

期末小题【6】强化训练

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. 【答案】C 【解析】

根据题意，数据按从小到大的顺序排列为 2, 4, m , 12, 16, 17,

则极差为 $17 - 2 = 15$ ，故该组数据的中位数是 $15 \times \frac{3}{5} = 9$ ，数据共 6 个，故中位数为 $\frac{m+12}{2} = 9$ ，解得 $m = 6$ ，

因为 $6 \times 40\% = 2.4$ ，所以该组数据的第 40 百分位数是第 3 个数 6。

2. 【答案】A 【解析】

若 $x > 0$ ，则 $2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{1}{2^x}} = 2$ ，由于 $2^x \neq \frac{1}{2^x}$ ，所以 $2^x + \frac{1}{2^x} > 2$ ，充分性成立，

当 $x = -1$ 时， $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2^{-1}} = 2$ ，满足 $2^x + \frac{1}{2^x} > 2$ ，但是 $x < 0$ ，必要性不成立，

因此“ $x > 0$ ”是“ $2^x + \frac{1}{2^x} > 2$ ”的充分不必要条件

3. 【答案】A 【解析】

由 $1 - 2x > 0$ ，解得 $x < \frac{1}{2}$ ，所以 $M = \left\{x \mid x < \frac{1}{2}\right\}$ ，而 $y = e^x > 0$ ，所以 $N = \{y \mid y > 0\}$ ， $\therefore M \cap N = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 。

4. 【答案】A 【解析】

对于①，若 $\alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$ ，且 $m \parallel n$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ 或相交，故①错误；

对于③和④， α 与 β 也可能相交，均错误；

对于②，设 m, n 相交确定平面 γ ，根据线面平行的判定定理知 $\alpha \parallel \gamma, \beta \parallel \gamma$ ，根据平行平面的传递性得知 $\alpha \parallel \beta$ 。

5. 【答案】C 【解析】

由题意可知，当丙站在左端时，有 $A_3^3 = 6$ 种站法；当丙不站在左端时，有 $C_2^1 A_2^2 A_3^3 = 24$ 种站法。

由分类加法计数原理可得，一共有 $6 + 24 = 30$ 种不同的站法。

6. 【答案】D 【解析】

依题意，由 $I(x) = \frac{1}{2} I_0$ ， $I(x) = I_0 e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$ ，得 $I_0 e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} = \frac{1}{2} I_0$ ，即 $e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} = \frac{1}{2}$ ，

则有 $(x-2)^2 = 2 \ln 2$ ，解得 $x_1 = 2 - \sqrt{2 \ln 2}$ ， $x_2 = 2 + \sqrt{2 \ln 2}$ ，所以 3dB 带宽为 $x_2 - x_1 = 2\sqrt{2 \ln 2}$ 。

7. 【答案】A 【解析】

因为 $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，可得 $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ，

且 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ，则 $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，可得 $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，

则 $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 3$ ，所以 $\tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \pi\right] = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3$ 。

8. 【答案】D【解析】

令 $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, 则 $a_{2k+2} = \left(2 + \left|\cos \frac{2k\pi}{2}\right|\right)a_{2k} - \left|\sin \frac{2k\pi}{2}\right|$,

即 $a_{2k+2} = 3a_{2k}$, 即数列 $\{a_n\}$ 的所有偶数项构成首项为 $a_2 = 2$, 公比为3的等比数列,

令 $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^*$, 则 $a_{2k+1} = \left(2 + \left|\cos \frac{(2k-1)\pi}{2}\right|\right)a_{2k-1} - \left|\sin \frac{(2k-1)\pi}{2}\right|$,

即 $a_{2k+1} = 2a_{2k-1} - 1$, 由于 $a_1 = 1$, 则 $a_3 = 2 - 1 = 1, a_5 = 2 - 1 = 1, \dots, a_{2k-1} = 1$,

故 $S_{2024} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2024} = (a_2 + a_4 + \dots + a_{2024}) + (a_1 + a_3 + \dots + a_{2023}) = \frac{2(1-3^{1012})}{1-3} + 1012 = 3^{1012} + 1011$,

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。

9. 【答案】AC【解析】

由函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象知, $A = 2$, $T = 4 \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

又因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 2$, 所以 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 解得 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

又因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; $\therefore f(0) = 2\sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, 选项A正确;

$x = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象不关于 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称, 选项B错误;

$x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 时 $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$, 函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 单调递减, 选项C正确;

函数 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得 $y = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 所得图象不关于y轴对称, D错误.

10. 【答案】BCD【解析】

选项A: 由已知得 $x = \frac{4}{y} \geq 1$, $y = \frac{4}{x} > 1$, 则 $1 \leq x < 4$, $1 < y \leq 4$. 故A错误;

选项B: 令 $t = x + y$, 则 $t = x + y = x + \frac{4}{x}$ 在 $x \in [1, 2]$ 单调递减, 在 $x \in [2, 4]$ 单调递增, 得 $4 \leq x + y \leq 5$, B对;

选项C: 结合题意可得 $\frac{y}{x} = \frac{y^2}{4}$, 令 $f(y) = \frac{y^2}{4}$, 则 $f(y) = \frac{y^2}{4}$ 在 $y \in (1, 4]$ 上单调递增, 得 $\frac{1}{4} < \frac{y}{x} \leq 4$, C对.

选项D: 设 $h(x) = 4x + y^2 = 4x + \frac{16}{x^2}$, 则 $h'(x) = 4 - \frac{32}{x^3}$, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $h(x)$ 单调递减, 当 $x \in [2, 4]$ 时, $h(x)$ 单调递增, 所以 $h(x)_{\min} = h(2) = 12$. 故D正确.

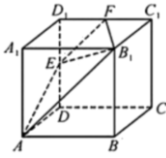
11. 【答案】ABC【解析】

对于A, 正方体外接球的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 内切球的半径为 $\frac{1}{2}$, 可得正方体的外接球的表面积是正方体内切球的表

面积的 $\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 3$ 倍, 故A正确;

对于B, 由点 A_1 和点B到平面 AEB_1 的距离相等, 若点 A_1 和点C到平面 AEB_1 的距离相等,

必有 $BC \parallel$ 平面 AEB_1 , 又由 $BC \parallel AD$, 可得 $AD \parallel$ 平面 AEB_1 , 与 $AD \cap$ 平面 $AEB_1 = A$ 矛盾, 故B正确;



对于C，如图，在 C_1D_1 上取一点 F ，使得 $EF \parallel C_1D$ ，连接 B_1F ，设 $D_1E = a (0 < a < 1)$ ，

由 $EF \parallel C_1D \parallel AB_1$ ，可得平面 AB_1FE 为过 A, B_1, E 三点的截面，

在梯形 AB_1FE 中， $AB_1 = \sqrt{2}$ ， $EF = \sqrt{2}a$ ， $AE = \sqrt{1^2 + (1-a)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 2}$ ，

$$B_1F = \sqrt{1^2 + (1-a)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 2}，$$

$$\text{梯形 } AB_1FE \text{ 的高为 } \sqrt{a^2 - 2a + 2 - \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2}}，$$

$$\text{梯形 } AB_1FE \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} + \sqrt{2}a) \times \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(a+1)\sqrt{a^2 - 2a + 3} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2(a^2 - 2a + 3)}，$$

令 $f(a) = (a+1)^2(a^2 - 2a + 3) (0 < a < 1)$ ，有

$$f'(a) = 2(a+1)(a^2 - 2a + 3) + (a+1)^2(2a - 2) = 4(a+1)(a^2 - a + 1) = 4(a+1)\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] > 0。$$

可得函数 $f(a)$ 单调递增，可得正方体被平面 AEB_1 所截得的截面面积随着 D_1E 的增大而增大，故C正确；

$$\text{对于D选项，} V_{E-AA_1B_1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}，V_{E-A_1B_1FD_1} = \frac{1}{3} \times a \times \left[1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times (1-a)\right] = \frac{1}{6}(a^2 + a)，$$

$$\text{被平面 } AEB_1 \text{ 所截得的上部分的几何体的体积为 } \frac{1}{6}(a^2 + a) + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}，\text{整理为 } a^2 + a - 1 = 0，\text{解得 } a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}，$$

故D错误。

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

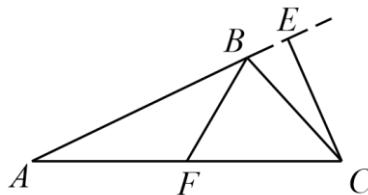
12. 【答案】 $\frac{1}{6}$ 【解析】

$$\text{由 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}，\text{有 } P(AB) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}，$$

$$\text{又由 } P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)，\text{有 } P(A) + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3}，\text{可得 } P(A) = \frac{1}{6}。$$

13. 【答案】 $-\sqrt{3}$ 【解析】

如下图所示，设 AB 边上的高为 CE ， AC 边上的中线为 BF ，



在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中， $CE = BC \sin \angle ABC = \sin \angle ABC$ ，所以 $BF = CE = \sin \angle ABC$ ，

$$\text{由 } \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})，\text{平方得 } \overrightarrow{BF}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos \angle ABC + \overrightarrow{BC}^2)，$$

$$\text{代入得，} 4(1 - \cos^2 \angle ABC) = 4 + 2 \times 2 \times 1 \times \cos \angle ABC + 1，$$

$$\text{化简得，} 4\cos^2 \angle ABC + 4\cos \angle ABC + 1 = 0，\text{解得 } \cos \angle ABC = -\frac{1}{2}，$$

$$\text{又因为 } 0 < \angle ABC < \pi，\text{所以 } \angle ABC = \frac{2\pi}{3}，\text{所以 } \tan \angle ABC = -\sqrt{3}。$$

14. 【答案】 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 【解析】

$axe^x - \ln(ax) - x = e^{x+\ln ax} - (x + \ln ax)$, 令 $w(x) = e^x - x$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $w'(x) = e^x - 1$

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $w'(x) > 0$, $w(x) = e^x - x$ 单调递增, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $w'(x) < 0$, $w(x) = e^x - x$ 单调递减,

故 $w(x) = e^x - x$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, 也是最小值, 故 $w(x) \geq e^0 - 0 = 1$,

故 $axe^x - \ln(ax) - x = e^{x+\ln ax} - (x + \ln ax) \geq 1$, 当且仅当 $x + \ln ax = 0$ 时, 等号成立,

令 $j(x) = x - \frac{2\ln(x-1)}{x}$, $x > 1$, 则 $j'(x) = 1 - \frac{\frac{2x}{x-1} - 2\ln(x-1)}{x^2} = \frac{x^2 - \frac{2x}{x-1} + 2\ln(x-1)}{x^2}$,

令 $k(x) = x^2 - \frac{2x}{x-1} + 2\ln(x-1)$, 则 $k'(x) = 2x - \frac{2x-2-2x}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} = 2x + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

故 $k(x) = x^2 - \frac{2x}{x-1} + 2\ln(x-1)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

又 $k(2) = 0$, 故当 $x \in (1, 2)$ 时, $k(x) < 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $k(x) > 0$,

故 $x \in (1, 2)$ 时, $j'(x) < 0$, $j(x)$ 单调递减, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $j'(x) > 0$, $j(x)$ 单调递增,

故 $j(x) = x - \frac{2\ln(x-1)}{x}$ 在 $x = 2$ 处取得极小值, 也是最小值, 最小值为 $j(2) = 2$,

设 $P(n, ane^n - \ln(an)), Q\left(t, \frac{2\ln(t-1)}{t}\right)$,

由基本不等式得,

$$|PQ|^2 = (t-n)^2 + \left((ane^n - \ln(an)) - \frac{2\ln(t-1)}{t} \right)^2 \geq \frac{\left(t - \frac{2\ln(t-1)}{t} + ane^n - \ln an - n \right)^2}{2} \geq \frac{(2+1)^2}{2} = \frac{9}{2},$$

当且仅当 $t - n = (ane^n - \ln(an)) - \frac{2\ln(t-1)}{t}$, $t = 2$, $n + \ln an = 0$ 时, 等号成立,

故 $|PQ| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 $m_{\max} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.