

$$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{13}{15} = \frac{4}{25} + \frac{13}{75} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}.$$

故当 $p = \frac{1}{3}$ 时, $P(X_2=3) = \frac{1}{3}$ 4 分

(2) 证明: 由题意知 $X_{n+1} = 2, 3, 4, 5$.

所以 $P(X_{n+1}=2) = P(X_n=2) \left[\frac{2}{5} + \frac{3}{5}(1-p) \right] = \left(1 - \frac{3p}{5} \right) P(X_n=2)$, 5 分

$P(X_{n+1}=3) = \left[\frac{3}{5} + \frac{2}{5}(1-p) \right] P(X_n=3) + \frac{3}{5} p P(X_n=2) = \left(1 - \frac{2p}{5} \right) P(X_n=3) + \frac{3p}{5} P(X_n=2)$ 6 分

$P(X_{n+1}=4) = \left[\frac{4}{5} + \frac{1}{5}(1-p) \right] P(X_n=4) + \frac{2}{5} p P(X_n=3) = \left(1 - \frac{p}{5} \right) P(X_n=4) + \frac{2p}{5} P(X_n=3)$ 7 分

$P(X_{n+1}=5) = \left[\frac{5}{5} + \frac{0}{5}(1-p) \right] P(X_n=5) + \frac{1}{5} p P(X_n=4) = P(X_n=5) + \frac{p}{5} P(X_n=4)$ 8 分

所以 $E(X_{n+1}) = 2 \cdot P(X_{n+1}=2) + 3 \cdot P(X_{n+1}=3) + 4 \cdot P(X_{n+1}=4) + 5 \cdot P(X_{n+1}=5)$

$= \left(2 + \frac{3p}{5} \right) P(X_n=2) + \left(3 + \frac{2p}{5} \right) P(X_n=3) + \left(4 + \frac{p}{5} \right) P(X_n=4) + 5 P(X_n=5)$ 9 分

所以 $E(X_{n+1}) - \left(1 - \frac{p}{5} \right) E(X_n) = \left(2 + \frac{3p}{5} \right) P(X_n=2) + \left(3 + \frac{2p}{5} \right) P(X_n=3) + \left(4 + \frac{p}{5} \right) P(X_n=4) + 5 P(X_n=5)$

$- \left(1 - \frac{p}{5} \right) [2 P(X_n=2) + 3 P(X_n=3) + 4 P(X_n=4) + 5 P(X_n=5)]$

$= p \cdot [P(X_n=2) + P(X_n=3) + P(X_n=4) + P(X_n=5)]$.

因为 $P(X_n=2) + P(X_n=3) + P(X_n=4) + P(X_n=5) = 1$.

所以 $E(X_{n+1}) - \left(1 - \frac{p}{5} \right) E(X_n) = p$.

所以 $E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{p}{5} \right) E(X_n) + p$ 11 分

(3) 解: 因为 $E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{p}{5} \right) E(X_n) + p$, 设 $E(X_{n+1}) + \lambda = \left(1 - \frac{p}{5} \right) [E(X_n) + \lambda]$.

所以 $E(X_{n+1}) + \lambda = \left(1 - \frac{p}{5} \right) E(X_n) + \lambda - \frac{p}{5} \lambda$.

所以 $-\frac{p}{5} \lambda = p$, $\lambda = -5$, $E(X_{n+1}) - 5 = \left(1 - \frac{p}{5} \right) [E(X_n) - 5]$.

所以 $\{E(X_n) - 5\}$ 是以 $1 - \frac{p}{5}$ 为公比的等比数列, 13 分

$E(X_0) = 2$, $E(X_0) - 5 = -3$, $E(X_1) = 2 \left[\frac{2}{5} + \frac{3}{5}(1-p) \right] + 3 \times \frac{3}{5} p = 2 + \frac{3}{5} p$,

故 $E(X_1) - 5 = \frac{3}{5} p - 3 = -3 \left(1 - \frac{p}{5} \right)$.

所以 $E(X_n) - 5 = [E(X_1) - 5] \left(1 - \frac{p}{5} \right)^{n-1} = -3 \left(1 - \frac{p}{5} \right)^n$.

所以 $E(X_n) = 5 - 3 \left(1 - \frac{p}{5} \right)^n$ 15 分

第 n 个月的期望宕机节点数为 $5 - E(X_n) = 5 - \left[5 - 3 \left(1 - \frac{p}{5} \right)^n \right] = 3 \left(1 - \frac{p}{5} \right)^n$.

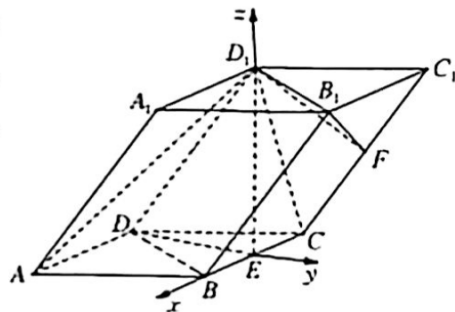
每台宕机节点每月损失 2 万元, 故第 n 个月的经济损失的期望为 $2 \times 3 \left(1 - \frac{p}{5} \right)^n = 6 \left(1 - \frac{p}{5} \right)^n$.

设从第 1 个月开始的 n 个月的经济损失的总期望为 L_n .

则 $L_n = \sum_{i=1}^n 6 \left(1 - \frac{p}{5} \right)^i = \frac{6 \left[1 - \frac{p}{5} - \left(1 - \frac{p}{5} \right)^{n+1} \right]}{1 - \left(1 - \frac{p}{5} \right)} = \frac{6 \left[5 - p - 5 \left(1 - \frac{p}{5} \right)^{n+1} \right]}{p}$ (万元). 17 分

又 $ADC \subset$ 平面 ADD_1 , 所以平面 $ADD_1 \perp$ 平面 DD_1E 5 分

(2) 解: 由(1)知 EB, ED, ED_1 两两垂直, 以 E 为原点, 直线 EB, DE, ED_1 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(2, -\sqrt{3}, 0)$, $D(0, -\sqrt{3}, 0)$, $D_1(0, 0, \sqrt{3})$, $C(-1, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, 又 $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{DD_1} = (0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, 所以 $C_1(-1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B_1(1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $F(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.



所以 $\overrightarrow{DA} = (2, 0, 0)$, $\overrightarrow{DD_1} = (0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{D_1B_1} = (1, \sqrt{3}, 0)$,

$\overrightarrow{D_1F} = (-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 8 分

设平面 ADD_1 的一个法向量 $m = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{DA} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{DD_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x = 0, \\ \sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 令 $y = 1$, 解得 $x = 0, z = -1$.

所以 $m = (0, 1, -1)$ 10 分

设平面 B_1D_1F 的一个法向量 $n = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{D_1B_1} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{D_1F} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a + \sqrt{3}b = 0, \\ -a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0. \end{cases}$ 令 $b = 1$, 解得 $a = -\sqrt{3}, c = 3$.

所以 $n = (-\sqrt{3}, 1, 3)$ 12 分

设平面 ADD_1 与平面 B_1D_1F 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|m \cdot n|}{|m| \cdot |n|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{26}}{13}$.

所以平面 ADD_1 与平面 B_1D_1F 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{26}}{13}$ 15 分

17. 解: (1) 当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $g(x) = ax - \ln(x + \frac{1}{2}) = ax - \ln(2x + 1) + \ln 2$.

所以 $g(x)$ 的定义域为 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, 且 $g'(x) = a - \frac{2}{2x+1} = \frac{a(2x+1)-2}{2x+1}$ 2 分

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) < 0$ 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减; 3 分

当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{a} - \frac{1}{2}$; 令 $g'(x) < 0$, 得 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{a} - \frac{1}{2}$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{a} - \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增. 5 分

(2) 由 $f(x) = e^x - \ln(x+t)$ 得, $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+t}$.

设 $h(x) = f'(x)$, 则 $h'(x) = e^x + \frac{1}{(x+t)^2} > 0$,

故 $h(x)$, 即 $f'(x)$ 在 $(-t, +\infty)$ 上是增函数, 6 分

且当 $x \rightarrow -t$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) > 0$,

故存在 $x_0 > -t$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 即存在 $x_0 > -t$, $e^{x_0} = \frac{1}{x_0+t}$, 亦即 $x_0 = -\ln(x_0+t)$ 8 分

且当 $x \in (-t, x_0)$ 时, $f'(x_0) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x_0) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-t, x_0)$ 上为减函数, 在 $(x_0, +\infty)$ 上为增函数,

故 $f(x) \geq f(x_0) = e^{x_0} - \ln(x_0+t)$, 又 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0+t}$, $x_0 = -\ln(x_0+t)$, 10 分

所以 $f(x_0) = e^{x_0} - \ln(x_0+t) = \frac{1}{x_0+t} + x_0 = \frac{1}{x_0+t} + (x_0+t) - t \geq 2-t$, 13 分

当 $\frac{1}{x_0+t} = x_0+t$, 即 $x_0+t = 1$ 时取等号, 此时 $f(x_0) = e^{x_0} \geq 1$ 14 分

故 $2-t \geq 1$, 解得 $t \leq 1$, 即 t 的取值范围为 $t \leq 1$ 15 分

18. 解: (1) 设 F_2 的坐标为 $(c, 0)$, 由题意知 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $a = \sqrt{3}c$.

又 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $b = \sqrt{2}c$ 2 分

将 $x=c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 所以 $|y| = \frac{b^2}{a} = \frac{2c}{\sqrt{3}}$ 3 分

所以 $\tan \angle AF_1 F_2 = \frac{\frac{2c}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 又 $\angle AF_1 F_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\angle AF_1 F_2 = \frac{\pi}{6}$ 4 分

由椭圆的对称性知 $\angle AF_1 B = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 因为 $D(0, 2)$ 为 C 的上顶点, 所以 $b=2$, 即 $\sqrt{2}c=2$, 所以 $c=\sqrt{2}$, 所以 $a^2 = b^2 + c^2 = 6$, 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$.
..... 6 分

(i) 若 $k_1=1, k_2=-2$, 则直线 DM, DN 的方程分别为 $y=x+2, y=-2x+2$.

由 $\begin{cases} y=x+2, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1. \end{cases}$ 得 $5x^2 + 12x = 0$, 所以 $x_M = -\frac{12}{5}$, 所以 $y_M = -\frac{2}{5}$, 所以 $M(-\frac{12}{5}, -\frac{2}{5})$, 同理可求得 $N(\frac{12}{7}, -\frac{10}{7})$.
..... 8 分

所以直线 l 的斜率为 $\frac{-\frac{2}{5} - (-\frac{10}{7})}{-\frac{12}{5} - \frac{12}{7}} = -\frac{1}{4}$, 所以 l 的方程为 $y + \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}(x + \frac{12}{5})$.

即 $x + 4y + 4 = 0$ 10 分

(ii) 设直线 l 的方程为 $y=kx+m (m \neq \pm 2)$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1. \end{cases}$ 消去 y 并整理, 得 $(2+3k^2)x^2$

$$+ 6mkx + 3m^2 - 12 = 0.$$

$$\text{则 } \Delta = 36k^2m^2 - 4(2+3k^2)(3m^2-12) = 24(6k^2-m^2+4) > 0.$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = -\frac{6mk}{3k^2+2}, x_1x_2 = \frac{3m^2-12}{3k^2+2}, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } k_1k_2 = -1, \text{ 得 } k_1k_2 &= \left(k + \frac{m-2}{x_1}\right)\left(k + \frac{m-2}{x_2}\right) = k^2 + \frac{(m-2)(x_1+x_2)}{x_1x_2}k + \frac{(m-2)^2}{x_1x_2} \\ &= k^2 + \frac{(m-2)\left(-\frac{6mk}{3k^2+2}\right)k}{\frac{3m^2-12}{3k^2+2}} + \frac{(m-2)^2}{\frac{3m^2-12}{3k^2+2}} = k^2 - \frac{2mk^2}{m+2} + \frac{(m-2)(3k^2+2)}{3(m+2)} \\ &= \frac{2m-4}{3(m+2)} = -1, \dots\dots\dots 15 \text{ 分} \end{aligned}$$

解得 $m = -\frac{2}{5}$, 满足 $\Delta > 0$, 所以直线 l 的方程为 $y = kx - \frac{2}{5}$, 故 l 过定点 $E(0, -\frac{2}{5})$.

由题意知点 P 在以 DE 为直径的圆上, 所以当点 Q 为线段 DE 的中点 $(0, \frac{4}{5})$ 时, $|PQ| = \frac{1}{2}|DE| = \frac{6}{5}$, 为定值.
..... 17 分

19. (1) 解: 初始状态 $X_0=2$, 即 2 个在线, 3 个宕机. 第 1 个月选中在线节点的概率为 $\frac{2}{5}$, 此时 $X_1=2$; 选中宕机节点的概率为 $\frac{3}{5}$, 其中修复成功的概率为 $p = \frac{1}{3}$, 此时 $X_1=3$; 修复失败的概率为 $\frac{2}{3}$, 此时 $X_1=2$.

$$\text{所以 } P(X_1=2) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{5}, P(X_1=3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$P(X_2=3|X_1=2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}, P(X_2=3|X_1=3) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{15}.$$

$$\text{所以 } P(X_2=3) = P(X_1=2) \cdot P(X_2=3|X_1=2) + P(X_1=3) \cdot P(X_2=3|X_1=3)$$

十堰市 2026 年高三年级 3 月调研考试

数 学

本试题卷共 4 页,19 题,均为必考题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★ 祝考试顺利 ★

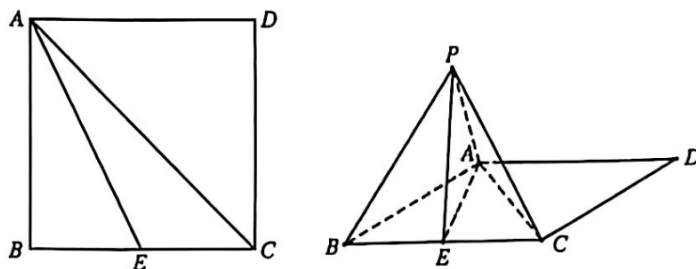
注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡和试卷指定位置上,并将考号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。答在试题卷、草稿纸上无效。
3. 非选择题用 0.5 毫米黑色墨水签字笔将答案直接答在答题卡上对应的答题区域内。答在试题卷、草稿纸上无效。
4. 考生必须保持答题卡的卷面整洁。考试结束后,只交答题卡。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $zi = \frac{3-i}{1+i}$, 则 $z =$
A. $-2+2i$ B. $-2-2i$ C. $-2+i$ D. $-2-i$
2. 已知单位向量 a, b 满足 $|a+b| = \sqrt{3}$, 则 a 与 b 的夹角为
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
3. 已知集合 $A = \{x | (x-a)(x+1) \leq 0\} (a > 0)$, $B = \{x \in \mathbb{N} | tx = 6, t \in \mathbb{N}^*\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围为
A. $[6, +\infty)$ B. $(6, +\infty)$ C. $[3, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$
4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_3 + a_9 = 20$, $S_7 = 28$, 则 $a_{11} =$
A. 19 B. 25 C. 30 D. 33
5. 已知直线 $l: mx + y - m = 0 (m \in \mathbb{R})$ 与圆 $C: x^2 + (y-1)^2 = 4$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$
6. 冷链物流是指冷藏冷冻类物品在生产、贮藏、运输、销售到消费前的各个环节中始终处于规定的低温环境下, 以保证物品质量、减少损耗的系统工程。主要包括初级农产品(如蔬菜、水果、肉禽蛋等)、加工食品(如速冻食品、冰淇淋等)和特殊商品(如药品等)。已知某蔬菜的保鲜时间 y (单位: 小时)与贮藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$)之间满足: $y = e^{ax+b}$ (其中 a, b 为常数)。若该蔬菜在贮藏温度为 9°C 的环境下保鲜时间为 261 小时, 在 23°C 的环境下保鲜时间为 29 小时, 且该蔬菜所需物流时间为 87 小时, 则该蔬菜在物流过程中的贮藏温度不能超过
A. 12°C B. 14°C C. 16°C D. 18°C

7. 如图,在正方形 $ABCD$ 中, E 为 BC 的中点,将 $\triangle ACD$ 沿直线 AC 折起至 $\triangle ACP$ 处,使得点 P 在平面 ABC 上的射影在直线 AE 上,若三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 8π ,则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为



- A. $\frac{8}{9}$ B. 1 C. $\frac{16}{9}$ D. $\frac{8}{3}$

8. 已知函数 $f(x) = \cos 2x$, 存在 x_1, x_2 , 满足 $f(x_1) + \frac{1}{f(x_2) + \frac{3}{2}} = 3$. 设 $m = |x_1 - x_2|_{\min}$, 函数 $g(x) =$

$f\left(\frac{3}{2}x\right) - 3f\left(\frac{1}{2}x\right)$, 则 $g(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上的最小值为

- A. $1 - \sqrt{2}$ B. $1 - \sqrt{3}$ C. $-2\sqrt{2}$ D. $-2\cos 1$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 已知 $a \in \mathbb{N}$, 记一组数据 $1, 2, 3, a, 8$ 为 M , 则

- A. 若 M 的极差为 9, 则 $a = 10$
 B. 若 M 的 80% 分位数是 6, 则 $a = 4$
 C. 若 M 的平均数为 3, 则 $a = 2$
 D. 若 M 的方差为 6.8, 则 $a = 1$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{1}{3}$, 则

- A. $y = f(x+1) + 4$ 为奇函数
 B. 3 是 $f(x)$ 的极大值点
 C. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(4, f(4))$ 处的切线方程为 $5x - y - 27 = 0$
 D. 若 $a > -1$, 则 $f(x)$ 在 $(-2, a)$ 上存在最大值

11. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $D(-1, 0)$ 为 C 的准线 l_1 上一点, 过焦点 F 且斜率大于 0 的直线 l_2 与 C 交于 A, B 两点 (A 在第一象限), 与准线 l_1 交于 P 点, O 为原点, 直线 AO, BO 分别交 l_1 于 M, N 两点, 则

- A. 若 $|FA| = 3$, 则直线 l_2 的斜率为 $\sqrt{2}$
 B. 若过 A 点的 C 的切线与 l_1 交于 Q 点, 则 $AF \perp QF$
 C. 若 $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, 则 $|MF| \cdot |NF| = 8\sqrt{3}$
 D. 若 $|PB|^2 = |BF| \cdot |AB|$, 则直线 l_2 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. $\left(\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\right)^5$ 的展开式中所有奇数项的系数和为_____.

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A , 点 $B(3a, 0)$. 若在 C 的渐近线上存在点 M , 使得 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 则 C 的离心率的取值范围是_____.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 b , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 a , $a_1 = a, b_1 = b$, 其中 $a, b \in \mathbb{N}^*$, 若 $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3$, 且存在 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_m + 1 = b_n$, 则 $b =$ _____; $a_1 + a_2 + \dots + a_m =$ _____.
(用 n 表示)

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a \sin 2B = 2 \sin A, b = 2$.

(1) 求 B ;

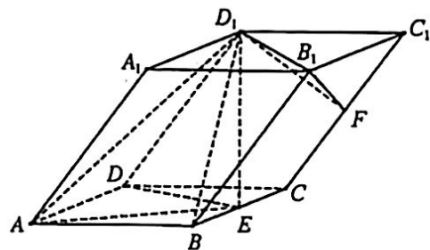
(2) 若 M 为边 AC 上一点, $\angle ABM = \frac{\pi}{6}, BM = \sqrt{3}$, 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由.

16. (本小题满分 15 分)

如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, E 为棱 BC 的中点, $D_1E \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $D_1E = DE$.

(1) 证明: 平面 $ADD_1 \perp$ 平面 DD_1E ;

(2) 若 $AB = 2$, F 为棱 CC_1 的中点, 求平面 ADD_1 与平面 B_1D_1F 的夹角的余弦值.



17. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+t)$.

(1) 若 $t = \frac{1}{2}$, 函数 $g(x) = f(x) - e^x + ax$, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 t 的取值范围.

18. (本小题满分 17 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 且与 x 轴垂直的直线交 C 于 A, B 两点.

(1) 求 $\angle AF_1B$ 的大小;

(2) 若 $D(0, 2)$ 为 C 的上顶点, 斜率为 k 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点 (异于 C 的上、下顶点), 记直线 DM, DN 的斜率分别为 k_1, k_2 .

(I) 若 $k_1 = 1, k_2 = -2$, 求 l 的方程;

(II) 若 $k_1 k_2 = -1$, 过 D 作 l 的垂线, 垂足为 P , 是否存在点 Q , 使得 $|PQ|$ 为定值? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

19. (本小题满分 17 分)

某智慧城市在主干道部署了 5 个独立边缘计算节点. 初始时有 2 个节点在线 (假设在线的不再宕机), 3 个为宕机 (停摆, 不能正常工作). 每个月系统随机等概率地巡查 1 个节点: 若该节点为宕机, 则修复, 修复后该节点转为在线, 不再宕机, 已知每个宕机节点修复成功的概率均为 $p (0 < p < 1)$; 若该节点已在线, 则仅进行维护. 用 X_n 表示第 n 个月后在线节点数, $E(X_n)$ 表示其数学期望.

(1) 当 $p = \frac{1}{3}$ 时, 求 $P(X_2 = 3)$;

(2) 证明: $E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{p}{5}\right)E(X_n) + p$;

(3) 已知每个宕机节点每个月会造成 2 万元的经济损失, 初始月份不考虑损失, 求从第 1 个月开始的 n 个月内的经济损失的总期望.

十堰市 2026 年高三年级 3 月调研考试

数学参考答案

1. D 由 $zi = \frac{3-i}{1+i}$, 得 $z = \frac{3-i}{i(1+i)} = \frac{3-i}{-1+i} = \frac{(3-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-4-2i}{2} = -2-i$ 故选 D.

2. B 由 $|a+b| = \sqrt{3}$, 得 $a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 3$, 结合 $|a| = |b| = 1$, 得 $a \cdot b = \frac{1}{2}$, 所以 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{1}{2}$, 又 $\langle a, b \rangle \in [0, \pi]$, 所以 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 故选 B.

3. A 由 $(x-a)(x+1) \leq 0 (a > 0)$, 得 $-1 \leq x \leq a$, 由 $x = \frac{6}{t}, t \in \mathbb{N}^+$, 得 $x = 1, 2, 3, 6$, 所以 $B = \{1, 2, 3, 6\}$, 又 $B \subseteq A$, 所以 $a \geq 6$, 故选 A.

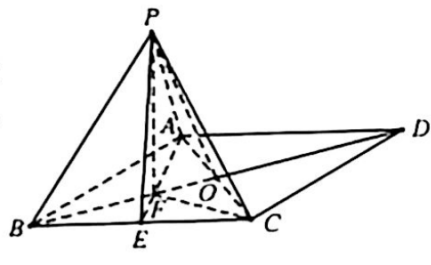
4. B 法 1: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_1 + a_9 = 20$, 得 $2a_5 = 20$, 即 $a_5 = 10$. 由 $S_7 = 28$, 得 $\frac{7(a_1 + a_7)}{2} = \frac{7 \times 2a_4}{2} = 7a_4 = 28$, 所以 $a_4 = 4$, 所以 $d = \frac{a_5 - a_4}{5 - 4} = \frac{10 - 4}{1} = 6$, 所以 $a_{11} = a_5 + 6d = 10 + 30 = 40$, 故选 B.

法 2: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由题意, 得 $\begin{cases} (a_1 + 2d) + (a_1 + 8d) = 20, \\ 7a_1 + \frac{7 \times 6}{2}d = 28, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_1 + 5d = 10, \\ a_1 + 3d = 4. \end{cases}$ 解得 $d = 3, a_1 = -5$. 所以 $a_{11} = a_1 + 10d = -5 + 10 \times 3 = 25$. 故选 B.

5. C 由题意知圆心 $C(0, 1)$, 直线 l 过定点 $D(1, 0)$, $|CD| = \sqrt{2}$, 当 $l \perp CD$ 时, $|AB|$ 最小, 此时 $|AB| = 2\sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$, 即 $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$. 故选 C.

6. C 由题意得 $\begin{cases} e^{2a+b} = 261, \\ e^{2a-b} = 29. \end{cases}$ 两式相除, 得 $e^{16a} = \frac{1}{9}$, 所以 $e^{2a} = \frac{1}{3} < 1$, 所以 $a < 0$. 设该蔬菜物流过程中的贮藏温度为 $x^\circ\text{C}$, 则 $e^{ax+b} \geq 87 = 3 \times 29 = 3e^{2a-b} = e^{-2a} \times e^{2a-b} = e^{16a-b}$, 所以 $ax+b \geq 16a+b$, 因为 $a < 0$, 所以 $x \leq 16$, 即该蔬菜在物流过程中贮藏温度不能超过 16°C . 故选 C.

7. A 记 $AC \cap BD = O$, P 在平面 ABC 上的射影为点 F , 则 F 在 AE 上, 连接 CF . 由 $PF \perp$ 平面 ABC , $PA = PC$, 可得 $AF = CF$. 又 BO 是线段 AC 的中垂线, 所以 F 在 BO 上, 即 $AE \cap BO = F$. 因为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 8π , 所以该球的半径为 $\sqrt{2}$, 又 $OP = OA = OC = OB$, 所以 $OP = OA = OC = OB = \sqrt{2}$, 因为 E 为 BC 的中点, O 为 AC 的中点, 所以 F 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $OF = \frac{1}{3}OB = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $AB = BC = 2$.



$PF = \sqrt{OP^2 - OF^2} = \frac{4}{3}$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot PF = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$. 故选 A.

8. C $f(x) = \cos 2x$, 则 $-1 \leq f(x_1) \leq 1, -1 \leq f(x_2) \leq 1$, 所以 $\frac{2}{5} \leq \frac{1}{f(x_2) + \frac{3}{2}} \leq 2$. 若存在 x_1, x_2 , 满足 $f(x_1) +$

$\frac{1}{f(x_2) + \frac{3}{2}} = 3$, 则当且仅当 $f(x_1) = 1, f(x_2) = -1$ 时等号成立, 所以 $2x_1 = 2k_1\pi (k_1 \in \mathbb{Z}), 2x_2 = \pi + 2k_2\pi (k_2 \in \mathbb{Z})$,

解得 $x_1 = k_1\pi (k_1 \in \mathbb{Z}), x_2 = \frac{\pi}{2} + k_2\pi (k_2 \in \mathbb{Z})$, 所以 $m = |x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$; $g(x) = f(\frac{3}{2}x) - 3f(\frac{1}{2}x) = \cos 3x - 3\cos x$, $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, 所以 $g(x) = \cos 3x - 3\cos x = 4\cos^3 x - 6\cos x$. 令 $\cos x = t$, 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, t 的

取值范围是 $[0, 1]$. 令 $h(t) = 4t^3 - 6t (t \in [0, 1])$, 则 $h'(t) = 12t^2 - 6$, 当 $t \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时, $h'(t) < 0$, $h(t)$ 单调递减; 当 $t \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ 时, $h'(t) > 0$, $h(t)$ 单调递增, 所以 $h(t)_{\min} = h(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 - 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$. 所以 $g(x)$ 在 $[0, m]$ 上的

最小值为 $-2\sqrt{2}$, 故选 C.

9. AB 对于 A, 因为 $a \in \mathbf{N}$, 其极差为 9, 所以 $a-1=9$, 所以 $a=10$, 故 A 正确; 对于 B, M 中共 5 个数, $5 \times 80\% = 4$, 则 80% 分位数是从小到大排列后第 4 个数和第 5 个数的平均数. 因为 80% 分位数是 6, 则必有一数小于 6, 一数大于 6, 故 $\frac{a+8}{2} = 6$, 解得 $a=4$, 故 B 正确; 对于 C, 由 $\frac{1+2+3+a+8}{5} = 3$, 解得 $a=1$, 故 C 错误; 对于 D, M 的平均数为 $\frac{14+a}{5}$, 所以 $\frac{1}{5} \left[\left(1 - \frac{14+a}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{14+a}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{14+a}{5}\right)^2 + \left(a - \frac{14+a}{5}\right)^2 + \left(8 - \frac{14+a}{5}\right)^2 \right] = 6.8$, 化简得 $a^2 - 7a + 6 = 0$, 解得 $a=1$, 或 $a=6$, 故 D 错误. 故选 AB.

10. AC $f(x+1)+4 = \frac{1}{3}(x+1)^3 - (x+1)^2 - 3(x+1) - \frac{1}{3} + 4 = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, 显然 $y=f(x+1)+4$ 是奇函数, 所以 A 正确; $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, 易得 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(3, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 3)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极小值, 故 B 错误; $f'(4)=5$, $f(4)=-7$, 故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(4, f(4))$ 处的切线方程为 $y-(-7)=5(x-4)$, 即 $5x-y-27=0$, 故 C 正确; 由上知 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 $\frac{4}{3}$, 由 $f(x) = \frac{4}{3}$, 得 $x=-1$ 或 $x=5$, 所以若 $f(x)$ 在 $(-2, a)$ 上存在最大值, 则 a 满足 $-1 < a \leq 5$, 故 D 错误. 故选 AC.

11. BCD 由题意知 $-\frac{p}{2} = -1$, 所以 $p=2$, 故 C 的方程为 $y^2=4x$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. 对于 A, 因为 $|FA|=3$, 由抛物线的定义, 得 $1+x_1=3$, 解得 $x_1=2$, 又 $y_1>0$, $y_1^2=8$, 所以 $y_1=2\sqrt{2}$, 此时 l_2 的斜率为 $\frac{2\sqrt{2}-0}{2-1} = 2\sqrt{2}$, 故 A 错误; 对于 B, 过 A 作 l_1 的垂线, 垂足为 A' , 由抛物线光学性质得 FA 的反射光线平行于 x 轴, 即直线 AA' 与直线 AF 关于 AQ 对称, 故 $\angle A'AQ = \angle FAQ$, 又 $|AA'| = |AF|$, $|AQ| = |AQ|$, 得 $\triangle A'QN \cong \triangle AQF$, 故 $\angle AFQ = \angle AA'Q = \frac{\pi}{2}$, 即 $AF \perp QF$, 故 B 正确; 对于 C, 设直线 l_2 的方程为 $x=ty+1$, 联立 l_2 的方程与 C 的方程, 得 $y^2-4ty-4=0$, 则 $\Delta=16t^2+16>0$, 且 $y_1+y_2=4t$, $y_1y_2=-4$, 易得直线 OA 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$, 令 $x=-1$, 得 $y_M = -\frac{y_1}{x_1} = -\frac{4}{y_1} = y_2$, 即 $y_M = y_2$. 同理可得 $y_N = y_1$, 所以 $BM \parallel x$ 轴, $AN \parallel x$ 轴, 由抛物线的性质得 $\angle MFN = \frac{\pi}{2}$, 又 $S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2} |DF| \cdot |y_1 - y_2| = S_{\triangle MBN} = 4\sqrt{3}$, 即 $\frac{1}{2} |MF| \cdot |NF| = 4\sqrt{3}$, 所以 $|MF| \cdot |NF| = 8\sqrt{3}$, 故 C 正确; 由 $|PB|^2 = |BF| \cdot |AB|$ 成立, 得 $\frac{|PB|}{|AB|} = \frac{|BF|}{|PB|}$, 由选项 C 知 $AN \parallel BM \parallel x$ 轴, $\frac{|MP|}{|MN|} = \frac{|PB|}{|AB|}$, $\frac{|BF|}{|PB|} = \frac{|DM|}{|MP|}$, 故 $\frac{|PM|}{|MN|} = \frac{|DM|}{|MP|}$, 由 C 得, $y_M = y_2$, $y_N = y_1$, 且 $y_F = -\frac{2}{t} = -\frac{8}{y_1+y_2}$, 故 $\frac{|PM|}{|MN|} = \frac{y_2 + \frac{8}{y_1+y_2}}{y_1 - y_2} = \frac{y_2^2 + 4}{y_1^2 - y_2^2} = \frac{x_2 + 1}{x_1 - x_2}$, $\frac{|DM|}{|MP|} = \frac{-y_2}{y_2 + \frac{8}{y_1+y_2}} = \frac{1-x_2}{x_2+1}$, 故 $\frac{x_2+1}{x_1-x_2} = \frac{1-x_2}{x_2+1}$, 所以 $x_1 = 3x_2 + 2$, 又 $x_1x_2 = \frac{(y_1y_2)^2}{16} = 1$, 所以 $3x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$, 解得 $x_2 = -1$ (舍), 或 $x_2 = \frac{1}{3}$, 所以 $y_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, 所以 l_2 的斜率等于 $\frac{0 - (-\frac{2}{\sqrt{3}})}{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3}$, 所以 l_2 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

12. 121 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k \left(\frac{1}{x}\right)^{6-k} (2\sqrt{x})^k = C_6^k x^{k-2} 2^k x^{\frac{k}{2}} = 2^k C_6^k x^{\frac{3k-10}{2}}$, $k=0, 1, 2, \dots, 6$. 当 $k=0, 2, 4$ 时, $T_1 = x^{-5}$, $T_1 = 40x^{-5}$, $T_5 = 80x$, 其系数和为 $1+40+80=121$.

13. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ 法 1: 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的右顶点 $A(a, 0)$, 不妨取渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 设 $M(m, \frac{bm}{a})$, 则 $\overrightarrow{MA} = (a-m, -\frac{bm}{a})$, $\overrightarrow{MB} = (3a-m, -\frac{bm}{a})$, 由 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 得 $(a-m)(3a-m) + \frac{b^2}{a^2}m^2 = 0$, 整理得 $\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)m^2 - 4ma + 3a^2 = 0$. 由题意知该关于 m 的方程有解, 所以 $\Delta = 16a^2 - 4\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot 3a^2 \geq 0$, 可得 $a^2 \geq 3b^2 = 3(c^2 - a^2)$, 即 $3c^2 \leq 4a^2$, 所以 $e = \frac{c}{a} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 又 $e>1$, 所以 $1 < e \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 即 C 的离心率的取值范围是 $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

法2:由 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ 知,点M在以AB为直径的圆D: $(x-2a)^2 + y^2 = a^2$ 上,由题意知,C的渐近线与圆D有公共点,所以D到C的渐近线 $bx \pm ay = 0$ 的距离满足 $\frac{|2ab|}{\sqrt{b^2+a^2}} \leq a$,即 $2b \leq c$,所以 $4(c^2 - a^2) \leq c^2$,所以 $3c^2 \leq 4a^2$,所以 $e \leq$

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,又 $e > 1$,所以 $1 < e \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$,即C的离心率的取值范围为 $(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$.

14. 3(3分) $3 \times 2^{2n-2} + 2^{n-2}$ (2分) **可能多种形式!** $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 \Leftrightarrow a < b < a+b < ab < a+2b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b < a+b, \\ a+b < ab, \\ ab < a+2b, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 0 < a < b, \\ a+b-ab-1 < -1, \\ ab-a-2b+2 < 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < b, \\ (a-1)(1-b) < -1, \\ (a-2)(b-1) < 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < b, \\ (a-1)(b-1) > 1, \\ (a-2)(b-1) < 2, \end{cases}$$
 考虑到 $a, b \in \mathbb{N}^*$, 分情况讨论:

(1) 若 $b-1=1$, 则 $\begin{cases} 0 < a < 2, \\ a-1 > 1, a \text{ 无解}; \\ a-2 < 2, \end{cases}$

(2) 若 $b-1=2$, 则 $\begin{cases} 0 < a < 3, \\ a-1 > \frac{1}{2}, \text{ 所以 } b=3, a=2; \\ a-2 < 1, \end{cases}$

(3) 若 $b-1=k(k \geq 3)$, 则 $\begin{cases} 0 < a < k+1, \\ a-1 > \frac{1}{k}, \text{ 所以 } b=k+1 \geq 4, a=2, \\ a-2 < \frac{2}{k}. \end{cases}$

综上, $b=k(k \geq 3, k \in \mathbb{N}^*), a=2$.

由 $a_n + 1 = b_n$, 得 $3 + (m-1)b = b \cdot 2^{n-1}$, 所以 $b = \frac{3}{2^{n-1} - m + 1}$, 又 $b > a = 2, b \in \mathbb{N}^*$, 所以 $2^{n-1} - m + 1 = 1, b = 3$. 此时

$m = 2^{n-1}$, 所以 $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 2m + \frac{m(m-1)}{2} \times 3 = 2^n + \frac{3}{2} \times 2^{n-1} (2^{n-1} - 1) = 3 \times 2^{n-2} + 2^{n-2}$.

15. (1) 解: 由 $a \sin 2B = 2 \sin A$ 及 $b=2$, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{2 \sin B \cos B}$

由正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 3分

所以 $\cos B = \frac{1}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 5分

(2) 证明: $\triangle ABC$ 为等边三角形. 6分
理由如下:

由(1)知 $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, 因为 $\angle ABM = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle CBM = \frac{\pi}{6}$ 8分

由 $S_{\triangle AMB} + S_{\triangle CMB} = S_{\triangle ABC}$ 及 $BM = \sqrt{3}$, 得 $\frac{1}{2}c \cdot BM \sin \angle ABM + \frac{1}{2}a \cdot BM \sin \angle CBM = \frac{1}{2}ac \sin \angle ABC$.

所以 $a+c=ac$ 10分

由余弦定理, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 即 $4 = (a+c)^2 - 3ac$ 11分

所以 $(a+c)^2 - 3(a+c) = 4$, 解得 $a+c=ac=4$ 12分

所以 $a=c=2$, 又 $b=2$, 所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形. 13分

16. (1) 证明: 连接BD, 因为四边形ABCD为菱形, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle BCD$ 为正三角形.

又E为BC的中点, 所以 $DE \perp BC$ 1分

因为 $AD \parallel BC$, 所以 $AD \perp DE$.

因为 $D_1E \perp$ 平面ABCD, $AD \subset$ 平面ABCD, 所以 $AD \perp D_1E$ 3分

又 $DE, D_1E \subset$ 平面 DED_1 , 且 $DE \cap D_1E = E$, 所以 $AD \perp$ 平面 DD_1E .