

港的导数题集

1. (难度: ★☆☆☆☆)

原子物理中一些放射性重金属会发出射线而衰变, 其物质的量减少一半所需的时间总是恒定的, 这个时间被称为半衰期, 记函数 $f(x) = e^{-x}$ ($x \geq 0$).

(1) 证明: $f(x)$ 具有类似的半衰期, 并求出半衰期的数值;

(2) 记该半衰期为 t_0 , 构造数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = (n-1)t_0$, 记 $(a_n, f(a_n))$ 处的切线与 $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ 处的切线交于 (x_n, y_n) , $n \in \mathbf{N}^*$.

(i) 求 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 的通项公式;

(ii) 记 $f(x)$ 与 x 轴围成的面积为 S , 证明: $S \geq \frac{1}{2} + \ln^2 2$.

2. (难度: ★☆☆☆☆)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$).

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 定义在 $(1, +\infty)$ 的函数 $g(x)$ 满足 $f(g(x)) = f(x)$, 且 $\forall x_0 \neq e$, $g(x_0) \neq x_0$.

(i) 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(ii) 若 $g(x) \geq \frac{kx}{x-1}$, 求 k 的取值范围.

3. (难度: ★☆☆☆☆)

已知函数 $f(x) = ae^{x-1} + \frac{1}{a} - 3\ln x - 3$ ($x > 0$).

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线分别交 x 轴和 y 轴于 A, B 两点, 若 $0 < a < 3$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最小值;

(2) 若对于 $\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 均有 $f(\sin \theta) + f(\cos \theta) > -1$, 求 a 的取值范围.

4. (难度: ★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = a^x + x^a - 2$ ($x \geq 1$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$)

(1) 若 $a > 1$, 证明: $f(x) > 0$;

(2) 讨论 $f(x)$ 的零点个数;

(3) 若 $f(x)$ 有一个零点 x_0 , 证明: $ax_0 > 1$.

5. (难度: ★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = xe^{-x}$, a, b 满足当 $a \leq x \leq a + \ln 2$ 时, $b \leq f(x) \leq b + 2\ln 2$, 则

A. $a \in [-\ln 2, \ln 2]$

B. $b \in [-2\ln 2, \frac{\ln 2}{2}]$

C. $a \geq b$

D. $f(a) \geq f(b)$

6. (难度: ★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = x - \ln x$ ($x > 0$).

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$.

(i) 证明: $x_1^{x_1} + x_2^{x_2} > 2$;

(ii) 证明: $x_1^{x_2} + x_2^{x_1} < 2$

7. (难度: ★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = e^{ax} + e^{bx} - x$, 且 $a > 0$, $b > 0$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调;

(2) 若 $f(x)$ 有且仅有一个零点 x_0 .

(i) 证明: $e + 1 < x_0 \leq 2e$;

(ii) 当 $a = (e + 2)b$ 时, 求 x_0 .

8. (难度: ★★★☆☆)

若 $\tan(\sin x) > ax$ 在 $(0, a)$ 成立, 求 a 的取值范围.

9. (难度: ★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = x - \ln x - 1$ ($x > 0$)

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间以及极值;

(2) 已知矩形 $ABCD$ 的三个顶点均在 $f(x)$ 的图象上, 且该三个顶点有且仅有两个顶点的横坐标大于 1, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 4.

10. (难度: ★★★☆☆)

(1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $x > \sin x$;

(2) 已知 $a > 0$, 若 $\sin x^a > (\sin x)^a$ 在 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 若存在 $a > 1$, 使得 $\sin x^a > (\sin x)^a$ 在 $x \in (0, b)$ 恒成立, 求 b 的取值范围.

11. (难度: ★★★★★☆)

已知函数 $f(x) = e^{ax} - \ln(x+1) - 1$ 有两个零点 x_1, x_2 ($x_1 > x_2$).

- (1) 求 a 的取值范围;
- (2) 当 $a < 1$ 时, 记 $f(x)$ 的极值点为 x_0 ;
 - (i) 证明: $x_2 > 1 - a$;
 - (ii) 若 $x_2 > kx_0$, 求 k 的取值范围.

12. (难度: ★★★★★☆)

设曲线 $y = e^x$ 上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 处的切线相交于点 P .

- (1) 设 D 为线段 AB 的中点, 证明: 直线 PD 处的斜率小于 0;
- (2) 若 $|PA| = |PB|$, 证明: 存在唯一的实数 t 满足 $x_1 < t < x_2$;
- (3) 在 (2) 的条件下, 比较 $x_1 + x_2$ 与 $2t$ 的大小, 并说明理由.

注: 第三小问由 73Dsi 补充.

13. (难度: ★★★★★)

已知函数 $f_a(x) = \sin x + \sin ax (a > 0)$, 当 $a \in \mathbf{Q}$ 时, $f_a(x)$ 最大值为 M_a ; 当 $a \notin \mathbf{Q}$ 时,

记 $M_a = 2$.

(1) 求 M_3 ;

(2) 讨论 $f_\pi(x)$ 在 $(0, \frac{16\pi}{\pi+1})$ 的极值点个数;

(3) 证明: $M_a \geq M_3$.

14. (难度: ★★★★★)

已知曲线 $\Gamma: x^2 + (\ln y)^2 = (\frac{e}{e+1})^2$, 直线 l 交 Γ 于 A, B 两点, 其形状如下图:

(1) 求 Γ 最高点和最低点的坐标;

(2) 记 Γ 的最高点为 P .

(i) 若 l 的斜率为 0, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值;

(ii) 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

