

深圳外国语学校 2024—2025 学年度高二下期末学科能力测试
数学试题

本试卷共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、准考证号码等信息填写在答题卡上。
- 作答时,务必将答案写在答题卡上,写在本试卷及草稿纸上无效。
- 考试结束后,将答题卡交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

- 已知 $a=(1,2),b=(m,3)$,若 $a\perp(b-a)$,则实数 $m=$
A. -2 B. 2 C. -1 D. 1
- 二项式 $\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-x\right)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为
A. 160 B. 60 C. -160 D. -60
- 某智能机器人公司从某年起 7 年的利润情况如下表所示, y 关于 x 的回归直线方程是 $\hat{y}=0.5x+2.3$,则该智能机器人公司第 4 年利润的残差是

第 x 年	1	2	3	4	5	6	7
利润 y /亿元	2.9	3.3	3.6	m	4.8	5.2	5.9

- A. 0.1 亿元 B. 0.2 亿元 C. -0.1 亿元 D. -0.2 亿元
- 已知角 α 终边上一点 $P(2,1)$,则 $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$
A. -3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 3
 - 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $S_2=3,S_4=15$,则 $S_8=$
A. 255 B. 127 C. 66 D. 39
 - “端午节”是我国四大传统节日之一,吃粽子、赛龙舟、挂艾草等均是端午节的习俗.今年端午节,兄妹两人一起去超市购买粽子,若他们分别从“鲜肉粽、腊肉粽、蛋黄粽、原味粽、赤豆粽、八宝粽”六种粽子里各自挑选三种并各购买一个,则购买的 6 个粽子中至多有一种相同的概率是
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{9}{20}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{7}{20}$

- 已知 F 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点,直线 $4x-3y=0$ 与 C 交于 P,Q 两点,若以 PQ 为直径的圆经过点 F ,则 C 的离心率为

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. $\sqrt{10}$

- 已知函数 $f(x)=(x+a-1)e^x+\frac{b}{2}x^2+abx-ab$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则 ab 的最小值为

- A. $-\frac{1}{e}$ B. $\frac{1}{e}$ C. -1 D. 1

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,有选错的得 0 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

- 下列说法正确的是
A. 数据 $2,1,6,3,4,5,4,1,3$ 的下四分位数是 2
B. 若数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的标准差为 s ,则数据 $2x_1,2x_2,\cdots,2x_n$ 的标准差为 $2s$
C. 随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$,若 $P(X>0)=\frac{4}{5}$,则 $P(0<X<2)=\frac{3}{5}$
D. 随机变量 $Y\sim B(4,p)$,若 $D(Y)=\frac{3}{4}$,则 $E(Y)=1$
- 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F ,准线为 l,O 为坐标原点,点 $M(x_0,4)$ 在抛物线 C 上,直线 MO,MF 分别与 l 交于 A,B ,直线 MF 与抛物线 C 交于另一点 N ,则
A. F 的坐标为 $(2,0)$ B. $|MF|=5$
C. $|AB|=\frac{5}{3}$ D. $S_{\triangle OFM}>2S_{\triangle ABN}$
- 对于正整数 $n,\varphi(n)$ 是小于或等于 n 的正整数中与 n 互质的数的数目(若两个正整数的最大公因数是 1,则称这两个正整数互质).函数 $\varphi(n)$ 以其首名研究者欧拉命名,称为欧拉函数,例如 $\varphi(10)=4(10$ 与 $1,3,7,9$ 均互质),则
A. $\varphi(20)+\varphi(25)=28$ B. 若 p 为质数,则数列 $\{\varphi(p^n)\}$ 为等比数列
C. 数列 $\left\{\frac{n}{\varphi(3^n)}\right\}$ 的前 5 项和等于 $\frac{179}{81}$ D. $\exists n\in\mathbf{N}^*$,使得 $2\left[\varphi(3^n)+\varphi(4^n)\right]=\varphi(5^n)$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+3^{n-1}a_n=n\cdot 3^n$,则 $a_{2025}=$ _____.
- 直线 $y=kx+b$ 与函数 $y=e^{x-2}$ 和 $y=e^x-1$ 的图象都相切,则 $k+b=$ _____.
- 一只蚂蚁从正四面体 $A-BCD$ 的顶点 A 出发,每次只沿着棱爬行并爬到另一个顶点,若它选择三个方向爬行的概率相等,则蚂蚁爬行 5 次后走遍四个顶点(初始顶点 A 视为已走过)的概率为_____.

15. (13 分)

(1) 求 A ;

16. (15 分)

(1)若这 8 道题中甲能答对其中 5 道,计算甲进入决赛的概率;

17. (15 分)

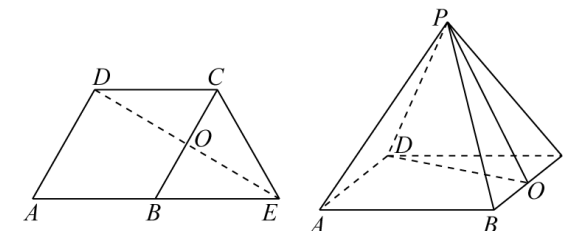
(1) 若 $a=2$, 求函数 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

18. (17 分)

(1) 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 POD ;

(2)若 $DP=\sqrt{3}$,求平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值.

(3)求直线 PA 与平面 PBC 夹角正弦值的最大值.



19. (17 分)

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设直线 $l: y=kx (k \neq 0)$ 与椭圆 E 交于 P, A 两点, 过点 $P(x_0, y_0)$ 作 $PC \perp x$ 轴, 垂足为点 C , 直线 AC 交椭圆 E 于另一点 B .

(i) 证明: $AP \perp BP$.

(ii) 求 $\triangle ABP$ 面积的最大值.