

1.

6.10



大理新世纪中学

放射性

3. 原子物理中一些重金属会发出射线而衰变, 且其物质质量减少一半所需的时间总是恒定的, 这个时间被称为半衰期. 已知 $f(x) = e^{-x}$ ($x > 0$), 记 $f(0) = 1$ 为衰变起始状态.

(1) 证明: $f(x)$ 具有类似半衰期, 并求出半衰期的数值

(2) 记半衰期为 t_0 , 构造数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = (n-1)t_0$, 记 $(a_n, f(a_n))$ 处的切线与 $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ 处的切线交于 (x_n, y_n) , $n \in \mathbb{N}^*$

(i) 求出 x_n, y_n

(ii) 记 $f(x)$ ($x \geq 0$) 与 x 轴围成的面积为 S , 求证: $S > \frac{1}{2} + \ln 2$

解: (1) 令 $e^{-t_1} = a$, $e^{-t_2} = \frac{a}{2}$, 可得: $t_1 = -\ln a$, $t_2 = \ln 2 - \ln a$ $\therefore t_2 - t_1 = \ln 2$ 为定值.

即半衰期为 $\ln 2$

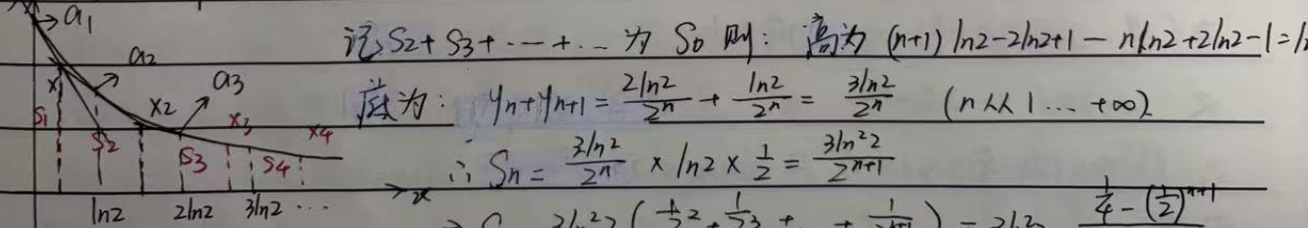
(2) 依题意: $a_n = (n-1)\ln 2$, $f(a_n) = e^{-a_n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $f'(a_n) = -\frac{1}{2^{n-1}}$

故切线 $l_1: y = -\frac{1}{2^{n-1}}(x - (n-1)\ln 2) + \frac{1}{2^{n-1}}$

同理切线 $l_2: y = -\frac{1}{2^n}(x - n\ln 2) + \frac{1}{2^n}$

联立得: $x_n = n\ln 2 - 2\ln 2 + 1$, $y_n = \frac{\ln 2}{2^{n-1}}$

(ii) 作出如下图: 故围成的面积大于若干个梯形面积之和



令 $n \rightarrow +\infty$, 则 $S_0 = \frac{3\ln^2 2}{2}$ 又 $S_1 = (\ln 2 + 1) \times (1 - \ln 2) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln^2 2}{2}$

$\therefore S > S_0 + S_1 = \frac{1}{2} + \ln 2$ 得证!

2. 见“港”的抖音主页

3.

16. 解: (1) $f(1) = a + \frac{1}{a} - 3$, $f'(x) = ae^{x-1} - \frac{3}{x}$, $f'(1) = a - 3$. 切线: $y = (a-3)x + \frac{1}{a}$. $A(\frac{1}{a(3-a)}, 0)$, $B(0, \frac{1}{a})$
 (6分) $\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2a^2(3-a)}$ 令 $g(a) = -a^3 + 3a^2$, $g'(a) = -3a^2 + 6a = 3a(2-a)$ $\therefore g(a) \leq g(2) = 4 \Rightarrow S_{\triangle AOB} \geq \frac{1}{8}$
 (9分) (2) ① 若 $a < 0$, 则 $f(x) = ae^{x-1} + \frac{1}{a} - 3\ln x - 3 \Rightarrow f(\sin \theta) + f(\cos \theta) < -3\ln \sin \theta \cos \theta - 6 < -1$ 不符合题意!
 ② 若 $a > 0$, 构造 $h(x) = f(x) + x^2 = ae^{x-1} + \frac{1}{a} + x^2 - 3\ln x - 3 \geq 2ae^{x-1} + x^2 - 3\ln x - 3 = h(x)$
 $h'(x) = e^{\frac{x-1}{a}} + 2x - \frac{3}{x}$ $\therefore h(x) \geq h(1) = 0 \Rightarrow f(x) \geq -x^2$. $\therefore f(\sin \theta) + f(\cos \theta) > -\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -1$
 综上, a 的取值范围为 $(0, +\infty)$

17. 解: (1) 由题知 $a > 1$

4.

19. (1) 证明: $f'(x) = a^x \ln a + a x^{a-1} > 0 \therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上 $f(x) \geq f(1) = a - 1 > 0$

(2) ① $a > 1$ 时, 由 (1) 知 $f(x) > 0$ 恒成立, 故无零点.

② $0 < a < 1$ 时, $f'(x) = a^x \ln a + a x^{a-1}$ 令 $f'(x) > 0$ 即 $a x^{a-1} > a^x (-\ln a)$

$\therefore \ln a + (a-1) \ln x > x \ln a + \ln(-\ln a)$ 即 $(a-1) \ln x - x \ln a + \ln a - \ln(-\ln a) > 0$

令 $-\ln a = t > 0$, $a = e^{-t}$, 则: $(e^{-t}-1) \ln x + tx - t - \ln t > 0$, 令其为 $g(x)$, 则:

$g'(x) = \frac{e^{-t}-1}{x} + t$, $t > 0$ 故 $e^{-t} < e^0 = 1 \Rightarrow g'(x) \uparrow$ 且 $g'(1) = e^{-t} + t - 1 \stackrel{e^x \geq x+1}{\geq} -t + 1 - 1 + t = 0$

$\therefore g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上 $g(x) \geq g(1) = -\ln t$

1° $-\ln t \geq 0$ 即 $0 < t \leq 1$, 此时 $g(x) \geq g(1) \geq 0$ 即 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上

又 $f(1) = a - 1 < 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow +\infty \therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有唯一零点.

2° $-\ln t < 0$ 即 $t > 1$, 此时 $\frac{1}{t} \stackrel{g(x)}{> 0}$, $f(x)$ 在 $[1, t_0) \downarrow [t_0, +\infty) \uparrow$ 又 $f(1) = a - 1 < 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow +\infty$
 $\therefore f(x)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有唯一零点.

综上: $a > 1$ 时 $f(x)$ 无零点, $0 < a < 1$ 时 $f(x)$ 有唯一零点.

(3) 要证 $ax_0 > 1$, 即证 $x_0 > \frac{1}{a}$, 考虑证 $f(\frac{1}{a}) < 0$ 即 $a^{\frac{1}{a}} + (\frac{1}{a})^a - 2 < 0$

而 $f(\frac{1}{a}) = e^{\frac{\ln a}{a}} + e^{-a \ln a} - 2$, $\frac{\ln a}{a} < 1$, $-a \ln a < 1$ 且 $e^x < \frac{1}{1-x}$ ② 在 $x < 1$ 时恒成立

$\therefore$ 只需证 $\frac{1}{1-\ln a} + \frac{1}{1+a \ln a} - 2 < 0$ 恒成立, 整理后即证 $\ln a > \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立

令 $\varphi(a) = \ln a - \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})$, $\varphi'(a) = -\frac{(a-1)^2}{2a^2} \leq 0 \therefore \varphi(a)$ 在 $(0, 1)$ 上 $\downarrow \Rightarrow \varphi(a) > \varphi(1) = 0$ 得证!

故 $ax_0 > 1$

附: ② 不等式的证明:

① $e^x \geq x+1$: 令 $h(x) = e^x - x - 1$, $h'(x) = e^x - 1 \geq 0 \therefore h(x) \geq h(0) = 0$

② $e^x < \frac{1}{1-x}$: 在①中将 $x \rightarrow -x$, 得 $\frac{1}{e^x} \geq 1-x \therefore$ 当 $x < 1$ 时, 有 $e^x < \frac{1}{1-x}$, 得证!

5. 见 2026 年 2 月云帆杯 B 卷 11 题

6. 见“港”的抖音主页

7. 2025 年 10 月炎炎杯 18 题

8.

 大理新世纪中学

26. 若 $\tan(\sin x) > ax$ 在 $(0, a)$ 恒成立, 求 a 的范围.

总论: 该问题是三角嵌套与恒成立求参的结合, 要求熟练掌握换元等技巧. 以下解答不采取高精度放缩的解法, 完全是一边求导, 一边分析. 这是一道考验分析问题的能力的难题.

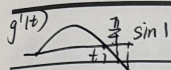
解: 令 $h(x) = \tan(\sin x) - ax$, $h(0) = 0$
 $h'(x) = \frac{\cos x - a \cos^2(\sin x)}{\cos^2(\sin x)}$, $h'(0) = 1 - a$.

① 若 $a > 1$, 则 $h'(0) = 1 - a < 0$ (必存在 x_0 使得 $x \in (0, x_0)$ 时 $h(x) < 0$
 $\therefore h(x_0) < h(0) = 0$ 不符合题意.

② 当 $a \leq 1$ 时, $h(x) \geq \tan(\sin x) - x$
先证 $\tan(\sin x) - x > 0$ 在 $(0, 1)$ 恒成立.
 $h'(x) = \frac{\cos x - \cos^2(\sin x)}{\cos^2(\sin x)}$ (key: 由于 $\sin x$ 为自变量, 则无论求导多少次都无法“干掉它”, 故考虑换元)
令 $\sin x = t \in (0, \sin 1)$ 则 $\cos x = \sqrt{1-t^2}$
则 $h'(x) = \frac{[\cos x - \cos^2(\sin x)][\cos x + \cos^2(\sin x)]}{\cos^2(\sin x)(\cos x + \cos^2(\sin x))} = \frac{\cos^2 x - \cos^4(\sin x)}{\cos^2(\sin x)(\cos x + \cos^2(\sin x))} = 1 - t^2 - \cos^4 t$
令 $g(t) = 1 - t^2 - \cos^4 t$, $g'(t) = -2t + 4\cos^3 t \sin t$, $g''(t) = -2 - 12\cos^2 t \sin^2 t + 4\cos^4 t = 16\cos^4 t - 12\cos^2 t - 2$
现估计 t 的范围以确定 $\cos^2 t$ 的范围.
 $1 = \frac{\pi}{2} < 60^\circ \Rightarrow \sin 1 < \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.85 < \frac{\pi}{3}$
 $\therefore t \in (0, \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos t \in (\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow \cos^2 t \in (\frac{1}{4}, 1)$
令 $\cos^2 t = m$, $f(m) = 16m^2 - 12m - 2$ 对勾函数且 $f(\frac{1}{4}) < 0$, $f(1) > 0$, $f(\frac{1}{2}) < 0$
且 $m_0 \in (\frac{1}{4}, 1)$ 使得 $f(m_0) = 0$, 其中令 $\cos^2 t_0 = m_0$, 则当 $t \in (0, t_0)$ 时, $g'(t) > 0$
当 $t \in (t_0, \sin 1)$ 时, $g'(t) < 0 \Rightarrow g'(t)$ 在 $(0, t_0) \uparrow (t_0, \sin 1) \downarrow$
且 $g'(0) = 0$ 考虑到 $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, $\sin 1 > \frac{1}{6} - \frac{1}{6^3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{216} = \frac{35}{216} > \frac{1}{6}$ 而 $g'(\frac{1}{6}) = -\frac{2}{3} + 1 < 0$
 $\sin 1 > \frac{\pi}{6}$



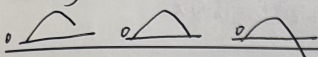
大理新世纪中学

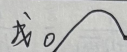


$\therefore \exists t_1$ 使得 $g(t)$ 在 $(0, t_1) \uparrow (t_1, sm) \downarrow$

解 $g(0)=0$, $g(sm)? 0$ (这里很难估计 $g(sm)$ 与 0 的大小, 不过已经“不影响”)

无论 $g(sm) > 0$ 或 $= 0$ 或 < 0 , 只可能有以下三种情况



从而对应 $h(x)$ 的两种情况  或  (注意此时自变量已变为 $x \in (0, 1)$ 而不是 t)

不论如何, 必有 $h(x) \geq \min\{h(0), h(1)\}$. $sm > \frac{\pi}{4}$ 前面已证

而 $h(0)=0$, $h(1) = \tan(sm) - 1 > \tan(\frac{\pi}{4}) - 1 = 0$ 故得证!

$\therefore \tan(sm x) > x$ 在 $(0, 1)$ 恒成立

$\Rightarrow \tan(sm x) > ax$ 在 $(0, 1)$ 恒成立 ($a \in (0, 1]$)

而 $(0, a) \subset (0, 1) \therefore \tan(sm x) > ax$ 在 $(0, a)$ 恒成立!

综上: a 的取值范围为 $(0, 1]$

这里有法二, 不过超纲故不使用:

要证 $\tan(sm x) > x \Rightarrow \arctan[\tan(sm x)] > \arctan x \Rightarrow sm x > \arctan x$

令 $\varphi(x) = sm x - \arctan x$, $\varphi'(x) = \cos x - \frac{1}{x^2+1} > 1 - \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2(1-x^2)}{x^2+1} > 0$ (注意 $\arctan x$ 求导为 $\frac{1}{x^2+1}$)

$\therefore \varphi(x) \uparrow \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0) = 0$ 证毕

(注: 类似题还有一道超极难的题: $\tan(sm x) > \sin(\tan x) \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$)

9.



大理新世纪中学

29. 在直角坐标系 Oxy 中, 函数 $f(x) = x - \ln x - 1$ ($x > 0$)

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间及极值

且仅有

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 $f(x)$ 上, 且在 $f(x)$ 上的顶点中, 有两个顶点横坐标大于 1,

证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 4.

解: (1) 略 (2) 如图: 设 $A(x_1, x_1 - \ln x_1 - 1)$, $B(x_2, x_2 - \ln x_2 - 1)$, $C(x_3, x_3 - \ln x_3 - 1)$.

记 AB 的斜率为 k , 则 AC 的斜率为 $-k$.

① 先证明: $0 < k < 1$.

不妨有 A 点在 B 点左侧, 则 $y_B - y_A > 0 \Rightarrow k > 0$

而 $k = \frac{x_2 - x_1 - \ln x_2 + \ln x_1}{x_2 - x_1} = 1 - \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}$ 而 $x_2 > x_1$, $\ln x_2 > \ln x_1$ $\therefore k < 1$.

② 估计 B, C 横坐标

AB : $y = k(x - x_1) + x_1 - \ln x_1 - 1$, 且过点 $B \Rightarrow x_2 - \ln x_2 - 1 = k(x_2 - x_1) + x_1 - \ln x_1 - 1$

构造函数 $g(x) = x - \ln x - 1 - kx + kx_1 - x_1 + \ln x_1 + 1$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} - k$

$\because g(x)$ 有零点 x_1, x_2 故显然有 $g(\frac{1}{1-k}) < 0$ 且 $x_2 > \frac{1}{1-k}$.

AC : $y = -\frac{1}{k}(x - x_1) + x_1 - \ln x_1 - 1$, 且过点 $C \Rightarrow x_3 - \ln x_3 - 1 = -\frac{1}{k}(x_3 - x_1) + x_1 - \ln x_1 - 1$

构造函数 $h(x) = x - \ln x - 1 + \frac{1}{k}x - \frac{1}{k}x_1 + kx_1 - x_1 + \ln x_1 + 1$, $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{k}$

$\because h(x)$ 有零点 x_1, x_3 故显然有 $h(\frac{k}{k+1}) < 0$ 且 $x_3 < \frac{k}{k+1}$.

$\therefore$ 周长 $\geq (AB + AC) = 2(\sqrt{1+k^2}(x_2 - x_1) + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(x_1 - x_3)) = 2\sqrt{1+k^2}(x_2 - \frac{1}{1-k}x_3 + (\frac{1}{1-k} - 1)x_1)$

$> 2\sqrt{1+k^2}(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{1+k} + \frac{1}{k} - 1) = 2\sqrt{1+k^2}(\frac{2k}{(1-k)(1+k)} + \frac{1}{k}) > 2\sqrt{1+k^2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{(1-k)(1+k)}} \cdot \frac{1}{k} = 2\sqrt{1+k^2} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{k(1+k)}}$

$= 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{k+1}{1+k}} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{k+1}} \geq 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-2} = 8\sqrt{2-1} > 4$

10. 见神算杯 A 卷第 18 题

11. 见“港”的抖音主页



19. (1) $A(x_1, e^{x_1})$ $B(x_2, e^{x_2})$ 切线: $\begin{cases} y = e^{x_1}(x - x_1) + e^{x_1} \\ y = e^{x_2}(x - x_2) + e^{x_2} \end{cases}$ 联立得: $P\left(\frac{(x_1 - x_2)e^{x_1}e^{x_2}}{e^{x_1} - e^{x_2}}, \frac{(x_1 - x_2)e^{x_1x_2}}{e^{x_1} - e^{x_2}}\right)$

而 $D\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}\right)$ 从而 $k_{PD} = \frac{\frac{(x_1 - x_2)e^{x_1x_2}}{e^{x_1} - e^{x_2}} - \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}}{\frac{(x_1 - x_2)e^{x_1}e^{x_2}}{e^{x_1} - e^{x_2}} - \frac{x_1 + x_2}{2}}$

为了说明 $k_{PD} < 0$, 我们证明分子小于 0, 分母大于 0

① 分子: $\frac{(x_1 - x_2)e^{x_1x_2}}{e^{x_1} - e^{x_2}} \left(e^{x_2x_1} - \frac{e^{2x_2 - 2x_1} - 1}{2x_2 - 2x_1} \right)$ 再令 $x_2 - x_1 = t > 0$

即证: $e^t - \frac{e^{2t} - 1}{2t} \leq 0 \Rightarrow e^{2t} - 2te^t - 1 > 0$ 求证: $e^t - e^{-t} - 2t > 0$

求导后即 $e^t + e^{-t} - 2 > 0$ 从而 $e^{2t} - 2te^t - 1 > 0$ 得证! 即分子小于 0

② 分母: $-1 + \frac{x_1e^{x_1} - x_2e^{x_2}}{e^{x_1} - e^{x_2}} - \frac{x_1 + x_2}{2} = -1 + \frac{x_1 - x_2e^{x_2 - x_1}}{1 - e^{x_2 - x_1}} + \frac{x_1 + x_2}{2}$
 $= -1 + \frac{x_2(e^{x_2 - x_1} - 1) + x_1 - x_2}{e^{x_2 - x_1} - 1} = -1 - \frac{x_1 + x_2}{2} + x_2 + \frac{x_2 - x_1}{e^{x_2 - x_1} - 1} = \frac{x_2 - x_1}{e^{x_2 - x_1} - 1} + \frac{x_2 - x_1}{2} - 1 > 0$

令 $x_2 - x_1 = t > 0$, 整理后即证: $(1 - t)e^t < 1$ 这是显然的.

(2) 由题: $k_{PD} \cdot k_{AB} = -1$ 即: $\frac{e^{x_1 + x_2} - \frac{e^{2x_2} - e^{2x_1}}{2(x_2 - x_1)}}{\frac{(x_1 - x_2)e^{x_1}e^{x_2}}{e^{x_1} - e^{x_2}} - \frac{x_1 + x_2}{2}} = -1$

完同理 (1) 可整理得: $e^{2x_1} = \frac{(t+2) + (t-2)e^t}{e^t - 1 - 2te^t} \cdot \frac{t}{e^t - 1} = g(t) \cdot \varphi(t) = h(t)$ ($t > 0$).

我们要证 $h(t) \downarrow$ 注意到 $\varphi(t), g(t) > 0$ 且 $\varphi(t) \downarrow$ 易知 $\Rightarrow$ 只需证 $g(t) \downarrow$.

而 $g'(t) = \frac{(3-t)e^{3t} - (t+1)e^{2t} + (2t^2 + 7t + 5)e^t - 1}{(e^{2t} - 1 - 2te^t)^2} = \frac{g_1(t)}{(e^{2t} - 1 - 2te^t)^2}$

$g_1'(t) = (8-3t)e^{3t} - (4t+16)e^{2t} + (2t^2+7t+8)e^t = e^{2t} g_2(t)$

$g_2'(t) = (15-3t)e^t - 4 - (2t^2+3t+1)e^{-t}$ $g_2''(t) = (2-3t)e^t + (2t^2-t-2)e^{-t} = g_3(t)e^{-t}$

$g_3'(t) = e^{2t}(1-6t) + 4t-1$, $g_3''(t) = (-12t-4)e^{2t} + 4$, $g_3'''(t) = (-24t-20)e^{2t}$

当 $t \rightarrow -\infty$ $g_3'''(t) \rightarrow 4$, $g_3''(-\frac{1}{6}) > g_3''(-\infty) > 0$ 且 $g_3'(0) = 0$
 $\Rightarrow g_3'(t) = g_3'(0) = 0 \Rightarrow g_3'(t) \downarrow$ 且 $g_3(0) = 0 \Rightarrow g_2'(t) \leq g_2'(0) = 0 \Rightarrow g_2(t) \downarrow$ 且 $g_2(0) = 0$



北京大学
PEKING UNIVERSITY

$\Rightarrow g_1(t) = g_1(0) = 0$ 即 $g(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 $\downarrow$ 得证!

且 $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \frac{1}{2}$ 故 $e^{2x} < \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 < -\frac{\ln 2}{2}$, 同理知: $x_2 > -\frac{\ln 2}{2}$

故: $x_1 < -\frac{\ln 2}{2} < x_2$ 且在 x_1, x_2 趋于相等时均趋于 $-\frac{\ln 2}{2}$ 故 $t = -\frac{\ln 2}{2}$.

$$A(\ln p, p), B(\ln q, q), \begin{cases} y - p = p(x - \ln p) \\ y - q = q(x - \ln q) \end{cases}, p, q > 0$$

$$P\left(-1 + \frac{p \ln p - q \ln q}{p - q}, \frac{pq}{p - q} \ln \frac{p}{q}\right), D\left(\ln \sqrt{pq}, \frac{p + q}{2}\right)$$

$$k_{PD} = q \frac{\frac{1+t}{2} - \frac{t \ln t}{t-1}}{1 + \frac{\frac{p-q}{2} - p}{p-q} \ln p + \frac{\frac{p-q}{2} + q}{p-q} \ln q} = q \frac{\frac{1+t}{2} - \frac{t \ln t}{t-1}}{1 - \frac{1}{2} \frac{t+1}{t-1} \ln t} \left(t = \frac{p}{q}\right)$$

$$\frac{x+1}{2} > \frac{x-1}{\ln x} > \sqrt{x} > \frac{x \ln x}{x-1} \Rightarrow k_{PD} < 0$$

$$|PA| = |PB| \Rightarrow PD \perp AB, k_{PD} \cdot k_{AB} = q \frac{\frac{1+t}{2} - \frac{t \ln t}{t-1}}{1 - \frac{1}{2} \frac{t+1}{t-1} \ln t} \frac{p-q}{\ln p - \ln q} = q^2 \frac{\frac{1+t}{2} \frac{t-1}{\ln t} - t}{1 - \frac{1}{2} \frac{t+1}{t-1} \ln t} = -1$$

$$q = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \frac{t+1}{t-1} \ln t - 1}{\frac{1+t}{2} \frac{t-1}{\ln t} - t}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < p = t \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \frac{t+1}{t-1} \ln t - 1}{\frac{1+t}{2} \frac{t-1}{\ln t} - t}}, \text{即证: } \frac{t+1}{2} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \frac{t+1}{t-1} \ln t - 1}{\frac{1+t}{2} \frac{t-1}{\ln t} - t}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

其中第三问见公众号“数海钓鱼”---“北大学生命制的导数压轴题...”

13. 见港梦杯第 18 题

14. 见“港”的抖音主页