

期末小题（4）强化训练

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. 【答案】C 【解析】

由双曲线方程可知 $a^2 = k - 4, b^2 = 5 - k$ ，所以 $c^2 = k - 4 + 5 - k = 1$ ， $c = 1$ ， $2c = 2$ 。

2. 【答案】B 【解析】由

已知条件可得 $\begin{cases} a_1 + a_x = 82 \\ a_3 a_{x-2} = a_1 a_x = 81 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_x = 81 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 81 \\ a_x = 1 \end{cases}$ 。设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q 。

①当 $a_1 = 1$ ， $a_x = 81$ 时，由 $S_x = \frac{a_1 - a_x q}{1 - q} = \frac{1 - 81q}{1 - q} = 121$ ，解得 $q = 3$ ，

$\therefore a_x = a_1 q^{x-1} = 3^{x-1} = 81$ ，解得 $x = 5$ ；

②当 $a_1 = 81$ ， $a_x = 1$ 时，由 $S_x = \frac{a_1 - a_x q}{1 - q} = \frac{81 - q}{1 - q} = 121$ ，解得 $q = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore a_x = a_1 q^{x-1} = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 3^{5-x} = 1$ ，解得 $x = 5$ 。综上所述， $x = 5$ 。

3. 【答案】B 【解析】

对于A，若 $c = 0$ ，则由 $a > b \nRightarrow ac^2 > bc^2$ ， $\therefore "ac^2 > bc^2"$ 不是 " $a > b$ " 的必要条件，A错。

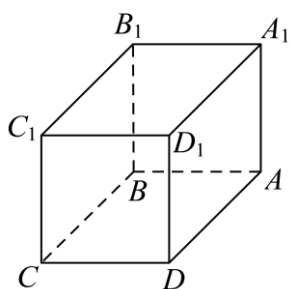
对于B， $a = b \Rightarrow ac^2 = bc^2$ ， $\therefore "ac^2 = bc^2"$ 是 " $a = b$ " 的必要条件，B对，

对于C，若 $c = 0$ ，则由 $ac^2 = bc^2$ ，推不出 $a = b$ ，“ $ac^2 = bc^2$ ”不是“ $a = b$ ”的充分条件

对于D，当 $c = 0$ 时， $ac^2 = bc^2$ ，即 $ac^2 \geq bc^2$ 成立，此时不一定有 $a \geq b$ 成立，

故“ $ac^2 \geq bc^2$ ”不是“ $a \geq b$ ”的充分条件，D错误，

4. 【答案】D 【解析】



A选项：令平面 $ABCD$ 为平面 α ， A_1B_1 为直线 m ， B_1C_1 为直线 n ，

有： $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \alpha$ ，但 $m \cap n = B_1$ ，A错误；

B选项：令平面 $ABCD$ 为平面 β ，令平面 B_1BCC_1 为平面 α ，

令平面 A_1ABB_1 为平面 γ ，有： $\alpha \perp \beta$ ， $\beta \perp \gamma$ ，而 $\alpha \perp \beta$ ，B错误；

C选项：令平面 $ABCD$ 为平面 α ，令平面 A_1ABB_1 为平面 β ， C_1D_1 为直线 m ，

有： $m \parallel \alpha$ ， $m \parallel \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ ，而 $\alpha \perp \beta$ ，C错误；

D选项：垂直与同一平面的两直线一定平行，D正确。

5. 【答案】D【解析】

共有两种分配方式，一种是4:2:2，一种是3:3:2，故不同的安排方法有 $\left(\frac{C_8^4 C_4^2 C_2^2}{2!} + \frac{C_8^3 C_3^3 C_2^2}{2!}\right) A_3^3 = 2940$.

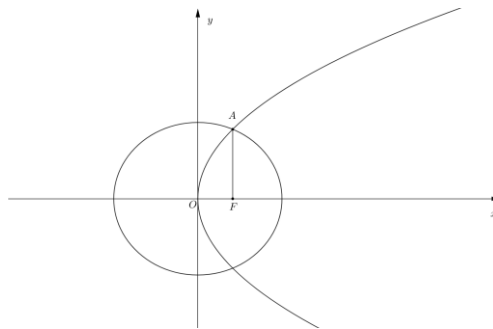
6. 【答案】C【解析】

不妨设椭圆与抛物线在第一象限的交点为A，椭圆E右焦点为F，则根据题意得 $AF \perp x$ 轴，

$c^2 = a^2 - (a^2 - 1) = 1$ ，则 $c = 1$ ，则 $F(1, 0)$ ，当 $x = 1$ 时， $y^2 = 4 \times 1$ ，则 $y_A = 2$ ，

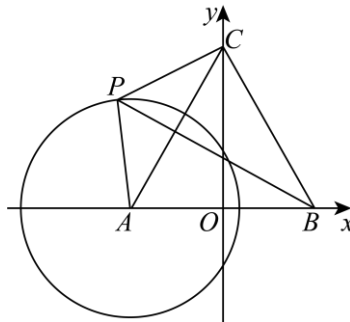
则 $A(1, 2)$ ，代入椭圆方程得 $\frac{1^2}{a^2} + \frac{2^2}{a^2 - 1} = 1$ ，结合 $a^2 - 1 > 0$ ，不妨令 $a > 0$ ；

解得 $a = \sqrt{2} + 1$ ，则其离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$ ，



7. 【答案】B【解析】

如下图构建平面直角坐标系，且 $A(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ， $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ， $C(0, \frac{3}{2})$ ，



所以 $P(x, y)$ 在以A为圆心，1为半径的圆上，即轨迹方程为 $(x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + y^2 = 1$ ，

而 $\overrightarrow{PB} = (\frac{\sqrt{3}}{2} - x, -y)$ ， $\overrightarrow{PC} = (-x, \frac{3}{2} - y)$ ，故 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + y^2 - \frac{3}{2}y = (x - \frac{\sqrt{3}}{4})^2 + (y - \frac{3}{4})^2 - \frac{3}{4}$ ，

综上，只需求出定点 $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$ 与圆 $(x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + y^2 = 1$ 上点距离平方范围即可，

而圆心A与 $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$ 的距离 $d = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{3}{4})^2} = \frac{3}{2}$ ，故定点 $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$ 与圆上点的距离范围为 $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ ，

所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} \in [-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$.

8. 【答案】A【解析】

$\because a, b, c \in (0, 1)$ 且 $a = \sin b$, $b = \cos c$, $c = \tan a$, 则 $c = \tan a = \tan(\sin b)$,

先比较 $a + c = \sin b + \tan(\sin b)$ 与 $2b$ 的大小关系,

构造函数 $f(x) = \sin x + \tan(\sin x) - 2x$, 其中 $0 < x < 1$, 则 $0 < \sin x < 1$, 所以, $\cos 1 < \cos(\sin x) < 1$,

$$\text{则 } f'(x) = \cos x + \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} - 2 = \frac{(\cos x - 2)\cos^2(\sin x) + \cos x}{\cos^2(\sin x)},$$

$$\text{令 } g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right), \text{ 其中 } x \in (0, 1), \text{ 则 } g'(x) = x - \sin x,$$

$$\text{令 } p(x) = x - \sin x, \text{ 其中 } 0 < x < 1, \text{ 所以, } p'(x) = 1 - \cos x > 0,$$

所以, 函数 $g'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 故 $g'(x) > g'(0) = 0$,

$$\text{所以, 函数 } g(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递增, 则 } g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) > 0, \text{ 即 } \cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

因为 $x \in (0, 1)$, 则 $0 < \sin x < \sin 1$,

$$\text{所以, } \cos(\sin x) > 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 x), \text{ 所以, } \cos^2(\sin x) > \frac{1}{4}(1 + \cos^2 x)^2,$$

因为 $\cos x - 2 < 0$,

$$\text{所以, } (\cos x - 2)\cos^2(\sin x) + \cos x < \frac{1}{4}(\cos x - 2)(1 + \cos^2 x)^2 + \cos x$$

$$= \frac{1}{4}(\cos^5 x - 2\cos^4 x + 2\cos^3 x - 4\cos^2 x + 5\cos x - 2) = \frac{1}{4}(\cos x - 1)^3(\cos^2 x + \cos x + 2) < 0,$$

$$\text{所以, 对任意的 } x \in (0, 1), \quad f'(x) = \frac{(\cos x - 2)\cos^2(\sin x) + \cos x}{\cos^2(\sin x)} < 0, \text{ 故函数 } f(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递减,}$$

因为 $b \in (0, 1)$, 则 $f(b) = \sin b + \tan(\sin b) - 2b < f(0) = 0$, 故 $a + c < 2b$,

由基本不等式可得 $0 < 2\sqrt{ac} \leq a + c < 2b$ ($a \neq c$, 故取不了等号), 所以, $ac < b^2$,

二、选择题: 本题共3小题, 每小题6分, 共18分.

9. 【答案】ABD【解析】

由题意可知, 该组数据的均值为 $\bar{x} = \frac{88 + 89 + 90 + 90 + 91 + 92}{6} = 90$, 故A正确;

中位数为 $\frac{90 + 90}{2} = 90$, 故B正确;

$$\text{方差为 } s^2 = \frac{1}{6}[(88 - 90)^2 + (89 - 90)^2 + (90 - 90)^2 \times 2 + (91 - 90)^2 + (92 - 90)^2] = \frac{5}{3}, \text{ 故C错误;}$$

因为 $6 \times 80\% = 4.8$, 第80百分位数为91, 故D正确.

10. 【答案】BCD 【解析】

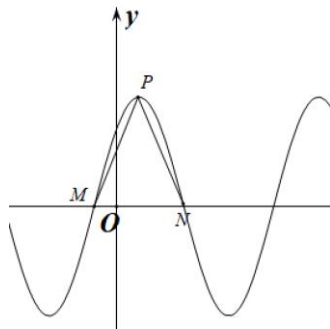
$$\overrightarrow{MP}^2 + 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}^2 - 2\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}^2 - 2|\overrightarrow{NM}| \cdot \frac{1}{2}|\overrightarrow{NM}| = \left[\left(\frac{T}{4} \right)^2 + A^2 \right] - \left(\frac{T}{2} \right)^2 = A^2 - \frac{3T^2}{16} = 0,$$

而 $S_{\triangle MNP} = \frac{AT}{4} = \sqrt{3}$, 故 $A = \sqrt{3}$, $T = 4 = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, A错误、B正确;

$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \varphi = k\pi$, $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 而 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, C正确;

显然, 函数 $f(x)$ 的图象有一部分位于以 MN 为直径的圆内, 当 Q 位于以 MN 为直径的圆内时,

$\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN} < 0$, D正确,



11. 【答案】ABC 【解析】

$$f(0) = \frac{1}{2}, f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x)$$

对A: 对原式令 $x = y = 0$, 则 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(a) = f(a)$, 即 $f(a) = \frac{1}{2}$, 故A正确;

对B: 对原式令 $y = 0$, 则 $f(x) = f(x)f(a) + f(0)f(a-x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(a-x)$, 故 $f(x) = f(a-x)$,

对原式令 $x = y$, 则 $f(2x) = f(x)f(y) + f(y)f(x) = 2f(x)f(y) = 2f^2(x) \geq 0$, 故 $f(x)$ 非负;

对原式令 $y = a - x$, 则 $f(a) = f^2(x) + f^2(a-x) = 2f^2(x) = \frac{1}{2}$, 解得 $f(x) = \pm \frac{1}{2}$,

又 $f(x)$ 非负, 故可得 $f(x) = \frac{1}{2}$, 故B正确;

对C: 由B分析可得: $f(x+y) = 2f(x)f(y)$, 故C正确;

对D: 由B分析可得: 满足条件的 $f(x)$ 只有一个, 故D错误.

三、填空题: 本题共3小题, 每小题5分, 共15分.

12. 【答案】1 【解析】

由题意得 $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 对应复数1.

13. 【答案】①. $\frac{2}{3}$ ②. 1 【解析】

设圆锥的底面半径为 r ，球的半径为 R ，因为圆锥的轴截面为正三角形，所以圆锥的高 $h = \sqrt{3}r$ ，母线 $l = 2r$ ，

由题可知： $h = 2R$ ，所以球的半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}r$

所以圆锥的体积为 $V_1 = \frac{1}{3} \times (\pi \times r^2) \times \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3$ ，球的体积 $V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi r^3$ ，

$$\text{所以 } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{2} \pi r^3} = \frac{2}{3} ;$$

圆锥的表面积 $S_1 = \pi r l + \pi r^2 = 3\pi r^2$ ，球的表面积 $S_2 = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 = 3\pi r^2$ ，所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi r^2}{3\pi r^2} = 1$ ，

14. 【答案】 $\frac{811\pi}{3}$ 【解析】

方程 $\cos 2x = 3\cos x - 2$ 可化为 $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ ，

因式分解为 $(\cos x - 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$ ，解得 $\cos x = 1$ 或 $\cos x = \frac{1}{2}$ ，

当 $\cos x = 1$ 时， $x = 2k_1\pi$ ， $k_1 \in \mathbb{Z}$ ，当 $\cos x = \frac{1}{2}$ 时， $x = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$ ， $k_2 \in \mathbb{Z}$ ，或 $x = \frac{5\pi}{3} + 2k_3\pi$ ， $k_3 \in \mathbb{Z}$ ，

通过列举，可得方程的最小的29个非负实数解中，

有10个是以0为首项， 2π 为公差的等差数列，其和为 $10 \times 0 + \frac{10 \times 9}{2} \times 2\pi = 90\pi$ ；

有10个是以 $\frac{\pi}{3}$ 为首项， 2π 为公差的等差数列，其和为 $10 \times \frac{\pi}{3} + \frac{10 \times 9}{2} \times 2\pi = \frac{280\pi}{3}$ ；

有9个是以 $\frac{5\pi}{3}$ 为首项， 2π 为公差的等差数列，其和为 $9 \times \frac{5\pi}{3} + \frac{8 \times 9}{2} \times 2\pi = 87\pi$ 。

可得方程的最小的29个非负实数解之和为 $90\pi + \frac{280\pi}{3} + 87\pi = \frac{811\pi}{3}$ 。