

答案解析~栩鑫童靴的小测错题配套练习~高二数学春季第 14 讲 深中定制

错题回顾

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_{n+1} = 3a_n + 2$, 且 $a_1 = 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $b_n = \frac{(2n-1)(a_n+1)}{n(n+1)}$, 求满足不等式 $T_n < 2026$ 的最大整数 n .

【解答】解: (1) 因为 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$,

所以 $a_2 = 3 \times 2 + 2 = 8$, 所以 $\frac{a_2+1}{a_1+1} = \frac{8+1}{2+1} = 3$,

因为 $a_{n+1} = 3a_n + 2$, 所以 $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$, $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1} = 3$,

所以数列 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 $a_1 + 1 = 3$, 公比为 3 的等比数列,

所以 $a_n + 1 = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$, 即 $a_n = 3^n - 1$;

(2) 因为 $a_n + 1 = 3^n$, 所以 $b_n = \frac{(2n-1)3^n}{n(n+1)} = \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$,

所以 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \left(\frac{3^2}{2} - \frac{3^1}{1}\right) + \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2}\right) + \dots + \left(\frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n}\right) = \frac{3^{n+1}}{n+1} - 3$,

因为 $b_n > 0$, $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, 所以随着 n 逐渐变大, T_n 也逐渐变大, 即 T_n 单调递增,

当 $n = 7$ 时, $T_7 = \frac{3^8}{8} - 3 = 817.125 < 2026$,

当 $n = 8$ 时, $T_8 = \frac{3^9}{9} - 3 = 2184 > 2026$,

所以满足不等式 $T_n < 2026$ 的最大整数 n 为 7.

答案解析~小测错题配套练习

2-1. 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = 20$, 数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是公差为 6 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = 2^{\frac{a_n}{4}}$, 求证: $\{b_n\}$ 为等比数列, 并求 $\{b_n\}$ 前 n 项和 M_n .

【解答】解: (1) 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = 20$,

数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是公差为 6 的等差数列,

则根据等差数列的通项公式可得 $\frac{S_n}{n} = \frac{S_2}{2} + 6(n-2) = 6n - 2$, 从而 $S_n = 6n^2 - 2n$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 12n - 8$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 4$ 也满足上式,

则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 12n - 8$;

(2) 证明: 记 $b_n = 2^{\frac{a_n}{4}}$, 则 $b_n = 2^{3n-2}$,

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{2^{3n-2}}{2^{3(n-1)-2}} = \frac{2^{3n-2}}{2^{3n-5}} = 2^3 = 8$,

故 $\{b_n\}$ 是首项为 $b_1 = 2$, 公比为 8 的等比数列;

由等比数列求和公式可得 $\{b_n\}$ 前 n 项和:

$$M_n = \frac{2(1-8^n)}{1-8} = \frac{2(8^n-1)}{7}.$$

2-2. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 3a_n - 6$.

(1) 证明数列 $\{a_n - 3\}$ 为等比数列, 并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{3^{n-1}}{a_n a_{n+1}}$, 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 证明: $S_n < \frac{1}{8}$.

【解答】解: (1) 证明: 由 $a_{n+1} = 3a_n - 6$, 得到 $a_{n+1} - 3 = 3(a_n - 3)$,

所以数列 $\{a_n - 3\}$ 是以 $a_1 - 3 = 4 - 3 = 1$ 为首项, 3 为公比的等比数列.

则 $a_n - 3 = 3^{n-1}$ ，得到 $a_n = 3^{n-1} + 3$ ；

(2) 证明：由 $a_n = 3^{n-1} + 3$ ， $b_n = \frac{3^{n-1}}{a_n a_{n+1}}$ ，

可得 $b_n = \frac{3^{n-1}}{(3^{n-1} + 3)(3^n + 3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^{n-1} + 3} - \frac{1}{3^n + 3} \right)$ ，

则 $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+3} - \frac{1}{3+3} + \frac{1}{3+3} - \frac{1}{3^2+3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}+3} - \frac{1}{3^n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^n+3} \right)$ ，

又 $\frac{1}{3^n+3} > 0$ ，所以 $S_n < \frac{1}{8}$ 。

2-3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $3a_n = 2S_n + 3$ ，数列 $\{b_n\}$ 是等差数列， $b_1 = \log_3 a_1$ ，且 $b_2 + 5$ 、 $b_4 + 1$ 、 $b_6 - 3$ 成等比数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $c_n = \frac{b_{n+2} - 1}{b_n \cdot b_{n+1} \cdot a_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ；

(3) 记 $m_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ \frac{b_n}{2}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求 $\sum_{k=1}^n m_k$ 。

【解答】解：(1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $3a_n = 2S_n + 3$ ，

当 $n=1$ 时， $3a_1 = 2S_1 + 3 = 2a_1 + 3$ ，解得 $a_1 = 3$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3a_n - 3}{2} - \frac{3a_{n-1} - 3}{2}$ ，整理得 $a_n = 3a_{n-1}$ ，

又 $\because a_1 \neq 0$ ， $\therefore a_{n-1} \neq 0$ ， $\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$ ，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3、公比为 3 的等比数列，

$\therefore a_n = 3^n$ ，

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ， $\because b_1 = \log_3 a_1$ ，且 $b_2 + 5$ 、 $b_4 + 1$ 、 $b_6 - 3$ 成等比数列，

$\therefore (b_4 + 1)^2 = (b_2 + 5) \cdot (b_6 - 3)$ ，即 $d^2 - 4d + 4 = (d - 2)^2 = 0$ ，解得 $d = 2$ ， $\therefore b_n = 2n - 1$ 。

(2) 由(1) 可知 $c_n = \frac{b_{n+2} - 1}{b_n \cdot b_{n+1} \cdot a_n} = \frac{2n + 2}{(2n - 1) \cdot (2n + 1) \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{(2n - 1) \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{(2n + 1) \cdot 3^n} \right]$

则 $T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 3^0} - \frac{1}{3 \times 3^1} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3 \times 3^1} - \frac{1}{5 \times 3^2} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{(2n-1) \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n} \right] \\&= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{1 \times 3^0} - \frac{1}{3 \times 3^1} + \frac{1}{3 \times 3^1} - \frac{1}{5 \times 3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n} \right] \\&= \frac{1}{2} \times \left[1 - \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n} \right]\end{aligned}$$

$$(3) \text{ 由题意可知, } m_n = \begin{cases} 3^n, n \text{ 为奇数} \\ n-1, n \text{ 为偶数} \end{cases},$$

当 n 为偶数时,

$$\sum_{k=1}^n m_k = 3^1 + 1 + 3^3 + 3 + 3^5 + 5 + \cdots + 3^{n-1} + n - 1 = \frac{n^2}{4} + \frac{1}{8} \cdot 3^{n+1} - \frac{3}{8};$$

当 n 为奇数时,

$$\sum_{k=1}^n m_k = 3^1 + 1 + 3^3 + 3 + 3^5 + 5 + \cdots + n - 1 - 1 + 3^n = \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{1}{8} \cdot 3^{n+2} - \frac{3}{8}.$$