

2026 年全国中学生数学奥林匹克竞赛(预赛)

暨 2026 年全国高中 数学联合竞赛 模拟试题 2(A 卷)

命题人: 刘蒋巍(《竞赛数学全栈元智能体》《竞赛数学命题与解题全栈智能体》开发者, 发表中考数学压轴题研究、高中数学联赛、大学生数学竞赛、考研数学命题研究文章数十篇, 出版《中高考数学命题技术研究》《中考数学解题策略》《学会编题》等书籍 20 余本)

说明: 本试卷共 11 题, 满分 120 分。填空题每小题 8 分, 共 64 分; 解答题第 9 题 16 分, 第 10、11 题各 20 分。

一、填空题(本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

1. 设 x, y 为正整数, 且 $x^2 + y^2 = 2025$, 则有序对 (x, y) 的个数为_____。

2. 已知多项式 $f(x)$ 满足对任意非零实数 x ,

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x},$$

则 $f(2026) =$ _____。

3. 在空间直角坐标系中, $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)$, 点 P 在平面 ABC 内运动, 则当 $PA^2 + PB^2 + PC^2$ 取最小值时, P 的坐标为_____。

4. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x^3 + y^3$ 的取值范围是_____。

5. 对任意正实数 x, y, z , 函数

$$f(x, y, z) = \frac{x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz}}{x + y + z}$$

的最大值为_____。

6. 单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0), B(1, 0)$ 。过圆上一点 P (异于 A, B) 作圆的切线, 与过 A, B 的切线分别交于 C, D , 则梯形 $ABCD$ 的对角线交点 T 的轨迹方程为_____。

7. 已知严格递增的正实数列 $\{x_n\}$ 满足: $x \in \{x_n\}$ 当且仅当 $x + \{x\}^2 \in \mathbb{Z}$ ($\{x\}$ 为小数部分), 则此数列的前 100 项之和为_____。

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = \frac{3^n}{4^{3^n} + 1}$, 记 S_n 为其前 n 项和, P_n 为其前 n 项积,

则 $\frac{S_{2026}}{P_{2026}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、解答题 (本大题共 3 小题, 共 56 分)

9. (16 分)

已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1$, 求 $x^4 + y^4$ 的最大值和最小值, 并证明你的结论。

10. (20 分)

给定双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$, $M_1(-a, 0), M_2(a, 0)$ 为实轴端点。过右焦点 $F(c, 0)$ 任作一条直线, 与双曲线右支交于 A, B 两点。直线 AM_1 与 BM_2 交于点 G 。

证明: 点 G 在一条定直线上。

11. (20 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 定义为:

$$a_0 = 1, a_n = \lfloor \sqrt{S_{n-1}} \rfloor (n \geq 1), S_k = \sum_{i=0}^k a_i (k \geq 0)$$

求 a_{2026} 的值。

参考答案与评分标准

一、填空题(每题 8 分)

1. 答案: 2

解: $2025=45^2$ 。解 $x^2+y^2=45^2$ 的正整数解, 由勾股数公式, 唯一的一组 (不计顺序) 为 $x=27, y=36$ 。有序对为 $(27,36)$ 和 $(36,27)$, 共 2 个。

2. 答案: 2026

解: 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)+g(1/x)=0$ 。若 g 是非常数多项式, 则 $g(1/x)$ 不是多项式, 但等式对无穷多个 x 成立, 只能 $g \equiv 0$ 。故 $f(x)=x$, 所以 $f(2026)=2026$ 。

3. 答案: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

解: 对于平面上的点 $P, PA^2+PB^2+PC^2$ 的最小值在 $\triangle ABC$ 的重心处取得。重心

坐标为 $(\frac{1+0+0}{3}, \frac{0+2+0}{3}, \frac{0+0+3}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ 。该点在平面 ABC 上, 符合要求。

4. 答案: $[-1, 1]$

解: 设 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$, 则

$$x^3+y^3=\cos^3\theta+\sin^3\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(1-\cos\theta\sin\theta)$$

令 $t=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$, 则 $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 。

又 $\cos\theta\sin\theta=\frac{t^2-1}{2}$, 代入得

$$x^3+y^3=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=t \cdot \frac{3-t^2}{2}=\frac{3t-t^3}{2}$$

设 $f(t)=\frac{3t-t^3}{2}$, 求导 $f'(t)=\frac{3-3t^2}{2}=0 \Rightarrow t=\pm 1$ 。

$$f(-1)=\frac{-3+1}{2}=-1, f(1)=\frac{3-1}{2}=1,$$

$$f(-\sqrt{2})=\frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, f(\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

比较得最大值 1, 最小值 -1

故取值范围为 $[-1, 1]$

5. 答案: $\frac{4}{3}$

解: 由均值不等式:

$$x+y+z \geq \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{16}x + \frac{3}{4}y\right) + \left(\frac{1}{16}x + \frac{1}{4}y + z\right) \geq \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\sqrt{xy} + \frac{3}{4}\sqrt{xyz}$$

所以 $f(x, y, z) \leq \frac{4}{3}$, 等号当 $x:y:z=16:4:1$ 时成立, 故最大值为 $\frac{4}{3}$ 。

6. 答案: $x^2 + 4y^2 = 1$ ($-1 < x < 1$, $y \neq 0$)

解: 设 $P(\cos\theta, \sin\theta)$, 切线方程 $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$, 得 $C\left(1, \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right), D\left(-1, \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ 。对角线 AC 和 BD 的方程联立消去 θ 得 $x=\cos\theta, y=\frac{\sin\theta}{2}$, 故轨迹 $x^2 + 4y^2 = 1$ 。

7. 答案: $2475 + 25\sqrt{5}$

解: 由条件得: 所有正整数 k 和所有形如 $k + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($k \geq 0$) 的数构成数列, 且交错排列。
前 100 项中, 奇数项为 $0+\phi, 1+\phi, \dots, 49+\phi$, 偶数项为 $1, 2, \dots, 50$ 。

$$\text{和} = \sum_{k=0}^{49} (k + \phi) + \sum_{k=1}^{50} k = 1225 + 50\phi + 1275 = 2500 + 50\phi, \text{其中 } \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

故结果为 $2475 + 25\sqrt{5}$ 。

8. 答案: $2^{-2^{2027} \cdot 2026}$

解: 利用裂项 $\frac{3^n}{4^{3^n+1}} = \frac{3^n}{4^{3^n-1}} - \frac{2 \cdot 3^n}{4^2 \cdot 3^n - 1}$, 累加可得 $S_n = \frac{1}{2} - \frac{2^{n+1}}{4^{2^{n+1}-1}}$,

而 $P_n = \frac{\prod_{k=1}^n 3^k}{\prod_{k=1}^n (4^{3^k} + 1)}$, 通过恒等式化简得 $\frac{S_n}{P_n} = 2^{-2^{n+1} \times n}$ 。代入 $n=2026$ 即得。

二、解答题

9. (16 分)

解:

(方法 1) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=1-2x^2y^2$ 。

由 $x^2+y^2=1$, 得 $x^2y^2 \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

等号当 $x^2=y^2=\frac{1}{2}$ 时成立。

因此

$$x^4+y^4=1-2x^2y^2 \geq 1-2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

最小值 $\frac{1}{2}$, 当 $x^2=y^2=\frac{1}{2}$ 即 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得。

又 $x^2y^2 \geq 0$, 所以

$$x^4+y^4=1-2x^2y^2 \leq 1$$

最大值 1, 当 $x^2y^2=0$ 即 $x=0$ 或 $y=0$ 时取得(此时另一者 ± 1)。

(方法 2)也可用三角换元: 设 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$, 则

$$x^4+y^4=\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta.$$

因为 $\sin^2 2\theta \in [0, 1]$, 所以 $x^4+y^4 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 。

结论: 最大值为 1, 最小值为 $\frac{1}{2}$ 。

10. (20 分)

证明: 以右焦点 F 为极点, 极轴沿 x 轴正向建立极坐标系, 双曲线方程为

$$r=\frac{ep}{1-e\cos\theta}, \quad e=\frac{c}{a}, \quad p=\frac{b^2}{c}.$$

设 $A(r_1, \theta), B(r_2, \pi+\theta)$, 则

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1-e\cos\theta}{ep} + \frac{1+e\cos\theta}{ep} = \frac{2}{ep}.$$

考虑直线 BM_2 与右准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 的交点 G_1 ,

利用梅涅劳斯定理于 $\triangle FAB$ 和截线 M_2G_1B , 可证 A, M_1, G_1 共线,

故 G_1 即为 AM_1 与 BM_2 的交点 G 。

因此 G 恒在右准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上(定直线)。证毕!

11. (20 分)

解: 通过计算前几项并归纳可得:

对任意 $k \geq 1$, 记 $m_k = 2^k + k$, 则

$$a_{m_k-2} = a_{m_k-1} = a_{m_k} = 2^{k-1};$$

当 $1 \leq r \leq 2^{k-1}$ 时, $a_{m_k+2r-1} = a_{m_k+2r} = 2^{k-1} + r$ 。

由 $2^{10} + 10 = 1034, 2^{11} + 11 = 2059$, 取 $k = 10, m = 1034$, 则

$$2026 = m + 2r \Rightarrow r = \frac{2026 - 1034}{2} = 496.$$

因为 $496 \leq 2^9 = 512$, 所以

$$a_{2026} = 2^9 + r = 512 + 496 = 1008.$$

故 $a_{2026} = 1008$ 。

总分: 120 分

命题人: 刘蒋巍(《竞赛数学全栈元智能体》《竞赛数学命题与解题全栈智能体》开发者, 发表中考数学压轴题研究、高中数学联赛、大学生数学竞赛、考研数学命题研究文章数十篇, 出版《中高考数学命题技术研究》《中考数学解题策略》《学会编题》等书籍 20 余本)