

高中数学公式与二级结论全测

目录

集合

1. 集合与简单逻辑	07
------------------	----

不等式

1. 不等关系与不等式	08
1.1. 不等式的基本性质	08
1.2. 倒数性质	08
1.3. 有关分数的性质	09
2. 基本不等式	09
2.1 基本不等式	09
2.2. 均值定理	09
2.3 常见求最值模型	09
2.4 其他不等式	10
2.5 基本不等式求最值的方法	10
3. 一元二次不等式及其解法	10
3.1 简单的分式不等式的解法	10
3.2 高次不等式的解法	11
3.3 一元二次不等式的解	11
3.4 超越不等式的解法	11
4. 含参数的不等式的解法	12
5. 含有几何意义的目标函数	12

函数

1. 主方公式	13
---------------	----

2. 映射 13

3. 函数定义域 13

 3.1. 基本初等函数定义域 13

 3.2. 抽象函数定义域 13

4. 函数的解析式 14

5. 函数值域的求法 14

6. 函数的单调性:注意单调区间书写“,”或“和”连接 16

 6.1. 函数单调性的定义 16

 6.2. 函数单调性的判别方法 16

7. 函数的奇偶性 18

8. 函数的对称性:同号→对称轴;异号→对称中心 19

9. 函数的周期性 20

10. 二次函数与一元二次方程根的分布 21

11. 函数的图象变换 22

12. 指数与对数 22

13. 反函数 25

14. 幂函数 26

导数

1. 变化率与导数、导数的计算 27

 1.1 平均变化率及瞬时变化率 27

 1.2 导数的概念 27

 1.3 导数的几何意义 28

 1.4. 基本初等函数的导数公式 28

 1.5 导数的运算法则 28

 1.6 导数的切线方程 28

2. 利用导数研究函数的性质 28

2.1 函数的导数与单调性的关系	28
2.2 求函数的单调区间的步骤	29
2.3 函数的极值与导数	29
2.4 函数的最值与导数	30
3. 构造函数	30
4. 证明题中常用的不等式	31
5. 泰勒展开式常见公式	31
6. 导数中常见的同构问题	32

三角函数

1. 任意角和弧度制以及任意角的三角函数	32
1.1 角的分类	32
1.2 象限角	32
1.3 角的弧度制	32
1.4 任意角的三角函数	32
2. 同角三角函数的基本关系及其诱导公式	33
2.1 同角三角函数的基本关系	33
2.2 三角函数的诱导公式	33
2.3 特殊角的三角函数值	33
3. 三角恒等变换	34
3.1 三角变换技巧	34
3.2 三角恒等与不等式	36
4. 正弦定理与余弦定理	36
5. 三角形中的三角变换	37
6. 三角形边、角关系定理及其面积公式	38
7. 三角函数的图象与性质	39
8. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的性质	40
9. 求三角函数的值域	41

平面向量

1. 平面向量的概念及其线性运算	42
1.1 向量的有关概念	42
1.2 向量的表示方法	42
1.3 向量的线性运算	42
1.4 共线向量定理	43
2. 平面向量基本定理	43
2.1 平面向量的正交分解	43
2.2 平面向量的坐标运算	44
3. 平面向量的数量积	44
3.1 平面向量数量积的有关概念	44
3.2 向量数量积的性质	44
3.3 数量积的运算律	44
3.4 数量积的坐标运算	45
4. 向量的有关定理	45
4.1 奔驰定理	45
4.2 极化恒等式	46
4.3 对角线向量定理	46
4.4 等和线定理	46
5. 三角形“四心”的向量表示	47
5.1 三角形各心介绍	47
5.2 三角形各心的向量表示	47

数列

1. a_n 与 S_n	47
2. 等差数列	47
2.1 通项公式及其前 n 项和	47
2.2 等差数列的常用性质	48
2.3. 与等差数列各项的和有关的性质	48

3. 等比数列 48

4. 一些特殊数列的前 n 项和 49

5. 常见的裂项方式 49

6. 求和 49

立体几何

1. 立体几何初步 50

2. 常见几何体的外接球模型 50

3. 空间向量 53

 3.1 基础知识 53

 3.2 利用空间向量证明位置关系 53

 3.3 利用空间向量求解距离问题 54

 3.4 利用空间向量求解距离问题 54

4. 面积射影定理 55

5. 三余弦定理 55

解析几何

1. 直线与圆 56

 1.1 斜率公式 56

 1.2 直线的五种方程 56

 1.3 夹角公式 56

 1.4 斜率关系 57

 571.6 平行与垂直 57

 1.7 距离公式 57

 1.8 四种直线系方程 57

2. 圆的方程 57

 2.1 圆的一般与标准方程 57

 2.2 圆的切点弦方程 58

 2.3 圆系方程 58

圆锥曲线

1. 椭圆	58
2. 双曲线	59
3. 抛物线	59
4. 圆锥曲线共性公式、结论	60

排列与组合

1. 两个计数原理	61
2. 排列数公式	61
3. 组合数公式及性质	62
4. 分配问题	62
5. 二项式定理	63

概率

1. 离散型随机变量	64
1. 性质	64
2. 离散随机变量的数学期望、方差、标准差	64
3. 常见分布列	64
2. 统计	65
1. 回归直线方程	65
2. 相关系数	65
3. 独立性检验	65
4. 复数	65
1. 复数概念	66
2. 复数分类	66
3. 复数相等	66
4. 共轭复数	66
5. 复数的模	66

6. 复数的四则运算法则 66

7. 关于 x 的实系数二次函数有复数根 66

8. 复数的计算高阶公式 66

集合

1. 集合与简单逻辑

(1) 集合关系及运算中常用结论

① $A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow A \underline{\hspace{1cm}} B \Leftrightarrow B \underline{\hspace{1cm}} A \Leftrightarrow A \cap B = \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$;

② 德·摩根定律: $C_U(A \cap B) = (C_U A) \cup (C_U B), C_U(A \cup B) = (C_U A) \cap (C_U B)$;

(2) 含有 n 个元素的集合共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个子集; $\underline{\hspace{2cm}}$ 个真子集; 非空子集有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个; 非空真子集有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个.

(3) 含逻辑连接词命题真假判定

- ① p 与 $\neg p$ 真假 $\underline{\hspace{2cm}}$;
- ② $p \wedge q$ 一假即为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 两真才为 $\underline{\hspace{2cm}}$;
- ③ $p \vee q$ 一真即为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 两假才为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(4) 常见结论的否定形式

结 论	是	都是	大于	小于	至少一个	至多一个	至少 n 个	至多 n 个	对所有 x , 成立	p 或 q	p 且 q	对任何 x , 不成立
否 定												

(5) 全称命题与特称命题的否定

全称命题: 对 $\forall x \in A$, 使 $p(x)$ 成立, 其否定为: $\underline{\hspace{2cm}}$;

特称命题: $\exists x \in A$, 使 $p(x)$ 成立, 其否定为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 充要条件判定方法

① 若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的 $\underline{\hspace{2cm}}$;

若 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的 _____;

若 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的 _____.

②集合法: 若满足条件 p 的集合为 A , 满足条件 q 的集合为 B ,

若 $A \subsetneq B$, 则 p 是 q 的 _____;

若 $B \subsetneq A$, 则 p 是 q 的 _____;

若 $A = B$, 则 p 是 q 的 _____.

不等式

1. 不等关系与不等式

1.1. 不等式的基本性质

(1) 对称性: $a > b \Leftrightarrow b$ _____ a (双向性)

(2) 传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a$ _____ c (单向性)

(3) 可加性: $a > b \Leftrightarrow a + c$ _____ $b + c$ (双向性)

(4) 同向可加性: $a > b, c > d \Leftrightarrow a + c$ _____ $b + d$ (单向性)

(5) 可乘性: $a > b, c > 0 \Rightarrow ac$ _____ bc ; $a > b, c < 0 \Rightarrow ac$ _____ bc

(6) $a > b > 0; c > d > 0 \Rightarrow ac$ _____ bd

(7) 乘方法则: $a > b > 0, a^n$ _____ $b^n (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

(8) 开方法则: $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}$ _____ $\sqrt[n]{b} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

(9) 若 $a, b \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{N}_+$, 则 $a^{m+n} + b^{m+n}$ _____ $a^m b^n + a^n b^m$ (当且仅当 $a = b$ 时等号成立)

推广: 若 $a, b, c \in \mathbb{R}^+, m, n, r \in \mathbb{N}_+$, 则

$a^{m+n+r} + b^{m+n+r} + c^{m+n+r}$ _____ $a^m b^n c^r + a^n b^r c^m + a^r b^m c^n$ (当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立)

1.2. 倒数性质

(1) $ab > 0$, 则 $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a}$ _____ $\frac{1}{b}$

(2) $a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a}$ _____ $\frac{1}{b}$

(3) $a > b > 0, 0 < c < d \Rightarrow \frac{a}{c}$ _____ $\frac{b}{d}$

(4) $0 < a < x < b$ 或 $a < x < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b}$ _____ $\frac{1}{x}$ _____ $\frac{1}{a}$

1.3. 有关分数的性质

若 $a > b > 0, m > 0$ 则

$$(1) \frac{b}{a} \frac{b+m}{a+m}; \frac{b}{a} \frac{b-m}{a-m} (b-m > 0)$$

$$(2) \frac{a}{b} \frac{a+m}{b+m}; \frac{a}{b} \frac{a-m}{b-m} (b-m > 0)$$

2. 基本不等式

2.1 基本不等式

(1) 如果 $a > 0, b > 0$ 那么 _____, 当且仅当 _____ 时, 等号成立. 其中 $\frac{a+b}{2}$ 叫作 a, b 的 _____, $\sqrt{ab}$ 叫作 a, b 的 _____, 即正数的算数平均数不小于它们的几何平均数.

注意: a : 基本不等式的前提是“一正”“二定”“三相等”; 其中“一正”指 _____, “二定”指 _____, “三相等”指 _____.

b : 连续使用不等式要注意取得一致.

变形 1: _____;

变形 2: _____;

(2) 重要不等式: $a, b \in R \Rightarrow a^2 + b^2 \geq$ _____;

变形 1: _____;

变形 2: _____;

(3) 基本不等式串: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \frac{a+b}{2} \sqrt{ab} \frac{a+b}{2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a, b \in R^+)$

2.2. 均值定理

已知 $x, y \in R^+$,

(1) 如果 $x + y = S$ (定值), 则 xy _____ $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 =$ _____ (当且仅当“ $x = y$ ”时等号成立). 即“和为定值, 积有 _____”

(2) 如果 $xy = P$ (定值), 则 $x + y$ _____ $2\sqrt{xy} =$ _____ (当且仅当“ $x = y$ ”时等号成立). 即“积为定值, 和有 _____”

2.3 常见求最值模型

模型一: $mx + \frac{n}{x} \geq$ _____ ($m > 0, n > 0$), 当且仅当 _____ 时等号成立;

模型二: $mx + \frac{n}{x-a} = m(x-a) +$ _____ $+ \frac{n}{x-a} \geq$ _____ $+ \frac{n}{x-a}$, 当且仅当 _____ 时等号成立;

模型三: $\frac{x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{ax+\frac{c}{x}+b} = \frac{1}{2\sqrt{ac}+b}$ ($a>0, c>0$), 当且仅当 _____ 时等号成立;

模型四: $x(n-mx) = \frac{mx(n-mx)}{m} = \frac{1}{m} \left(\frac{mx+n-mx}{2} \right)^2 =$ _____
 _____ ($m>0, n>0, 0<x<\frac{n}{m}$), 当且仅当 _____ 时等号成立.

2.4 其他不等式

(1) $a^3+b^3+c^3 \geq$ _____;

(2) $a^2+b^2+c^2$ _____ $ab+ac+bc$ ($a, b, c \in R$, 当且仅当 _____ 时取等号)

(3) 柯西不等式: 设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in R$, 则 _____, 当且仅当 $b=0$ ($i=1, 2, \dots, n$) 或存在一个实数 k , 使得 $a_i = kb_i$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$) 时, 等号成立.

(4) 权方和不等式: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq$ _____; 当且仅当 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 等号成立 ($x, y, a, b > 0$)

(5) 绝对值不等式:

① 对任意实数 a, b , 有 $|a+b|$ _____ $|a|+|b|$, 其中等号成立的条件为 _____;

② 对任意实数 a, b , 有 $|a-b|$ _____ $|a|+|b|$, 其中等号成立的条件为 _____;

③ 对任意实数 a, b , 有 $||a|-|b||$ _____ $|a \pm b|$ _____ $|a|+|b|$.

2.5 基本不等式求最值的方法

(1) 直接使用

(2) 分析法: a 、凑项; b 、凑系数; c 、凑完全平方式; d 、分离

(3) 代换: a 、“1”的代换; b 、消元; c 、判别式法; d 、局部代换; e 、三角代换

(4) 构造

(5) 待定系数法

3. 一元二次不等式及其解法

3.1 简单的分式不等式的解法

(1) $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \text{ _____ } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ _____ } 0 \\ g(x) \text{ _____ } 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f(x) \text{ _____ } 0 \\ g(x) \text{ _____ } 0 \end{cases};$

(2) $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \text{ _____ } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ _____ } 0 \\ g(x) \text{ _____ } 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f(x) \text{ _____ } 0 \\ g(x) \text{ _____ } 0 \end{cases};$

(3) $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \text{ _____ } 0 \text{ 或 } f(x) \text{ _____ } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ _____ } 0 \\ g(x) \text{ _____ } 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f(x) \text{ _____ } 0 \\ g(x) \text{ _____ } 0 \end{cases};$

$$(4) \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \underline{\hspace{1cm}} 0 \text{ 或 } f(x) \underline{\hspace{1cm}} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \underline{\hspace{1cm}} 0 \\ g(x) \underline{\hspace{1cm}} 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f(x) \underline{\hspace{1cm}} 0 \\ g(x) \underline{\hspace{1cm}} 0 \end{cases}.$$

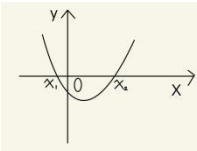
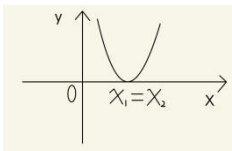
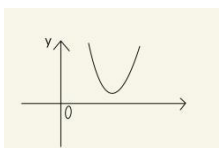
3.2 高次不等式的解法

(1) 先把不等式化为一端为零, 再对另一端分解因式, 并求出它的零点

(2) 把这些零点标在“数轴”上, 再用一条光滑的曲线

(3) 从 x 轴的右端上方起, 依次穿过这些零点 (注意: 含重根时“奇穿偶不穿”), 则大于零的不等式的解对应着曲线在 x 轴上方各部分的实数 x 的取值集合的并集; 小于零的不等式的解对应着曲线在 x 轴下方各部分的实数 x 的取值集合的并集.

3.3 一元二次不等式的解

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	① <u> </u> —	② <u> </u>	③ <u> </u>
$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集	④ <u> </u>	⑤ <u> </u>	⑥ <u> </u>
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集	⑦ <u> </u>	⑧ <u> </u>	⑨ <u> </u>

3.4 超越不等式的解法

(1) 指数不等式

通过变形先化为 $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ 的形式, 再利用指数函数的单调性化为普通不等式求解即可; 即: 当 $0 < a$

< 1 时, $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}};$

当 $a > 1$ 时, $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 对数不等式

先变形化为 $\log_a^{f(x)} > \log_a^{g(x)}$ 的形式, 再利用对数函数的单调性化为普通不等式解即可, 即: 当 $0 < a < 1$

时, $\log_a^{f(x)} > \log_a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \underline{\hspace{1cm}} g(x) \\ f(x) \underline{\hspace{1cm}} 0 \end{cases};$

当 $a > 1$ 时, $\log_a^{f(x)} > \log_a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \underline{\hspace{1cm}} g(x) \\ g(x) \underline{\hspace{1cm}} 0 \end{cases}.$

(3) 三角不等式: 先化为同名函数的大小关系, 再结合单位圆中的三角函数线或该三角函数的图象求

出解集

4. 含参数的不等式的解法

(1) 含参数的一元二次不等式的解法:

其关键是对参数分类讨论的标准的寻求,一般地考虑的次序为:

①二次项系数含参时,对二次项系数分: _____, _____, _____;

②二次项系数确定时,讨论判别式的 _____, _____, _____;

③有两根时(判别式 ≥ 0 的前提下),讨论两根的 _____, _____, _____.

(2) 不等式的恒成立(有解),求参数的取值范围

常用的处理方法有:

①直接转化为函数的最值问题(对于含参的一元二次不等式可以利用二次函数恒正(负)的等价条件处理);

②分离参数后转化为函数的最值问题(优先考虑此方法)

③数形结合(尽量化为“动直线定曲线”型处理)

④转化为一元二次方程根的分布问题

a :“判别式+韦达定理”,适用于两根均大(小)于 k 或两根一根大于 k 另一根小于 k 的情况

b :数形结合的方法(总是利用以下三个方面列不等式求解)

1) 判别式的正负;

2) 对称轴必须满足的范围;

3) 已知区间端点处函数值的正负.

5. 含有几何意义的目标函数

(1) 形如 $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$ 型的目标函数

这是一个圆的模型,可化为求定义范围内的点 _____ 与点 _____ 之间距离的最值问题. 其常见形式等价于 _____, _____.

(2) 形如 $z = \frac{ay+b}{cx+d}$ ($ac \neq 0$) 型的目标函数

这是一个斜率模型,可将其变形为 _____, 将问题化为求定义范围内的点 _____ 与 _____ 连线斜率的 _____ 倍的范围、最值等. 其常见等价形式为 _____, _____.

(3) 形如 $z = |Ax + By + C|$ 型目标函数

这是一个距离模型,可以化为 _____ 的形式,将问题转化为求定义范围内的点 _____ 到直线 _____ 的距离的 _____ 倍的最值.

函数

1. 立方公式

- (1) $a^3+b^3=$ _____;
- (2) $a^3-b^3=$ _____;
- (3) $(a+b)^3=$ _____;
- (4) $(a-b)^3=$ _____.

2. 映射

(1) 若 A 有 m 个元素, B 有 n 个元素;

则映射 $f:A \rightarrow B$ 有 _____ 个; 映射 $f:B \rightarrow A$ 有 _____ 个

3. 函数定义域

3.1. 基本初等函数定义域

已知函数解析式, 若未作特殊说明, 则定义域是使解析式有意义的自变量的取值范围, 一般有以下几种情况:

- (1) $\frac{1}{x}$ 分式中分母 _____;
- (2) $\sqrt[n]{x}$ 偶次方根的数或式 _____;
- (3) a^x 指数的底数 _____;
- (4) $\log_a^x$ 对数函数的底数 _____, 真数 _____;
- (5) $\tan x$ 正切函数 _____;
- (6) $\cot x$ 余切函数 _____;
- (7) $x^\alpha (\alpha \leq 0)$... 幂函数中零次幂或者负指数次幂的底数 _____.

3.2. 抽象函数定义域

一个“中心”, 两个“基本点”

(1) 以“ x ”为中心; (2) 对应法则相同, “()”内的取值范围相等.

3.3. 定义域恒成立问题

1. 复合型函数中定义域恒成立问题:

① $\sqrt{f(x)}$ 定义域为 $R \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ 恒成立; ② $\log_a f(x)$ 定义域为 $R \Leftrightarrow f(x) > 0$ 恒成立.

2. 对数函数复合型函数中值域恒成立问题:

$\log_a f(x)$ 值域为 $R \Leftrightarrow f(x)$ 能取到所有的正数.

4. 函数的解析式

求函数解析式的 4 种方法:

- (1) 换元法 (从前到后)
- (2) 配凑法 (整体法) (从后到前)
- (3) 待定系数法
- (4) 解方程组法: $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 、 $f(-x)$ 构建方程组

5. 函数值域的求法

- (1) 直接法
- (2) 分离常数法

类型一. $\frac{\text{一次}}{\text{一次}}$: 形如 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

解决方法——“三线法”

横线: 一次项系数之比 $y = \frac{a}{c}$;

竖线: 令分母部分为零 $x = -\frac{d}{c}$;

象限: “撇—捺” (与 k 的符号作用相同)

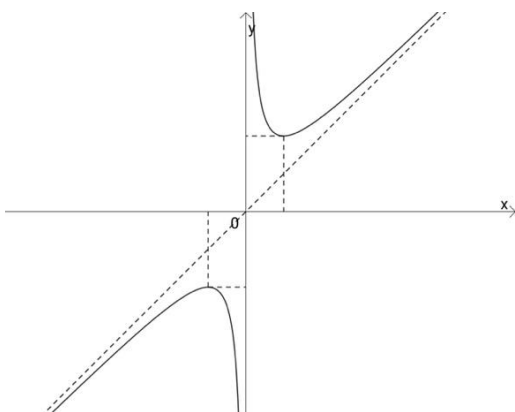
类型二. $\frac{\text{二次}}{\text{一次}}$: 形如 $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

解决方法——换元法

- ① 令一次函数为 t , 解出 x , 并标注 t 的取值范围 $f(t)$;
- ② 将函数 $f(x)$ 转化成关于 t 的函数 $f(t)$;
- ③ 利用对勾函数或者双刀函数的图像解出值域.

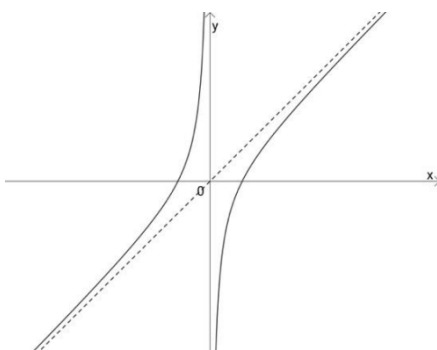
预备知识:

对勾函数: 形如 $y = ax + \frac{b}{x} (a, b > 0)$



①定义域	
②特殊点	
③值域	
④渐近线	

双刀函数:形如 $y = ax - \frac{b}{x} (a, b > 0)$



①定义域	
②特殊点	
③值域	
④渐近线	

类型三. 一次 + $\sqrt{\text{一次}}$: 形如 $y = ax + b + \sqrt{cx + d} (a, b, c, d \in R)$

解决方法:

①令 $\sqrt{\text{一次}} = t$, 解出 x , 并标注 t 的取值范围 $f(t)$;

②将函数 $f(x)$ 转化成关于 t 的函数 $f(t)$;

(3) 代数换元法

(4) 三角换元法

类型. 一次 + $\sqrt{\text{二次}}$

- (5) 配方法
- (6) 单调性法
- (7) 反函数法
- (8) 判别式法
- (9) 均值不等式法
- (10) 调和函数法
- (11) 实根分步法
- (12) 数形结合法
- (13) 余弦定理法
- (14) 等式法
- (15) 图象法
- (16) 导函数法

6. 函数的单调性: 注意单调区间书写用“,”或“和”连接

6.1. 函数单调性的定义

设 $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, 那么

(1) 若 $x_1 < x_2, f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为 _____;

若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为 _____;

若 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为 _____;

(同号为增)

(2) 若 $x_1 < x_2, f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为 _____;

若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为 _____; (异号为减)

若 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为 _____;

6.2. 函数单调性的判别方法

(1) 定义法

定义法: 一般处理抽象函数

第一步: 定义 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 设 $x_1 > x_2, \Delta x = x_1 - x_2 > 0$;

第二步: 比较 $\Delta y = y_1 - y_2$ 与 0 的大小关系;

第三步:若 $\Delta x \cdot \Delta y > 0$, 函数为 $[a, b]$ 上的增函数; 若 $\Delta x \cdot \Delta y < 0$, 函数为 $[a, b]$ 上的减函数.

(2) 性质法

① 增函数 + 增函数 = _____;

减函数 + 减函数 = _____;

增函数 - 减函数 = _____;

减函数 - 增函数 = _____;

增函数 + 减函数 = _____;

② 若 $f(x), g(x)$ 为增函数,

则 $\frac{1}{f(x)} (f(x) > 0)$ 为 _____;

$\sqrt{f(x)} (f(x) \geq 0)$ 为 _____;

$f^{-1}(x)$ 为 _____;

$-f(x)$ 为 _____;

$f(x) \cdot g(x) (f(x) > 0, g(x) > 0)$ 为 _____;

(3) 复合函数的单调性

若函数 $u = g(x), y = f(u), y = f(g(x))$;

外层函数 $y = f(u)$	增函数	增函数	减函数	减函数
内层函数 $u = g(x)$	增函数	减函数	增函数	减函数
复合函数 $y = f[g(x)]$				

注意: 同增异减, 如果是多层复合函数, 判断顺序由内及外

(4) 导数法

设 $f(x)$ 在定义域内可导,

如果 $f'(x) > 0$, 那么函数在该区间上为 _____;

如果 $f'(x) < 0$, 那么函数在该区间上为 _____;

$f'(x) > 0$ 是函数 $f(x)$ 在其定义域内为增函数的 _____;

(5) 图象法

从左到右, 图象上升即为 _____; 从左到右, 图象下降即为 _____.

解题小技巧: 当 $y \geq 0$ 的时候, y 与 y^2 的单调区间相同

对于分段函数的单调性的判断必须注意两点

(6) 每一段的单调性必须相同

(7) 各段之间的单调性要连续

7. 函数的奇偶性

(1) 前提条件: 定义域关于原点对称:

$f(x) = f(-x)$ 偶函数; $f(-x) = -f(x)$ 奇函数,

(2) 运算性质

a : 奇 $\times$ 奇 = _____; b : 偶 $\times$ 偶 = _____;

c : 奇 $\times$ 偶 = _____; d : 奇 $\pm$ 奇 = _____;

e : 偶 $\pm$ 偶 = _____; f : 奇 $\pm$ 偶 = _____;

拓展: 定义 $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)$, 注意 ($f_i(x) \neq 0$, 并且具有奇偶性), 若 m 为这 n 个函数中奇函

数的个数, 则 $F(x) = \begin{cases} \text{奇函数}, m \text{ 为奇数} \\ \text{偶函数}, m \text{ 为偶数} \end{cases}$

(3) 复合函数的奇偶性:

若函数 $u = g(x)$, $y = f(u)$, $y = f[g(x)]$: 保证定义域关于原点对称

外层函数 $y = f(u)$	奇函数	奇函数	偶函数	偶函数
内层函数 $u = g(x)$	奇函数	偶函数	奇函数	偶函数
复合函数 $y = f[g(x)]$				

“有偶则偶”注意适用范围:

a 、内外层函数同时具有奇偶性

b 、只要内层函数为偶函数则一定为偶函数

(4) 奇偶性的常见性质

a 、偶函数图象关于 _____ 轴对称; 奇函数图象关于 _____ 对称.

b 、奇函数如果原点有定义, 必有 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

c 、一般情况下, 奇函数的反函数仍然是 _____, 偶函数的反函数 _____.

d 、既是奇函数又是偶函数的函数是 _____, 这是一类函数.

e 、任何一个定义域关于原点对称的函数 $f(x)$ 都可以写成一个奇函数与一个偶函数和的形式 _____.

f 、奇函数的导数是 _____, 偶函数的导数是 _____.

$g, f(x) = f(|x|)$ 是函数 $f(x)$ 为偶函数的_____.

$h, f(x)$ 与 $f(x+a)$ ($a \neq 0$) 奇偶性的关系:

$f(x)$ 为偶函数	
$f(x+a)$ 为偶函数	
$f(x)$ 为奇函数	
$f(x+a)$ 为奇函数	
$f(x)+a$ 为奇函数	

i、定义在 R 上的函数 $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + t$, 若函数为奇函数, 则偶次幂函数系数为_____
 _____; 若函数为偶函数, 则奇次幂系数为_____. j、奇函数的最大值与最小值之和为_____.

(5) 奇函数模型

①特殊复合型 $g(x) = f(x) - f(-x)$ 例如: _____

②分数指数型 $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ 例如: _____

③对数分数型 $f(x) = \log_a \frac{mx+n}{mx-n}$ 例如: _____

④对数根式型 $f(x) = \log_a (\sqrt{1+m^2x^2} \pm mx)$ 例如: _____

⑤双绝对值型 $f(x) = |x+a| - |x-a|$ 例如: _____

(6) 偶函数模型

①特殊二次函数 $f(x) = ax^2 + b, f(x) = ax^2 + b|x|$ 例如: _____

②特殊复合型 $g(x) = f(x) + f(-x)$ 例如: _____

③对数二倍型 $f(x) = \log_a (a^{mx+1}) - \frac{m}{2}x$ 例如: _____

④双绝对值型 $f(x) = |x+a| + |x-a|$ 例如: _____

8. 函数的对称性: 同号 $\rightarrow$ 对称轴; 异号 $\rightarrow$ 对称中心

(1) 图象自身的对称性

$$f(x+a) = f(-x+a) \Leftrightarrow x=a; f(x+a) = -f(-x+a) \Leftrightarrow (a,0)$$

(2) 两个函数的对称性 ————— “取相等”

① $y = f(x)$ 与 $y = -f(x)$ 关于_____轴对称;

② $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 关于_____轴对称;

③ $y=f(x)$ 与 $y=-f(-x)$ 关于 _____ 对称;

④ $y=f(x)$ 与 $y=f(2a-x)$ 关于直线 _____ 对称;

⑤ $y=f(x+a)$ 与 $y=f(a-x)$ 关于直线 _____ 对称;

⑥ $y=f(x+a)$ 与 $y=-f(a-x)$ 关于点 _____ 对称;

⑦ $y=f(ax+b)$ 与 $y=f(c-ax)$ 关于直线 _____ 对称;

⑧ $y=f(ax+b)$ 与 $y=-f(c-ax)$ 关于点 _____ 对称.

9. 函数的周期性

(1) 核心公式: $f(x+T)=f(x) (T \neq 0) \Leftrightarrow T$;

(2) 周期结论

$f(x)$ 与 $f(x+a)$ 关系推导出来的周期结论

① $f(x+a)=f(x)$, 周期为 _____;

② $f(x+a)=\begin{cases} -f(x) \\ \frac{1}{f(x)} \\ -\frac{1}{f(x)} \\ f(x-a) \end{cases}$, 周期为 _____;

③ $f(x+a)=\frac{f(x)+1}{f(x)-1}$, 周期为 _____;

④ $f(x+a)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$, 周期为 _____;

⑤ $f(x)=f(x-a)-f(x-2a)$, 周期为 _____;

(3) 与对称性有关的周期结论

定义在 R 上的函数 $f(x)$

① 若函数有两个对称轴 $x=a, x=b$, 则函数 $f(x)$ 为周期函数, 最小正周期为 _____;

特殊地: $\begin{cases} f(x+a)=f(a-x) \\ f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases} \Rightarrow f(x)$ 的周期为 _____;

② 若函数有两个对称中心 $(a,0), (b,0)$, 则函数 $f(x)$ 为周期函数, 最小正周期为 _____;

特殊地: $\begin{cases} f(x+a)=-f(a-x) \\ f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases} \Rightarrow f(x)$ 的周期为 _____;

③ 若函数有一个对称中心 $(a,0)$, 有一个对称轴 $x=b$, 则函数 $f(x)$ 为周期函数有, 最小正周期为 _____;

特别地 $\begin{cases} f(a+x)=f(a-x) \\ f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases} \Rightarrow f(x)$ 的周期为 _____;

$\begin{cases} f(x+a)=-f(a-x) \\ f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases} \Rightarrow f(x)$ 的周期为 _____;

④若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为周期为 T_1, T_2 的周期函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 为周期函数 $\Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$.

不是所有的周期函数都有最小正周期, 比如常函数;

⑤无敌公式: “+”得对称, “-”得周期, 同号对称轴, 异号对称中心

$$f(ax+b)=f(c-ax) \Leftrightarrow x=\frac{b+c}{2a}$$

$$f(ax+b)+f(c-ax)=d \Leftrightarrow \left(\frac{b+c}{2a}, \frac{d}{2}\right)$$

$$f(ax+b)=f(ax+c) \Leftrightarrow T=\left|\frac{b-c}{a}\right|$$

10. 二次函数与一元二次方程根的分布

(1) 解析式:

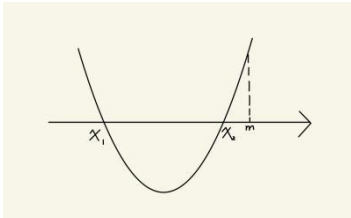
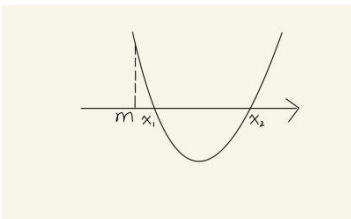
①一般式: _____;

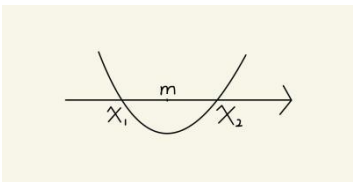
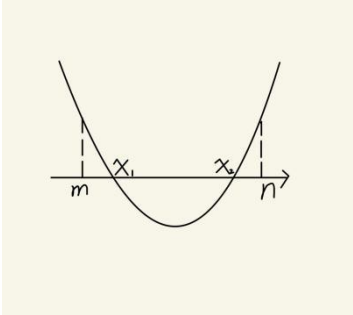
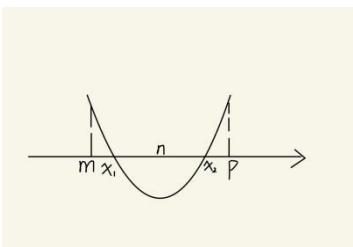
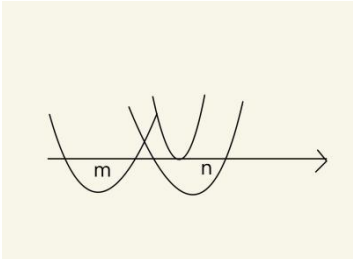
②顶点式: _____;

③交点式: _____;

(2) 一元二次方程根的分布 $\Rightarrow \begin{cases} \text{判别式} \\ \text{对称轴} \\ \text{边界点} \end{cases}$

(3) 一元二次方程根的分布规律: $f(x)=ax^2+bx+c, a>0$

零点分布	图象	满足条件
$x_1 < x_2 < m$		$\begin{cases} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{cases}$
$m < x_1 < x_2$		$\begin{cases} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{cases}$

$x_1 < m < x_2$		_____
$m < x_1 < x_2 < n$		{ _____ _____ _____ _____ }
$m < x_1 < n < x_2 < p$		{ _____ _____ _____ }
只有一个根在 (m, n) 之间		{ _____ _____ _____ }

11. 函数的图象变换

- ①将函数 $y = f(wx)$ 图象 _____ 得到 $y = f(w(x+a))$ 的图象；
- ②将函数 $y = f(x)$ 图象 _____ 得到 $y = f(x) + b$ 的图象；
- ③将函数 $y = f(x)$ 图象 _____ 得到 $y = |f(x)|$ 的图象；
- ④将函数 $y = f(x)$ 图象 _____ 得到 $y = f(|x|)$ 的图象；

12. 指数与对数

(1) 分数指数幂

正数的正分数指数幂是： $a^{\frac{m}{n}} =$ _____；

正数的负分数指数幂是： $a^{-\frac{m}{n}} =$ _____ = _____；

(2) 有理数指数幂的运算性质

$a^r \cdot a^s =$ _____；

$$(a^r)^s = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(ab)^r = \underline{\hspace{2cm}};$$

(3) 对数的定义

①若 $a^x = N$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则 x 叫以 a 为底 N 的对数, 记作 $x = \log_a N$, 其中 a 叫做底数, N 叫做真数.

②真数和零没有对数.

③对数式与指数式的互化: $x = \log_a N \Leftrightarrow a^x = N$ ($a > 0, a \neq 1, N > 0$)

(4) 几个重要的对数恒等式

$$\log_a 1 = \underline{\hspace{2cm}}; \log_a a = \underline{\hspace{2cm}}; \log_a a^b = \underline{\hspace{2cm}};$$

(5) 常用对数与自然对数

常用对数: $\lg^N$, 即 $\log_{10}^N$; 自然对数: $\ln^N$, 即 $\log_e^N$ (其中 $e = 2.71828 \dots$)

(6) 对数的运算性质 如果 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$, 那么

①加法: $\log_a^M + \log_a^N = \underline{\hspace{2cm}};$

②减法: $\log_a^M - \log_a^N = \underline{\hspace{2cm}};$

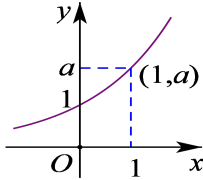
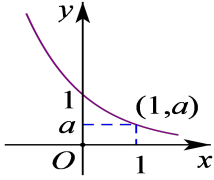
③数乘: $\log_a^{M^n} = \underline{\hspace{2cm}};$

④ $a^{\log_a^N} = \underline{\hspace{2cm}};$

⑤ $\log_a^{M^n} = \underline{\hspace{2cm}};$

⑥换底公式: $\log_a^N = \underline{\hspace{2cm}};$

(7) 指数函数的图象

函数名称	指数函数	
定义	函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 叫做指数函数	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象		
定义域		
值域		
过定点		
奇偶性		
单调性		
函数值的		

变化情况		
------	--	--

解题小技巧:函数 $y = ma^{x-c} + b$, 恒过点 _____;

a: 当底数大小不定时, 必须分“ $a > 1$ ”和“ $0 < a < 1$ ”两种情形讨论.

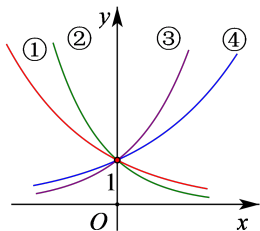
b: 当 $0 < a < 1$ 时, $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$; a 的值越小, 图象越靠近 y 轴, 递减的速度越快.

当 $a > 1$ 时 $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$; a 的值越大, 图象越靠近 y 轴, 递增速度越快.

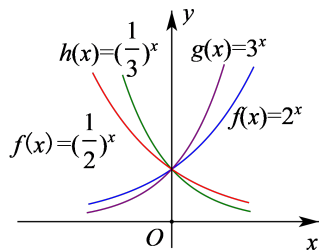
c: 指数函数 $y = a^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称.

函数① $y = a^x$; ② $y = b^x$; ③ $y = c^x$; ④ $y = d^x$ 的图象如图(1)所示, 则 $0 < b < a < 1 < d < c$;

即 $x \in (0, +\infty)$, $b^x < a^x < d^x < c^x$ (底大幂大); $x \in (-\infty, 0)$ 时, $b^x > a^x > d^x > c^x$.



图(1)



图(2)

d: 特殊函数: 函数 $y = 2^x, y = 3^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象如图(2)所示.

e: 指数式大小比较方法

① 单调性法: 化为同底数指数式, 利用指数函数的单调性进行比较.

② 中间量法: 当指数式的底数和指数各不相同, 需要借助中间量“0”和“1”作比较.

③ 分类讨论法: 指数式的底数不定时, 需要分类讨论底数的情况, 在利用指数函数的单调性进行比较.

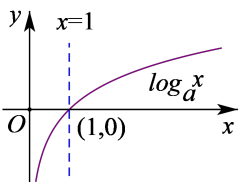
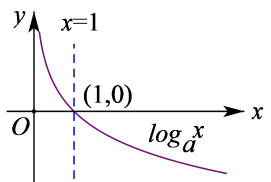
④ 比较法: 有作差比较与作商比较两种, 其原理分别为:

1) 若 $A - B > 0 \Leftrightarrow A > B$; 若 $A - B < 0 \Leftrightarrow A < B$; 若 $A - B = 0 \Leftrightarrow A = B$;

2) 当两个式子均为正值的情况下, 可用作商法, 判断 $\frac{A}{B} > 1$, 或 $\frac{A}{B} < 1$ 即可.

(8) 对数函数的图象

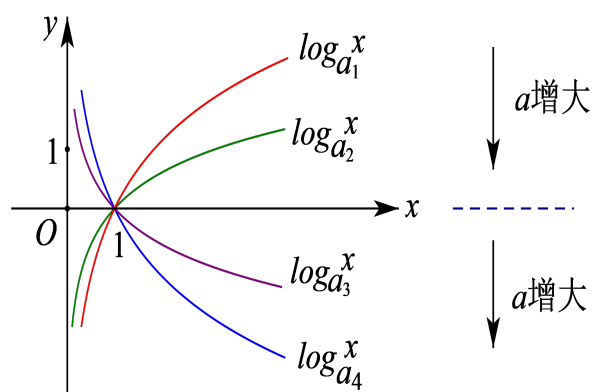
函数名称	对数函数	
定义	函数 $y = \log_a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 叫做对数函数	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象		

		
定义域		
值域		
过定点		
奇偶性		
单调性		
函数值的变化情况		

解题小技巧: 函数 $y = m\log_a^{(x-c)} + b$, 恒过点 _____;

a : 底数变化与图象变化的规律

在同一坐标系内, 当 $a > 1$ 时, 随 a 的增大, 对数函数的图象愈靠近 x 轴; 当 $0 < a < 1$ 时, 对数函数的图象随 a 的增大而远离 x 轴. (见下图)



13. 反函数

(1) 反函数的定义

设 A, B 分别为函数 $y = f(x)$ 的定义域和值域, 如果由函数 $y = f(x)$ 所解得的 $x = \varphi(y)$ 也是一个函数 (即对任意的一个 $y \in B$, 都有唯一的 $x \in A$ 与之对应), 那么就称函数 $x = \varphi(y)$ 是函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 在 $x = f^{-1}(y)$ 中, y 是自变量, x 是 y 的函数, 习惯上改写成 $y = f^{-1}(x)$ ($x \in B, y \in A$) 的形式. 函数 $x = f^{-1}(y)$ ($y \in B, x \in A$) 与函数 $y = f^{-1}(x)$ ($x \in B, y \in A$) 为同一函数, 因为自变量

的取值范围即定义域都是 B , 对应法则都为 f^{-1} .

由定义可以看出, 函数 $y = f(x)$ 的定义域 A 正好是它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的 _____; 函数 $y = f(x)$ 的值域 B 正好是它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的 _____.

注意: 并不是每个函数都有反函数, 有些函数没有反函数, 如 $y = x^2$. 一般说来, 单调函数有反函数.

(1) 反函数存在的条件: _____; _____.

(2) 反函数的求法

① _____

② _____

③ _____

(3) 反函数的性质

① 原函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 _____ 对称;

② 函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域分别是其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的 _____、_____;

③ 若 $P(a, b)$ 在原函数 $y = f(x)$ 的图象上, 则点 _____ 在反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象上;

④ 一般地, 函数 $y = f(x)$ 要有反函数它必须为 _____;

⑤ $f^{-1}[f(x)] = x, f[f^{-1}(x)] =$ _____;

14. 幂函数

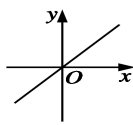
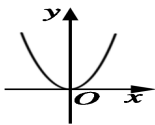
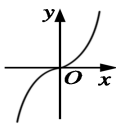
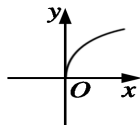
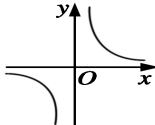
(1) 幂函数的定义: 一般地, _____ 的函数, 即以底数为自变量, 幂为因变量, 指数为常数的函数称为幂函数.

(2) 幂函数的特征: 同时满足一下三个条件才是幂函数

① x^a 的系数为 _____; ② x^a 的底数是 _____; ③ 指数为 _____.

(3) 幂函数的图象和性质

常见的幂函数图像及性质:

函数	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
图象					

定义域					
值域					
奇偶性					
单调性					
公共点					

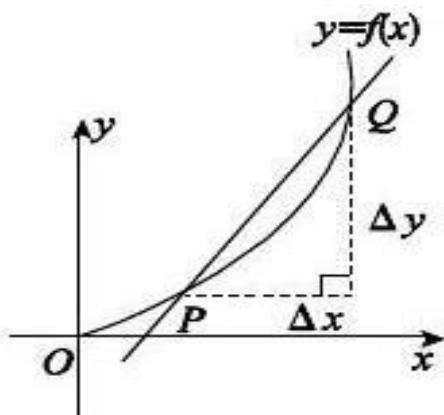
导数

1. 变化率与导数、导数的计算

1.1 平均变化率及瞬时变化率

(1) $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率是: $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ _____;

(2) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率是: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ _____;



1.2 导数的概念

(1) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数就是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的 _____, 记作 $y'|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

(2) 当把上式中的 x_0 看作 x 时, $f'(x)$ 即为 $f(x)$ 的导函数, 简称导数, 即 $y' = f'(x) =$ _____.

1.3 导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数就是 _____, 即曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $k = f'(x_0)$, 切线方程为 _____.

1.4. 基本初等函数的导数公式

(1) $C' = \underline{\hspace{2cm}}$ (C 为常数).

(2) $(x^n)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ($n \in \mathbb{Q}^*$)

(3) $(\sin x)' = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $(\cos x)' = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $(e^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $(a^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$

(7) $(\ln x)' = \underline{\hspace{2cm}}$

(8) $(\log_a^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$

1.5 导数的运算法则

(9) $[f(x) \pm g(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$

(10) $[f(x) \cdot g(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$

(11) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \underline{\hspace{2cm}}$ ($g(x) \neq 0$)

1.6 导数的切线方程

(12) 曲线在某点处的切线方程:先求出曲线在该点处的导数即 $\underline{\hspace{2cm}}$,再用 $\underline{\hspace{2cm}}$ 求出切线的方程.

(13) 曲线过某点处的切线方程:先设出 $\underline{\hspace{2cm}}$,求出曲线在切点的 $\underline{\hspace{2cm}}$,利用切线过已知点,求出 $\underline{\hspace{2cm}}$,再求出切线方程.

(14) 两曲线的公共切线:先分别设出两曲线的 $\underline{\hspace{2cm}}$,再分别求出两曲线在切点处的 $\underline{\hspace{2cm}}$,分别列出两曲线的 $\underline{\hspace{2cm}}$,再利用公切线的斜率和截距相同,求出切线方程.

(15) 已知斜率,求曲线的切线方程:先利用切线的斜率求出 $\underline{\hspace{2cm}}$,再列出点斜式方程即可.

2. 利用导数研究函数的性质

2.1 函数的导数与单调性的关系

函数 $y = f(x)$ 在某个区间内可导:

(1) 若 $f'(x) > 0$,则函数在这个区间内 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 若 $f'(x) < 0$,则函数在这个区间内 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 若 $f'(x) = 0$,则函数在这个区间内 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (4) 若函数在区间上单调递增, 则 $f'(x)$ _____.
- (5) 若函数在区间上单调递减, 则 $f'(x)$ _____.
- (6) 若函数 (非常量函数) 在区间上不单调, 则 _____.

2.2 求函数的单调区间的步骤

- ① 先求函数的 _____;
- ② 再求函数的 _____;
- ③ 令导函数大于 0, 得函数的单调 _____ 区间;
- ④ 令导函数小于 0, 得函数的单调 _____ 区间;

注意: 单调区间一定要写成区间形式, 且增 (减) 区间有多个的, 用“和”或者“逗号”连接, 不可用并集的符号表示.

2.3 函数的极值与导数

(7) 函数的极小值与极小值点

若函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点的函数值 _____, 而且函数在 $x=a$ 附近左侧 _____, 右侧 _____, 则 a 点叫做函数的极小值点, $f(a)$ 叫做函数的极小值.

(2) 函数的极大值与极大值点

若函数 $f(x)$ 在点 $x=b$ 处的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近其他点的函数值 _____, 而且函数在 $x=b$ 附近左侧 _____, 右侧 _____, 则 b 点叫做函数的极大值点, $f(b)$ 叫做函数的极大值.

(3) 若可导函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值, 则 _____; 反之, 则不成立.

(4) $f(x)$ 在区间 I 上无极值等价于函数 $f(x)$ 在区间上是单调函数, 进而得到 _____ 在 I 上恒成立.

(5) 求函数极值的步骤

- ① 先求导函数;
- ② 令导函数为 0, 求出此时 _____;
- ③ 再利用导数判定这些点两侧函数的单调性, 若左增右减, 则在这一点取得 _____; 若左减右增, 则在这一点取得 _____.

2.4 函数的最值与导数

(8) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有最值的条件

如果在区间 $[a, b]$ 上函数 $y = f(x)$ 的图象是一条 _____ 的曲线, 那么它必有最大值和最小值.

(9) 求 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大(小)值的步骤

①求函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的 _____;

②将函数 $y = f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a), f(b)$ 比较, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

(10) 若 $\forall x \in R, f(x) > 0$ 恒成立, 则 _____; 若 $\forall x \in R, f(x) < 0$ 恒成立, 则 _____.

(11) 若 $\exists x_0 \in I, f(x_0) > 0$ 恒成立, 则 _____; 若 $\exists x_0 \in I, f(x_0) < 0$ 恒成立, 则 _____.

(12) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域的交集为 D , 若 $\forall x \in D, f(x) > g(x)$ 恒成立, 则有 _____.

(13) 若对 $\forall x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立, 则 _____.

(14) 若 $\forall x_1 \in I_1, \exists x_2 \in I_2$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$, 则 _____.

(15) 若 $\forall x_1 \in I_1, \exists x_2 \in I_2$, 使得 $f(x_1) < g(x_2)$, 则 _____.

(16) 已知 $f(x)$ 在区间 I_1 上的值域为 A , $g(x)$ 在区间 I_2 上值域为 B , 若对 $\forall x_1 \in I_1, \exists x_2 \in I_2$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则 A _____ B .

(17) 若三次函数 $f(x)$ 有三个零点, 则方程 $f'(x) = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 且极大值 _____
_0, 极小值 _____0.

3. 构造函数

(1) 对于不等式 $f'(x) > k (k \neq 0)$, 构造函数 _____;

(2) 对于不等式 $xf'(x) + f(x) > 0$, 构造函数 _____;

(3) 对于不等式 $xf'(x) - f(x) > 0$, 构造函数 _____;

(4) 对于不等式 $xf'(x) + nf(x) > 0$, 构造函数 _____;

(5) 对于不等式 $xf'(x) - nf(x) > 0$, 构造函数 _____;

(6) 对于不等式 $f'(x) + f(x) > 0$, 构造函数 _____;

(7) 对于不等式 $f'(x) - f(x) > 0$, 构造函数 _____;

(8) 对于不等式 $f'(x) + kf(x) > 0$, 构造函数 _____;

(9) 对于不等式 $xf'(x) + 2xf(x) > 0$, 构造函数 _____;

(10) 对于不等式 $xf'(x) + \ln^a f(x) > 0$, 构造函数 _____;

(11) 对于不等式 $f'(x)\tan x + f(x) > 0$, 构造函数 _____;

(12) 对于不等式 $f'(x) - f(x)\tan x > 0$, 构造函数 _____;

(13) 对于不等式 $\frac{f'(x)}{f(x)} > 0$, 构造函数 _____;

(14) 对于不等式 $f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x} > 0$, 构造函数 _____;

4. 证明题中常用的不等式

(1) $\ln x \leq$ _____ ($x > 0$)

(2) $\frac{x}{x+1} \leq$ _____ $\leq x$ ($x > -1$)

(3) $e^x \geq$ _____

(4) $e^{-x} \geq$ _____

(5) $\frac{\ln x}{x+1} <$ _____ ($x > 1$)

(6) $e^x - e^{-x} \geq 2x$

(7) $\sin x < x < \tan x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)

(8)
$$\begin{cases} \ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}, x \geq 1 \\ \ln x < \frac{2(x-1)}{x+1}, 0 < x < 1 \end{cases}$$

(9) $\sqrt{ab} \leq \frac{a-b}{\ln a - \ln b} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a > b > 0$) (对数平均不等式)

(10) $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a - e^b}{a-b} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$ ($a > b$) (指数平均不等式)

5. 泰勒展开式常用公式

(1) $e^x \geq \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

(2) $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3$

(3) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, x \geq 0$

(4) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

(5) $(1+x)^a \geq 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2$

(6) $\tan x \geq x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$

6. 导数中常见的同构问题

- (1) $xe^x = \underline{\hspace{2cm}} \geq \ln x + x - 1$
- (2) $x \ln x = \underline{\hspace{2cm}} \leq xe^x - 1$
- (3) $\frac{e^x}{x} = \underline{\hspace{2cm}} \geq x - \ln x + 1$
- (4) $1 - \frac{x}{e^x} \leq x - \ln x = \underline{\hspace{2cm}} \leq \frac{e^x}{x} - 1$

三角函数

1. 任意角和弧度制以及任意角的三角函数

1.1 角的分类

- (1) 任意角按照旋转方向分为 、 、 .
- (2) 按终边位置分为 和 .
- (3) 与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内可以用一个式子来表示,即 .

1.2 象限角

- (4) 第一象限角的集合 ;
- (5) 第二象限角的集合 ;
- (6) 第三象限角的集合 ;
- (7) 第四象限角的集合 .

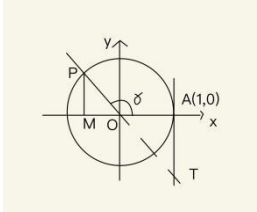
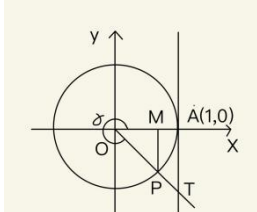
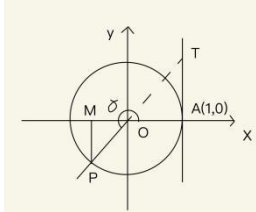
1.3 角的弧度制

- (8) 把等于 的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角.
- (9) 角的度量值有: , .
- (10) 换算关系: $1^\circ = \underline{\hspace{2cm}} rad$, $1 rad = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.
- (11) 弧长及扇形面积公式:弧长公式为 ,扇形面积公式为

—

1.4 任意角的三角函数

三角函数	正弦	余弦	正切
定义	设 α 是一个任意角,它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$ 那么		
	① <u> </u> 叫做 α 的正弦,记作 ② <u> </u>	③ <u> </u> 叫做 α 的余弦,记作 ④ <u> </u>	⑤ <u> </u> 叫做 α 的正切,记作 ⑥ <u> </u>

各象限 符号	I	⑦	⑧	⑨
	II	⑩	⑪	⑫
	III	⑬	⑭	⑮
	IV	⑯	⑰	⑱
	口诀	一全正,二正弦,三正切,四余弦		
三角函数线		 有向线段⑯ _____ 为 正弦线	 有向线段⑰ _____ 为余弦线	 有向线段⑱ _____ 为正切线

2. 同角三角函数的基本关系及其诱导公式

2.1 同角三角函数的基本关系

(1) 平方关系: _____;

扩展:“1”的代换

$1 =$ _____;

(1) 商数关系: _____;

2.2 三角函数的诱导公式

组数	一	二	三	四	五	六
角	$2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$	$\pi + \alpha$	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$
正弦						
余弦						
正切						

2.3 特殊角的三角函数值

角 α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
角 α 的 弧度数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

$\sin \alpha$							
$\cos \alpha$							
$\tan \alpha$							

3. 三角恒等变换

3.1 三角变换技巧

(1) 三角变换技巧——角的“配”与“凑”

① $2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$; $\alpha = 2 \times \underline{\hspace{2cm}}$;

② $\alpha + \beta = 2 \times \underline{\hspace{2cm}}$; $\frac{\alpha - \beta}{2} = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \underline{\hspace{2cm}}$

③ $\alpha = (\alpha + \beta) - \underline{\hspace{2cm}} = (\alpha - \beta) + \underline{\hspace{2cm}} = \frac{\alpha + \beta}{2} - \underline{\hspace{2cm}}$;

④ $2\alpha = 2[(\alpha + \beta) - \underline{\hspace{2cm}}] = 2[(\alpha - \beta) + \underline{\hspace{2cm}}] = (\alpha + \beta) + \underline{\hspace{2cm}} = (\alpha + \beta) - \underline{\hspace{2cm}}$;

⑤ $2\alpha + \beta = \underline{\hspace{2cm}} + \alpha$; $2\alpha - \beta = \underline{\hspace{2cm}} + \alpha$;

⑥ $\frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{2} - \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

名称	公式	使用条件
两角和的余弦	$\cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\alpha, \beta \in R$
两角差的余弦	$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$	
两角和的正弦	$\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$	
两角差的正弦	$\sin(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$	
两角和的正切	$\tan(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$
两角差的正切	$\tan(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$

(3) 二倍角的正弦、余弦、正切公式

① $\sin 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$;

② $\cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$; $\underline{\hspace{2cm}}$; $\underline{\hspace{2cm}}$;

③ $\tan 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 降幂公式

① $\cos^2 \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$;

② $\sin^2 \alpha =$ _____;

(5) 半角公式与万能公式

① $\sin \frac{\alpha}{2} =$ _____;

② $\cos \frac{\alpha}{2} =$ _____;

③ $\tan \frac{\alpha}{2} =$ _____; _____; _____;

④ $\sin \alpha =$ _____;

⑤ $\cos \alpha =$ _____;

⑥ $\tan \alpha =$ _____;

(6) 辅助角公式

$a \sin \alpha + b \cos \alpha =$ _____ $= \sin(\alpha + \varphi)$, 其中 $\cos \varphi =$ _____, $\sin \varphi =$ _____, $\tan \varphi =$ _____;

特别的: $\sin A + \cos A =$ _____;

$\sin A + \sqrt{3} \cos A =$ _____;

$\sqrt{3} \sin A + \cos A =$ _____;

(7) 特殊结构的构造: 构造对偶式

例如: $A = \sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos 20^\circ \sin 50^\circ$, $\cos^2 20^\circ + \sin^2 50^\circ + \cos 20^\circ \sin 50^\circ$

可以通过 $A + B = 2 + \sin 70^\circ$, $A - B = -\frac{1}{2} - \sin 70^\circ$ 两式的和, 作进一步化简.

(8) 整体代换

例如: $\sin x + \cos x = m \Rightarrow 2 \sin x \cos x =$ _____;

$\sin(\alpha + \beta) = m, \sin(\alpha - \beta) = n$, 可求出 $\sin \alpha \cos \beta$, $\cos \alpha \sin \beta$ 整体值, 作为代换用.

(9) 和差化积

① $\sin \alpha + \sin \beta =$ _____;

② $\sin \alpha - \sin \beta =$ _____;

③ $\cos \alpha + \cos \beta =$ _____;

④ $\cos \alpha - \cos \beta =$ _____;

(10) 积化和差

① $\sin \alpha \cdot \sin \beta =$ _____;

② $\cos \alpha \cdot \cos \beta =$ _____;

③ $\sin \alpha \cdot \cos \beta =$ _____;

④ $\cos\alpha \cdot \sin\beta =$ _____;

3.2 三角恒等与不等式

(1) 三倍角公式

① $\sin 3\alpha =$ _____;

② $\cos 3\alpha =$ _____;

③ $\tan 3\alpha =$ _____;

(2) 正弦平方差公式

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\text{_____})\sin(\text{_____}) = \cos^2(\text{_____}) - \cos^2(\text{_____})$$

(3) ① $\tan A + \tan B + \tan C =$ _____;

② $\sin A + \sin B + \sin C =$ _____;

③ $\cos A + \cos B + \cos C =$ _____;

(4) 常见三角不等式

① 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin x$ _____ x _____ $\tan x$;

② 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 1 _____ $\sin x + \cos x$ _____ $\sqrt{2}$;

③ $|\sin x| + |\cos x|$ _____ 1 ;

④ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \pi)$ 上是 _____ 函数.

4. 正弦定理与余弦定理

(1) 正弦定理

① _____ = _____ = _____ = $2R$, 其中 R 是三角形外接圆的半径

② 正弦定理变形:

1) $a:b:c =$ _____;

2) $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c =$ _____;

3) $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C =$ _____;

(2) 余弦定理

① $a^2 =$ _____; $b^2 =$ _____;

$c^2 =$ _____.

② 余弦定理变形:

(2) $\cos A =$ _____;

(3) $\cos B =$ _____;

(4) $\cos C =$ _____;

5. 三角形中的三角变换

(1) 三角形内角和定理: _____;

(2) 两边之和 _____, 两边之差 _____;

(3) 三角函数的恒等变形

① 角的变换: 已知三角形 ABC 的三个内角分别是 A, B, C , 则

$\sin A =$ _____; $\cos A =$ _____;

$\tan A =$ _____; $\sin \frac{A}{2} =$ _____;

$\cos \frac{A}{2} =$ _____; $\tan \frac{A}{2} =$ _____;

② 当 $A + B + C = \pi$ 时, 则:

1) $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} =$ _____;

2) $\cos A + \cos B + \cos C =$ _____;

3) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} =$ _____;

4) $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} =$ _____;

5) $\sin A + \sin B + \sin C =$ _____;

6) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} =$ _____;

7) $\sin(B + C - A) + \sin(A + B - C) + \sin(C + A - B) =$ _____;

8) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C =$ _____;

9) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C =$ _____;

③ 任意三角形中的不等关系

(1) $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq$ _____;

(2) $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \leq$ _____;

(3) $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq$ _____;

$$(4) \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(6) \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(7) \sin A + \sin B + \sin C \leqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(8) \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(9) \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(10) \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(11) \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(12) \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \geqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

④在任意锐角三角形中

$$(1) \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C \leqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geqslant \underline{\hspace{2cm}};$$

6. 三角形边、角关系定理及其面积公式

(1) 三角形面积公式

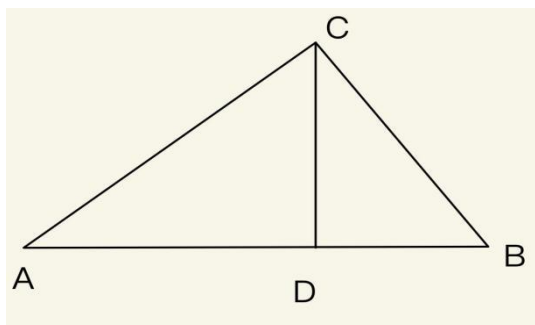
$$\textcircled{1} S = \underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\textcircled{2} \text{海伦公式: } \underline{\hspace{4cm}};$$

$$\textcircled{3} \text{坐标表示: } \underline{\hspace{4cm}};$$

(1) 射影定理

如图 $\triangle ABC$, 若 CD 为 $Rt\triangle ABC$ 斜边上的高, 则有



$$\textcircled{1} CD^2 = \underline{\hspace{2cm}};$$

② $AC^2 =$ _____;

③ $BC^2 =$ _____;

(3) 对任意非直角 $\triangle ABC$, $\tan A + \tan B + \tan C =$ _____;

(4) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A + \tan B + \tan C < 0$, 则 $\triangle ABC$ 为 _____ 三角形;

(5) 在 $\triangle ABC$ 中,

① $\angle A, \angle B, \angle C$ 成等差数列的充分必要条件是 _____;

② 在 $\triangle ABC$ 中, $b^2 + a^2 - c^2 = \pm ac \Leftrightarrow \cos C =$ _____ $\Rightarrow \angle C =$ _____;

③ 三边 a, b, c 成等差数列 $\Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____, $\angle B \leq$ _____;

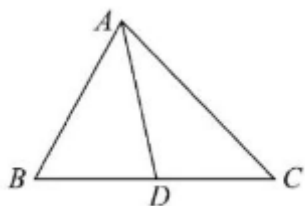
④ 三边 a, b, c 成等比数列 $\Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____, $\angle B \leq$ _____;

(6) 锐角 $\triangle ABC$ 中, $A + B > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin A >$ _____, $\sin B >$ _____, $\sin C >$ _____,

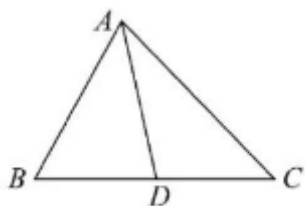
$\sin A + \sin B + \sin C >$ _____;

(2) 两内角与其正弦值: 在 $\triangle ABC$ 中, $a > b \Leftrightarrow A$ _____ $B \Leftrightarrow \sin A$ _____ $\sin B \Leftrightarrow \cos 2B$ _____ $\cos 2A$;

7. 三角形的中线定理与角平分线定理



AD 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线, 满足 _____;



AD 是 $\triangle ABC$ 的 A 的角平分线, 满足 _____;

8. 三角函数的图象与性质

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域			
值域			
单调性			
最值			无最值
奇偶性			
周期性			
对称性			

9. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的性质

(1) 奇偶性

① 当 $\varphi =$ _____ 时, 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 为奇函数;

② 当 $\varphi =$ _____ 时, 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 为偶函数;

(2) 周期性

① 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的最小正周期为 _____;

② 函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的最小正周期为 _____;

③ 函数 $y = A\tan(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的最小正周期为 _____;

(3) 单调性

① 由 _____ $\leq \omega x + \varphi \leq$ _____, 可求函数的单调递增区间;

② 由 _____ $\leq \omega x + \varphi \leq$ _____, 可求函数的单调递减区间;

(4) 对称轴

令 $\omega x + \varphi =$ _____, 可得函数的对称轴;

(5) 对称中心

令 $\omega x + \varphi =$ _____, 可得函数的对称中心;

(6) 平移变换

由 $y = \sin x$ 的图象到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象

方法一:先平移变换再周期变换

①画出函数 $y = \sin x$ 的图象

②向 _____ 平移 _____ 个单位

③得到 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象

④横坐标变为原来的 _____ 倍

⑤得到 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

⑥纵坐标变为原来的 _____ 倍

⑦得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

方法二:先周期变换再平移变换

①画出函数 $y = \sin x$ 的图象

②横坐标变为原来的 _____ 倍

③得到 $y = \sin \omega x$ 的图象

④向 _____ 平移 _____ 个单位

⑤得到 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

⑥纵坐标变为原来的 _____ 倍

⑦得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

10. 求三角函数的值域

(1) $y = a\sin x + b$ 或 $y = a\cos x$ 型,利用 _____ ≤ 1 ,即可求解;此时需注意字母 a 的符号对最值的影响.

(2) $y = a\sin x + b\cos x$ 型,引入辅助角 φ ,化为 $y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$,利用函数 _____ ≤ 1 即可求解.

(3) $y = a\sin^2 x + b\sin x + c$ (或 $y = a\cos^2 x + b\cos x + c$) 型,可令 $t = \sin x$ ($t = \cos x$), $-1 \leq t \leq 1$,转化为闭区间上二次函数的最值问题进行求解.

(4) $y = \frac{a\sin x + b}{c\sin x + d}$ 型,解出 $\sin x$,利用 _____ ≤ 1 进行求解;或者利用分离常数法进行求解.

(5) $y = \frac{a\sin x + b}{c\cos x + d}$ 型,可化归为 $y = \sin(x + \varphi)$,利用 _____ ≤ 1 进行求解.

(6) 对于含有 $\sin x \pm \cos x$, $\sin x \cos x$ 的函数的最值问题,常用的方法是令 $t = \sin x \pm \cos x$, $|t| \leq \sqrt{2}$,将 $\sin x \cos x$ 转化为 t 的函数关系式,从而转化为二次函数的最值问题.

(7) $y = a\sin^2 x + b\sin x \cos x + m\cos^2 x + n$ 型问题,可先利用降幂公式转化为二倍角公式,再利用辅助

角公式,将其转化为_____,根据 x 的范围求解 $\omega x + \varphi$ 整体取值范围,再求解相应值域.

(8) 已知 $\triangle ABC$,三边对应的长度分别为 a,b,c ,求最值

①先用正弦定理把边长表示出来,再转化为三角函数的标准形式求最值

②先利用余弦定理把边长表示出来,再利用基本不等式求最值

平面向量

1. 平面向量的概念及其线性运算

1.1 向量的有关概念

名称	定义	备注
向量	既有_____又有_____的量;向量的大小叫做向量的_____(或_____)	平面向量是自由向量
零向量	长度为_____的向量;其方向是_____的	记作_____
单位向量	长度等于_____的向量	非零向量 $\vec{a}$ 的单位向量为_____
平行向量	方向_____或_____的非零向量	$\vec{0}$ 与任一向量_____或共线
共线向量	_____向量又叫做共线向量	
相等向量	长度_____且方向_____的向量	
相反向量	长度_____且方向_____的向量	$\vec{0}$ 的相反向量为 $\vec{0}$

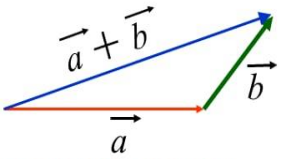
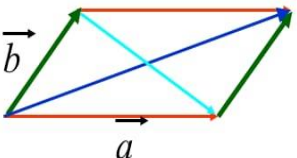
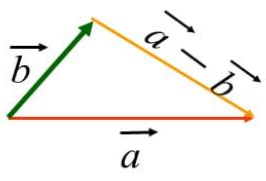
1.2 向量的表示方法

(1) 字母表示法:如 $\vec{a}, \overrightarrow{AB}$ 等

(2) 几何表示法:用一条_____表示向量

1.3 向量的线性运算

向量运算	定义	法则(或几何意义)	运算律
加法	求两个向量和的运算		(1) 交换律 $\vec{a} + \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) 结合律

		  法则	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} =$
减法	求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的相反向量 $-\vec{b}$ 的运算叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差	 法则	$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
数乘	求实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积的运算	(1) $ \lambda\vec{a} =$ _____ (2) 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向 _____; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向 _____; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\vec{a} =$ _____;	$\lambda(\mu\vec{a}) =$ _____ $(\lambda + \mu)\vec{a} =$ _____ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) =$ _____

1.4 共线向量定理

(1) 向量 $\vec{a} (\vec{a} \neq 0)$ 与 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在一个唯一实数 λ , 使得 _____;

(2) 若 A, B, P 三点共线, 则存在实数 λ, μ 使 $\overrightarrow{OP} =$ _____ ($\lambda + \mu = 1$);

特别地, 当 P 为线段 AB 的中点时, $\overrightarrow{OP} =$ _____.

2. 平面向量基本定理

如果 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是同一平面内的两个 _____ 向量, 那么对于这一平面内的任意向量 $\vec{a}$, _____ 一对实数 λ , 使 $\vec{a} =$ _____.

其中, 不共线的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组 _____.

2.1 平面向量的正交分解

把一个向量分解为两个 _____ 的向量, 叫做把向量正交分解.

2.2 平面向量的坐标运算

- (1) 已知点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} =$ _____, $|\overrightarrow{AB}| =$ _____;
- (2) 已知 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} + \vec{b} =$ _____, $\vec{a} - \vec{b} =$ _____, $\lambda \vec{a} =$ _____, $\vec{a} \parallel \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0})$ 的充要条件是 _____, $|\vec{a}| =$ _____.
- (3) 非零向量 $\vec{a} = (x, y)$ 的单位向量是 _____ 或 _____.
- (4) 已知 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ _____.

3. 平面向量的数量积

3.1 平面向量数量积的有关概念

- (1) 夹角: 已知两个 _____ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 过点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB = \theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的 _____.
- ① 当且仅当两非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 同方向时, $\theta =$ _____;
- ② 当且仅当两非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 反方向时, $\theta =$ _____;
- (2) 如果向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 90° , 则称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, 记作 _____;
- (3) 数量积的定义: 已知两非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$, 它们的夹角为 θ , 则数 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积, 记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 即 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____;
- ① $\vec{0} \cdot \vec{a} =$ _____;
- ② 当 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 时, $\theta = 90^\circ$, 这时 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____;
- (4) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的几何意义
 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于 $\vec{a}$ 的长度与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 的方向上的 _____

3.2 向量数量积的性质

- (1) 如果 $\vec{e}$ 是单位向量, 则 $\vec{a} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{a} =$ _____;
- (2) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow$ _____ 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$ _____ ($\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为非零向量)
- (3) $\vec{a} \cdot \vec{a} =$ _____, $|\vec{a}| =$ _____;
- (4) $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ _____;
- (5) $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ _____ $|\vec{a}| |\vec{b}|$

3.3 数量积的运算律

- (1) 交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____

(2) 分配律 $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} =$ _____

(3) 对 $\lambda \in R, \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) =$ _____ ; _____

3.4 数量积的坐标运算

设 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$, 则

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____

(2) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow$ _____

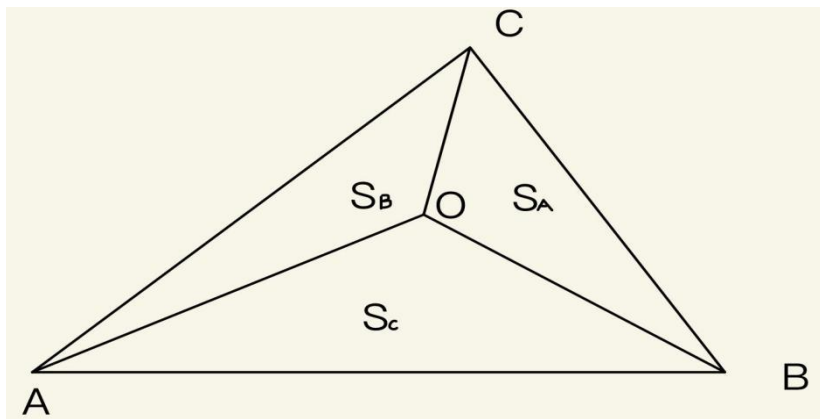
(3) $|\vec{a}| =$ _____

(4) $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ _____

4. 向量的有关定理

4.1 奔驰定理

如图所示, 已知 O 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, 则 $S_C \cdot \overrightarrow{OC} + S_B \cdot \overrightarrow{OB} + S_A \cdot \overrightarrow{OA} =$ _____ ;



推论: 已知 O 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, 且 $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $S_A:S_B:S_C =$ _____

① 内心

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

② 外心

$$\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

③ 重心

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

④ 外心

$$\tan A \cdot \overrightarrow{OA} + \tan B \cdot \overrightarrow{OB} + \tan C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

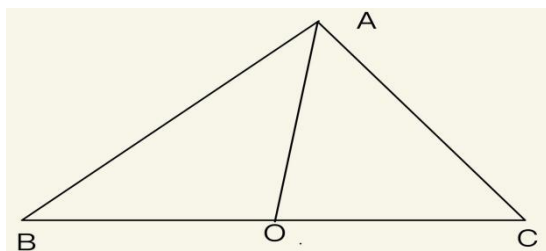
4.2 极化恒等式

$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是两个平面向量, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]$

平行四边形形式:

平行四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} =$ _____;

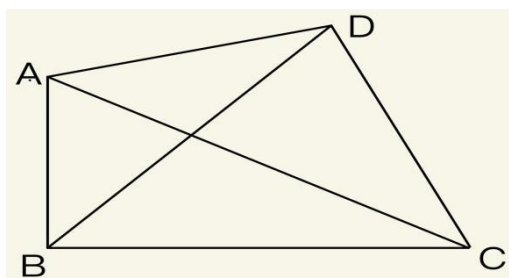
三角形形式:



$\triangle ABC$ 中, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$ _____ = _____;

4.3 对角线向量定理

如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \frac{(\vec{AD}^2 + \vec{BC}^2) - (\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2)}{2}$

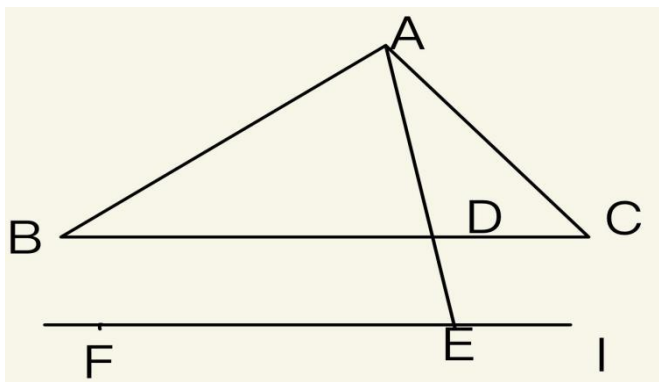


推论 1: 当 $\vec{AC} \perp \vec{BD}$ 时, 有 $\vec{AD}^2 + \vec{BC}^2 =$ _____

推论 2: $\cos \langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle =$ _____

4.4 等和线定理

如图, 以 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 为基底向量, 过 BC 外一点作 BC 的平行线 l , 对 l 上任意一点, 有 $\vec{AE} =$ _____
_____, 且 $x + y = \frac{AE}{AD}$ (常数), 其中 D 是 AE 和 BC 的交点.



5. 三角形“四心”的向量表示

5.1 三角形各心介绍

- (1) 三角形三条中线的交点：_____；
- (2) 三角形三条高线的交点：_____；
- (3) 三角形的三个内角平分线的交点 (三角形内切圆的圆心)：_____；
- (4) 三角形的三条边的垂直平分线的交点 (三角形外接圆的圆心)：_____；
- (5) 重心将中线长度分成 _____:_____；
- (6) 角平分线上的点到 _____ 的距离相等；
- (7) _____ 到三角形各顶点的距离相等；

5.2 三角形各心的向量表示

- (8) O 是 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow$ _____；
- (9) O 是 $\triangle ABC$ 的垂心 $\Leftrightarrow$ _____；
- (10) O 是 $\triangle ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow$ _____；
- (11) O 是 $\triangle ABC$ 的内心 $\Leftrightarrow$ _____；

数列

1. a_n 与 S_n

$$a_n = \begin{cases} a_1, & n=1 \\ \text{_____}, & n \geq 2 \end{cases}, S_n = \text{_____}.$$

2. 等差数列

2.1 通项公式及其前 n 项和

$$\begin{cases} a_n = \underline{\hspace{2cm}} \\ S_n = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}.$$

2.2 等差数列的常用性质

- (1) 通项公式推广: $\underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $k+l=m+n (k, l, m, n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$;
- (3) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差为 d , 则 $\{a_{2n}\}$ 也是等差数列, 公差为 $\underline{\hspace{2cm}}$;
- (4) 若 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 是等差数列, 则 $\{pa_n+qb_n\} (p, q \in \mathbb{N}^*)$ 是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 数列;
- (5) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots (k, m \in \mathbb{N}^*)$ 组成公差为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的等差数列;
- (6) 两个等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的和差的数列 $\{a_n+b_n\}$ 、 $\{a_n-b_n\}$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 数列;
- (7) 等差数列 $\{a_n\}$ 的任意 "等距离" 的项构成的数列为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 数列;
- (8) $\{b_n\} (b_n > 0)$ 是等比数列, 则 $\{\log_c b_n\} (c > 0 \text{ 且 } c \neq 1)$ 是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 数列.

2.3. 与等差数列各项的和有关的性质

- (1) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也成等差数列, 其首项为 a_1 , 公差是 $\{a_n\}$ 公差的 $\underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}$ 是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 数列;
- (3) 关于等差数列奇数项和与偶数项和的性质
 - ① 若项数为 $2n$, 则 $S_{\text{偶}}-S_{\text{奇}} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - ② 若项数为 $2n-1$, 则 $S_{\text{偶}} = \underline{\hspace{2cm}}$, $S_{\text{奇}} = \underline{\hspace{2cm}}$, $S_{\text{奇}}-S_{\text{偶}} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (4) 两个等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n, T_n 之间的关系为 $\frac{a_n}{b_n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 等比数列

1. 通项公式: $\underline{\hspace{2cm}}$, 推广: $\underline{\hspace{2cm}}$;
2. 前 n 项和公式 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 或 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$;
3. 等比数列的性质
 - (1) 若 $m+n=p+q (m, n, p, q \in \mathbb{N}^*)$, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$;
 - (2) 对有穷等比数列, 与首末两项 "等距离" 的两项之积等于首末两项的积, 即 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 等比数列前 n 项和的性质: 当 $q \neq -1$ 时, $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n} \dots$ 成 $\underline{\hspace{2cm}}$ 数列;
5. 两个等比数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的积、商、倒数组成的数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 、 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 、 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 数列;

6. 等比数列 $\{a_n\}$ 的任意“等距离”的项构成的数列为_____数列;

7. $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $\{c^{a_n}\} (c > 0)$ 是_____数列.

4. 一些特殊数列的前 n 项和

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 =$ _____;

2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 =$ _____;

3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 =$ _____;

4. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 =$ _____;

5. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1) =$ _____;

6. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) =$ _____.

5. 常见的裂项方式

1. $a_n = \frac{k}{(An+B)(An+C)} =$ _____;

2. $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d , 则 $\frac{1}{a_n a_{n+1}} =$ _____;

3. $\frac{A}{n(n+k)} =$ _____;

4. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$ _____;

5. $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}} =$ _____;

6. $\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} =$ _____;

7. $\frac{1}{4n^2-1} =$ _____;

8. $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} =$ _____;

9. $\lg \frac{n+k}{n} =$ _____;

10. $n \cdot n! =$ _____;

11. $\sin x =$ _____;

12. $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d , 则 $\frac{\sin d}{\cos a_n \cos a_{n+1}} =$ _____.

6. 求和

$\{a_n\}$ 为公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 为公比为 q 的等比数列, 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = a_n \cdot b_n$, 则数列 $\{c_n\}$ 的

前 n 项和为 $S_n =$ _____.

立体几何

1. 立体几何初步

(1) 斜二测画法直观图面积为原图形面积的 _____ 倍.

(2) 表面积与体积

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{棱柱: } S_{\text{表}} = \text{_____, } V = \text{_____}; \\ \text{棱锥: } S_{\text{表}} = \text{_____, } V = \text{_____}; \\ \text{棱台: } S_{\text{表}} = \text{_____, } V = \text{_____}; \\ \text{圆柱: } S_{\text{表}} = \text{_____, } V = \text{_____}; \\ \text{圆锥: } S_{\text{表}} = \text{_____, } V = \text{_____}; \\ \text{圆台: } S_{\text{表}} = \text{_____, } V = \text{_____}; \\ \text{球: } S_{\text{表}} = \text{_____, } V = \text{_____}. \end{array} \right.$$

(3) 棱长为 a 的正四面体的内切球的半径为 _____, 外接球的半径为 _____.

(4) 任意的简单 n 面体内切球半径为 _____. (V 是简单 n 面体的体积, $S_{\text{表}}$ 是简单 n 面体的表面积)

2. 常见几何体的外接球模型与内切球

(1) 墙角模型

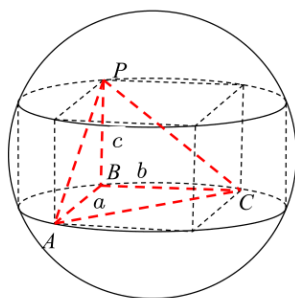
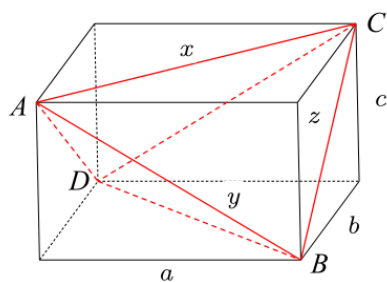


图 1

外接球半径 $R =$ _____, 其中 a, b, c 是几何体的长宽高

(2) 对棱相等模型

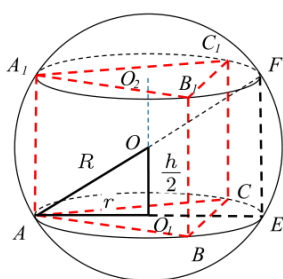


$$R^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

(3) 汉堡模型

该模型适用于有侧棱与底面垂直的锥或柱

以直三棱柱为例,模型如下图



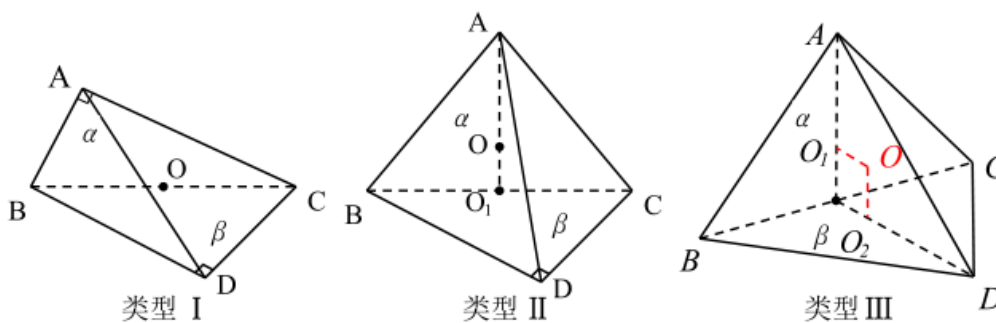
$$R = \underline{\hspace{2cm}} \quad (r \text{ 是底面外接圆的半径, } h \text{ 是垂直底面的棱长})$$

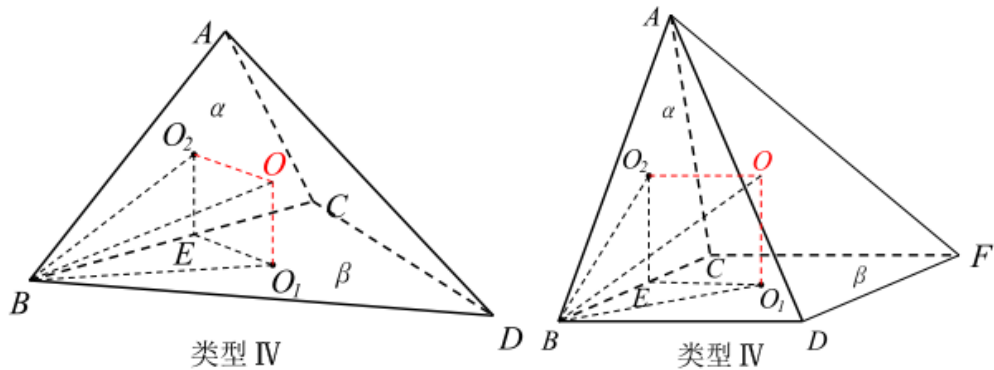
注意:底面外接圆的半径 r 的求法

1. 正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = 2R$ (通用)
2. 直角三角形: 半径等于斜边的一半
3. 等边三角形: 半径等于三分之二高
4. 长(正)方形: 半径等于对角线的一半

(4) 切瓜模型

$\alpha \perp \beta$ 切瓜模型是有一个侧面与底面垂直的棱锥型,常见的是两个互相垂直的面,即





I : $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 都是直角三角形

类型 II : $\triangle ABC$ 是等边三角形, $\triangle BCD$ 是直角三角形类型

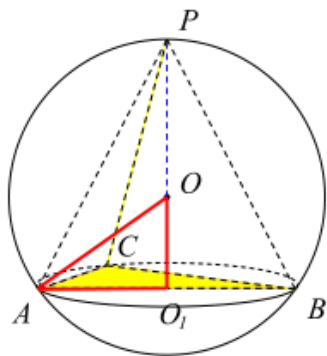
类型 III : 交点 O 即为球心。

类型 IV : $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 都是等边三角形, 分别过两个三角形的外心作各自面的垂线

$R^2 = \frac{l^2}{12} (r_1^2 + r_2^2 + 3)$ (其中 r_1, r_2 分别为 α, β 的外接圆半径, l 为交线 BC 的长)

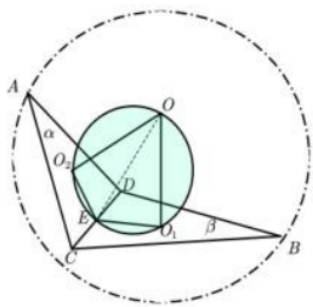
(5) 斗笠模型

适用于棱锥顶点在底面的射影是底面外心的棱锥



$R = \frac{h}{2} \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}$ (h 是几何体的高, r 为底面圆的半径或外接圆的半径)

(6) 鳄鱼模型



$$R^2 = OC^2 = OE^2 + CE^2 = \left(\frac{O_1O_2}{\sin\theta} \right)^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \underline{\hspace{2cm}};$$

(E 为 CD 中点, $O_1E = m$, $O_2E = n$, θ 为二面角)

(7) 内切球半径求解方法主要有以下两种

① $r = \frac{3V}{s}$ (V 是棱锥或棱柱的体积, s 为其表面积)

② 利用圆锥的轴截面的相似三角形进行处理

3. 空间向量

3.1 基础知识

(1) 模: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 则 $|\overrightarrow{AB}| = \underline{\hspace{2cm}};$

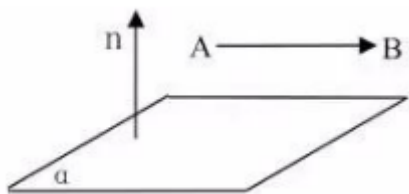
(2) 平行: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ 或 $\underline{\hspace{2cm}};$

(3) 垂直: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}};$

(4) 夹角: $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \underline{\hspace{2cm}}.$

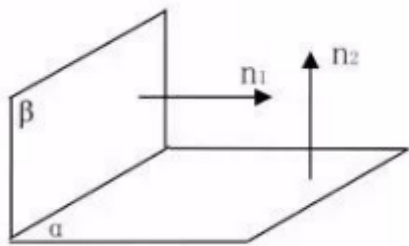
3.2 利用空间向量证明位置关系

(1) 证明线面平行



设 $\vec{n}$ 是平面的法向量, $\overrightarrow{AB} \not\subset \alpha$, 则 $\overrightarrow{AB} \parallel \alpha \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}};$

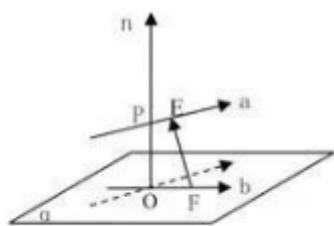
(1) 证明面面垂直



设 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 分别是平面 α, β 的法向量, 则: $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow$ _____.

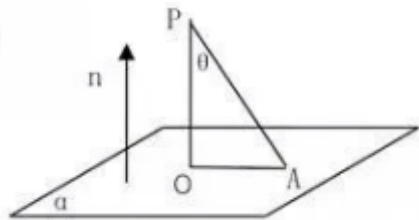
3.3 利用空间向量求解距离问题

(1) 求两条异面直线间的距离



如图, 若 $\vec{n}$ 是 $\vec{a}, \vec{b}$ 的公共法向量, 点 $E \in \vec{a}, F \in \vec{b}$, 则异面直线 $\vec{a}, \vec{b}$ 之间的距离 $d =$ _____;

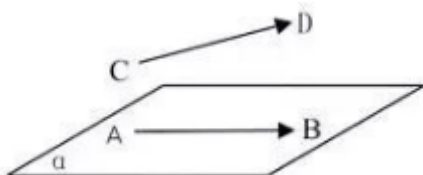
(2) 求点到平面的距离



设 P 为平面 α 外一点, 点 A 为平面 α 内任一点, 平面 α 的法向量为 $\vec{n}$, 过点 P 作平面 α 的垂线 PO , 则点 P 到平面 α 的距离 $d =$ _____.

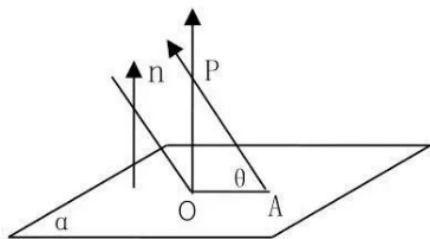
3.4 利用空间向量求解距离问题

(1) 求直线与直线所成的角



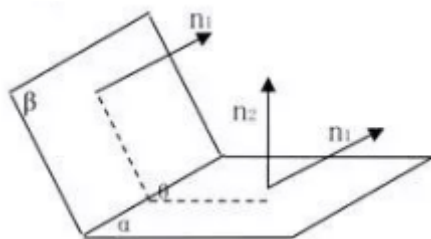
若直线 AB, CD 所成的角是 θ , 则 $\cos \theta =$ _____;

(2) 求直线与平面所成的角



已知 PA 为平面 α 的一条斜线, $\vec{n}$ 为平面 α 的一个法向量, 过 P 作平面 α 的垂线 PO , 连接 OA , 则 $\angle PAO$ 为斜线 PA 和平面 α 所成的角, 记为 θ , 则 $\sin \theta =$ _____;

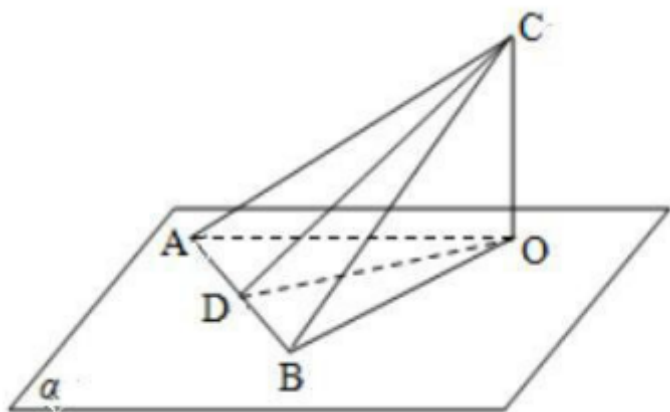
(2) 求二面角的大小



在二面角 $\alpha - l - \beta$ 中, $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$ 分别为平面 α 和 β 的法向量, 若二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小为 θ , 则 $|\cos \theta| =$ _____.

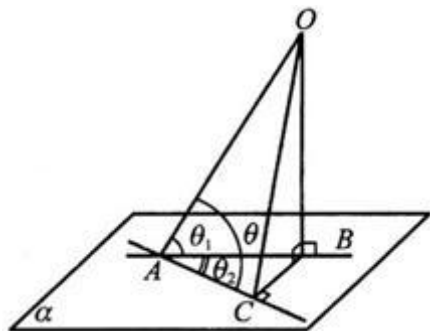
4. 面积射影定理:

如图, 设平面 α 外的 $\triangle ABC$ 在平面 α 内的射影为 $\triangle ABO$, 分别记 $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle ABO$ 的面积为 S 和 S' , 记 $\triangle ABC$ 所在平面和平面 α 所成的二面角为 θ , 则 $\cos \theta =$ _____.



5. 三余弦定理:

设 A 为面上一点, 过 A 的斜线 AO 在面上的射影为 AB , AC 为面上的一条直线, 那么 $\angle OAC, \angle BAC, \angle OAB$ 三角的余弦关系为: _____.



6. 利用行列式快速求解平面法向量:

$$\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\overrightarrow{CD} = (x_2, y_2, z_2)$$

$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是同一平面内一组不共线向量

则平面法向量 $\vec{n} =$ _____;

解析几何

1. 直线与圆

1.1 斜率公式:

倾斜角为 $\alpha, P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), k =$ _____ .

1.2 直线的五种方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{点斜式: } \underline{\hspace{2cm}}; \\ \text{两点式: } \underline{\hspace{2cm}}; \\ \text{截距式: } \underline{\hspace{2cm}}; \\ \text{斜截式: } \underline{\hspace{2cm}}; \\ \text{一般式: } \underline{\hspace{2cm}}. \end{array} \right.$$

1.3 夹角公式:

l_1 的倾斜角为 θ_1 , l_2 的倾斜角为 θ_2 , $\theta_1 > \theta_2$, 则 l_1 与 l_2 的夹角为 $\theta = \theta_1 - \theta_2$, 且 $\tan \theta =$ _____.

1.4 斜率关系

已知 k_1, k_2, k_3 为过原点的直线 l_1, l_2, l_3 的斜率, 其中 l_2 是 l_1 和 l_3 的角平分线, 则 k_1, k_2, k_3 满足关系: k_1
 $=$ _____, $k_2 =$ _____, $k_3 =$ _____.

1.5 点关于直线对称

点 (x, y) 关于直线 $Ax + By + C = 0$ 的对称点坐标为 _____ . 当所对应的对称直线斜率为 ± 1

时, 点 $p(x_0, y_0)$ 的对称点 $p'(x_1, y_1)$ 的坐标满足
$$\begin{cases} f(x_0) = y_1 \\ f(y_0) = x_1 \end{cases}$$

当所对应的直线斜率不为 ± 1 时

$p(x_0, y_0)$ 的对称点 $p'(x_1, y_1)$ 的坐标满足
$$\begin{cases} \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \times \left(-\frac{A}{B}\right) = -1 \\ A\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + B\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) + c = 0 \end{cases}$$

1.6 平行与垂直

(1) 当重合的两条直线 l_1 和 l_2 的斜率存在时, _____; 如果重合直线 l_1 和 l_2 的斜率都存在, 那么它们都与 x 轴垂直, 则 $l_1 // l_2$;

(2) 当两条直线 l_1 和 l_2 的斜率存在时, _____; 若两条直线 l_1, l_2 中的一条斜率存在, 则另一条斜率为 0 时, 它们垂直.

1.7 距离公式

$$\begin{cases} \text{点点距 } P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2): \text{_____}; \\ \text{点线距 } P(x_0, y_0), Ax + By + C = 0: \text{_____}; \\ \text{线线距 } Ax + By + C_1 = 0, Ax + By + C_2 = 0: \text{_____}. \end{cases}$$

1.8 四种直线系方程

(1) 定点直线系方程: 经过定点 $P(x_0, y_0)$ 直线系方程 $\begin{cases} \text{_____}; \\ \text{_____}. \end{cases}$

(2) 共点直线系方程: 经过两直线 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 和 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 交点的直线系方程: _____ ;

(3) 平行直线系方程: 与直线 $Ax + By + C = 0$ 平行的直线系方程: _____ ;

(4) 垂直直线系方程: 与直线 $Ax + By + C = 0$ 垂直的直线系方程: _____ .

2. 圆的方程

2.1 圆的一般与标准方程

(1) 圆的一般方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$, 则圆半径 $r = \text{_____}$.

(2) 若圆的直径端点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则圆的方程为: _____ .

(3) 过圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为: _____ .

2.2 圆的切点弦方程

- (1) 过圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 外任意一点 $P(x_0, y_0)$ 的切点弦方程为: _____ ;
- (2) 过圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 外任意一点 $P(x_0, y_0)$ 的切点弦方程为: _____ .

2.3 圆系方程

- (1) 过圆 $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 两个交点的圆的方程为 _____ ;
- (2) 过圆 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 两个交点的圆的方程为 _____ ;

2.4 两个圆的公共弦方程

过圆 $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 两个交点的直线方程为 _____ ;

圆锥曲线

1. 椭圆

- (1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的面积 S 为 _____ .
- (2) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 绕 Ox 坐标轴旋转所得的旋转体的体积为 _____ .
- (3) 过椭圆准线上一点作椭圆的两条切线, 两切点连线所在直线必经过椭圆相应的 _____ .
- (4) 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 两焦点分别为 F_1, F_2 , 设焦点三角形 PF_1F_2 中 $\angle PF_1F_2 = \theta$, 则焦点三角形面积 $S =$ _____ .
- (5) 过 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点做长轴的垂线与椭圆的焦点弦长为 _____ .
- (6) 椭圆的焦半径 (椭圆的一个焦点到椭圆上一点横坐标为 x_0 的点 P 的距离) 公式 _____ .
- (7) $y = kx + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相交于两点, 则纵坐标之和为 _____ .
- (8) 过椭圆上一点做斜率互为相反数的两条直线交椭圆于 A, B 两点, 则直线 AB 的 _____ 为定值.
- (9) 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点做一条斜率存在的直线与椭圆交于 A, B 两点, AB 与 x

轴正半轴夹角为 θ , 且满足 $\frac{AF}{BF} = \lambda$, 则满足 _____;

(10) 过原点的直线与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个交点和椭圆上不与左右顶点重合的任一点构成的直线斜率乘积为定值 _____.

推论: 椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ 上不与左右顶点重合的任一点与左右顶点构成的直线斜率乘积为定值 _____.

(11) 假设椭圆焦点三角形的顶点 $p(x_0, y_0)$, 则内切圆圆心坐标为 _____;

(12) 过椭圆外一点做椭圆的两条切线, 且两条切线互相垂直的点的轨迹是一个圆, 所在方程为 _____; 俗称蒙日圆

(13) 设直线 l 与椭圆交于两点 A, B 且直线斜率 k 存在, AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 则满足 _____;

2. 双曲线

(1) 双曲线焦点三角形的内切圆圆心的横坐标为定值 _____.

(2) AB 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的不平行于对称轴且过原点的弦, M 为 AB 的中点, 则 _____;

(3) 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上任意一点作两条渐近线的平行线, 与渐近线围成的四边形面积为 _____.

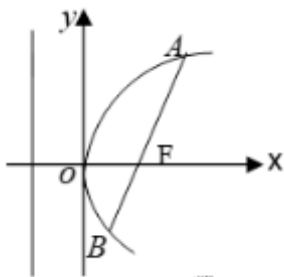
(4) 双曲线焦点三角形的面积 $S =$ _____;

(5) 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上任一点 $A(x_0, y_0)$ 任意作两条倾斜角互补的直线交双曲线于 B, C 两点, 则直线 BC 有定向且 $k_{BC} =$ _____;

3. 抛物线

(1) 抛物线焦点弦的中点, 在准线上的射影与 _____ 的连线垂直于该焦点弦.

(2) AB 是过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的弦, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), |AF| = m, |BF| = n$, 直线 AB 的倾斜角为 α .



① $x_1x_2 =$ _____ ; $y_1y_2 =$ _____ .

② $|AB| =$ _____ = _____ .

③ $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} =$ _____ .

④ $S_{\triangle AOB} =$ _____ .

⑤ $|AF| =$ _____ , $|BF| =$ _____ ;

(3) 若 AB 是过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的弦, 则以 AB 为直径的圆与抛物线的准线 _____ .

(4) 若 AB 是过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的弦, 过点 A, B 分别向抛物线的准线引垂线, 垂足分别为 A_1, B_1 , 则 $\angle A_1FB_1 =$ _____ .

(5) 若 AB 是过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的弦, 抛物线的准线与 x 轴相较于点 K , 则 _____ .

(6) 若 AB 是过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的弦, O 为抛物线的顶点, 连接 AO 并延长交该抛物线的准线于点 C , 则 BC _____ OF

4. 圆锥曲线共性公式、结论

(1) 圆锥曲线切线方程

① 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为 _____ ;

② 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为 _____ .

(2) 圆锥曲线切点弦方程

① 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 外任意一点 $P(x_0, y_0)$ 的切点弦方程为 _____ ;

② 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 外任意一点 $P(x_0, y_0)$ 的切点弦方程为 _____ ;

③ 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 外任意一点 $P(x_0, y_0)$ 的切点弦方程为 _____ .

(3) 直线与椭圆、双曲线相切条件

①椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0 (A \cdot B \neq 0)$ 相切的条件是 _____ ;

②双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0 (A \cdot B \neq 0)$ 相切的条件是 _____ .

(1) 定比点差法:

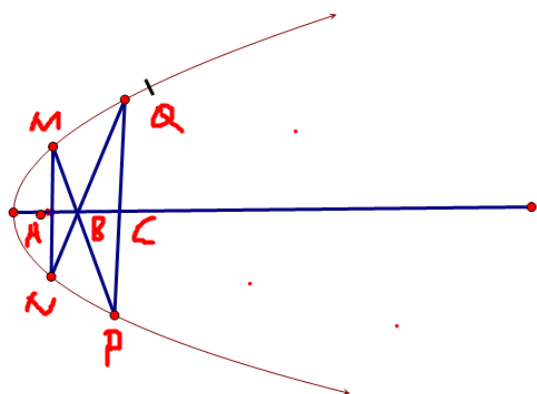
点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, 则点 M 的坐标为 $(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda})$

若 $\overrightarrow{AN} = -\lambda \overrightarrow{NB}$, 则 $N(\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda})$,

在椭圆或双曲线 $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 中, 设 A, B 是椭圆或双曲线上的两点, 调和分割 A, B , 即满

足 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AN} = -\lambda \overrightarrow{NB}$, 一定有 _____;

(5) 蝴蝶定理



(1) 设 $A(a, 0), B(b, 0), C(c, 0), K_{MN} \cdot K_{PQ} = K_{MP} \cdot K_{NQ}$

(2) $b^2 = ac$

(3) $\frac{K_{MN}}{K_{PQ}} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{c-b}{b-a} = \frac{BC}{AB}$

排列与组合

1. 两个计数原理

{ 分类加法计数原理: $N =$ _____ ;
分步乘法计数原理: $N =$ _____ .

2. 排列数公式

$A_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1) =$ _____ .

3. 组合数公式及性质

(1) $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} =$ _____;

(2) 性质: ① $C_n^m =$ _____; ② $C_n^m + C_n^{m-1} =$ _____.

4. 组合排列问题常用公式

1. 平均分组有归属问题: 将相异的 m, n 个物件等分给 m 个人, 各得 n 件, 其分配方法数共有 $N =$ _____;

2. 平均分组无归属问题: 将相异的 m, n 个物体等分为无记号或无顺序的 m 堆, 其分配方法数共有 $N =$ _____;

3. 非平均分组有归属问题: 将相异的 $P(P = n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$ 个物体分给 m 个人, 物件必须被分完, 分别得到 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 件, 且 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 这 m 个数彼此不相等, 则其分配方法数共有 $N =$ _____;

4. 非完全平均分组有归属问题: 将相异的 $P(P = n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$ 个物体分给 m 个人, 物件必须被分完, 分别得到 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 件, 且 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 这 m 个数中分别有 $a, b, c \cdots$ 个相等, 则其分配方法数有 $N =$ _____;

5. 非平均分组无归属问题: 将相异的 $P(P = n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$ 个物体分为任意的 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 件无记号的 m 堆, 且 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 这 m 个数彼此不相等, 则其分配方法数有 $N =$ _____;

6. 非完全平均分组无归属问题: 将相异的 $P(P = n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$ 个物体分为任意的 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 件无记号的 m 堆, 且 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 这 m 个数中分别有 $a, b, c \cdots$ 个相等, 则其分配方法数有 $N =$ _____;

7. 限定分组有归属问题: 将相异的 $P(P = n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$ 个物体分给甲、乙、丙, $\cdots$ 等 m 个人, 物体必须被分完, 如果指定甲得 n_1 件, 乙得 n_2 件, 丙得 n_3 件, $\cdots$ 时, 则无论 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 等 m 个数是否全相异或不全相异其分配方法数恒有 $N =$ _____.

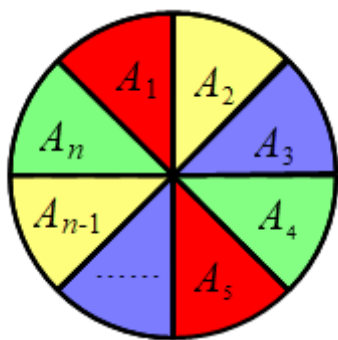
8. 隔板法: 隔板法就是在 n 个元素间的 $n - 1$ 个空隙中插入 $k - 1$ 个板子, 把 n 个元素分成 k 组的方法数为 $N =$ _____;

9. 如果 n 个相同的元素分成 m 组, 每组非负, 不满足隔板法每个部分非空的要求, 我们采取增减元素隔板法的方法数 $N =$ _____;

10. 错位排列: n 个元素对应的错位排列情况为 $D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 4410$.

错位排列公式: $D_n =$ _____;

11. n 个元素围成一圈, 环形排列的总的方法数为 _____;



12. 用 m 个颜色, 给 n 个区域涂色, 要求相邻的区域涂不同的颜色, 有多少种不同的涂色方法?
涂色方法数一共有 _____

5. 二项式定理

1. $(a+b)^n =$ _____;
2. 二项展开式的通项公式: $T_{r+1} =$ _____.
3. $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数和为 _____;
4. $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数最大是?
当 n 为奇数时, 最大项为 _____; 对应的项数是 _____;
当 n 为偶数时, 最大项为 _____; 对应的项数是 _____
5. $(ax+b)^n$ 的系数最大的项怎么比较?

概率

1. 等可能性事件的概率 $P(A) =$ _____;
2. 互斥事件 A, B 分别发生的概率的和 $P(A+B) =$ _____;
3. 独立事件 A, B 同时发生的概率 $P(AB) =$ _____;
4. 对立时间概率关系 $P(\bar{A}) =$ _____; ($\bar{A}$ 是 A 的对立事件)
5. n 次独立重复试验中某事件恰好发生 k 次的概率 $P(X=k) =$ _____;
6. 条件概率: $P(B|A) =$ _____ 为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的条件概率.

7. 概率的加法公式: $P(A \cup B) =$ _____; $P(A \cup B|C) =$ _____;
8. 概率的乘法公式 (相互独立事件), $P(AB) =$ _____;
9. 全概率公式 _____;
10. 贝叶斯公式 _____;

离散型随机变量

1. 性质

- (1) $P_i \geq$ _____;
- (2) $P_1 + P_2 + \cdots + P_n =$ _____.

2. 离散随机变量的数学期望、方差、标准差

- (1) $E\xi =$ _____;
- (2) $D\xi =$ _____;
- (3) 数学期望的性质: $E(a\xi + b) =$ _____;
- (4) 方差的性质: $D(a\xi + b) =$ _____;
- (5) 方差与期望的关系: $D\xi =$ _____.

3. 常见分布列

- (1) 两点分布: 又称伯努利分布, 随机变量 ξ 取 1 的概率为 p , 取 0 的概率为 $1 - p$, 则 $E\xi =$ _____
 $D\xi =$ _____;
- (2) 二项分布: 在 n 次独立重复试验中, 用 ξ 表示事件 A 发生的次数, 设每次试验中事件 A 发生的概率为 p , 则 $P(\xi = k) =$ _____, 称随机变量 ξ 服从二项分布, 记作 $\xi \sim B(n, p)$, 且 $E\xi =$ _____, $D\xi =$ _____.
- (3) 超几何分布: 一般地, 在含有 M 件次品的 N 件产品中, 任取 n 件, 其中恰有 xk 件次品, 则 $P(\xi = k) =$ _____, 其中 $m = \min\{M, n\}$, 且 $n \leq N, M \leq N, M, N \in \mathbb{N}^*$, 则称随机变量 ξ 服从超几何分布. 记作 $x \sim H(n, M, N)$ $E(x) =$ _____, $D(x) =$ _____.
- (4) 正态分布: 正态分布密度曲线 $f(x) =$ _____, 若随机变量 ξ 服从正态分布, 记作 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 数学期望为 _____, 方差为 _____, 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 称为标准正态分布.

统计

1. 回归直线方程

$$\hat{y} = a + bx, \text{ 其中 } \begin{cases} b = \underline{\hspace{2cm}} \\ a = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}.$$

2. 相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

独立性检验

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

1.

$$K^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

复数

1. 复数概念

定义:我们把集合 $\mathbf{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbf{R}\}$ 中的数,即形如 $a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ 的数叫做复数,其中 a 叫做复数 z 的实部, b 叫做复数 z 的虚部 (i 为虚数单位).

注: $i^2 = -1, i^2 = -1 \Rightarrow i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i; i^{4n} = 1$

2. 复数分类

	满足条件 (a, b 为实数)
复数的分类	$a + bi$ 为实数 $\Leftrightarrow \underline{b = 0}$
	$a + bi$ 为虚数 $\Leftrightarrow \underline{b \neq 0}$
	$a + bi$ 为纯虚数 $\Leftrightarrow a = 0$ 且 $b \neq 0$
	$a + bi$ 为 0 $\Leftrightarrow \underline{a = 0} \quad \underline{b = 0}$

3. 复数相等

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 共轭复数

$$z = a + bi, \text{ 则 } \bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 复数的模

$$z = a + bi, \text{ 则 } |z| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 复数的四则运算法则

$$1. (a + bi) + (c + di) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$2. (a + bi) - (c + di) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$3. (a + bi)(c + di) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$4. (a + bi) \div (c + di) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. 关于 x 的实系数二次函数有复数根

若关于 x 的实系数方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 如果有复数根, 则满足 $z_1 z_2 = \frac{c}{a}; z_1 z_2 = -\frac{b}{a}$, 且 $z_1 = \bar{z}_2$, 互为共轭复数

8. 复数的计算高阶公式

$$1. |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$2. \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$3. z \bar{z} = z^2 = \bar{z}^2$$