

2026 年高考全国 I 卷

1. 样本数据 6, 8, 4, 5, 12 的中位数为 ()

A. 5 B. 6 C. 8 D. 9

解析 B.

排序后数据为 4, 5, 6, 8, 12, 因此中位数是 6.

2. 已知平面向量
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}$
- 不共线, 且
- $2\mathbf{a} + y\mathbf{b} = x\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$
- , 则 ()

A. $x = 2, y = -3$ B. $x = -2, y = 3$
C. $x = 2, y = 3$ D. $x = -2, y = -3$

解析 A.

根据平面向量的基本定理, 有 $(x, y) = (2, -3)$.

3. 已知集合
- $A = \{\sin \frac{7\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{3}, \tan \frac{5\pi}{4}\}$
- ,
- $B = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\}$
- , 则
- $A \cap B =$
- ()

A. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\}$ B. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$
C. $\{-\frac{1}{2}, 1\}$ D. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\}$

解析 C.

$$A \cap B = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\} \cap \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\} = \{-\frac{1}{2}, 1\}.$$

4. 曲线
- $y = 5x + 8 \ln x$
- 在点
- $(1, 5)$
- 处的切线方程为 ()

A. $y = 3x + 2$ B. $y = 5x$ C. $y = 8x - 3$ D. $y = 13x - 8$

解析 D.

根据题意, 有 $y' = 5 + \frac{8}{x}$, 于是所求切线方程为

$$y = 5 + 13(x - 1) \iff y = 13x - 8.$$

5. 已知抛物线
- $C_1: y^2 = 2p_1x$
- (
- $p_1 > 0$
-) 和
- $C_2: x^2 = 2p_2y$
- (
- $p_2 > 0$
-) 均经过点
- $(4, 8)$
- , 则
- C_1
- 的焦点与
- C_2
- 的焦点之间的距离为 ()

A. 12 B. $4\sqrt{5}$ C. 6 D. $\frac{\sqrt{65}}{2}$

解析 D.

根据题意, 有

$$\begin{cases} 8^2 = 2p_1 \cdot 4, \\ 4^2 = 2p_2 \cdot 8, \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = 8, \\ p_2 = 1, \end{cases}$$

于是 C_1, C_2 的焦点分别是 $F_1(4, 0), F_2(0, \frac{1}{2})$, 因此所求距离为 $|F_1F_2| = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

6. 已知函数
- $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}$
- 的最大值为 1, 则
- $a =$
- ()

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

解析 B.

由 $f(x) \leq 1$ 可得 $a \geq 0$ 且

$$x + 2 \leq e^x + a \iff e^x - x \geq 2 - a,$$

且等号可以取得, 根据指数函数的基本放缩 $e^x \geq x+1$ 且等号仅当 $x=0$ 时取得, 可得 $a=1$.

7. 一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市, 以其独特的建筑格局和深远的历史文化闻名遐迩. 该塔群共有 108 座塔, 依山势自上而下排成 12 行, 将第 i 行中塔的座数记为 $a_i (i=1, 2, \dots, 12)$, 其中 $a_1=1$, $a_2=a_3=3$, $a_4=a_5=5$, 且 $a_6, a_7, \dots, a_{12}$ 是一个首项为 7, 公差为 2 的等差数列. 将 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ 分为 6 组, 每组 2 个数, 使得每组的 2 个数之和可构成一个项数为 6 且公差为 $d (d>0)$ 的等差数列, 则 $d=$ ()
- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

解析 B.

根据题意, 有

$$a_i: 1, 3, 3, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,$$

设将 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ 分为 6 组, 各组之和从小到大构成数列 $\{x_k\}_1^6$, 则 $x_k (k=1, 2, \dots, 6)$ 均为不小于 4 的偶数, 且

$$\sum_{k=1}^6 x_i = \sum_{i=1}^{12} a_i \implies 6x_1 + 15d = 108 \implies x_1 = 18 - \frac{5}{2}d.$$

由 x_1 是偶数可得 $4 \mid d$, 又 $x_1 \geq 4$, 进而 $d=4$. 经验证, 将 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ 如下分组:

$$(1, 7), (3, 9), (3, 13), (5, 15), (5, 19), (11, 17),$$

可以使得 $d=4$, 因此所求 d 的值为 4.

8. 设 $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{-2, -1, 1, 2\}, i=1, 2, 3\}$ 为空间中 64 个点构成的集合, 点 $P(1, 1, 1)$, 记样本空间 $\Omega = \mathbb{C}_U\{P\}$. 从 Ω 中随机取一个点, 定义随机变量 X 如下: 对 Ω 中的每个点 $A(x_1, x_2, x_3)$. 令 $X(A) = x_1 + x_2 + x_3$, 则 X 的数学期望为 ()
- A. $-\frac{1}{21}$ B. $-\frac{1}{63}$ C. 0 D. $\frac{1}{7}$

解析 A.

根据对称性, 有

$$\sum_{A \in U} X(A) = 0 \implies \sum_{A \in \Omega} X(A) + X(P) = 0 \iff \sum_{A \in \Omega} X(A) = -3,$$

于是 X 的数学期望

$$E(X) = \frac{\sum_{A \in \Omega} X(A)}{|\Omega|} = -\frac{1}{21}.$$

9. 设 $z=3+2i$, 则 ()
- A. $\bar{z}=3-2i$ B. $|z|=5$ C. $z^2=5+12i$ D. $\frac{z+3}{z-i} \in \mathbb{R}$

解析 ACD.

根据题意, 有

$$\bar{z}=3-2i, \quad |z|=\sqrt{13}, \quad z^2=5+12i, \quad \frac{z+3}{z-i} = \frac{6+2i}{3+i} = 2 \in \mathbb{R},$$

因此正确的选项为 ☒ A ☒ C ☒ D.

10. 在空间中, A, B 为两个定点, 动点 C 到直线 AB 的距离为 2, 动点 D 到直线 AB 的距离为 1. 若二面角 $C-AB-D$ 为 60° , 则 ()

- A. $\angle CAD \geq 60^\circ$
 B. $|CD| \geq \sqrt{3}$
 C. 当 $AB \perp CD$ 时, $CD \perp$ 平面 ABD
 D. 当 $AB \perp$ 平面 ACD 时, $AC \perp AD$

解析 BC.

设 C, D 在直线 AB 上的投影分别为 M, N , 则 $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{ND} \perp \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MC}$ 与 $\overrightarrow{ND}$ 的夹角为 60° .

对于选项 $\boxed{A}$, 有

$$\begin{aligned}\cos \angle CAD &= \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle \\ &= \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} \\ &= \frac{(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND})}{\sqrt{|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2} \cdot \sqrt{|\overrightarrow{AN}|^2 + |\overrightarrow{ND}|^2}} \\ &= \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{ND}}{\sqrt{|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2} \cdot \sqrt{|\overrightarrow{AN}|^2 + |\overrightarrow{ND}|^2}} \\ &= \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} + 1}{\sqrt{|\overrightarrow{AM}|^2 + 4} \cdot \sqrt{|\overrightarrow{AN}|^2 + 1}},\end{aligned}$$

当 $|\overrightarrow{AM}|, |\overrightarrow{AN}|$ 均趋于无穷大时, $\cos \angle CAD \rightarrow 1$; 当 $|\overrightarrow{MN}|$ 趋于无穷大, 且 A 在线段 MN 内部时, $\cos \angle CAD \rightarrow -1$; 因此选项错误;

对于选项 $\boxed{B}$, 有

$$|CD| = \sqrt{|\overrightarrow{MN}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2 + |\overrightarrow{ND}|^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{MC}| \cdot |\overrightarrow{ND}| \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{|\overrightarrow{MN}|^2 + 3} \geq \sqrt{3},$$

选项正确;

对于选项 $\boxed{C}$, 当 $AB \perp CD$ 时, 有 $M = N$, 因此 C 在平面 ABD 上的投影为 C 在直线 MD 上的投影, 进而 CD 与 ABD 所成角为 $\angle CDM$, 而 $|\overrightarrow{MC}| = 2$, $|\overrightarrow{MD}| = 1$, 于是 $\angle CDM$ 为直角, 选项正确;

对于选项 $\boxed{D}$, 当 $AB \perp$ 平面 ACD 时, $\angle CAD$ 为二面角 $C-AB-D$ 的平面角, 为 60° , 选项错误;

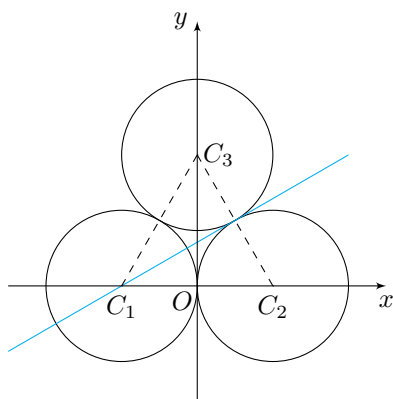
综上所述, 正确的选项为 $\boxed{B} \boxed{C}$.

11. 已知圆 $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$, 圆 $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$, 圆 $C_3: x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$, 直线 $l: y = kx + b$ 与 C_1, C_2, C_3 均有两个交点. 记 l 被 C_1, C_2, C_3 截得的弦长分别为 s_1, s_2, s_3 , 则 ()

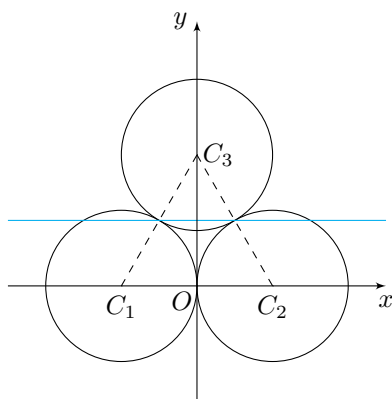
- A. k 可以取任意实数
 B. 满足 $s_1 = s_2 = s_3$ 的直线 l 共有 3 条
 C. 满足 $s_1 + s_2 + s_3 = 3$ 的直线 l 多于 3 条
 D. 当 $b = 0$ 时, $s_1 + s_2 + s_3$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

解析 BCD.

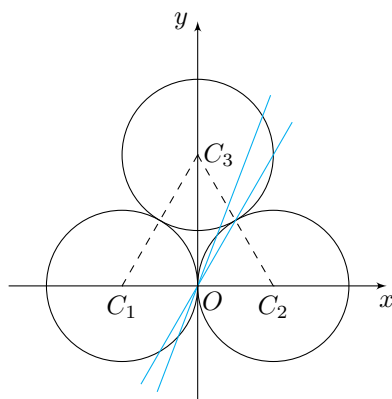
如图, 三个圆相互外切, 分别记切点为 P_{12}, P_{23}, P_{31} .



选项 A.



选项 B.



选项 CD.

对于选项 [A], 沿这三个切点中任一点的公切线方向的直线 l 不能同时与对应的两个圆同时相切, 如取切点 P_{23} , 则对应 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 此时直线 l 不可能同时与圆 C_2, C_3 相切, 选项错误;

对于选项 [B], 直线被半径相同的圆截得的弦长相等等价于圆心到直线的距离相等, 于是直线 l 为 $\triangle C_1 C_2 C_3$ 的中位线所在的直线, 共有 3 条, 选项正确;

对于选项 [C], 考虑过 P_{12} (即坐标原点 O) 的直线 $y = kx$, 此时

$$f(k) := s_1 + s_2 + s_3 = 2\sqrt{1 - \frac{k^2}{1+k^2}} + 2\sqrt{1 - \frac{k^2}{1+k^2}} + 2\sqrt{1 - \frac{3}{1+k^2}} = \frac{4 + 2\sqrt{k^2 - 2}}{\sqrt{1+k^2}},$$

当 $k^2 = 3$ 时, 有 $f(k) = 3$; 当 $k^2 = 6$ 时, 有 $f(k) = \frac{8}{\sqrt{7}} > 3$; 当 $k^2 \rightarrow +\infty$ 时, 有 $f(k) \rightarrow 2$, 于是满足条件的直线至少有 2 条, 结合对称性, 选项正确;

对于选项 [D], 当 $b = 0$ 时, 利用选项 [C] 的结论, 有

$$4 + 2\sqrt{k^2 - 2} \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{k^2 - 2} \leq \sqrt{\frac{16}{3}} + 4 \cdot \sqrt{1+k^2} \implies f(k) \leq \sqrt{\frac{16}{3}} + 4 = \frac{2\sqrt{21}}{3},$$

等号当 $\frac{4}{\sqrt{3}} : 2 = \sqrt{3} : \sqrt{k^2 - 2}$ 即 $k^2 = \frac{17}{4}$ 时取得, 因此选项正确;

综上所述, 正确的选项为 [B] [C] [D].

12. 双曲线 $5x^2 - 6y^2 = 1$ 的离心率为 _____.

解析 $\frac{\sqrt{66}}{6}$.

双曲线 $5x^2 - 6y^2 = 1$ 的离心率为 $\sqrt{1 + \frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{66}}{6}$.

13. 已知 $f(x) = 2\sin(ax + \theta)$ ($a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \theta < 2\pi$) 是偶函数, $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增, 则 $\theta =$ _____, $f(\frac{2\pi}{3}) =$ _____.

解析 $\frac{3\pi}{2}$; 1.

根据题意, 函数 $f(x)$ 的半周期 $\frac{\pi}{|a|}$ 不小于单调区间长度 $\frac{\pi}{2}$, 因此 $|a| \leq 2$, 又 $f(x)$ 的图象即 $y = 2\cos(ax)$ 的图象, 因此 $a = \pm 1, \pm 2$, 进而 $\theta = \frac{3\pi}{2}$, 且 $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$.

14. 设实数 q 满足: 存在数列 $\{a_n\}$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{3n} = n^2 + n$, 且 $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 q 的最大值为 _____.

解析 $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$.

根据题意, 有

$$a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = (n^2 + n) - ((n-1)^2 + (n-1)) = 2n,$$

连续 9 项 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+8}$ 中必然有连续 6 项为

$$a_{3m-2}, a_{3m-1}, a_{3m}, a_{3m+1}, a_{3m+2}, a_{3m+3},$$

于是

$$q^3 = \frac{a_{3m+1} + a_{3m+2} + a_{3m+3}}{a_{3m-2} + a_{3m-1} + a_{3m}} = \frac{2m+2}{2m} = 1 + \frac{1}{m}.$$

若 $m=1$, 则连续 9 项为 $a_1, a_2, \dots, a_9$, 而

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2, \quad a_4 + a_5 + a_6 = 4, \quad a_7 + a_8 + a_9 = 6,$$

不符合等比数列;

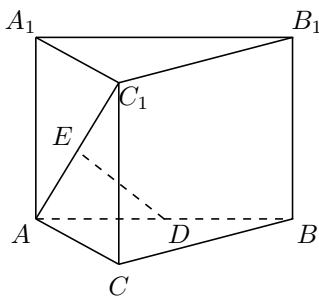
若 $m=2$, 则连续 9 项包含 $a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$, 且公比 $q = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, 分别利用 $a_4 + a_5 + a_6 = 4$ 和 $a_7 + a_8 + a_9 = 6$ 确定这 6 项, 进而令 $a_2 = \frac{a_4}{q^2}$, $a_3 = \frac{a_4}{q}$, $a_1 = 2 - a_2 - a_3$, $a_{10} = a_9 \cdot q$, $a_{11} = a_9 \cdot q^2$, $a_{12} = 8 - a_{10} - a_{11}$, 则 $a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 符合要求, 因此 q 的最大值为 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$.

备注 事实上, 有

$$\frac{a_4}{q} < a_5 < \frac{4}{3} < 2, \quad a_9 \cdot q < a_9 \cdot q^2 = \frac{3}{2}a_8 < \frac{3}{2} \cdot 2 < 4,$$

因此可以构造符合要求的正项数列.

15. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, D, E 分别为 AB, AC_1 的中点.



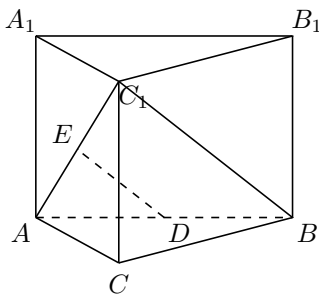
(1) 证明: $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 设 $CC_1 = 2$, 直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 45° , 求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离.

解析 (1) 略;

(2) 1.

(1) 连接 BC_1 , 则 DE 是 $\triangle ABC_1$ 中与 BC_1 平行的中位线, 因此 $DE \parallel BCC_1B_1$.



(2) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 有 $CC_1 \perp BC$, 又 $BC \perp AC$, 于是 $BC \perp ACC_1A_1$, 从而 B 在平面 ACC_1A_1 上的投影为 C . 由 $DE \parallel BC_1$ 可得 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角也为 45° , 因此 $\angle CC_1B = 45^\circ$, 进而 $BC = CC_1$, 因此

$$AC = BC = CC_1 = 2,$$

于是直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离

$$d(DE, BCC_1B_1) = d(D, BCC_1B_1) = \frac{1}{2}d(A, BCC_1B_1) = \frac{1}{2} \cdot AC = 1.$$

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求 $\cos A$;

(2) 设 D, E 两点满足: D 在 BA 的延长线上, $DE \parallel BC$, $AE \perp AC$. 若 $DE = \sqrt{6}$, 求 CE .

解析 (1) $\frac{1}{3}$;

(2) $3\sqrt{5}$.

(1) 根据余弦定理, 有

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B = 9 \implies AC = 3,$$

因此

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{1}{3}.$$

(2) 建立平面直角坐标系 $O-CD$, 则 $B(-\sqrt{3}, 0)$, $C(\sqrt{3}, 0)$, $A(0, \sqrt{6})$, 于是直线 $AE: y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{6}$, 而 $BA: y = \sqrt{2}x + \sqrt{6}$, 设 $E(x_0, y_0)$, 则

$$\begin{cases} y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_0 + \sqrt{6}, \\ y_0 = \sqrt{2}(x_0 - \sqrt{6}) + \sqrt{6}, \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = 2\sqrt{6}, \\ y_0 = 2\sqrt{3} + \sqrt{6}, \end{cases}$$

因此

$$CE = \sqrt{(2\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2} = 3\sqrt{5}.$$

17. 设整数 $N \geqslant 2$, 某同学用一个球进行投篮练习, 至多投篮 N 次. 当且仅当投中 1 次时或 N 次均未投中时, 停止练习. 设该同学每次投中的概率为 p ($0 < p < 1$), 各次投中与否相互独立. 记 X 为停止练习时该同学的投篮次数.

(1) 当 $N = 4$, $p = \frac{1}{3}$ 时, 求 X 的分布列:

(2) 设 k, m 均为自然数.

① 当 $k \leqslant N - 1$ 时, 求 $P(X > k)$:

② 当 $k + m \leqslant N - 1$ 时, 证明: $P(X > k + m \mid X > k) = P(X > m)$.

解析 (1) 略;

(2) ① $P(X > k) = (1 - p)^k$; ② 略.

(1) 根据题意, 有

$$P(X = k) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}, & k < N, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, & k = N, \end{cases}$$

于是

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

(2) ① 即求投篮 k 次仍未命中的概率, 于是 $P(X > k) = (1 - p)^k$;

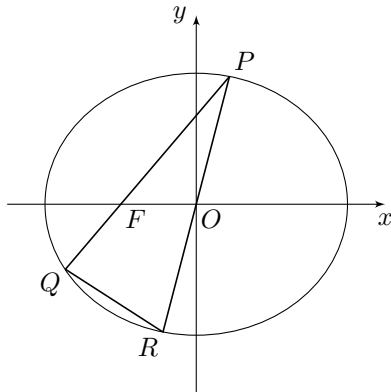
② 只需要证明 $k + m \leqslant N - 1$ 时, 有

$$P(X > k + m) = P(X > k) \cdot P(X > m) \iff (1 - p)^{k+m} = (1 - p)^k \cdot (1 - p)^m,$$

命题得证.

备注 该性质称为几何分布 (本题为截断几何分布) 的无记忆性, 表明在已经投篮 k 次未停止的条件下, 后续投篮的概率分布与从头开始投篮 m 次的概率分布完全相同.

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 $F(-1, 0)$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.



(1) 求 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, 其中 Q 在第三象限, 直线 PO 与 C 的另一个交点为 R .

① 若 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积 3 倍, 求 l 的方程;

② 求 $\tan \angle PQR$ 的最小值.

解析 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) ① $\sqrt{3}x - 2y + \sqrt{5} = 0$; ② $4\sqrt{3}$.

(1) 根据题意, 有

$$\begin{cases} c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1, \\ \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{2}, \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 3, \end{cases}$$

于是所求 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 根据题意, 有 $\triangle PQR$ 与 $\triangle PFO$ 的面积之比

$$\frac{[\triangle PQR]}{[\triangle PFO]} = \frac{|PQ| \cdot |PR|}{|PF| \cdot |PO|} \implies 2 \cdot \frac{|PQ|}{|PF|} = 3 \implies |PF| = 2|QF|,$$

设直线 l 的倾斜角为 θ , 则根据焦半径公式, 有

$$\frac{b^2}{a - c \cos \theta} = \frac{2b^2}{a + c \cos \theta} \implies \cos \theta = \frac{2}{3},$$

于是 $\tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 因此所求直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x - 2y + \sqrt{5} = 0$.

② 由于 P, R 关于椭圆中心对称, 因此根据椭圆的垂径定理, 直线 QP, QR 的斜率之积为 $-\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4}$, 设直线 PQ 的斜率为 k ($k > 0$), 则直线 QR 的斜率为 $-\frac{3}{4k}$, 于是

$$\tan \angle PQR = \left| \frac{k - (-\frac{3}{4k})}{1 + (-\frac{3}{4})} \right| = 4k + \frac{3}{k} \geq 4\sqrt{3},$$

等号当 $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取得, 因此 $\tan \angle PQR$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$.

19. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$. 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 定义集合 $D(x_0) = \{d \in \mathbb{R} \mid f(x_0 + d) > f(x_0)\}$.

(1) 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 1 - x$, 求 $D(-1)$;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, $f(x_1) \leq f(x_2)$, 且 $x_1 x_2 \neq 0$, 证明: $D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

(3) 设 $f(x)$ 满足:

条件一 若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

条件二 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(0)$.

① 证明: $f(0) \geq 1$;

② 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增.

解析 (1) $\{d \mid 0 < d < \frac{3}{2}\}$;

(2) 略;

(3) 略.

(1) 根据题意, 有

$$\begin{aligned} D(-1) &= \{d \in \mathbb{R} \mid f(-1+d) > f(-1)\} \\ &= \left\{d \in \mathbb{R} \mid f(d-1) > \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{d \mid -1 < d-1 < \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{d \mid 0 < d < \frac{3}{2}\right\}. \end{aligned}$$

(2) 根据函数 $f(x)$ 是奇函数, 有

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -2^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

于是

$$D(x_0) = \begin{cases} (0, -x_0), & x_0 < 0, \\ (-\infty, 0), & x_0 = 0, \\ (-\infty, -x_0] \cup (0, +\infty), & x_0 > 0. \end{cases}$$

而由 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 且 $x_1 x_2 \neq 0$, 有以下情形.

情形一 x_1, x_2 在原点同侧, 即 $x_1 \leq x_2 < 0$ 或 $0 < x_1 \leq x_2$. 此时 $-x_1 \geq -x_2$, 于是 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

情形二 x_1, x_2 在原点两侧, 即 $x_2 < 0 < x_1$. 此时

$$D(x_2) \subseteq (0, +\infty) \subseteq D(x_1),$$

命题成立.

综上所述, 命题得证.

(3) 根据当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$ 可得当 $x_0 < 0$ 时, 有

$$(0, -x_0) \subseteq D(x_0) \subseteq (0, +\infty).$$

根据条件二, 有 $(0, 1) \cap D(0) = \emptyset$.

① 用反证法, 假设 $f(0) < 1$, 则存在 $-1 < x_0 < 0$ 使得 $f(0) < f(x_0)$, 于是根据条件一^[1], 有

$$(0, -x_0) \subseteq D(x_0) \subseteq D(0) \implies (0, -x_0) \subseteq ((0, 1) \cap D(0)),$$

与 $(0, 1) \cap D(0) = \emptyset$ 矛盾, 命题得证.

② 接下来证明

引理 当 $x > 0$ 时, $f(x) \leq 0$.

引理的证明 用反证法, 假设存在 $x_1 > 0$ 且 $f(x_1) > 0$, 则存在 $x_0 < 0$, 使得 $f(x_0) < f(x_1)$, 根据条件一^[2], 有

$$D(x_1) \subseteq D(x_0) \subseteq (0, +\infty),$$

而 $-x_1 < 0$, 于是 $-x_1 \notin D(x_1)$, 从而

$$f(x_1) \geq f(x_1 + (-x_1)) = f(0),$$

因此 $x_1 \geq 1$ (否则与条件二矛盾), 从而当 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) \leq 0$, 且此时利用 ① 的结论, 有

$$f(x_1) \geq f(0) \geq 1,$$

于是^[3] 对任意 $s, t < 0$ 且 $s < t$, 有

$$f(s) < f(t) < f(x_1) \implies D(x_1) \subseteq D(t) \subseteq D(s),$$

由 $f(t) < f(x_1)$ 可得 $x_1 - t \in D(t)$, 于是 $x_1 - t \in D(s)$, 进而

$$f(s + (x_1 - t)) > f(s) > 0,$$

因此可得当 $x < x_1$ 时, 有 $f(x) > 0$, 这与当 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) \leq 0$ 矛盾.

综上所述, 引理得证.

利用引理完成证明 根据引理, 可得当 $x_0 < 0$ 时, 有

$$D(x_0) = (0, -x_0),$$

而当 $x_1 > 0$ 时, 有

$$f(x_1) < 0 < f(x_0) \implies D(x_0) \subseteq D(x_1) \implies (0, -x_0) \subseteq D(x_1),$$

因此若 $0 < x_1 < x_2$, 取 $-x_0 > x_2 - x_1$, 则有 $x_2 - x_1 \in D(x_1)$, 从而

$$f(x_1 + (x_2 - x_1)) > f(x_1) \implies f(x_2) > f(x_1),$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

备注 [1] 为了利用有关 $f(0)$ 的条件, 势必要探索 $D(0)$.

[2] 为了利用有关 $f(x_1)$ 的条件, 继续探索 $D(x_1)$; 所有关于函数值的条件, 都需要转化为关于集合 D 的条件来使用.

[3] 条件是 $f(x_1) \geq 1$, 而有个“死亡区间” $(0, 1)$ (该区间上函数值非正), 想法是将 x_1 拉扯到死亡区间上, 而考虑 $f(x_0) < f(x_1)$ 即

$$f(x_0 + (x_1 - x_0)) > f(x_0) \implies x_1 - x_0 \in D(x_0),$$

如果能将其中的 x_0 替换成更小的数，就可以将 x_1 推向预设的死亡区间，因此利用条件一的传递性，取 $x_2 < x_0$ ，此时由于 $D(x_2)$ 包含 $D(x_0)$ ，于是

$$f(x_2 + (x_1 - x_0)) > f(x_2) > 0,$$

整理即得.

[4] 区间 $D(x_0)$ 的意义是以 x_0 为基准点观测函数 $f(x)$ 的图像在 $y = f(x_0)$ 上方的部分对应的区间，因此若 $f(x_0) = f(x_1)$ ，则上方部分不变，此时基准点的变化通常会对区间造成影响（除非函数是周期的，但题设把这条路堵死了），因此函数在分段时，层与层之间不会有函数值重合.