

期末小题【5】强化训练

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. 【答案】B 【解析】将这些数据从小到大排列可得:10, 12, 14, 14, 16, 20, 24, 30, 40, 则其中位数为16.

2. 【答案】A 【解析】 $\frac{a+3i}{2+i} = \frac{(a+3i)(2-i)}{5} = \frac{2a+3+(6-a)i}{5}$, 则 $2a+3=0$, 有 $a=-\frac{3}{2}$.

3. 【答案】A 【解析】由题设, $E: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$, $F: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, $\therefore E(3,4)$, 半径 $r_1=5$; $F(1,2)$, 半径 $r_2=1$; $|EF| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\therefore r_1 - r_2 > |C_1C_2|$, 即两圆内含.

4. 【答案】A 【解析】

先停入货车甲, 若货车甲不靠边, 共有 3 种停法, 则乙车有 2 种停法, 除甲、乙外的其它三辆车共有 A_3^3 种停法; 若货车甲靠边, 共有 2 种停法, 则乙车有 3 种停法, 除甲、乙外的其它三辆车的排法共有 A_3^3 种, 故共有 $3 \times 2 \times A_3^3 + 2 \times 3 \times A_3^3 = 36 + 36 = 72$ 种停放方法.

5. 【答案】B 【解析】

依题意, $R_0 = 1 + rT$, 且 $R_0 = 4$ 时, $T = 12$, 即 $4 = 1 + r \times 12$, $r = \frac{1}{4}$, 所以 $W(t) = 2^{\frac{1}{4}t}$, $W(0) = 1$,

令 $W(t) = 2^{\frac{1}{4}t} = 3$, 两边取以 10 为底 对数得 $\frac{1}{4}t \lg 2 = \lg 3$, $t = \frac{4 \lg 3}{\lg 2} \approx \frac{4 \times 0.477}{0.301} \approx 6.3$, 所以至少需要 7 天.

6. 【答案】C 【解析】

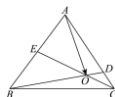
如图, $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + (1-\lambda) \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}(1-\lambda) \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO} = \mu \overrightarrow{AE} + (1-\mu) \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \mu \overrightarrow{AB} + (1-\mu) \overrightarrow{AC}$,

$$\text{则} \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \mu \\ \frac{4}{5}(1-\lambda) = 1-\mu \end{cases}, \text{得} \mu = \frac{1}{3}, \lambda = \frac{1}{6}, \text{即} \overrightarrow{AO} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC},$$

则 $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\left(\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} \cdot \overrightarrow{AC}$,

$$\left(\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{12} \overrightarrow{AC}^2 + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}^2 = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}^2,$$

所以 $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为 $\frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$.



7. 【答案】A 【解析】

由题 $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, $\tan 2\theta = -4 \tan \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, 得 $\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{-4(\tan \theta + 1)}{1 - \tan \theta} \Rightarrow -4(\tan \theta + 1)^2 = 2 \tan \theta$,

则 $(2 \tan \theta + 1)(\tan \theta + 2) = 0 \Rightarrow \tan \theta = -2$ 或 $\tan \theta = -\frac{1}{2}$,

因为 $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, $\tan \theta \in (-1, 0)$, 所以 $\tan \theta = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{1 + \sin 2\theta}{2 \cos^2 \theta + \sin 2\theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\tan^2 \theta + 1 + 2 \tan \theta}{2 + 2 \tan \theta} = \frac{\frac{1}{4} + 1 - 1}{2 + (-1)} = \frac{1}{4}.$$

8. 【答案】B 【解析】

由椭圆定义可知 $|AF_1| + |AF_2| = 2a$ ，由 $|AF_1| = 3|AF_2|$ ，故 $|AF_1| = \frac{3}{2}a$ ， $|AF_2| = \frac{1}{2}a$ ，

点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M} = 3\overrightarrow{MF_2}$ ，即 $|F_1M| = 3|MF_2|$ ，则 $\frac{|AF_1|}{|F_1M|} = \frac{3|AF_2|}{3|MF_2|} = \frac{|AF_2|}{|MF_2|}$ ，

又 $\frac{|AF_1|}{\sin \angle AMF_1} = \frac{|F_1M|}{\sin \angle F_1AM}$ ， $\frac{|AF_2|}{\sin \angle AMF_2} = \frac{|F_2M|}{\sin \angle F_2AM}$ ，即 $\frac{|AF_1|}{|F_1M|} = \frac{\sin \angle AMF_1}{\sin \angle F_1AM} = \frac{|AF_2|}{|MF_2|} = \frac{\sin \angle AMF_2}{\sin \angle F_2AM}$ ，

又 $\angle AMF_1 + \angle AMF_2 = 180^\circ$ ，故 $\sin \angle AMF_1 = \sin \angle AMF_2$ ，

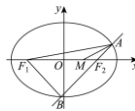
则 $\sin \angle F_1AM = \sin \angle F_2AM$ ，即 $\angle F_1AM = \angle F_2AM$ ，即 AM 平分 $\angle F_1AF_2$ ，

又 $AM \perp F_1B$ ，故 $|AB| = |AF_1| = \frac{3}{2}a$ ，则 $|BF_2| = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a = a$ ，则 $|BF_1| = 2a - a = a$ ，

$$\cos \angle AF_2F_1 = \frac{(2c)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2}{2 \times 2c \times \frac{1}{2}a} = \frac{2c^2 - a^2}{ac} = 2e - \frac{1}{e}, \quad \cos \angle BF_2F_1 = \frac{(2c)^2 + a^2 - a^2}{2 \times 2c \times a} = \frac{4c^2}{4ac} = e,$$

由 $\angle AF_2F_1 + \angle BF_2F_1 = 180^\circ$ ，故 $\cos \angle AF_2F_1 + \cos \angle BF_2F_1 = 0$ ，即 $2e - \frac{1}{e} + e = 0$ ，即 $3e^2 = 1$ ，又 $e > 0$ ，

$$\text{故 } e = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。

9. 【答案】ABC 【解析】

$\therefore$ 男生样本量 = 男生人数 $\div$ 全体学生数 $\times$ 总样本量 = $\frac{500}{900} \times 180 = 100$. 故A正确；

样本均值 $\bar{w} = \frac{m}{m+n} \bar{x} + \frac{n}{m+n} \bar{y} = \frac{100}{100+80} \times 170 + \frac{80}{100+80} \times 161 = 166$. 故C正确D错误；

样本方差： $s^2 = \frac{1}{m+n} \{m[s_1^2 + (\bar{x} - \bar{w})^2] + n[s_2^2 + (\bar{y} - \bar{w})^2]\}$

$$= \frac{1}{180} \{100 \times [19 + (170 - 166)^2] + 80 \times [28 + (161 - 166)^2]\} = 43. \text{ 故B正确.}$$

10. 【答案】BC 【解析】

设等比数列 $\{a_n\}$ 公比为 q ，由 $a_1a_4 = 8$ ，有 $a_2a_3 = 8$ ，

联立方程 $\begin{cases} a_2a_3 = 8, \\ a_3 = a_2 + 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_2 = 2, \\ a_3 = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_2 = -4, \\ a_3 = -2 \end{cases}$ (舍去)，有 $q = \frac{a_3}{a_2} = 2$ ，可得 $a_n = a_2q^{n-2} = 2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1}$ 。

对于A选项，由 $a_6 = 2^5 = 32$ ， $a_5 = 2^4 = 16$ ，有 $a_6 - 4a_5 = 32 - 64 = -32$ ，故A选项错误；

对于B选项， $S_7 = \frac{1-2^7}{1-2} = 127$ ，故B选项正确；

对于C选项，由 $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ ，有 $S_n = 2a_n - 1$ ，故C选项正确；

对于D选项，由 $\frac{\log_2 a_n}{S_n + 1} = \frac{\log_2 2^{n-1}}{(2^n - 1) + 1} = \frac{n-1}{2^n}$ ，令 $f(n) = \frac{n-1}{2^n}$ ，有 $f(n+1) - f(n) = \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n-1}{2^n} = \frac{2-n}{2^{n+1}}$ ，

可得 $f(1) < f(2) = f(3) > f(4) > \dots$ 有 $f(n)_{\max} = f(2) = f(3) = \frac{1}{4}$ ，

可得数列 $\{b_n\}$ 中的最大项为 b_2 或 b_3 ，故D选项错误，

11. 【答案】ABD 【解析】

若直线与渐近线平行时，根据对称性不妨取直线方程为 $y = \sqrt{3}(x+2)$ ，联立 $\begin{cases} y = \sqrt{3}(x+2) \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，得 $x = -\frac{5}{4}$ ，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(-x_2, -y_2)$ ，由于 A, B 两点均在双曲线的左支上，所以 $x_A < -\frac{5}{4}$ ， $x_B < -\frac{5}{4}$ ， $x_C > \frac{5}{4}$ ，

对于A：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(-x_2, -y_2)$ ，则， $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2}$ ，

$\because A, B$ 均在双曲线上， $\therefore \begin{cases} x_1^2 - \frac{y_1^2}{3} = 1 \\ x_2^2 - \frac{y_2^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，所以 $x_1^2 - x_2^2 = \frac{1}{3}(y_1^2 - y_2^2)$ ，所以， $k_1 \cdot k_2 = 3$ ，A错误。

对于B：由 $\overrightarrow{CF_1} \cdot \overrightarrow{BF_1} = 0$ 知， $CF_1 \perp BF_1$ ，

由对称性得， $CF_1 \perp CF_2$ ，则四边形 CF_1BF_2 为矩形，则 $S_{\triangle CBF_1} = S_{\triangle CF_1F_2}$ ，

设 $|CF_1| = r_1, |CF_2| = r_2$ ， $\angle F_1CF_2 = \theta$ ，则在 $\triangle F_1CF_2$ 中，

由余弦定理得 $r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta = (2c)^2$ ，即 $(r_1 - r_2)^2 + 2r_1r_2 - 2r_1r_2 \cos \theta = 4c^2$ ，

即 $4a^2 + 2r_1r_2(1 - \cos \theta) = 4c^2$ ， $\therefore r_1r_2 = \frac{2(a^2 - c^2)}{1 - \cos \theta} = \frac{2b^2}{1 - \cos \theta}$ ，

则 $S_{\triangle F_1CF_2} = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin \theta = b^2 \cdot \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = b^2 \cdot \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}}$ ，

则 $S_{\triangle CBF_1} = S_{\triangle CF_1F_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{3}{\tan \frac{\pi}{4}} = 3$ ，B正确；

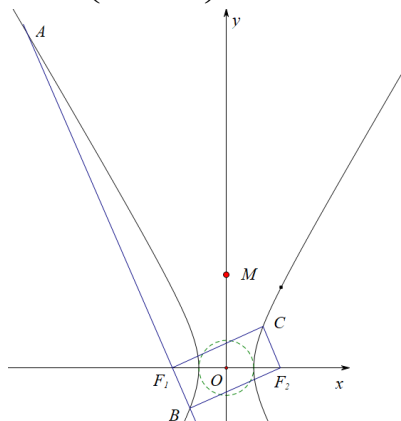
对于C： $|MC| + |MF_1| = |MC| + |CF_2| + 2$ ，当 M, C, F_2 三点共线时， $|MC| + |MF_1| = |MC| + |CF_2| + 2 = 6$ ，

$k_{MF_2} = \frac{2\sqrt{3}-0}{0-2} = -\sqrt{3}$ ，则直线 $MF_2: y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ ，

联立 $\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，解得 $x_C = \frac{5}{4}$ ，与 $x_C > \frac{5}{4}$ 矛盾，故C错误；

对于D： $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = (x_1 + 2, y_1) \cdot (x_1 - 2, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - 4$ ，又 $y_1^2 = 3(x_1^2 - 1)$ ，所以， $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 4x_1^2 - 7$

结合， $x_A < -\frac{5}{4}$ 得， $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2}$ 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$ ，故D正确。



三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{10}$ 【解析】

由题设 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 2\sqrt{5} \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ ，所以 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

13. 【答案】 $\left(0, \frac{3}{5}\right]$ 【解析】

由 $\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{5}\right) = 0, \omega > 0$ ，可得 $\omega x + \frac{\pi}{5} = k\pi$ ，即 $x = \frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{5\omega}, k \in \mathbb{Z}$ ，

令 $\frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{5\omega} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ ，则 $\frac{\omega}{3} + \frac{1}{5} < k < \frac{4\omega}{3} + \frac{1}{5}$

又 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ 内没有零点，则区间 $\left(\frac{\omega}{3} + \frac{1}{5}, \frac{4\omega}{3} + \frac{1}{5}\right)$ 内不存在整数，

又 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$ ，则正数 ω 满足 $0 < \omega \leq 1$ ，则 $\left(\frac{\omega}{3} + \frac{1}{5}, \frac{4\omega}{3} + \frac{1}{5}\right) \subseteq (0, 1)$ ，则 $\frac{4\omega}{3} + \frac{1}{5} \leq 1$ ，解之得 $\omega \leq \frac{3}{5}$ ，

则正数 ω 的取值范围是 $\left(0, \frac{3}{5}\right]$.

14. 【答案】 ①. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ②. $\frac{16\pi}{3}$ 【解析】

由余弦定理可得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$ ，

故 $4 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC \geq 2AB \cdot AC - AB \cdot AC$ ，所以 $AB \cdot AC \leq 4$ ，

当且仅当 $AB = AC$ 时取等号，故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} AB \cdot AC \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$ ，

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$ ， $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} h \leq \frac{1}{3} \times \sqrt{3} h = \frac{\sqrt{3}}{3} h$ ，

由于 $BP \perp PC$ ，所以点 P 在以 BC 为直径的球上（不包括平面 ABC ），故当平面 $PBC \perp$ 平面 ABC 时，此时

h 最大为半径 $\frac{1}{2} BC = 1$ ，故 $V_{P-ABC} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} h \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

由正弦定理可得： $\frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2r$ ， r 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径，

设四面体 $P-ABC$ 外接球半径为 R ，则 $R^2 = r^2 + O_1 O^2 = \frac{4}{3} + O_1 O^2$ ，其中 O, O_1 分别为球心和 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，

故当 $OO_1 = 0$ 时，此时 $R^2 = \frac{4}{3} + O_1 O^2$ 最小，故外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \frac{16\pi}{3}$ ，

