x < \frac{1}{2}$ 得 $0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，又 $f(x)$ 的定义域为 $\left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $t = \sin^2 x$ 在 $\left(2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ ，

同理函数的递增区间为 $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ ，所以选项D正确。

11. 【答案】ACD 【解析】

由题意可得： $S_{n+1} = \frac{3}{2S_n+1}$ ， $a_1 = \alpha$ ， 由 $S_{n+1} = \frac{3}{2S_n+1}$ 可知： $S_{n+1} = 1 \Leftrightarrow S_n = 1$ ， 但 $S_1 = \alpha \in (0,1)$ ，

可知对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ， 都有 $S_n \neq 1$ ， 对于选项A： 若 $0 < \alpha < \frac{\sqrt{13}-1}{4}$ ，

则 $a_2 - a_1 = S_2 - 2a_1 = \frac{3}{2\alpha+1} - 2\alpha = \frac{3-2\alpha-4\alpha^2}{2\alpha+1} = \frac{(4\alpha+1+\sqrt{13})\left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}-\alpha\right)}{2\alpha+1} > 0$ ， 即 $a_2 > a_1$ ， 故A正确；

对于选项B： $a_3 - a_2 = S_3 - 2S_2 + S_1 = \frac{6\alpha+3}{2\alpha+7} - \frac{6}{2\alpha+1} + \alpha = \frac{(\alpha-1)(4\alpha^2+32\alpha+39)}{(2\alpha+1)(2\alpha+7)} < 0$ ，

即 $a_3 < a_2$ ， 故B错误。

对于选项C： 因为 $S_{n+1} - 1 = -\frac{2(S_n-1)}{2S_n+1}$ ， $S_{n+1} + \frac{3}{2} = \frac{3\left(S_n + \frac{3}{2}\right)}{2S_n+1}$ ，

则 $\frac{S_{n+1}-1}{S_{n+1}+\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{S_n-1}{S_n+\frac{3}{2}}$ ， 且 $\frac{S_1-1}{S_1+\frac{3}{2}} = \frac{\alpha-1}{\alpha+\frac{3}{2}} < 0$ ，

可知 $\left\{ \frac{S_n-1}{S_n+\frac{3}{2}} \right\}$ 是等比数列， 则 $\frac{S_n-1}{S_n+\frac{3}{2}} = \frac{\alpha-1}{\alpha+\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ，

设 $A = \frac{\alpha-1}{\alpha+\frac{3}{2}} < 0$ ， $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}$ ， 可得 $S_{2n} = \frac{3-3At}{3+2At} = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3+2At} - 1 \right)$ ， $S_{2n-1} = \frac{1+\frac{3}{2}At}{1-At} = \frac{5}{2(1-At)} - \frac{3}{2}$ ，

因为 $At = A \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}$ ， 可知 $\left\{ A \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2} \right\}$ 为递增数列， 所以数列 $\{S_{2n-1}\}$ 单调递增， $\{S_{2n}\}$ 单调递减， 故C正确；

对于选项D： 因为 $S_{n+1} = \frac{3}{2S_n+1}$ ， $S_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2S_n+1} - \frac{3}{4} = \frac{3(3-2S_n)}{4(2S_n+1)}$ ，

由 $S_1 = \alpha = \frac{3}{4}$ ， 可得 $S_2 - \frac{3}{4} > 0$ ， 即 $S_2 > \frac{3}{4}$ ， 则 $S_2 \leq \frac{6}{5}$ ， 即 $\frac{3}{4} < S_2 \leq \frac{6}{5}$ ；

由 $\frac{3}{4} < S_2 \leq \frac{6}{5}$ ， 可得 $S_3 - \frac{3}{4} > 0$ ， 即 $S_3 > \frac{3}{4}$ ， 则 $S_3 < \frac{6}{5}$ ， 即 $\frac{3}{4} < S_3 < \frac{6}{5}$ ；

以此类推， 可得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ， 都有 $S_n \geq S_1 = \alpha = \frac{3}{4}$ ， 又因为 $\left| \frac{S_{n+1}-1}{S_n-1} \right| = \frac{2}{2S_n+1}$ ，

则 $|S_{n+1}-1| \leq \frac{2}{2\alpha+1} |S_n-1| = \frac{4}{5} |S_n-1|$ ， 所以 $\sum_{k=1}^n |S_k-1| \leq \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \right] < \frac{5}{4}$ ， 故D正确。

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 【答案】5 【解析】

由题意得 $(1+ax)^n$ 的展开式中 x 的系数为 $aC_n^1 = -10$ ，即 $an = -10$ ，

令 $x=1$ ，得各项系数之和为 $(1+a)^n = -1$ ，则 n 为奇数，且 $1+a = -1$ ，即得 $a = -2, n = 5$ ，

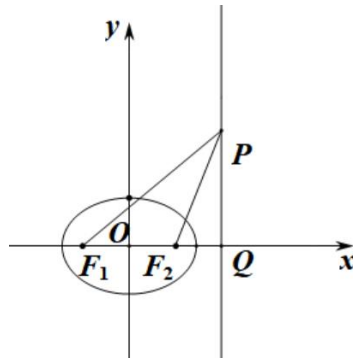
13. 【答案】 $\frac{\pi}{6}$ 【解析】

由题意有 $a = \sqrt{2}$ ， $b = 1$ ， $c = 1$ ，设直线 $x = 2$ 与 x 轴的交点为 Q ，

设 $|PQ| = t$ ，有 $\tan \angle PF_1Q = \frac{|PQ|}{|F_1Q|} = \frac{t}{3}$ ， $\tan \angle PF_2Q = \frac{|PQ|}{|F_2Q|} = t$ ，

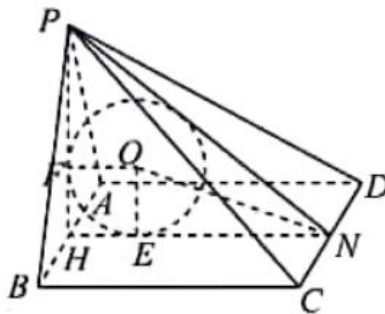
可得 $\tan \angle F_1PF_2 = \tan(\angle PF_2Q - \angle PF_1Q) = \frac{t - \frac{t}{3}}{1 + \frac{t}{3}} = \frac{\frac{2t}{3}}{\frac{t^2 + 3}{t}} = \frac{2t}{t^2 + 3} = \frac{2}{t + \frac{3}{t}} \leq \frac{2t}{2\sqrt{3}t} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

当且仅当 $t = \sqrt{3}$ 时取等号，可得 $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$ 。



14. 【答案】 $\sqrt{10} - 1$ 【解析】

如图，设四棱锥的内切球的半径为 r ，取 AB 的中点为 H ， CD 的中点为 N ，连接 PH ， PN ， HN ，



球 O 为四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球，底面 $ABCD$ 为矩形，侧面 PAB 为正三角形且垂直于底面 $ABCD$ ，

则平面 PHN 截四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球 O 所得的截面为大圆，

此圆为 $\triangle PHN$ 的内切圆，半径为 r ，与 HN ， PH 分别相切于点 E ， F ，

平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，交线为 AB ， $PH \subset$ 平面 PAB ， $\triangle PAB$ 为正三角形，有 $PH \perp AB$ ，

$\therefore PH \perp$ 平面 $ABCD$ ， $HN \subset$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore PH \perp HN$ ，

$AB = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 4$ ，则有 $PH = 3$ ， $HN = 4$ ， $PN = 5$ ，

则 $\triangle PHN$ 中， $S_{\triangle PHN} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} r(3+4+5)$ ，解得 $r = 1$ 。

所以，四棱锥 $P-ABCD$ 内切球半径为1，连接 ON 。

$\because PH \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CD \subset$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore CD \perp PH$ ，

又 $CD \perp HN$ ， $PH, HN \subset$ 平面 PHN ， $PH \cap HN = H$ ，

$\therefore CD \perp$ 平面 PHN ， $\because ON \subset$ 平面 PHN ，可得 $ON \perp CD$ ，

所以内切球表面上一点 M 到直线 CD 的距离的最小值即为线段 ON 的长减去球的半径，

又 $ON = \sqrt{OE^2 + EN^2} = \sqrt{10}$ 。

所以四棱锥 $P-ABCD$ 内切球表面上的一点 M 到直线 CD 的距离的最小值为 $\sqrt{10} - 1$ 。